ISSN 2079-1836
2017, вип. 27

УДК 533.6.013.42

А. А. Лимарь

ОБ УПРОЩЕНИИ ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

Показано упрощение частотных уравнений в задаче о колебании упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с двумя жесткими основаниями и в задаче с одним жестким, а другим упругим основаниями в виде прямоугольной пластины. В первой задаче показано, что если оба контура пластины будут оперты или свободны, то частотное уравнение, как и для двух защемленных контуров, вновь распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты. Для смешанных способов закрепления контуров пластины частотное уравнение не упрощается. Во второй задаче, для защемленных контуров двух пластин показано, что частотное уравнение распадается на два, описывающих четные и нечетные частоты.

Ключевые слова: *гидроупругость, прямоугольная пластина, идеальная несжимаемая жидкость, плоские колебания.*

Введение. Задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была исследована в [1] на основании единого Лагранжевого подхода. В [2] эта задача была рассмотрена на основании Эйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в [11]. В [3] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в [4] – на случай упругого дна. Вопросы устойчивости колебаний мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жестким основаниями, были подробно исследованы в [5], а колебания пластины – в [6, 7]. Колебания пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жестким, а другим упругим основанием, были исследованы в [8]. В [8, 12] рассматривалось влияние свободной поверхности на частотный спектр. В [9] исследованы осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости в круговом цилиндрическом резервуаре с упругим разделителем между слоями, при наличии сил поверхностного натяжения были рассмотрены в [10].

В данной статье проведено упрощение частотных уравнений, полученных в задаче о колебании упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с двумя жесткими основаниями [6], и в задаче с одним жестким, а другим упругим основанием в виде прямоугольной пластины [8]. В первой задаче показано, что если оба контура пластины будут оперты или свободны, то частотное уравнение, как и для двух защемленных контуров, вновь распадается на два, описывающих четные и нечетные частоты. Для смешанных способов закрепления контуров пластины частотное уравнение не упрощается. Во второй задаче, для случая защемленных контуров двух пластин, показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты.

Постановка задачи. Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале шириной $2a$ с одним жестким, а другим упругим основаниями в виде прямоугольной пластины (для определенности будем считать, что это верхнее основание). Пластины будем считать изотропными с изгибной жесткостью D_i и растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности ($i=1,2$). Индекс $i=1$ будет соответствовать верхней пластине, а $i=2$ – внутренней. Контуры пластин могут иметь произвольное закрепление, например, быть защемлены, оперты или свободны. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет канал до глубины h_1, а нижняя жидкость плотности ρ_2 – до глубины h_2. Колебания пластин и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластин и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными [8].

В начале, рассмотрим первую задачу о колебании упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с двумя жесткими основаниями [6]. В этом случае верхняя пластина считается абсолютно жесткой ($T_1=\infty$) и рассматривается только внутренняя пластина ($i=2$). В [6] была рассмотрена эта задача и выведено следующее частотное уравнение

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^4_{q,k=1} \right| = 0 . \qquad (1)$$

Здесь

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E^0_{kn} \mathfrak{L}_{j1n}; \quad C_{2k} = \mathfrak{L}^0_{j2k} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E^0_{kn} \mathfrak{L}_{j2n} \quad (j=1,\ k=\overline{1,4});$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^0 \mathfrak{L}_{j1n}; \; C_{4k} = \mathfrak{L}_{j2k}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^0 \mathfrak{L}_{j2n} \quad (j = 2, \; k = \overline{1,4});$$

$$\beta_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}; \qquad E_{kn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx,$$

w_k^0 ($k = \overline{1,4}$) фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P \frac{d^2 w_k^0}{dx^2} + q w_k^0 = 0 \quad \left(P = \frac{T}{D}, \; q = \frac{g\Delta\rho - k_{01}\omega^2}{D} \right), \tag{2}$$

$\mathfrak{L}_{j1}$ и $\mathfrak{L}_{j2}$ – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластины на контуре γ_j ($j = 1,2$). Для удобства записи здесь введено обозначение контуров через γ_j (индекс $j = 1$ соответствует контуру $x = -a$, а $j = 2$ – $x = a$). Так, например, для случая жесткого защемления пластины оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ будет единичным, а $\mathfrak{L}_{j2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}$.

В [6] была показана возможность упрощения частотного уравнения (1) в случае защемленных контуров. Проведем упрощения этого уравнения для случая опертых и свободных контуров

Оба контура оперты. В этом случае будем иметь [6]

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1, \; \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}, \quad \mathfrak{L}_{11n} = 1, \quad \mathfrak{L}_{21n} = (-1)^n, \quad \mathfrak{L}_{12n} = -k_n^2,$$

$$\mathfrak{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2,$$

где $\mathfrak{L}_{jpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{jp} \left[w_k^0 \right] \right) \Big|_{\gamma_j}$, $\mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp} \left[\psi_n \right] \right) \Big|_{\gamma_j}$.

Фундаментальная система решений для уравнения (2) зависит от знака величины q и знака выражения $P^4 / 4 - q$. Рассмотрим различные варианты сочетаний этих знаков [6].

1. Пусть $q > 0$ и $P^2 / 4 - q > 0$.
2. Пусть $q < 0$.
3. Пусть $P^2 / 4 - q < 0$ (как следствие этого – $q > 0$).

Вначале рассмотрим первый случай ($q > 0$ и $P^2 / 4 - q > 0$). В этом случае фундаментальная система решений уравнения (2) имеет вид

$$w_k^0 = \{\sinh p_1 x, \cosh p_1 x, \sinh p_2 x, \cosh p_2 x\},$$

коэффициенты E_{kn}^0 вычисляются по формулам:

$$E_{1n}^0 = \frac{p_1 \cosh p_1^*}{a\left(k_n^2 + p_1^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E_{2n}^0 = \frac{p_1 \sinh p_1^*}{a\left(k_n^2 + p_1^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

$$E_{3n}^0 = \frac{p_2 \cosh p_2^*}{a\left(k_n^2 + p_2^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E_{4n}^0 = \frac{p_2 \sinh p_2^*}{a\left(k_n^2 + p_2^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

а коэффициенты C_{qk} примут вид

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0,$$

$$C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0,$$

$$C_{21} = -p_1^2 \sinh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{22} = p_1^2 \cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0,$$

$$C_{23} = -p_2^2 \sinh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{24} = p_2^2 \cosh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0,$$

$$C_{31} = -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{2,2m}^0,$$

$$C_{33} = -\sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{34} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E_{4,2m}^0,$$

$$C_{41} = p_1^2 \sinh p_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0, \quad C_{42} = p_1^2 \cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0,$$

$$C_{43} = p_2^2 \sinh p_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0, \quad C_{44} = p_2^2 \cosh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0.$$

Здесь $\gamma_n = \omega^2 \alpha_n k_n^2$, $p_{1,2}^2 = P/2 \pm \sqrt{P^2/4 - q}$, $p_i^* = a p_i$, ($i = 1,2$).

С определителем частотного уравнения (1) проведем следующие преобразования: складываем первую строку с третьей, а вторую с четвертой. Далее вычитаем из первой строки третью, из второй четвертую и приводим определитель к блочному виду.

В результате преобразований (1) представляется в виде произведения двух уравнений

$$\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^{0} & \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^{0} \\ -p_1^2\sinh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^{0} & -p_2^2\sinh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^{0} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^{0} & \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^{0} \\ p_1^2\cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^{0} & p_2^2\cosh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^{0} \end{vmatrix} = 0\,,$$

которые описывают четные и нечетные частоты.

Для второго ($q<0$) и третьего ($P^2/4-q<0$) случаев аналогично показывается, что частотное уравнение (1) вновь распадается на два.

Таким образом, для двух опертых контуров частотное уравнение (1) упрощается и распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты. В отличие от случая защемленных контуров [6], дальнейшее упрощение уравнений уже не происходит.

Оба контура свободны. В этом случае будем иметь [6]

$$\mathfrak{L}_{j1} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},\ \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3},\quad \mathfrak{L}_{11n} = -k_n^2\,,$$

$$\mathfrak{L}_{21n} = (-1)^{n+1}k_n^2,\quad \mathfrak{L}_{12n} = 0\,,\quad \mathfrak{L}_{22n} = 0\,.$$

Вначале рассмотрим первый случай ($q>0$ и $P^2/4-q>0$). В этом случае коэффициенты C_{qk} примут вид:

$$C_{11} = -p_1^2\sinh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^{0},\ C_{12} = p_1^2\cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^{0},$$

$$C_{13} = -p_2^2\sinh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^{0},\ C_{14} = p_2^2\cosh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^{0},$$

$$C_{21}=p_1^3\cosh p_1^*,\ C_{22}=-p_1^3\sinh p_1^*, C_{23}=p_2^3\cosh p_2^*,\ C_{14}=-p_2^3\sinh p_2^*,$$

$$C_{31}=p_1^2\sinh p_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{32}=p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0,$$

$$C_{33}=p_2^2\sinh p_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{34}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{41}=p_1^3\cosh p_1^*,\ C_{42}=p_1^3\sinh p_1^*, C_{43}=p_2^3\cosh p_2^*,\ C_{44}=p_2^3\sinh p_2^*.$$

Проведя преобразования со строками и столбцами, аналогичные ранее рассмотренными, получим частотное уравнение (1) в виде

$$\begin{vmatrix} p_1^2\sinh p_1^*-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0 & p_2^2\sinh p_2^*-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0 \\ p_1^3\cosh p_1^* & p_2^3\cosh p_2^* \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} p_1^2\cosh p_1^*+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0 & p_2^2\cosh p_2^*+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0 \\ p_1^3\sinh p_1^* & p_2^3\sinh p_2^* \end{vmatrix}=0 .$$

Для второго ($q<0$) и третьего ($P^2/4-q<0$) случаев также можно показать, что уравнение (1) вновь распадается на два.

Таким образом, для двух свободных контуров частотное уравнение (1) упрощается и распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты.

В отличие от защемленных контуров, дальнейшее упрощение уравнений уже не происходит.

Защемленный и опертый контуры. Будем считать, что первый контур ($j=1$) защемлен, а второй ($j=2$) – оперт. Рассмотрим первый случай ($q>0$ и $P^2/4-q>0$). Коэффициенты C_{qk} запишутся так:

$$C_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0, C_{12}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0, C_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0, C_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0 ,$$

$$C_{21}=p_1\cosh p_1^*,\ C_{22}=-p_1\sinh p_1^*,\ C_{23}=p_2\cosh p_2^*,\ C_{24}=-p_2\sinh p_2^*,$$

$$C_{31}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0, C_{32}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0, C_{33}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0, C_{34}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{41} = p_1^2 \sinh p_1^* - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{1,2m-1}^0,\ C_{42} = p_1^2 \cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{2,2m}^0\ ,$$

$$C_{43} = p_2^2 \sinh p_2^* - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E_{3,2m-1}^0,\ C_{44} = p_2^2 \cosh p_2^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E_{4,2m}^0\ .$$

Частотное уравнение (1) упрощается, но не распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты

$$p_2 \cosh p_2^* \tilde{C}_{11} \begin{vmatrix} \tilde{C}_{32} & C_{34} \\ \tilde{C}_{42} & C_{44} \end{vmatrix} - p_2 \sinh p_2^* \tilde{C}_{11} \begin{vmatrix} \tilde{C}_{11} & C_{13} \\ \tilde{C}_{41} & C_{43} \end{vmatrix} = 0\ ,$$

где

$$\tilde{C}_{11} = p_2 \cosh p_2^* C_{11} - p_1 \cosh p_1^* C_{13},\ \tilde{C}_{32} = p_2 \sinh p_2^* C_{32} - p_1 \sinh p_1^* C_{34},$$

$$\tilde{C}_{41} = p_2 \cosh p_2^* C_{41} - p_1 \cosh p_1^* C_{43},\ \tilde{C}_{42} = p_2 \sinh p_2^* C_{42} - p_1 \sinh p_1^* C_{44}.$$

Можно показать, что и в остальных случаях закреплений двух контуров пластины частотное уравнение не распадается на четные и нечетные частоты.

Теперь рассмотрим вторую задачу [8] о колебании упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жесткими, а другим – упругим основаниями в виде прямоугольной пластины (см. постановку задачи). Для случая защемленных контуров в [8] было выведено следующее частотное уравнение

$$\text{я} \left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{8} \right| = 0\ . \tag{3}$$

Здесь

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^0,\ C_{1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0,\ C_{2k} = C_{11k}^0,\ C_{2,k+4} = 0\ ,$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^0 \left(-1\right)^n, C_{3,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \left(-1\right)^n,\ C_{4k} = C_{12k}^0,\ C_{2,k+4} = 0, \tag{4}$$

$$C_{7k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \left(-1\right)^n, C_{7,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{2kn}^0 \left(-1\right)^n,\ C_{8k} = 0,\ C_{8,k+4} = C_{22k}^0\ ,$$

$$\tilde{a}_{11n} = 1 + a_{11n} = \frac{\tilde{T}_{2n} T_{1n}}{\Delta_n}, \;\; \tilde{a}_{22n} = 1 + a_{22n} = \frac{\tilde{T}_{1n} T_{2n}}{\Delta_n}, \;\; C^0_{ijk} = \left. \frac{\mathrm{d}\, w^0_{ik}}{\mathrm{d}\, x} \right|_{\gamma_j},$$

$$\mathfrak{L}^0_{ijpk} = \left. \left(\mathfrak{L}_{ijp} \left[w^0_{ik} \right] \right) \right|_{\gamma_j}, \;\; \mathfrak{L}_{ijpn} = \left. \left(\mathfrak{L}_{ijp} \left[\psi_n \right] \right) \right|_{\gamma_j}, \;\; E^0_{ikn} = \frac{1}{a} \int\limits_{-a}^{a} w^0_{ik} \psi_n dx,$$

w^0_{ik} ($k = \overline{1,4}$) – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^4 w^0_{ik}}{dx^4} - p_i \frac{d^2 w^0_{ik}}{dx^2} + q_i w^0_{ik} = 0 \;\; \left(p_i = \frac{T_i}{D_i},\, q_i = \frac{g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2}{D_i} \right). \qquad (5)$$

При вырождении пластин в мембраны ($D_i = 0$) уравнение (3) запишется так [8]

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^4_{q,r=1} \right| = 0, \qquad (6)$$

а соотношения (4) примут вид

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E^0_{1kn}, \;\; C_{1,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn},$$

$$C_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E^0_{1kn} (-1)^n, \;\; C_{3,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E^0_{2kn} (-1)^n, \qquad (7)$$

$$C_{4k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E^0_{1kn} (-1)^n, \;\; C_{4,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E^0_{2kn} (-1)^n \quad (k = \overline{1,2}).$$

Если упругим является нижнее основание, то во всех формулах, содержащих g, полагаем $g := -g$ и отсчет введем снизу вверх, т.е. верхнее основание и верхняя жидкость окажутся внизу, а нижнее основание и нижняя жидкость окажутся вверху. Можно сохранить и прежние обозначения, если в параметрах, относящихся к жидкостям, поменять местами индексы, тогда все полученные уравнения и соотношения останутся в силе.

Проведем упрощение частотных уравнений (3) и (6) в случае защемленных контуров.

Случай двух мембран ($D_1 = D_2 = 0$). В случае мембран ($D_1 = D_2 = 0$) частотное уравнение имеет вид (6) с коэффициентами (7). Вначале рассмотрим случай $q_i < 0$ ($g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2 < 0$). В этом случае коэффициенты E_{ikn}^0 примут вид [12]

$$E_{ikn}^0 = \frac{T_i p_i}{a d_{in}} \left\{ \left[(-1)^n - 1 \right] \cos p_i^*, \left[(-1)^n + 1 \right] \sin p_i^* \right\}. \tag{8}$$

Здесь $p_i^2 = -q_i > 0$, $p_i^* = p_i a$.

Проведя преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (6), как ив первой задаче, получим

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1} E_{11,2m-1}^0 & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1} E_{21,2m-1}^0 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1} E_{11,2m-1}^0 & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1} E_{21,2m-1}^0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m} E_{12,2m}^0 & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m} E_{22,2m}^0 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{21,2m} E_{12,2m}^0 & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m} E_{22,2m}^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты. С учетом соотношений (8) эти уравнения могут быть записаны в единой форме для несимметричных и симметричных частот

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_n \left(\omega^2 \tilde{a}_{1n} - k_n \tilde{d}_{1n} \right)}{\tilde{\Delta}_n} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_n \left(\omega^2 \tilde{a}_{2n} - k_n \tilde{d}_{2n} \right)}{\tilde{\Delta}_n} \right) - \omega^4 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_n b_n}{\tilde{\Delta}_n} \right)^2 = 0. \tag{10}$$

Здесь

$$\tilde{a}_{in} = a_{in} + k_n k_{0i}, \ \tilde{d}_{in} = T_i k_n^2 + g\Delta\rho_i ,$$

$$\tilde{\Delta}_n = \left(\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{2n} - b_n \right) \omega^4 - \left(\tilde{a}_{1n}\tilde{d}_{2n} + \tilde{a}_{2n}\tilde{d}_{1n} \right) k_n \omega^2 + k_n^2 \tilde{d}_{1n}\tilde{d}_{2n} .$$

Случай $q_i > 0$ рассматривается аналогично, и в этом случае уравнения для несимметричных и симметричных частот также представляются в единой форме (10).

Случай мембраны и пластины ($D_1 = 0,\ D_2 \neq 0$). В случае верхней мембраны и нижней пластины, при $q_1 < 0$ ($q_1 = \left(g\rho_1 - k_{01}\omega^2\right)\Big/T_1 < 0$) для мембраны и $q_2 < 0$ ($q_2 = \left(g\Delta\rho - k_{02}\omega^2\right)\Big/D_2$) для пластины, частотное уравнение по аналогии с предыдущим подразделом может быть приведено к виду

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ 0 & \tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m}E^0_{12,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m}E^0_{22,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{12,2m}E^0_{24,2m} \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{21,2m}E^0_{12,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m}E^0_{22,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m}E^0_{24,2m} \\ 0 & \tilde{p}_{21}\sinh\tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{22}\sinh\tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (11)$$

Из (11) следует, что в случае мембраны и пластины ($D_1 = 0$, $D_2 \neq 0$) при $q_i < 0$ уравнение (3) вновь распадается на два, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Каждое из двух уравнений (11) можно упростить, например, для несимметричных частот получим

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1}E^0_{11,2m-1}\right)\left(\tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21}\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{23,2m-1} -\right.$$

$$\left. - \tilde{p}_{22}\cos\tilde{p}^*_{22}\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{21,2m-1}\right) - \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1}E^0_{11,2m-1}\right) \times$$

$$\times \left(\tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21}\sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{23,2m-1} - \tilde{p}_{22}\cos\tilde{p}^*_{22}\sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{21,2m-1}\right) = 0\,.$$

Первый и третий случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, уравнение (3) для защемленных контуров мембраны и пластины распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Случай двух пластин ($D_1 \neq 0,\ D_2 \neq 0$). В случае закрепленных двух пластин коэффициенты C_{qr} будут вычисляться по формулам (4).

Вначале рассмотрим второй случай $q_i < 0$ ($q_i = \left(g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2\right)\Big/D_i$). В этом случае коэффициенты E^0_{ikn} примут вид:

$$E^0_{i1n} = \frac{\tilde{p}_{i1}\cosh\tilde{p}^*_{i1}}{a\left(k_n^2 + \tilde{p}_{i1}^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right],\quad E^0_{i2n} = \frac{\tilde{p}_{i1}\sin\tilde{p}^*_{i1}}{a\left(k_n^2 + \tilde{p}_{i1}^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

$$E^0_{i3n} = \frac{\tilde{p}_{i2}\cosh\tilde{p}^*_{i2}}{a\left(k_n^2 - \tilde{p}_{i2}^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right],\quad E^0_{4n} = -\frac{\tilde{p}_{2}\sin\tilde{p}^*_{i2}}{a\left(k_n^2 - \tilde{p}_{i2}^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

где $\tilde{p}^2_{i1,i2} = \pm p_i/2 + \sqrt{p_i^{\ 2}/4 - q_i}$, $\tilde{p}^*_i = a\tilde{p}_i$, ($i = 1,2$).

Проведя аналогичные преобразования со строками и столбцами определителя уравнения (3), получим

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m-1}E^0_{13,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ \tilde{p}_{11}\cosh\tilde{p}^*_{11} & \tilde{p}_{12}\cos\tilde{p}^*_{12} & 0 & 0 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m-1}E^0_{13,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ 0 & 0 & \tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{22}\cos\tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} \times$$

$$\times\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m}E^0_{12,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m}E^0_{14,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m}E^0_{22,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m}E^0_{24,2m} \\ \tilde{p}_{11}\sinh\tilde{p}^*_{11} & \tilde{p}_{12}\sin\tilde{p}^*_{12} & 0 & 0 \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m}E^0_{12,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m}E^0_{14,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m}E^0_{22,2m} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m}E^0_{24,2m} \\ 0 & 0 & \tilde{p}_{21}\sinh\tilde{p}^*_{21} & -\tilde{p}_{22}\sin\tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, в случае $q_i < 0$ уравнение (3) распадается на два, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Каждое из этих двух уравнений подлежит дальнейшему упрощению. Так, например, несимметричные частоты будут находиться из уравнения

$$\left(\tilde{p}_{11}\cosh\tilde{p}_{11}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m-1}E_{13,2m-1}^{0}-\tilde{p}_{12}\cos\tilde{p}_{12}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m-1}E_{11,2m-1}^{0}\right)\times$$
$$\times\left(\tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}_{21}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m-1}E_{23,2m-1}^{0}-\tilde{p}_{22}\cos\tilde{p}_{22}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m-1}E_{21,2m-1}^{0}\right)-$$
$$-\left(\tilde{p}_{11}\cosh\tilde{p}_{11}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{21,2m-1}E_{13,2m-1}^{0}-\tilde{p}_{12}\cos\tilde{p}_{12}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{12,2m-1}E_{11,2m-1}^{0}\right)\times$$
$$\times\left(\tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}_{21}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{12,2m-1}E_{23,2m-1}^{0}-\tilde{p}_{22}\cos\tilde{p}_{22}^{*}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{21,2m-1}E_{21,2m-1}^{0}\right)=0.$$

Первый и третий случаи рассматриваются аналогично.

Таким образом, уравнение (3) для защемленных контуров пластин распадается на два уравнения, описывающих несимметричные и симметричные частоты.

Выводы. Проведено упрощение частотных уравнений в задаче о колебании упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с двумя жесткими основаниями и в задаче с одним жестким, а другим упругим основанием в виде прямоугольной пластины. В первой задаче показано, что если оба контура пластины будут оперты или свободны, то частотное уравнение, как и для двух защемленных контуров, вновь распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты. Для смешанных способов закрепления контуров пластины частотное уравнение не упрощается. Во второй задаче, для случая защемленных контуров двух пластин, показано, что частотное уравнение распадается на два уравнения, описывающих четные и нечетные частоты.

Представляет интерес рассмотреть возможность упрощения общего частотного уравнения для случаев защемленного, опертого и свободных контуров и получить для них условия устойчивости.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Ильгамов М. А.*** Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов // Изб. проблемы прикл. механики. Сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея. – М.: Машиностроение, 1974. – С. 341–346.

2. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.

3. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Акустичний вісник. – 2003. – Т. 6. – №4. – С. 44–52.

4. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – №1. – С. 33–38.

5. ***Кононов Ю. Н.*** Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А.: Природничі науки. 2015. – №1–2. – С. 97–108.

6. ***Кононов Ю. Н.*** Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Пробл. обчислюв. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра. – 2016. – Вып. 25. – С. 69–84.

7. ***Кононов Ю. М.*** Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі [Електронний ресурс] / Ю. М. Кононов, О. О. Лимар // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016» – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf.

8. ***Кононов Ю. Н.*** О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основанием / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Пробл. обчислюв. механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Д.: Ліра. – 2017. – Том 26. – С. 79–96.

9. ***Кононов Ю. Н.*** Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре / Ю. Н. Кононов, Ю. А. Джуха // Вісн. Запорізького нац. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2016. – № 1. – С. 103–115.

10. ***Пожалостин А. А.*** Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения / *А. А. Пожалостин*, *Д. А. Гончаров* // Наука и инновации: инженерный журнал. – [Електронний ресурс] – [Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013]. – № 12. – Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html.

11. ***Троценко В. А.*** Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В. А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31. – №8. – С. 74–80.

12. ***Kononov Yu. M.*** Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel / Yu. M. Kononov, A. Lymar // Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (Kyiv, Ukraine). – Vinnytsa, 2016. – P. 79–80.

УДК 533.6.013.42

О. О. Лимар

ПРО СПРОЩЕННЯ ЧАСТОТНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЩО РОЗДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ

Показано спрощення частотних рівнянь в задачі про коливання пружної пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з двома жорсткими основами і в задачі з одною

жорсткою, а іншою пружною основою у вигляді прямокутної пластини. У першій задачі показано, якщо обидва контуру пластини будуть оперті або вільні, то частотне рівняння, як і для двох затиснених контурів, знову розпадається на два рівняння, що описують парні і непарні частоти. Для змішаних способів закріплення контурів пластини частотне рівняння не спрощується. У другій задачі, для затиснених контурів двох пластин, показано, що частотне рівняння розпадається на два рівняння, що описують парні і непарні частоти.

Ключові слова: *гідропружність, прямокутна пластина, плоскі коливання, ідеальна нестислива рідина.*

UDC 533.6.013.42

A. A. Lymar

ON SIMPLIFICATION OF FREQUENCY EQUATIONS IN THE PROBLEM OF OSCILLATION OF RECTANGULAR PLATE DIVIDING IDEAL LIQUIDS OF DIFFERENT DENSITY IN RECTANGULAR CHANNEL

The simplification of the frequency equations in the problem of the oscillation of an elastic plate horizontally separating ideal liquids of different density in a rectangular channel with two rigid bases and in the problem with one rigid and another elastic base in the form of a rectangular plate is shown. The first problem shows that if both contours of the plate are supported or free, then the frequency equation, like for the two clamped circuits, again breaks up into two equations describing the even and odd frequencies. For mixed methods of fixing the contours of a plate, the frequency equation is not simplified. In the second problem, for the clamped contours of two plates, it is shown that the frequency equation splits into two equations describing even and odd frequencies.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular plate, flat oscillations, ideal incompressible fluid.*

In the beginning, let us consider the first problem of the vibration of an elastic plate that horizontally separates ideal liquids of different density in a rectangular channel with two rigid bases. In [6] this problem was considered and the following frequency equation

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|^{4}_{q,k=1} \right| = 0 \,. \tag{1}$$

Here

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^{0} \mathfrak{L}_{j1n}, \;\; C_{2k} = \mathfrak{L}_{j2k}^{0} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^{0} \mathfrak{L}_{j2n} \quad (j=1,\; k=\overline{1,4}),$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_{kn}^{0} \mathfrak{L}_{j1n}, \;\; C_{4k} = \mathfrak{L}_{j2k}^{0} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_{kn}^{0} \mathfrak{L}_{j2n} \quad (j=2,\; k=\overline{1,4}),$$

$$\beta_n = \frac{k_n d_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n}, \quad E^0_{kn} = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w^0_k \psi_n dx,$$

w^0_k ($k=\overline{1,4}$) a fundamental system of solutions of the homogeneous equation

$$\frac{d^4 w^0_k}{dx^4} - P\frac{d^2 w^0_k}{dx^2} + q w^0_k = 0 \quad \left(P = \frac{T}{D},\ q = \frac{g\Delta\rho - k_{01}\omega^2}{D} \right), \tag{2}$$

$\mathfrak{L}_{jp}$ – the differiential operators, describing the plate loop boundary conditions.

In [6], it was shown that the frequency equation (1) can be simplified in the case of clamped contours. We simplify this equation for the case of supported and free contours

Both circuits are supported. In this case we have [6]

$$\mathfrak{L}_{j1} \equiv 1,\ \mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},\ \mathfrak{L}_{11n} = 1,\ \mathfrak{L}_{21n} = (-1)^n,\ \mathfrak{L}_{12n} = -k_n^2,$$

$$\mathfrak{L}_{22n} = (-1)^{n+1} k_n^2,$$

where $\mathfrak{L}^0_{jpk} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[w^0_k\right]\right)\Big|_{\gamma_j}$, $\mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[\psi_n\right]\right)\Big|_{\gamma_j}$.

First we consider the first case ($q>0$ and $P^2/4 - q > 0$). In this case the fundamental system of solutions of equation (2) has the form

$$w^0_k = \{\sinh p_1 x,\ \cosh p_1 x,\ \sinh p_2 x,\ \cosh p_2 x\},$$

coefficients E^0_{kn} –

$$E^0_{1n} = \frac{p_1 \cosh p_1^*}{a\left(k_n^2 + p_1^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E^0_{2n} = \frac{p_1 \sinh p_1^*}{a\left(k_n^2 + p_1^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right]$$

$$E^0_{3n} = \frac{p_2 \cosh p_2^*}{a\left(k_n^2 + p_2^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E^0_{4n} = \frac{p_2 \sinh p_2^*}{a\left(k_n^2 + p_2^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right]$$

and the coefficients C_{qk} take the form:

$$C_{11} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E^0_{1,2m-1}, C_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E^0_{2,2m}, C_{13} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m-1} E^0_{3,2m-1}, C_{14} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} E^0_{4,2m},$$

$$C_{21} = -p_1^2 \sinh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m-1} E^0_{1,2m-1},\ C_{22} = p_1^2 \cosh p_1^* + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{2m} E^0_{2,2m},$$

$$C_{23}=-p_2^2\sinh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{24}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{31}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0, C_{32}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0, C_{33}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0, C_{34}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0;$$

$$C_{41}=p_1^2\sinh p_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{42}=p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0,$$

$$C_{43}=p_2^2\sinh p_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{44}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0,$$

Here $\gamma_n=\omega^2\alpha_n k_n^2$, $p_{1,2}^2=P/2\pm\sqrt{P^2/4-q}$, $p_i^*=ap_i$, ($i=1,2$).

As a result of the transformations, the frequency equation (1) is represented as a product of two equations

$$\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0 & \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0 \\ -p_1^2\sinh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0 & -p_2^2\sinh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0 \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0 & \sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0 \\ p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0 & p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0 \end{vmatrix}=0,$$

which describe even and odd frequencies.

For the second ($q<0$) and third ($P^2/4-q<0$) cases, it is similarly shown that the frequency equation (1) again splits into two equations.

Thus, for two supported circuits, the frequency equation (1) simplifies and splits into two equations describing even and odd frequencies. In contrast to the case of constrained contours [6], further simplification of the equations does not occur.

Both circuits are free. In this case we have [6]

$$\mathfrak{L}_{j1}=\frac{d^2}{dx^2},\ \mathfrak{L}_{j2}=\frac{d^3}{dx^3},\ \mathfrak{L}_{11n}=-k_n^2,$$

$$\mathfrak{L}_{21n}=(-1)^{n+1}k_n^2,\ \mathfrak{L}_{12n}=0,\ \mathfrak{L}_{22n}=0.$$

First we consider the first case ($q>0$ and $P^2/4-q>0$). In this case, the coefficients C_{qk} will take the form:

$$C_{11}=-p_1^2\sinh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{12}=p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0,$$

$$C_{13}=-p_2^2\sinh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{14}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{21}=p_1^3\cosh p_1^*,\ C_{22}=-p_1^3\sinh p_1^*, C_{23}=p_2^3\cosh p_2^*,\ C_{14}=-p_2^3\sinh p_2^*,$$

$$C_{31}=p_1^2\sinh p_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0,\ C_{32}=p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0,$$

$$C_{33}=p_2^2\sinh p_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0,\ C_{34}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{41}=p_1^3\cosh p_1^*,\ C_{42}=p_1^3\sinh p_1^*, C_{43}=p_2^3\cosh p_2^*,\ C_{44}=p_2^3\sinh p_2^*.$$

Performing transformations with rows and columns similar to those previously considered, we obtain the frequency equation (1) in the form

$$\begin{vmatrix} p_1^2\sinh p_1^*-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{1,2m-1}^0 & p_2^2\sinh p_2^*-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E_{3,2m-1}^0 \\ p_1^3\cosh p_1^* & p_2^3\cosh p_2^* \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} p_1^2\cosh p_1^*+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{2,2m}^0 & p_2^2\cosh p_2^*+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E_{4,2m}^0 \\ p_1^3\sinh p_1^* & p_2^3\sinh p_2^* \end{vmatrix}=0.$$

For the second ($q<0$) and third ($P^2/4-q<0$) cases, it can also be shown that equation (1) again splits into two equations.

Thus, for two free circuits, the frequency equation (1) simplifies and splits into two equations describing the even and odd frequencies.

In contrast to the constrained contours, further simplification of the equations no longer occurs.

Pinched and supported contours. We assume that the first contour ($j=1$) is jammed, and the second ($j=2$) contour is supported. We consider the first case ($q>0$ and $P^2/4-q>0$). The coefficients C_{qk} are as follows:

$$C_{11}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{1,2m-1}^0, C_{12}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{2,2m}^0, C_{13}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E_{3,2m-1}^0, C_{14}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E_{4,2m}^0,$$

$$C_{21}=p_1\cosh p_1^*,\ C_{22}=-p_1\sinh p_1^*,\ C_{23}=p_2\cosh p_2^*,\ C_{24}=-p_2\sinh p_2^*,$$

$$C_{31}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{1,2m-1},C_{32}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{2,2m},C_{33}=-\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m-1}E^0_{3,2m-1},C_{34}=\sum_{m=1}^{\infty}\beta_{2m}E^0_{4,2m},$$

$$C_{41}=p_1^2\sinh p_1^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E^0_{1,2m-1},\ C_{42}=p_1^2\cosh p_1^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E^0_{2,2m}\ ,$$

$$C_{43}=p_2^2\sinh p_2^*-\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m-1}E^0_{3,2m-1},\ C_{44}=p_2^2\cosh p_2^*+\sum_{m=1}^{\infty}\gamma_{2m}E^0_{4,2m}\ .$$

The frequency equation (1) is simplified, but does not break up into two equations describing even and odd frequencies

$$p_2\cosh p_2^*\tilde{C}_{11}\begin{vmatrix}\tilde{C}_{32} & C_{34}\\ \tilde{C}_{42} & C_{44}\end{vmatrix}-p_2\sinh p_2^*\tilde{C}_{11}\begin{vmatrix}\tilde{C}_{11} & C_{13}\\ \tilde{C}_{41} & C_{43}\end{vmatrix}=0\ ,$$

where

$$\tilde{C}_{11}=p_2\cosh p_2^*C_{11}-p_1\cosh p_1^*C_{13},\ \tilde{C}_{32}=p_2\sinh p_2^*C_{32}-p_1\sinh p_1^*C_{34},$$
$$\tilde{C}_{41}=p_2\cosh p_2^*C_{41}-p_1\cosh p_1^*C_{43},\ \tilde{C}_{42}=p_2\sinh p_2^*C_{42}-p_1\sinh p_1^*C_{44}.$$

It can be shown that in the remaining different cases of fastening of two plate contours, the frequency equation does not break up into even and odd frequencies.

Now consider the second problem [12] about the vibration of an elastic plate that separates horizontally ideal liquid of different density in a rectangular channel with one rigid and another elastic base in the form of a rectangular plate. For the case of constrained circuits, the following frequency equation was derived in [12]

$$\left|\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{8}\right|=0\,. \tag{3}$$

Here

$$C_{1k}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{11n}E^0_{1kn},\ C_{1,k+4}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E^0_{2kn},\ C_{2k}=C^0_{11k},\ C_{2,k+4}=0\,,$$

$$C_{3k}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{11n}E^0_{1kn}(-1)^n\,,C_{3,k+4}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E^0_{2kn}(-1)^n,\ C_{4k}=C^0_{12k},\ C_{2,k+4}=0\,, \tag{4}$$

$$C_{7k}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{21n}E_{1kn}^{0}\left(-1\right)^{n},C_{7,k+4}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{22n}E_{2kn}^{0}\left(-1\right)^{n},\ C_{8k}=0,\ C_{8,k+4}=C_{22k}^{0},$$

$$\tilde{a}_{11n}=1+a_{11n}=\frac{\tilde{T}_{2n}T_{1n}}{\Delta_n},\ \tilde{a}_{22n}=1+a_{22n}=\frac{\tilde{T}_{1n}T_{2n}}{\Delta_n},\ C_{ijk}^{0}=\left.\frac{\mathrm{d}\,w_{ik}^{0}}{\mathrm{d}\,x}\right|_{\gamma_j},$$

$$\mathfrak{L}_{ijpk}^{0}=\left.\left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[w_{ik}^{0}\right]\right)\right|_{\gamma_j},\ \mathfrak{L}_{ijpn}=\left.\left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[\psi_n\right]\right)\right|_{\gamma_j},\ E_{ikn}^{0}=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}w_{ik}^{0}\psi_n dx,$$

w_{ik}^{0} ($k=\overline{1,4}$) a fundamental system of solutions of the homogeneous equation

$$\frac{d^4w_{ik}^{0}}{dx^4}-p_i\frac{d^2w_{ik}^{0}}{dx^2}+q_iw_{ik}^{0}=0\ \left(p_i=\frac{T_i}{D_i},\ q_i=\frac{g\Delta\rho_i-k_{0i}\omega^2}{D_i}\right), \qquad (5)$$

When the plates degenerate into membranes ($D_i=0$), equation (3) is rewritten as follows [8]

$$\left|\left\|C_{qr}\right\|_{q,r=1}^{4}\right|=0, \qquad (6)$$

and the relations (4) take the form

$$C_{1k}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{11n}E_{1kn}^{0},\ C_{1,k+2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E_{2kn}^{0},$$

$$C_{2k}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{11n}E_{1kn}^{0}\left(-1\right)^{n},\ C_{3,k+2}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{12n}E_{2kn}^{0}\left(-1\right)^{n}, \qquad (7)$$

$$C_{4k}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{21n}E_{1kn}^{0}\left(-1\right)^{n},\ C_{4,k+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_{22n}E_{2kn}^{0}\left(-1\right)^{n}\quad (k=\overline{1,2}).$$

We simplify the frequency equations (3) and (6) in the case of clamped contours.

The case of two membranes ($D_1=D_2=0$). In the case of membranes the frequency equation has the form (6) with the coefficients (7). First we consider the case $q_i<0$ ($g\Delta\rho_i-k_{0i}\omega^2<0$). In this case the coefficients E_{ikn}^{0} will take the form [8]

$$E_{ikn}^{0}=\frac{T_i p_i}{ad_{in}}\left\{\left[\left(-1\right)^n-1\right]\cos p_i^*,\left[\left(-1\right)^n+1\right]\sin p_i^*\right\}. \tag{8}$$

Here $p_i^2=-q_i>0$, $p_i^*=p_i a$.

Performing transformations with rows and columns of the determinant of equation (6), as in the first problem, we obtain

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m-1}E_{11,2m-1}^{0} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m-1}E_{21,2m-1}^{0} \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m-1}E_{11,2m-1}^{0} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m-1}E_{21,2m-1}^{0} \end{vmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{11,2m}E_{12,2m}^{0} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{12,2m}E_{22,2m}^{0} \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty}a_{21,2m}E_{12,2m}^{0} & \sum\limits_{m=1}^{\infty}\tilde{a}_{22,2m}E_{22,2m}^{0} \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

Equation (8) splits into two equations describing asymmetric and symmetrical frequencies. Taking into account relations (8), these equations can be written in a unified form for asymmetric and symmetric frequencies

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_n\left(\omega^2\tilde{a}_{1n}-k_n\tilde{d}_{1n}\right)}{\tilde{\Delta}_n}\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_n\left(\omega^2\tilde{a}_{2n}-k_n\tilde{d}_{2n}\right)}{\tilde{\Delta}_n}\right)-\omega^4\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{k_n b_n}{\tilde{\Delta}_n}\right)^2=0. \tag{10}$$

Here

$$\tilde{a}_{in}=a_{in}+k_n k_{0i},\ \tilde{d}_{in}=T_i k_n^2+g\Delta\rho_i,$$
$$\tilde{\Delta}_n=\left(\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{2n}-b_n\right)\omega^4-\left(\tilde{a}_{1n}\tilde{d}_{2n}+\tilde{a}_{2n}\tilde{d}_{1n}\right)k_n\omega^2+k_n^2\tilde{d}_{1n}\tilde{d}_{2n}.$$

The case $q_i>0$ is considered similarly, and in this case the equations for asymmetric and symmetrical frequencies are also represented in a unified form (10).

The case of the membrane and the plate ($D_1=0,\ D_2\neq 0$). In the case of the upper membrane and the lower plate, with $q_1<0$ ($q_1=\left(g\rho_1-k_{01}\omega^2\right)/T_1<0$) for the membrane and $q_2<0$

($q_2 = \left(g\Delta\rho - k_{02}\omega^2\right)\Big/D_2$) for the plate, the frequency equation, by analogy with the previous subsection, can be reduced to the form

$$\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1}E^0_{11,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{21,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1}E^0_{23,2m-1} \\ 0 & \tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{21}\cosh\tilde{p}^*_{21} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m}E^0_{12,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m}E^0_{22,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m}E^0_{24,2m} \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m}E^0_{12,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m}E^0_{22,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m}E^0_{24,2m} \\ 0 & \tilde{p}_{21}\sinh\tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{22}\sinh\tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (11)$$

It follows from (11) that in the case of a membrane and a plate ($D_1 = 0,\ D_2 \neq 0$) $q_i < 0$, equation (3) again splits into two equations describing asymmetrical and symmetrical frequencies.

The case of two plates ($D_1 \neq 0,\ D_2 \neq 0$). In the case of fixed two plates, the coefficients C_{qr} will be calculated from formulas (4).

First we consider the second case $q_i < 0$ ($q_i = \dfrac{g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2}{D_i}$). In this case the coefficients E^0_{ikn} will take the form

$$E^0_{i1n} = \frac{\tilde{p}_{i1}\cosh\tilde{p}^*_{i1}}{a\left(k_n^2 + \tilde{p}_{i1}^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E^0_{i2n} = \frac{\tilde{p}_{i1}\sin\tilde{p}^*_{i1}}{a\left(k_n^2 + \tilde{p}_{i1}^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

$$E^0_{i3n} = \frac{\tilde{p}_{i2}\cosh\tilde{p}^*_{i2}}{a\left(k_n^2 - \tilde{p}_{i2}^2\right)}\left[(-1)^n - 1\right], \quad E^0_{4n} = -\frac{\tilde{p}_2\sin\tilde{p}^*_{i2}}{a\left(k_n^2 - \tilde{p}_{i2}^2\right)}\left[(-1)^n + 1\right],$$

where $\tilde{p}^2_{i1,i2} = \pm p_i/2 + \sqrt{p_i^{\,2}/4 - q_i}$, $\tilde{p}^*_i = a\tilde{p}_i$, ($i = 1, 2$).

Carrying out analogous transformations with rows and columns of the determinant of equation (3), we obtain

$$\begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1} E^0_{11,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m-1} E^0_{13,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1} E^0_{21,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m-1} E^0_{23,2m-1} \\ \tilde{p}_{11} \cosh \tilde{p}^*_{11} & \tilde{p}_{12} \cos \tilde{p}^*_{12} & 0 & 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1} E^0_{11,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m-1} E^0_{13,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1} E^0_{21,2m-1} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m-1} E^0_{23,2m-1} \\ 0 & 0 & \tilde{p}_{21} \cosh \tilde{p}^*_{21} & \tilde{p}_{22} \cos \tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m} E^0_{12,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{11,2m} E^0_{14,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m} E^0_{22,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{12,2m} E^0_{24,2m} \\ \tilde{p}_{11} \sinh \tilde{p}^*_{11} & \tilde{p}_{12} \sin \tilde{p}^*_{12} & 0 & 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m} E^0_{12,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} a_{21,2m} E^0_{14,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m} E^0_{22,2m} & \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_{22,2m} E^0_{24,2m} \\ 0 & 0 & \tilde{p}_{21} \sinh \tilde{p}^*_{21} & -\tilde{p}_{22} \sin \tilde{p}^*_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Thus, in the case of equation (3) it splits into two equations describing asymmetric and symmetrical frequencies.

Conclusions. The frequency equations are simplified in the problem of the vibration of an elastic plate that horizontally separates ideal liquids of different density in a rectangular channel with two rigid bases and in a problem with one rigid and another elastic base in the form of a rectangular plate. The first problem shows that if both contours of the plate are supported or free, then the frequency equation, like for the two clamped circuits, again breaks up into two equations describing the even and odd frequencies. For mixed methods of fixing the contours of plate, the frequency equation is not simplified. In the second problem, for the case of clamped contours of two plates, it is shown that the frequency equation splits into two equations describing even and odd frequencies.

REFERENCES

1. ***IL'gamov M. A.*** On the stability of elastic plates between liquids of different density / M. A. IL'gamov, J. M. Sahabutdinov // Selected Problems of Applied Mechanics. Collection of articles on his sixtieth Acad. Chelomei – Moskow: Mashinostroenie, 1974. – P. 341–346 (in Russian).

2. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid divided elastic plate in a rectangular channel / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Theor. and appl. mech. – 2002. – No. 36. – P. 170–176 (in Russian).

3. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid with elastic membranes on the «free» and the inner surfaces / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Akustichesky vestnik. – 2003. – Vol. 6. – No 4. – P. 44–52 (in Russian).

4. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel c elastic bottom / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Appl. gidromehanika – 2008. – No 1. – P. 33–38 (in Russian).

5. ***Kononov Yu. N.*** Oscillations of a rectangular membrane separating the ideal fluid of different density in a rectangular channel with rigid bases / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Visnyk Donetsk nat. un-ty. Ser. A. Prirodnichi sci. – 2015.– No 1–2. – P. 97–108 (in Russian).

6. ***Kononov Yu. N.*** On the stability of oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with rigid bases / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Problems of computational mechanics and strength of structures.Col. of sci.art.– 2016. – Vol 25. – P. 69–84. (in Russian)

7. ***Kononov Yu. M.*** Stability oscillation plate that separates the ideal fluid varying density in a rectangular channel [Electronic resource] / Yu. M. Kononov, O. O. Lymar // Conference of Young Scientists «Pidstryhachivski chitannia» – 2016. – Access mode: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf (in Ukraine).

8. ***Kononov Yu. N.*** On the oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with one elastic base / Yu. N. Kononov, A. A. Lymar // Problems of computftional mechanics and strength of structures. Col. of sci. art. – 2017. – Vol. 26. – P. 79–96. (in Russian).

9. ***Kononov Yu. N.*** Axisymmetric oscillations of elastic bases and an ideal fluid in a rigid circular cylindrical tank / Yu. N. Kononov, Yu. A. Dzhukha // Visnyk Zaporizhzhya nat. un-ty. Ser.: Phys.-math. sci. – 2016. – No 1. – P. 103–115 (in Russian).

10. ***Pozhalostin A .A.*** Free axisymmetrical oscillations of a two-layer fluid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension forces / A. .A. Pozhalostin, D. Goncharov // Science and Innovation: Engineering magazine. – Electronic data. – [Moscow: MSTU. N.E. Bauman 2013]. – No 12. – Access mode: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (in Russian).

11. ***Trotsenko V. A.*** Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface / V. A. Trotsenko // Appl. mech. – 1995. – Vol. 31. – No 8. – P. 74–80 (in Russian).

12. ***Kononov Yu. M.*** Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel / Yu. M. Kononov, A. Lymar // Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky (Kyiv, Ukraine). – Vinnytsa, 2016. – P. 79–80.

Миколаївський аграрний університет,
Україна

Надійшла до редколегії 04.04.2017