УДК 539.3:534.1

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ПРУЖНИМ КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВИ ГЛАДКОГО КОНТАКТУ

Ярослав ЗАМКІН

Здобувач вищої освіти спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

Миколаївський національний аграрний університет

м. Миколаїв, Україна

Анотація: *Розглянуто застосування аналітико-числового методу розв'язання осесиметричної задачі про взаємодію гармонічних хвиль із тонким пружним круговим включенням, розташованим у необмеженому пружному ізотропному тілі, за умови гладкого контакту. Проведено узагальнення математичного опису для трьох видів хвильового збудження (плоскої поздовжньої, циліндричної поздовжньої та циліндричної поперечної хвиль). Задачу зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, для розв'язання якої реалізовано обчислювальний алгоритм із використанням поліномів Лежандра та квадратурних формул Гаусса. Здійснено аналіз частотних залежностей коефіцієнтів інтенсивності напружень поблизу краю включення для різних співвідношень пружних властивостей.*

Ключові слова: *пружне тіло, тонке кругове включення, гладкий контакт, гармонічні хвилі, осесиметричні коливання, напружено-деформований стан, коефіцієнт інтенсивності напружень, інтегральні рівняння Фредгольма, поліноми Лежандра.*

Міцність і довговічність деталей машин та елементів конструкцій істотно залежать від наявності в них дефектів у вигляді тонких сторонніх включень – зокрема тонких дисків.

Визначення напруженого стану поблизу таких включень за динамічного навантаження є складною науковою задачею. Оскільки в більшості практичних випадків включення мають більшу жорсткість, ніж матриця, у літературі

поширений підхід, який розглядає включення як абсолютно жорстке. Задачі з урахуванням пружності включення за умови гладкого контакту (без зчеплення по дотичних напруженнях) детально досліджено у працях Л. В. Вахоніної [1]. У цій роботі проведено систематизацію та уніфікацію математичної моделі, а також реалізовано чисельний розрахунок частотних залежностей коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

Розглядається необмежене пружне ізотропне тіло (матриця), що містить включення у вигляді пружного диска товщини h і радіуса a ($h \ll a$). У циліндричній системі координат (r,θ,z) серединна площина включення в площині $z=0$ займає круг $r \le a$. На включення діють хвилі, що поширюються в матриці. Два з трьох варіантів збудження – циліндричні хвилі розширення-стиснення та зсуву – подано єдиним узагальненим виразом шляхом введення індексу $k=1$ (поздовжня хвиля, скалярний потенціал φ_0) та $k=2$ (хвиля зсуву, потенціал $\psi 0$):

$$\varphi_0^{(k)}(r,z,t) = A_k J_0(\beta_k r) e^{-i\alpha_k z} e^{-i\omega t}, \quad \psi_0^{(k)}(r,z,t) = B_k J_0(\beta_k r) e^{-i\alpha_k z} e^{-i\omega t} \ (k=1,2) \qquad (1)$$

де A_k, B_k – амплітуди; $J_0(\beta_k r)$ – функція Бесселя нульового порядку; β_k – радіальне хвильове число.

Відповідні компоненти переміщень записуються узагальнено:

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r,z) &= \left[\delta_{1k}\beta_1 A_1 J_1(\beta_1 r) - \delta_{2k} i\alpha_2 B_2 J_1(\beta_2 r)\right] e^{-i\alpha_k z} \\ u_z^{(k)}(r,z) &= \left[-\delta_{1k} i\alpha_1 A_1 J_0(\beta_1 r) + \delta_{2k}\beta_2 B_2 J_0(\beta_2 r)\right] e^{-i\alpha_k z} \end{aligned} \qquad (2)$$

де δ_{1k} – символ Кронекера.

Третій варіант навантаження – плоска поздовжня хвиля з фронтом, паралельним площині включення:

$$\varphi_0^{(3)}(z,t) = A_3 e^{-i\alpha_1 z} e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

Хвильові параметри вводяться співвідношеннями:

$$\alpha_k = \sqrt{k_k^2 - \beta_k^2}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} \quad (k=1,2) \qquad (4)$$

де c_1, c_2 – швидкості поздовжніх і поперечних хвиль.

Для формування крайової задачі нормальне напруження і радіальне переміщення зазнають розриву, для яких введено стрибки σ_z та u_r. Відбита частина переміщень і напружень подається у вигляді:

$$u_p(r,z) = \sum_{i=1,4} \int_0^a \chi_i(\xi) \mathrm{g}_{pi}(\mathrm{r,z},\xi)\xi \cdot \mathrm{d},\ p = 2,3 \qquad (5)$$

де p нумерує компоненти переміщення, $a_i = 1$ відповідає стрибкам σ_z та u_r. Задача зводиться до системи інтегральних рівнянь

Фредгольма другого роду відносно вектор-функції $X(y) = (x_1(y), x_2(y))^T$:

$$X(y) + \int_{-1}^{1} K(y,\xi) X(\xi) d\xi = H(y), \quad y \in [-1,1] \qquad (6)$$

де $K(y,\xi)$ – регулярна 2×2-матриця ядер. Зауважимо, що інтегрування у формулі (6) виконується на інтервалі [−1, 1], що відповідає вихідній постановці Л. В. Вахоніної [1].

Наближений розв’язок шукається шляхом розкладу за поліномами Лежандра *P(y)* із застосуванням квадратурних формул Гаусса.

Для оцінки концентрації напружень обчислюються безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) *N*:

$$K_j = \mu_1 \sqrt{(2aN_j)},\ N_j = \sum_{m=1}^{n} C_m G_j(y_m), \quad j = 1,3 \qquad (7)$$

За даними обчислювального аналізу [1], досліджено вплив співвідношення пружних модулів матриці та включення (E_2 / E_1) на частотні залежності КІН.

Зі зменшенням жорсткості включення залежності набувають складного немонотонного характеру з кількома резонансними максимумами. Зокрема, для пар матеріалів «сталеве включення – бетонна / свинцева / мідна матриця» врахування пружності включення суттєво змінює амплітуду КІН порівняно з моделлю абсолютно жорсткого диска.

У роботі проведено систематизацію та уніфіковано математичний опис осесиметричної задачі про взаємодію пружних хвиль із тонким пружним включенням за умови гладкого контакту. Відновлено математичний апарат, зокрема виправлено межі інтегрування у підсумковій системі Фредгольма (6) та коректно записано хвильові потенціали й переміщення (1)–(3). Чисельний

аналіз підтверджує критичну важливість урахування скінченної жорсткості включення під час оцінки міцності елементів конструкцій.

Список використаних джерел

1. Vakhonina L. Interaction of harmonic waves with a thin elastic circular inclusion under conditions of smooth contact // Вісник аграрної науки Причорномор'я. – 2016. – Вип. 3 (91). – С. 145–158.

2. Vakhonina L. V., Popov V. G. Interaction of elastic waves with a thin rigid circular inclusion in the case of smooth contact // Теор. і прикл. механіка. – 2003. – Вип. 38. – С. 158–166.

3. Markov A., Levin V., Markov M. Effects of the orientation distribution of thin soft inclusions on the effective elastic moduli of microheterogeneous material // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 194. – P. 103975.

4. Piskozub Y., Piskozub L., Sulym H. Effect of the transverse functional gradient of the thin interfacial inclusion material on the stress distribution of the bimaterial under longitudinal shear // Materials. – 2022. – Vol. 15, no. 23. – P. 8591.

Abstract: *The application of an analytical-numerical method for solving the axisymmetric problem of harmonic wave interaction with a thin elastic circular inclusion under smooth contact conditions is considered. The mathematical formulation for three types of wave excitation is unified. The problem is reduced to a system of Fredholm integral equations of the second kind with corrected integration limits from -1 to 1, solved via Legendre polynomials and Gauss quadratures.*

Keywords: *elastic body, thin circular inclusion, smooth contact, harmonic waves, stress intensity factor, Fredholm integral equations.*

Науковий керівник:
Вахоніна Л.В.
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Миколаївський національний аграрний університет