МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Курс лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Облік і оподаткування» та
ОПП «Фінанси, банківська справа та страхування»
спеціальностей D1 «Облік і оподаткування» та
D2 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок»
денної та заочної форми здобуття вищої освіти

МИКОЛАЇВ – 2026

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 3 від 16.11.2026р.)

Укладач:

В.В. Поживатенко – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензенти:

Передерій В.І. — д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерних технологій та інформаційної безпеки Національного університету кораблебудування ім. адмірала Макарова.

Пархоменко О.Ю. — к. ф.-м. н., доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій Миколаївського національного аграрного університету.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2026

ЗМІСТ

1 Матриці **4**

2 Дії з матрицями та їхні властивості **4**
2.1 Основні означення 4
2.2 Дії з матрицями 5
2.3 Деякі основні типи матриць 6
2.3.1 Діагональна матриця 7
2.3.2 Зворотна матриця 7
2.3.3 Транспонована матриця 7

3 Детермінант **8**
3.1 Означення 8
3.2 Способи обчислення 10

4 Зворотна матриця **12**
4.1 Означення 12
4.2 Приклад 13

5 Системи лінійних рівнянь **13**
5.1 Матрична форма запису 13
5.2 Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою зворотних матриць 14
5.3 Приклад 15

6 Метод Крамера **15**
6.1 Теорема Крамера 15
6.2 Приклади застосування 16

7 Метод Гаусса **17**
7.1 Розрахункова схема 17
7.2 Приклад 18

8 Ранг матриці **22**
8.1 Означення 22
8.2 Теорема Кронекера – Капеллі 24
8.3 Приклади 25

9 Метод Жордана – Гаусса **28**
9.1 Розв'язання систем лінійних рівнянь
методом Жордана – Гаусса 28
9.2 Приклад 28

Література **30**

1 Матриці

Матрицею називається прямокутна таблиця, що складається з чисел і містить деяку кількість m рядків і деяку кількість n стовпчиків. Матриця із m рядків і n стовпчиків записується у вигляді прямокутної таблиці:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Можна також використовувати позначенння

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

або

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Матриці позначають великими латинськими літерами або використовують відповідні індексні позначення: $A = (a_{ij}) = ||a_{ij}|| = [a_{ij}]$, $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці, причому перший індекс i позначає номер рядка, а другий індекс j – номер стовпчика. Якщо $m = n$, то матриця називається квадратною, а число $m = n$ – її порядком. Тоді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Якщо матриця квадратна, то використовують поняття головної та бічної діагоналей. Головною діагоналлю матриці називається діагональ $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, що йде з лівого верхнього кута цієї матриці у правий нижній. Бічною діагоналлю матриці називається діагональ $a_{n1}a_{(n-1)2}\dots a_{1n}$, що йде з лівого нижнього кута у правий верхній кут.

2 Дії з матрицями та їхні властивості

2.1 Основні означення

Матрицям A, B і C з елементами a_{ij}, b_{ij} і c_{ij}, відповідно, притаманні наступні правила.

Рівність матриць. Матриці A і B рівні тоді і лише тоді, коли $a_{ij} = b_{ij}$ при будь-яких i і j (при цьому припускається, що A і B мають однакове число рядків і однакову кількість стовпчиків).

Додавання матриць. $A + B = C$ у тому і лише тому випадку, якщо $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ при будь-яких i і j. Це значить, що $A + B = B + A$, тобто додавання має властивість комутативності. Окрім того, виконується і асоціативний закон: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Множення (на скаляр). Під множенням матриці A на скаляр α будемо розуміти операцію $\alpha A = (\alpha A)$, де елементами матриці αA служать αa_{ij}, інакше кажучи, кожний елемент матриці A домножується на скалярний множник. У відповідності з цим множення на скаляр також комутативне, $\alpha A = A\alpha$.

Добуток матриць.

Матриця C є добутком матриць A і B

$$AB = C \tag{5}$$

у тому і лише тому випадку, якщо $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$.

Тобто елемент матриці C з індексом ij утворюється як скалярний добуток i-го рядка матриці A з j-м стовпчиком матриці B. При цьому необхідно, щоб число стовпчиків матриці A співпадало з числом рядків матриці B.

За винятком спеціальних випадків, операція множення матриць некомутативна

$$AB \neq BA. \tag{6}$$

Комутацію позначають квадратними дужками: $[A,\ B] = A\ B$ - $B\ A$. Якщо матриці комутують, то $[A,\ B] = 0$.

Множення матриць задовільняє асоціативному закону:

$$(AB)C = A(BC), \tag{7}$$

а також і дистрибутивному закону

$$A(B + C) = AB + AC. \tag{8}$$

2.2 Дії з матрицями

Додавання матриць. За означенням маємо

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) & \dots & (a_{2n} + b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}). \end{pmatrix}.$$

Різницею двох матриць A і B однакових порядків m і n називають матрицю C тих самих порядків m і n, яка в сумі з матрицею B дає матрицю A. Для позначення різниці двох матриць використовують запис: $C = A - B$. Різниця двох матриць може бути одержана як $C = A + (-1)B$.

Добуток матриць. Найпростішим прикладом може бути перемноження двох квадратних матриць другого порядку:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}). \end{pmatrix}.$$

Той факт, що множення може бути не комутативним проіллюструємо теж найпростішим прикладом перемноження двох квадратних матриць другого порядку

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді одержуємо добутки

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Деякі основні типи матриць

Якщо матриця містить один стовпчик і n рядків, вона називається вектор-стовпчиком $\{x\}$ з компонентами x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогічно, якщо матриця складається з одного рядка, в якому міститься n елементів, вона називається вектор-рядком $[x]$ з компонентами x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо A є квадратною $n \times n$-матрицею і при цьому задані n-компонентний вектор-стовпчик $\{x\}$ і n-компонентний вектор-рядок $[x]$, то $A\{x\}$ і $[x]A$ визначені рівнянням (5), а $A[x]$ і $\{x\}A$ не мають сенсу.

Одинична матриця

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{9}$$

має наступні властивості $IA = AI = A$ для будь-яких A.

Нульова матриця

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{10}$$

відповідно задовільняє $OA = AO = O$ для будь-яких A. В результаті множення двох ненульових матриць іноді можна одержати нульову матрицю.

2.3.1 Діагональна матриця

Важливий спеціальний випадок складають матриці, у яких всі ненульові елементи розташовані на діагоналі матриці, тобто ненульовими елементами є лише елементи вигляду a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$. При $n = 4$, наприклад, маємо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Відповідно всі недіагональні елементи таких матриць дорівнюють нулеві. Важлива властивість діагональних матриць полягає в тому, що вони комутують одна з одною, тобто, якщо A і B – діагональні матриці, то $AB = BA$.

2.3.2 Зворотна матриця

Зворотню матрицю визначають формулою

$$\{x\} = A^{-1}\{x'\}. \tag{12}$$

Матриця A^{-1} описує зворотний поворот, визначений матрицею A, і повертає координатну систему в її початкове положення. Далі, враховуючи $\{x'\} = A\{x\}$, можна одержати

$$\{x\} = A^{-1}A\{x\}. \tag{13}$$

Оскільки $\{x\}$ довільний, то

$$A^{-1}A = I. \tag{14}$$

Аналогічно

$$AA^{-1} = I. \tag{15}$$

2.3.3 Транспонована матриця

Введемо нову матрицю A, таку, що

$$a_{ij}^T = a_{ji}. \tag{16}$$

Складена з елементів a_{ji} матриця A^T називається транспонованою. Вона відрізняється від матриці A заміною рядків на стовпці.

Необхідні і достатні умови існування зворотної матриці полягають у тому, щоб вихідна матриця була квадратною $n \times n$-матрицею і мала визначник відмінний від нуля.

Розглянемо $(ST)^{-1}$, де ST – матриця, що має зворотну. Тоді маємо

$$(ST)(ST)^{-1} = I. \tag{17}$$

Для виразу $(ST)^T$ перетворення краще проводити в компонентному представленні. Згідно визначення транспонування

$$u_{ik} = \sum_j s_{ij} t_{jk} = \sum_j t^T_{kj} s^T_{ji}, \tag{18}$$

але

$$u_{ik} = u^T_{ki}, \tag{19}$$

тому попереднє рівняння можна записати у вигляді

$$(ST)^T = T^T S^T. \tag{20}$$

Отже, в результаті транспонування добутку двох матриць виходить добуток транспонованих матриць, що перемножуються в зворотньому напрямку.

Для визначення властивостей симетрії користуються транспонованою матрицею. Якщо

$$A = A^T, \qquad \text{тобто } a_{ij} = a_{ji}, \tag{21}$$

то матриця називається симетричною. Якщо ж

$$A = -A^T, \qquad \text{тобто } a_{ij} = -a_{ji}, \tag{22}$$

то вона називається антисиметричною і її діагональні елементи дорівнюють нулю. Будь-яку квадратну матрицю можна записати у вигляді суми симетричної і антисиметричної матриці:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{23}$$

Тут матриця $A + A^T$ симетрична, а матриця $A - A^T$ антисиметрична.

3 Детермінант

3.1 Означення

Детермінант (визначник) представляється у вигляді квадратної таблиці чисел або функцій, що складається з n рядків і n стовпчиків

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Величина n називається порядком визначника. Обчислення детермінанту відбувається за формулою

$$\Delta = \sum_{i,j,k,\ldots} \delta_{ijk\ldots} a_i b_j c_k \ldots, \tag{25}$$

вважаючи, що коефіцієнт $\delta_{ijk\ldots}$ дорівнює $+1$ для парного числа перестанок індексів $(1, 2, 3, \ldots, n)$, -1 для непарного числа перестановок і нулю у випадку повторення будь-яких двох індексів. Зокрема, для детермінанту другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{26}$$

рівняння (25) дає

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1, \tag{27}$$

а для детермінанту третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{28}$$

рівняння (25) дає

$$\begin{aligned} \Delta = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - \\ - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned} \tag{29}$$

і так далі.

Рівняння (29) можна переписати у вигляді розкладення:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Визначник n-го порядку можна представити у вигляді лінійної комбінації добутків елементів будь-якого рядка (або будь-якого стовпчика) і визначників $(n-1)$-го порядку, утворених викреслюванням i-го рядка та j-го стовпчика, на перетині яких стоїть елемент a_{ij} визначника. Одержаний таким чином детермінант $(n-1)$-го порядку називають мінором і позначають M_{ij}. Мінор, що взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, називать алгебраїчним доповненням до елементу, який знаходиться на перетині a_{ij}. Якщо позначити його через A_{ij}, то можна рівняння (30) переписати, наприклад, як

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_i M_{i1} = \sum_{i=1}^{3} a_i A_{i1}. \tag{31}$$

Так як в цій формулі $j = 1$, то розкладення проведене по першому стовпчику.

Детермінант змінює знак на зворотний, якщо змінити місцями будь-які два рядки або будь-які два стовпчика – це властивість антисиметричності.

Мають місце наступні твердження: 1) визначник з двома рівними рядками (стовпчиками) дорівнює нулю; 2) якщо кожний елемент в рядку (стовпчику) дорівнює нулю, то детермінант також дорівнює нулю; 3) якщо всі елементи рядка (стовпчика) домножити на деяку сталу, то весь визначник домножиться на ту ж саму сталу; 4) величина детермінанту не зміниться, якщо до елементів одного з його рядків (стовпчиків) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпчика), домножені на деяку сталу. Дійсно маємо

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{32}$$

Скористаємося розкладенням по першому стовпчику

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{33}$$

На підставі властивості антисиметрії другий визначник в правій частині дорівнює нулю. Із властивості антисиметрії і властивості 3 витікає, що визначник дорівнює нулю, якщо два його будь-які рядки або стовпчика пропорційні. Це доводить співвідношення (32).

3.2 Способи обчислення

Для практичного використання зручно представити формули для розрахунків визначників другого та третього порядків в двоіндексному вигляді, як це було і у випадку з матрицями, де перший індекс позначає рядок, а другий – стовпчик. Зокрема, для детермінанту другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{34}$$

і маємо

$$\Delta = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}, \tag{35}$$

а для детермінанту третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{36}$$

і маємо

$$\begin{aligned} \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{37}$$

Для того, щоб запам'ятати формулу для розрахунку визначника третього порядку зручно використовувати геометричне зображення. На Рис. 3.1 зображена схема так званих трикутників, яка допомогає запам'ятати цю формулу (ті доданки, що мають на рисунку лінії палельні до головної діагоналі беруться зі знаком плюс, до бічної діагоналі – зі знаком мінус).

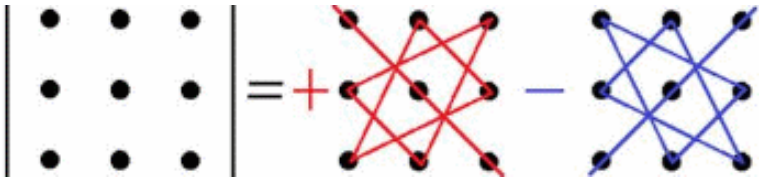


Рис. 3.1

На Рис. 3.2 представлений метод (правило) Саррюса (іноді і перший метод називають так само). Два перших стовпчики дописані знов праворуч і всі трикутники перетворюються в лінії. Можна також дописати знизу два перших рядки. Плюси і мінуси вказують знаки перед відповідними доданками.

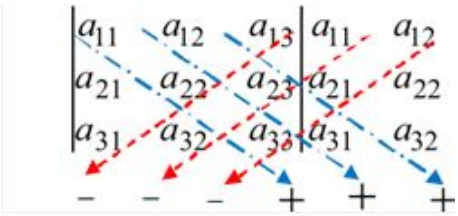


Рис. 3.2

Для визначників більш вищих порядків використовують інші методи. По-перше, нагадаємо, що можна розкласти визначник за будь-яким рядком або стовпчиком. По-друге, якщо перетвореннями (відповідними лінійними комбінаціями рядків або стовчиків) зробити так, щоб в якомусь рядку або стовпчику залишився один ненульовий елемент, то далі все зводиться до обчислення визначника на одиницю меншого порядку. По-третє, якщо привести матрицю до трикутного вигляду, коли під або над головною діагоналлю всі елементи нульові, то визначник дорівнюватиме добутку елементів головної діагоналі.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha \cdot \sin\alpha - (-\cos\alpha) \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 8 \cdot 7 - 6 \cdot 4 \cdot 7 - 5 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$= 72 + 18 + 280 - 168 - 135 - 16 = 370 - 319 = 51.$$

4 Зворотна матриця

4.1 Означення

Нехай A – квадратна матриця n-го порядка, а I – одинична матриця того ж порядку. Матриця B називається правою зворотною по відношенню до матриці A, якщо $AB = I$. Матриця C називається лівою зворотною по відношенню до матриці A, якщо $CA = I$. Так як обидві матриці A і I є квадратними матрицями порядка n, то матриці B і C (при умові, що вони існують) також є квадратними матрицями порядка n.

Переконаємось у тому, що якщо обидві матриці B і C існують, то вони співпадають між собою. Справді, на підставі рівностей

$$AI = IA = A, \tag{38}$$

співвідношень $AB = I$, $CA = I$ та сполучної властивості $(C(AB) = (CA)B)$ добутку матриць одержимо

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$$

Теорема. Для того щоб для матриці A існували ліва і права зворотні матриці, необхідно і достатньо, щоб визначник $\det A$ матриці A був відмінним від нуля.

Доведення. 1) *Необхідність.* Якщо для матриці A існує хоча б одна зі зворотних матриць, наприклад B, то зі співвідношення $A \cdot B = I$ ми одержимо, що $\det A \cdot \det B = \det I = 1$, звідки витікає, що $\det A \neq 0$.

2) *Достатність.* Нехай визначник $\Delta = \det A$ відмінний від нуля. Позначимо символом A_{ij} алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A і складемо матрицю B, в i-ому рядку якої стоять алгебраїчні доповнення i-ого стовпчика матриці A, що поділені на величину визначника Δ:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Переконаємося, що ця матриця B є як правою, так і лівою зворотньою по відношенню до матриці A. Достатньо довести, що обидва добутки AB та BA є одиничною матрицею. Для цього достатньо помітити, що у обидвох добутків будь-який елемент, що не лежить на головній діагоналі, дорівнює нулю, бо після виносу множника $1/\Delta$ цей елемент дорівнює сумі добутків елементів одного рядка (або одного стовпчика) на відповідні алгебраїчні доповнення іншого рядка (або іншого стовпчика). Що ж стосується елементів, що лежать на головній

діагоналі, то у обидвох добутків AB та BA всі такі елементи дорівнюють одиниці через те, що сума добутків елементів і відповідних алгебраїчних доповнень одного рядка (одного стовпчика) дорівнює визначнику. Теорему доведено.

Зауваження 1. Квадратну матрицю A, визначник $\det A$ якої відмінний від нуля, прийнято називати *невиродженою*.

Зауваження 2. Далі можна опускати терміни "ліва" і "права" і говорити просто про матрицю B, зворотню по відношенню до невиродженої матриці A і обумовленою співвідношеннями $AB = BA = I$. Очевидно також, що властивість бути зворотною матрицею взаємно у тому сенсі, що якщо B є зворотною для A, то A є зворотною для B. Матрицю, зворотну до матриці A, далі будемо позначати символом A^{-1}.

4.2 Приклад

Знайдемо матрицю, що зворотна до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2.$$

Алгебраїчні доповнення її елементів:

$$A_{11} = 3, \quad A_{12} = -4, \quad A_{21} = -1, \quad A_{22} = 2.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Системи лінійних рівнянь

5.1 Матрична форма запису

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_1, x_2,. . . ,x_n:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = f_1, \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = f_m. \end{cases} \tag{40}$$

Тут a_{ik} – *коефіцієнти при невідомих*, f_i – *вільні члени* ($i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$). Прямокутна таблиця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складена з коефіцієнтів при невідомих, називається *матрицею системи.* В цій матриці m рядків і n стовпчиків. Якщо до матриці системи додати стовпчик вільних членів, то одержимо таблицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix},$$

яка називається *розширеною матрицею системи.*

Розв'язком системи називається така сукупність значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при підстановці якої в (40) всі рівняння системи обертаються у тотожності. Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо розв'язку системи не існує. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків декілька. Дві системи з одним і тим самим набором невідомих називаються *рівносильними* в наступних випадках:

а) якщо кожний розв'язок першої системи є розв'язком другої, і навпаки;

б) якщо обидві системи несумісні.

Рівносильні системи мусять мати однакові набори невідомих, але кількість рівнянь в них може і не співпадати.

Для розв'язку системи її зазвичай перетворюють у більш просту. При цьому можна застосовувати лише такі перетворення, які переводять систему в рівносильну. До таких, зокрема, відносяться:

1) обмін місцями двох рівнянь в системі;

2) множення рівняння на будь-яке число, що не дорівнює нулю;

3) додавання до одного рівняння іншого, що домножене попередньо на довільне число.

Ці перетворення називаються *елементарними.*

5.2 Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою зворотних матриць

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими. Запишемо її в матричному вигляді:

$$AX = F. \tag{41}$$

Будемо вважати, що визначник матриці A не дорівнює нулю. Тоді буде існувати єдина матриця A^{-1}, зворотна до матриці A. Домножимо обидві частини рівності (41) зліва на A^{-1}:

$$X = A^{-1}F. \tag{42}$$

Отже, якщо рівняння (41) має розв'язок, то він виражається формулою (42) і є єдиним.

5.3 Приклад

Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2\,x_1 + x_2 = 4, \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 = 2. \end{cases} \tag{43}$$

Матриця цієї системи має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Обернена матриця до неї нам відома з попередньої лекції:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді за формулою (3) знаходимо

$$X = A^{-1}F = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 1 \\ -8 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Тобто

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -6.$$

6 Метод Крамера

6.1 Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = f_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = f_n. \end{cases} \tag{44}$$

Матриця такої системи буде квадратною. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що відповідає матриці системи, називається *визначником системи.*

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи (44) не рівний нулю, то система має єдиний розв'язок. Він визначається за формулами

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{45}$$

де Δ_k – визначник, що одержують із визначника Δ заміною елементів k-го стовпчика стовпчиком вільних членів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & f_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & f_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & f_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рівності (45) називаються формулами Крамера.

6.2 Приклади застосування

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 + 1 - 2 + 2 - 2 = 6.$$

Отже, система має єдиний розв'язок, який визначається за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(4 - 2 - 1 + 4) = \frac{5}{6}.$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(8 - 1 - 2 - 2) = \frac{1}{2}.$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-2-1-2+4) = -\frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Визначник системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

Тут з першого, третього та четвертого рядків визначника віднято другий рядок, помножений відповідно на 2, 1 і 2. Далі можна перейти до одного визначника третього порядку. Значення визначника ненульове тому система має єдиний розв'язок: $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$, $x_3 = \Delta_3/\Delta$, $x_4 = \Delta_4/\Delta$. Так як

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 44, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 28,$$

то $x_1 = -0,2$; $x_2 = 0,4$; $x_3 = 4,4$; $x_4 = 2,8$.

7 Метод Гаусса

7.1 Розрахункова схема

Формули Крамера зручні коли треба знайти явні вирази невідомих через коєфіцієнти і вільні члени системи рівнянь. Використовувати ці формули безпосередньо для розв'язання систем, особливо при великих n, не має сенсу через затратність, наприклад, при обчисленні визначників високого порядку.

Для розв'язання систем з чисельними коефіцієнтами зручно використовувати *метод Гаусса* (*метод послідовного виключення невідомих*). Розглянемо *схему єдиного ділення*. Маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1,n-1}\,x_{n-1} + a_{1n}\,x_n = f_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2,n-1}\,x_{n-1} + a_{2n}\,x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,1}\,x_1 + a_{n-1,2}\,x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} + a_{n-1,n}\,x_n = f_{n-1}, \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{n,n-1}\,x_{n-1} + a_{nn}\,x_n = f_n. \end{cases} \tag{46}$$

Треба за допомогою елементарних перетворень привести її до вигляду.

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}\,x_2 + \ldots + b_{1,n-1}\,x_{n-1} + b_{1n}\,x_n = g_1, \\ x_2 + \ldots + b_{2,n-1}\,x_{n-1} + b_{2n}\,x_n = g_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} + b_{n-1,n}\,x_n = g_{n-1}, \\ x_n = g_n. \end{cases} \tag{47}$$

Таку систему легко розв'язати, починаючи з останнього рівняння:

$$x_n = g_n,$$

$$x_{n-1} = g_{n-1} - b_{n-1,n},$$

$$\ldots,$$

$$x_1 = g_1 - b_{12}\,x_2 - \ldots - b_{1,n-1}\,x_{n-1} - b_{1n}\,x_n.$$

Перехід від системи (46) до системи (47) завжди можливий якщо визначник системи (46) не дорівнює нулю.

Сукупність елементарних перетворень, що приводить систему (46) до вигляду (47), називають *прямим ходом* методу Гаусса. Побудову розв'язку системи (47) називають *зворотним ходом*.

7.2 Приклад

Розглянемо розв'язання системи методом Гаусса за схемою єдиного ділення на конкретному прикладі:

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2,5x_3 + x_4 = 2,75, \\ 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 9,25, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 4,5. \end{cases} \tag{48}$$

Прямий хід для системи чотирьох рівнянь буде складатися з чотирьох кроків.

Перший крок. Виділимо в системі (48) перше рівняння і розділимо його на коефіцінт при x_1 (його називають провідним елементом першого кроку):

$$x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25. \tag{49}$$

Виключимо з усіх наступних рівнянь системи (48) невідоме x_1. Для цього помножимо рівняння (49) на 3 і віднімемо одержаний вираз із другого рівняння системи. Потім помножимо рівняння (49) на 5 і віднімемо одержаний вираз із третього рівняння. Нарешті, помножимо рівняння (49) на 2 і віднімемо одержаний вираз із останнього рівняння системи. В результаті цих перетворень система (48) перетвориться у рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -4, \\ 3x_2 + 3,5x_3 + x_4 = -2, \\ 10x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Другий крок. Виділимо в системі (50) друге рівняння і розділимо його на коефіцієнт при x_2 (провідний елемент другого кроку):

$$x_2 + 0,5x_3 - x_4 = -2. \tag{51}$$

Виключимо з усіх наступних рівнянь системи (50) невідоме x_2. Для цього помножимо рівняння (51) на 3 і віднімемо одержаний вираз із третього рівняння системи (50), а потім помножимо рівняння (51) на 10 і віднімемо одержаний вираз із останнього рівняння системи. В результаті цих перетворень система (50) перетвориться у рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25, \\ x_2 + 0,5x_3 - x_4 = -2, \\ 2x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_3 + 8x_4 = 20. \end{cases} \tag{52}$$

Третій крок. Виділимо в системі (52) третє рівняння і розділимо його на коефіцієнт при x_3 (провідний елемент третього кроку):

$$x_3 + 2x_4 = 2. \tag{53}$$

Виключимо з усіх наступних рівнянь невідоме x_3. Для цього помножимо рівняння (53) на 1 і віднімемо одержаний вираз із останнього рівняння системи (52). В результаті система (52) перетвориться у рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25, \\ x_2 + 0,5x_3 - x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ 6x_4 = 18. \end{cases} \tag{54}$$

Четвертий крок. Виділимо в системі (54) четверте рівняння і розділимо його на коефіцієнт при x_4 (провідний елемент четвертого кроку). При цьому система буде мати вигляд

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25, \\ x_2 + 0,5x_3 - x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_4 = 3. \end{cases} \tag{55}$$

Проведемо зворотний хід, тобто розв'яжемо систему (55). Із останнього рівняння цієї системи бачимо, що $x_4 = 3$. Підставивши це значення в третє рівняння, одержимо $x_3 = 2 - 2x_4 = -4$. Підставивши значення $x_3 = -4$, $x_4 = 3$ в друге рівняння, знайдемо $x_2 = -2 - 0,5x_3 + x_4 = 3$. На підставі першого рівняння системи (55) встановимо, що $x_1 = 2,25 + 2x_2 - 0,5x_3 - x_4 = 7,25$. Отже, розв'язком системи буде $x_1 = 7,25$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$, $x_4 = 3$.

Якщо система складається з n рівнянь, то прямий хід містить n кроків. Так як на кожному кроці відбуваться ділення на провідний елемент треба переконатися, що всі ці провідні елементи відмінні від нуля. Якщо на якомусь кроці провідний елемент дорівнює нулю, то треба спробувати переставити рівняння місцями для того щоб уникнути цього.

Всі обчислення зручно проводити та записувати в матричному вигляді або представляти як таблицю.

Наприклад, для прямого ходу цієї системи можемо записати наступне.

Розширена матриця системи (48):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -8 & 2 & 4 & 9 \\ 3 & -4 & 2,5 & 1 & 2,75 \\ 5 & -7 & 6 & 6 & 9,25 \\ 2 & 6 & 7 & 0 & 4,5 \end{array}\right).$$

Перший крок. Розширена матриця системи (50):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 1 & 2,25 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3,5 & 4 & -2 \\ 0 & 10 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Другий крок. Розширена матриця системи (52):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 1 & 2,25 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 20 \end{array}\right).$$

Третій крок. Розширена матриця системи (54):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 1 & 2,25 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right).$$

Четвертий крок. Розширена матриця системи (55):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 1 & 2,25 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Також прямий хід обчислень зручно записувати у вигляді таблиці:

4	-8	2	4	9
3	-4	2,5	1	2,75
5	-7	6	6	9,25
2	6	7	0	4,5
1	-2	0,5	1	2,25
0	2	1	-2	-4
0	3	3,5	4	-2
0	10	6	-2	0
1	-2	0,5	1	2,25
0	1	0,5	-1	-2
0	0	2	4	4
0	0	1	8	20
1	-2	0,5	1	2,25
0	1	0,5	-1	-2
0	0	1	2	2
0	0	0	6	18
1	-2	0,5	1	2,25
0	1	0,5	-1	-2
0	0	1	2	2
0	0	0	1	3

8 Ранг матриці

8.1 Означення

Розглянемо прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{56}$$

що складається з m рядків і n стовпчиків. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і k стовпчиків. Елементи, що стоять на їх перетині, утворюють квадратну таблицю, визначник якої називається *мінором k-го порядку матриці A*. Тоді величина k задовільняє дві умови: $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Вважаючи послідовно $k = 1, 2, \dots, l$, де l – найменше з чисел m і n, складаємо при кожному k усі мінори k-го порядку матриці A. Так, наприклад, для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

можна скласти дев'ять мінорів першого порядку 1; 2; 1; 2; 4; 2; 1; 3; 1 (це елементи матриці); дев'ять мінорів другого порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

та один мінор третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рангом матриці називається порядок найстаршого мінору цієї матриці, що не дорівнює нулю. Отже, якщо ранг матриці A дорівнює r, то серед всіх її мінорів існує хоча б один мінор r-го порядку, що не дорівнює нулю, але всі мінори порядка $r + 1$ і більш вищого порядку або дорівнюють нулю, або не можуть бути складеними. Ранг матриці A позначають через $r(A)$.

В розглянутому прикладі ранг матриці дорівнює 2, так як серед її мінорів другого порядку є такі, що не дорівнюють нулю, але всі мінори третього порядку (в даному прикладі він один) дорівнюють нулю. Мінори четвертого та більш високого порядку для матриці (57) не можуть бути складені.

Обчислення рангу матриці шляхом перебору всіх її мінорів дуже трудомістко. Існує більш простий спосіб обчислення, заснований на спрощенні структури матриці за допомогою елементарних перетворень. *Елементарними перетвореннями* матриці називаються наступні:

1) обмін місцями двох рядків або двох стовпчиків матриці;

2) множення всіх елементів рядка або стовпчика на довільне число λ, яке не дорівнює нулю;

3) додавання до всіх елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на те саме число.

Виявляється, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Для обчислення рангу матриці (56) її за допомогою ланцюга елементарних перетворень приводять до матриці наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \boldsymbol{b_{22}} & b_{23} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{b_{33}} & \dots & b_{3r} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{b_{rr}} & \dots & \boldsymbol{b_{rn}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Тут всі елементи, що лежать ліворуч і нижче ламаної лінії, проведеної подумки через елементи, виділені напівжирним шрифтом, повинні дорівнювати нулю, а всі елементи b_{11}, b_{22}, …, b_{rr}, розташовані на діагональній частині тієї ж ламаної, мусять відрізнятися від нуля. Тоді ранг матриці (58) співпадає з числом r її ненульових діагональних елементів b_{11}, b_{22}, …, b_{rr}.

Приклад. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1,5 & 3 & 6 \\ 5 & 2,5 & 12 & -11 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Розділимо перший рядок на 2, а потім віднімемо із другого рядка перший, помножений на 3, а з третього перший, помножений на 5. В результаті одержимо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поміняємо місцями другий і третій стовпці і розділимо другий рядок на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Віднімемо з третього рядка подвоєний другий

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що ранг цієї матриці дорівнює 2. Отже, ранг матриці (59) також дорівнює 2.

Ранг матриці в цьому прикладі був обчислений методом Гаусса за схемою єдиного ділення. На відміну від аналогічної схеми, що призначена для розв'язання систем із визначником, що не дорівнює нулю, при обчисленні рангу матриці іноді доводиться міняти місцями не лише її рядки, але і стовпці.

8.2 Теорема Кронекера – Капеллі

Розглянемо систему m рівнянь з n невідомими при будь-яких m і n (випадок $m = n$ не виключається). Запишемо її в компактній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{60}$$

де i – номер рівняння. Система (60) характеризується матрицею A і розширеною матрицею B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & f_m \end{pmatrix}.$$

Так як кожний мінор матриці A є мінором матриці B (але не навпаки), то $r(B) \geqslant r(A)$.

Теорема 1 (умова сумісності). Для того, щоб система (60) була сумісною, необхідно та достатньо, щоб ранг розширеної матриці B дорівнював рангу матриці системи A.

Теорема 2 (умова визначеності). Сумісна система є визначеною, якщо ранг r матриці системи дорівнює числу невідомих n. Якщо ж $r < n$, то система має несчислену множину розв'язків.

Ці теореми називаються *теоремами Кронекера – Капеллі.*

Розглянемо систему з квадратною матрицею ($m = n$). Якщо визначник Δ цієї системи не дорівнює нулю, то ранг матриць A і B однаковий, бо він співпадає з n. Отже така система буде сумісною (в силу теореми 1) і визначеною (в силу теореми 2).

Якщо визначник системи Δ дорівнює нулю, то ранг r матриці A менше n ($r < n$). Тоді за теоремою 1 сумісність системи залежить від того, чи дорівнює ранг розширеної матриці B рангу r матриці системи. В тому випадку, коли ранг матриці B більше r, система несумісна. Якщо ж ранг матриці B дорівнює r, система сумісна, але невизначена, бо $r < n$.

Отже, якщо визначник системи з квадратною матрицею дорівнює нулю, то система є або несумісною, або (у випадку сумісності) невизначеною. В останньому випадку система має безліч розв'язків.

Із теорем Кронекера – Капеллі витікає правило розв'язку системи лінійних рівнянь із довільною (зокрема квадратною) матрицею.

Нехай дана система m рівнянь з n невідомими. Визначимо ранг $r(A)$ матриці A системи. Складемо розширену матрицю B і знайдемо її ранг $r(B)$. Якщо $r(B) > r(A)$, то система несумісна. Якщо ж $r(B) = r(A)$, система сумісна.

Нехай $r(B) = r(A)$. Шляхом перестановки рядків рівнянь і стовпців невідомих переведемо відмінний від нуля мінор порядку r матриці A в лівий верхній кут системи. Збережемо перші r рівнянь, відкинувши решту як їх наслідки. У лівих частинах залишених рівнянь збережемо члени з першими r невідомими, перенісши члени з рештою невідомих (якщо вони є) у праві частини рівнянь. Ці невідомі будуть вільними.

Так як визначник одержаної системи r рівнянь із r невідомими відмінний від нуля, то за формулами Крамера знайдемо розв'язок цієї системи. Отже, перші r невідомих будуть виражені через вільні невідомі, кількість яких буде дорівнювати $n - r$. Надавши вільним невідомим довільні значення, одержимо множину розв'язків системи. У тому ж випадку, коли $r = n$, вільних невідомих не буде, і формули Крамера будуть визначати єдиний розв'язок системи.

Вказане правило недоцільно застосовувати в реальних чисельних розрахунках, так як метод Гаусса значно ефективніше.

8.3 Приклади

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 4,5x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 3,5, \\ 5x_1 + 5,5x_2 + 11,5x_3 - 8x_4 = 6. \end{cases} \tag{61}$$

Запишемо її розширену матрицю у вигляді таблиці

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4,5 & 4 & -5 & 3,5 \\ 5 & 5,5 & 11,5 & -8 & 6 \end{array}\right|, \tag{62}$$

відокремивши вертикальною рискою стовпчик вільних членів від матриці системи

Перший крок. Розділимо перший рядок таблиці (62) на провідний елемент 2, а потім, помноживши одержаний рядок на 1 і 5, віднімемо його відповідно з другого та третього рядків. В результаті одержимо таблицю

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 2 & -1 & 0,5 \\ 0 & 4 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 1,5 & -3 & 3,5 \end{array}\right|. \tag{63}$$

Другий крок. Розділимо другий рядок таблиці (63) на провідний елемент 4, а потім, помноживши одержаний рядок на 3, віднімемо його з третього рядка:

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 0,5 & 2 & -1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & 0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,25 \end{array}\right|. \tag{64}$$

Таблиця (64) є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 - 1x_4 = 0,5, \\ \qquad x_2 + 0,5x_3 - x_4 = 0,75, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = 1,25. \end{cases} \tag{65}$$

рівносильної системі (61). Але система (65) несумісна: її останнє рівняння $0 = 1,25$ не виконується ні за яких x_1, x_2, x_3, x_4. Отже, система (61) також несумісна.

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 24, \\ 7x_1 - 1,5x_2 = 7,5. \end{cases} \tag{66}$$

Запишемо її розширену матрицю у вигляді таблиці

$$\left|\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -3 \\ 4 & 9 & 24 \\ 7 & -1,5 & 7,5 \end{array}\right|. \tag{67}$$

Перший крок. Розділимо перший рядок таблиці (67) на провідний елемент першого рядка 2, а потім, помноживши одержаний рядок на 4 і 7, віднімемо

його відповідно з другого та третього рядків:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,5 & -1,5 \\ 0 & 15 & 30 \\ 0 & 9 & 18 \end{array}\right|. \tag{68}$$

Другий крок. Розділимо другий рядок таблиці (68) на провідний елемент 15, а потім, помноживши одержаний рядок на 9, віднімемо його з третього рядка:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,5 & -1,5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{69}$$

Таблиця (69) є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} x_1 - 1,5x_2 = -1,5, \\ x_2 = 2, \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{70}$$

рівносильної системі (66). В системі (70) останнє рівняння виконується при будь-яких x_1, x_2. Значить, у системі (66) одне із рівнянь зайве, оскільки є наслідком двох інших.

Розв'язавши систему (70), одержимо $x_2 = 2$, $x_1 = 1,5x_2 - 1,5 = 1,5$. Отже, система (66) сумісна та визначена. Її єдиний розв'язок $x_1 = 1,5$, $x_2 = 2$.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6,5x_2 + 3,5x_3 = 3,5. \end{cases} \tag{71}$$

Її розширена матриця

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6,5 & 3,5 & 3,5 \end{array}\right|. \tag{72}$$

Перший крок. Розділимо перший рядок таблиці (72) на провідний елемент 2, а потім, помноживши одержаний рядок на 3, віднімемо його з другого рядка:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right|. \tag{73}$$

Другий крок. Розділимо другий рядок таблиці (72) на провідний елемент 2:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|. \tag{74}$$

Це розширена матриця системи

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 = 0,5, \\ x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{75}$$

Ранг r матриці цієї системи і ранг її розширеної матриці дорівнюють 2, тоді як кількість невідомих $n = 3$. Отже, $p = n - r = 1$, тобто одна невідома буде вільною. Перенісши в системі (75) x_3 у праву частину, одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 1,5x_2 = 0,5 - 0,5x_3, \\ x_2 = 1 - x_3. \end{cases} \tag{76}$$

звідки $x_2 = 1 - x_3$, $x_1 = 0,5 - 0,5x_3 - 1,5x_2 = -1 + x_3$. Отже, рівносильна система (71) сумісна, але невизначена. Всі її розв'язки мають вигляд $x_1 = -1 + x_3$; $x_2 = 1 - x_3$; x_3, де x_3 – довільне число.

9 Метод Жордана – Гаусса

9.1 Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Жордана – Гаусса

Метод Жордана – Гаусса є модифікованою версією методу Гаусса. Зворотний хід в цьому методі замінюється на приведення матриці A до діагонального вигляду. На діагоналі цієї матриці залишаються лише одиничні елементи. Тоді автоматично маємо розв'язок вихідної системи рівнянь.

Після того як проведений прямий хід і матриця системи приведена до трикутної форми в останньому рядку одержаної системи міститься рівність

$$x_n = b_n.$$

Користуючись цим рядком, а саме додаючи його з відповідними коефіцієнтами до інших рядків матриці, можна в усіх інших рядках позбавитись від членів з x_n (зауважимо, і лише від них, не чіпаючи інші). В матриці A з'являються нулі в n-ому стовпчику в усіх позиціях окрім діагональної позиції $A(n, n)$.

Далі так само робимо для змінної x_{n-1} і продовжуємо до отримання діагональної форми.

Цей метод насправді програє методу Гаусса в бистродії, тому що потребує більшої кількості обчислень,що робить його використання непрактичним.

9.2 Приклад

Розглянемо ту ж саму систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2,5x_3 + x_4 = 2,75, \\ 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 9,25, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 4,5. \end{cases} \tag{77}$$

Ця система рівнянь вже була розв'язана методом Гаусса. Спочатку вона була приведена до трикутної форми:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 + x_4 = 2,25, \\ x_2 + 0,5x_3 - x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_4 = 3. \end{cases} \tag{78}$$

Тепер замість зворотного ходу будемо реалізовувати метод Гаусса – Жордана. Згадаємо також її розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 1 & 2,25 \\ 0 & 1 & 0,5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{79}$$

Користуючись або (78), або (79), проводимо відповідні обчислення. Дивимось на останній рядок. Там лише x_4. Так як коефіцієнт дорівнює одиниці, треба цей четвертий рядок відповідне число разів додати або відняти, щоб в інших місцях коефіцієнт при x_4 в (78) зник (відповідно в (79) з'явилися нулі в четвертому стовбчику). Для цього треба, домноживши четвертий рядок на два, відняти від третього рядка, додати його до другого рядка (з коєфіцієнтом 1) і відняти від першого рядка (з коєфіцієнтом 1). В результаті обчислень одержимо розширену матрицю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0,5 & 0 & -0,75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{80}$$

В четвертому стовпчику з'являються нулі. Відповідні обчислення в рядках для вільних членів наступні. В третьому рядку: $2-2\cdot 3 = 2-6 = -4$. В другому рядку: $-2 + 1 \cdot 3 = -2 + 3 = 1$. В першому рядку: $2,25 - 1 \cdot 3 = -0,75$.

Всі інші незмінні, так як у відповідній позиціях четвертого рядка знаходяться нулі.

Тепер працюємо з третім рядком. Так сталося, що відповідні коефіцієнти і в першому, і в другому рядках дорівнюють 0,5. Тобто треба від кожної з них відняти третій рядок з коефіцієнтом 0,5. Тоді для другого рядка маємо для вільного члена $1 - 0,5 \cdot (-4) = 1 + 2 = 3$. Для першого рядка відповідно: $-0,75 - 0,5 \cdot (-4) = -0,75 + 2 = 1,25$. Розширена матриця приймає вигляд:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 1,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{81}$$

Залишилось попрацювати з другим рядком. Бачимо (з розширеної таблиці), що треба додати до першого рядка два других. Тоді для вільного члену першого рядка одержимо $1,25 + 2 \cdot 3 = 1,25 + 6 = 7,25$. Робимо відповідні зміни в розширеній таблиці:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7,25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right). \tag{82}$$

Тепер легко побачити розв'язок систем рівнянь (1):

$$x_1 = 7,25, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 3.$$

Можна також перетворення проводити безпосередньо з системою рівнянь або використовувати табличну форму запису.

Література

[1] Бубняк Т. І. Вища математика : навч. посіб. Львів : Новий світ-2000, 2023. 436 с.

[2] Казановський В. І., Африканова А. Г., Виштакалюк Н. А., Дрозденко О. Л. Вища математика : навч. посіб. Київ : Аграрна освіта, 2014. 367 с.

[3] Коляда Р. В., Мельник І. О., Мельник О. М. Вища математика : навч. посіб. Львів : Магнолія-2006, 2023. 342 с.

[4] Лозовий Б. Л., Пушак Я. С., Шабат О. Є. Практикум з вищої математики : навч. посіб. Львів : Магнолія-2006, 2023. 385 с.

[5] Прикладна математика : навч. посіб. / уклад. О. В. Шебаніна, В.П. Клочан, І.В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 164 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8623

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Курс лекцій

Укладач: **Поживатенко** Віталій Володимирович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 20 прим. Зам. №_____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.