ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
Комп’ютерна система для дистанційного навчання.
Частина II

Навчальний посібник

Миколаїв
МНАУ
2017

УДК 512:514:517
П69

Авторський колектив
В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк,
В.Г. Богза, О.В. Цепуріт, С.І. Богданов,
О.В. Шептилевський

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Миколаївського національного аграрного університету від 24.10.2017, протокол № 2

Рецензенти

В. О. Поздєєв	– д-р фіз-мат. наук, професор, зав. кафедри математики Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського
Ю. П. Кондратенко	– д-р техн. наук, професор, Заслужений винахідник України, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили

П69 **Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання.** – у 2-х ч. – ч. 2 / [В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін.] – Миколаїв : МНАУ, 2017. – 388 с.
ISBN 978-617-7149-26-1

В навчальному посібнику наведено теоретичний і практичний матеріал з тем курсу вищої математики „Диференціальне числення функції однієї змінної", „Інтегральне числення функції однієї змінної", „Функції багатьох змінних", „Диференціальні рівняння", „Числові та функціональні ряди", „Кратні та криволінійні інтеграли". Відповідає вимогам нормативних програм вищої школи України.

Це видання призначено для здобувачів вищої освіти технічних і економічних спеціальностей денної та заочної форм навчання вищих навчальних закладів III-IV рівня акредитації.

УДК 512:514:517

ISBN 978-617-7149-26-1

Зміст

ВСТУП

Враховуючи тенденції розвитку науки і техніки, економіки й виробництва, практично не можливо визначити галузь діяльності людини, яка б не потребувала певної математичної підготовки. Праця все далі стає висококваліфікованою, вимагає безперервної розумової діяльності, аналізу складних процесів, правильних логічних висновків. Суспільство потребує спеціалістів з чітким мисленням, глибокими математичними знаннями й уміннями бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях. Останнім часом математика перетворилася на повсякденний інструмент досліджень у всіх галузях науки і техніки. Тому вдосконалення процесу навчання математики у вищих навчальних закладах є актуальною задачею сьогодення.

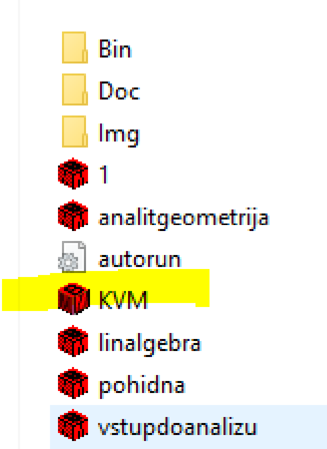
«Практикум з вищої математики: комп’ютерна система для дистанційного навчання. Частина 2», включає розділи: «Диференціальне числення функції однієї змінної. Похідна та її застосування», «Інтегральне числення функції однієї змінної», «Функції багатьох змінних», «Диференціальні рівняння», «Числові та функціональні ряди», «Кратні та криволінійні інтеграли», що є обов’язковими для вивчення в курсі «Вища математика» для переважної більшості технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації.

Підвищення ефективності практичних занять можливе за рахунок вдосконалення методики їх проведення, збільшення часу самостійної роботи та підвищення ефективності контролю за виконанням завдань. Тому надзвичайно важливою складовою розробленого практикуму з вищої математики є комп’ютерна система, яка дозволяє здобувачам вищої освіти дистанційно отримувати допуск до практичного заняття та вирішувати завдання достроково або після проведення аудиторного заняття, якщо студент не встиг повністю виконати запланований обсяг роботи. Для кожного студента за допомогою комп’ютерних датчиків випадкових чисел генерується параметр α, на його основі формується індивідуальне завдання, контролюється час його виконання і в разі перевищення часу поточне завдання блокується і формується нове. Всі спроби здобувача вищої освіти фіксуються на сервері бази даних в електронному журналі викладача.

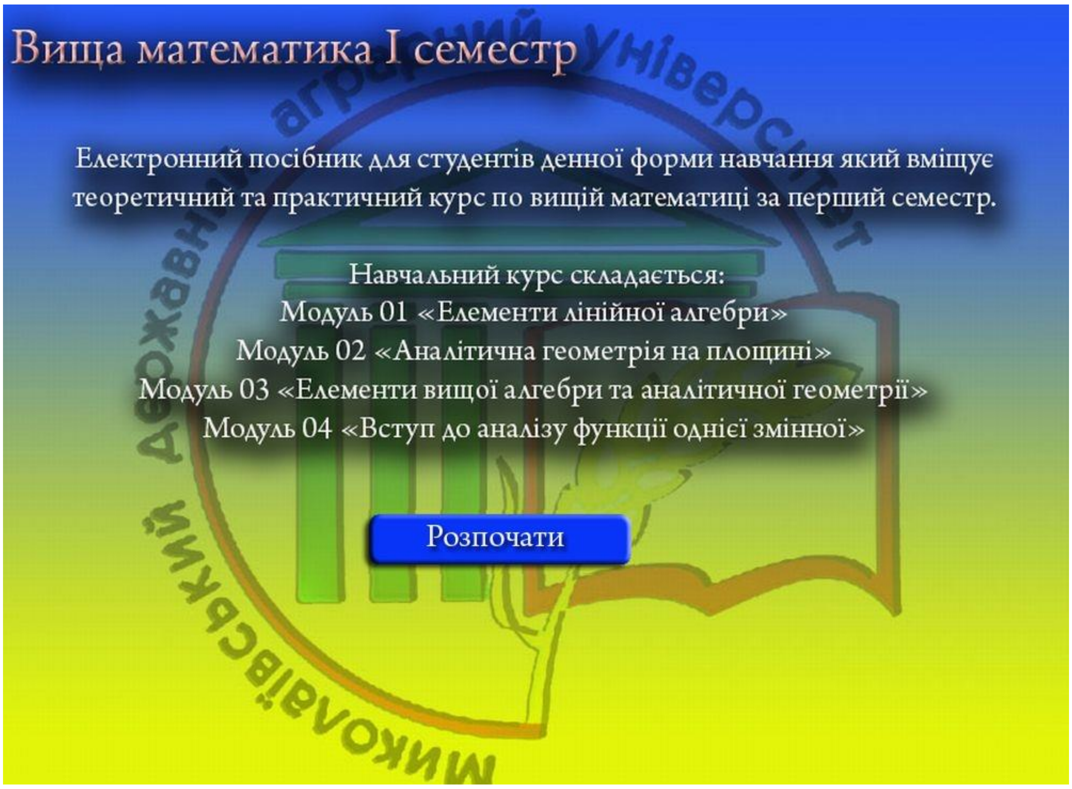
Процес автоматизації контролю та перевірки завдань дозволяє значно оптимізувати навчальний процес.

Інструкція користувача комп'ютерної системи для дистанційного навчання:

Після завантаження та розпаковки файлів для початку роботи запустіть файл KVM.exe, його виділено на рисунку:

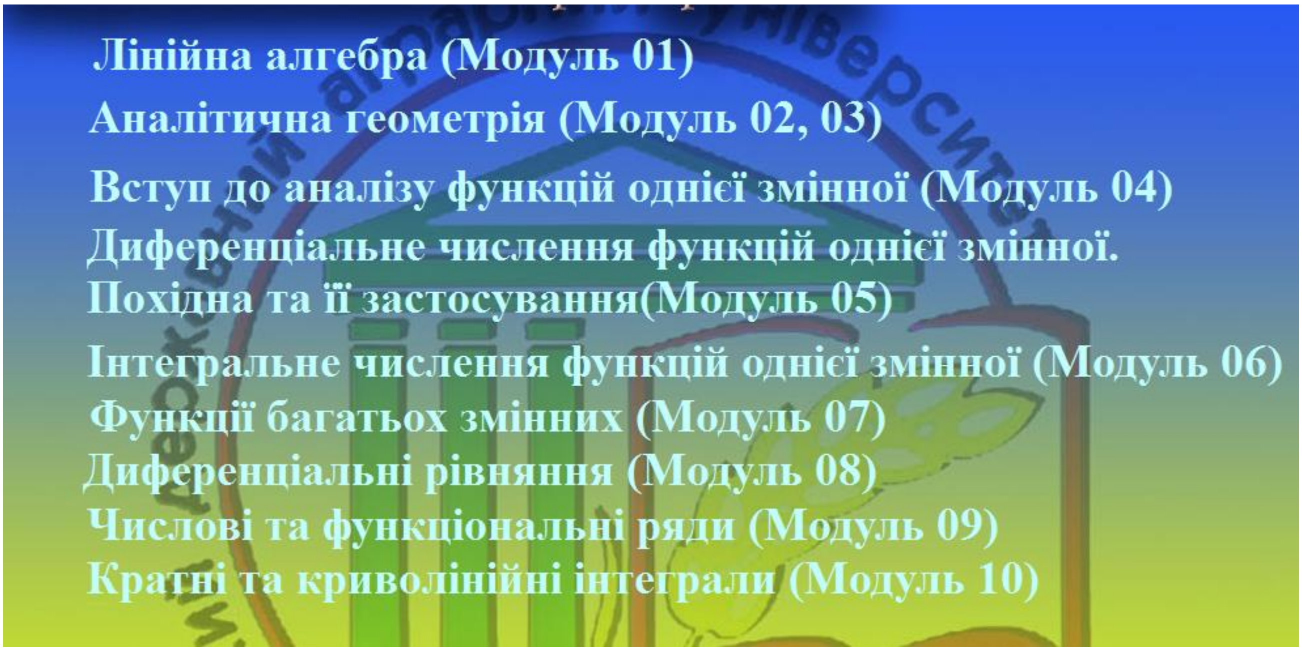


Вітальне вікно, що з'являється після завантаження системи:

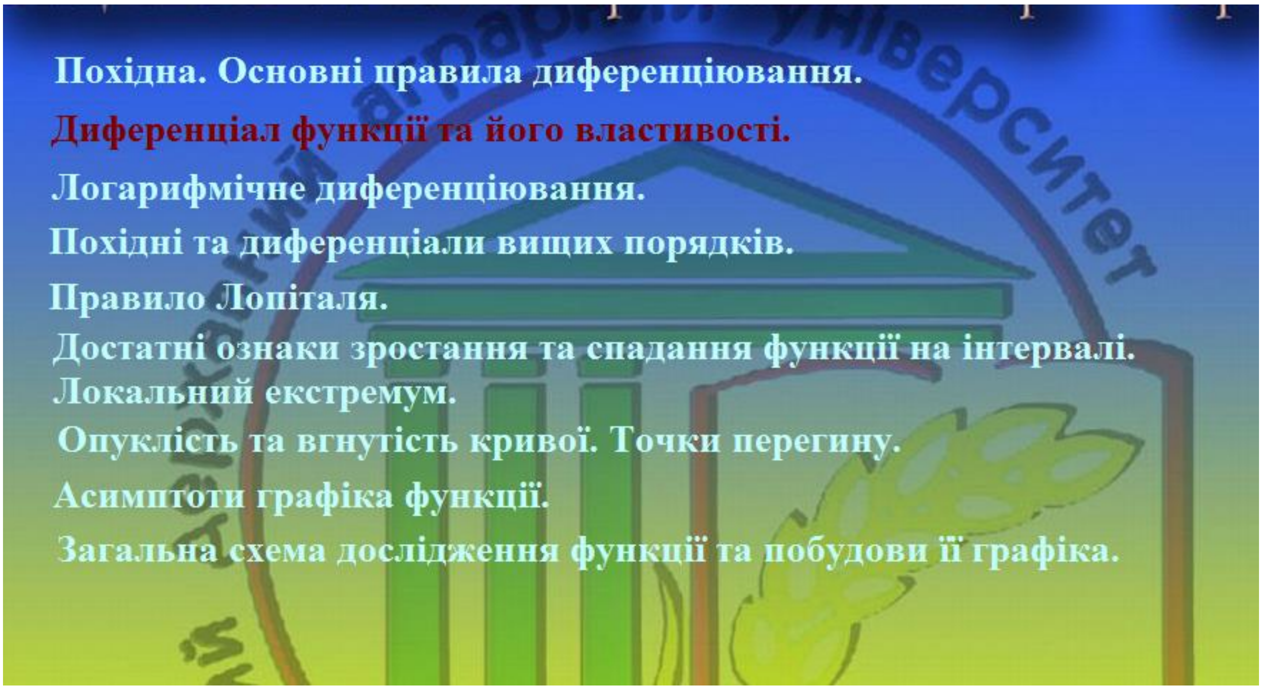


Вікно вибору в якому можливі переходи для вивчення навчального матеріалу: (- конспект лекцій, - практика, - довідниковий матеріал):

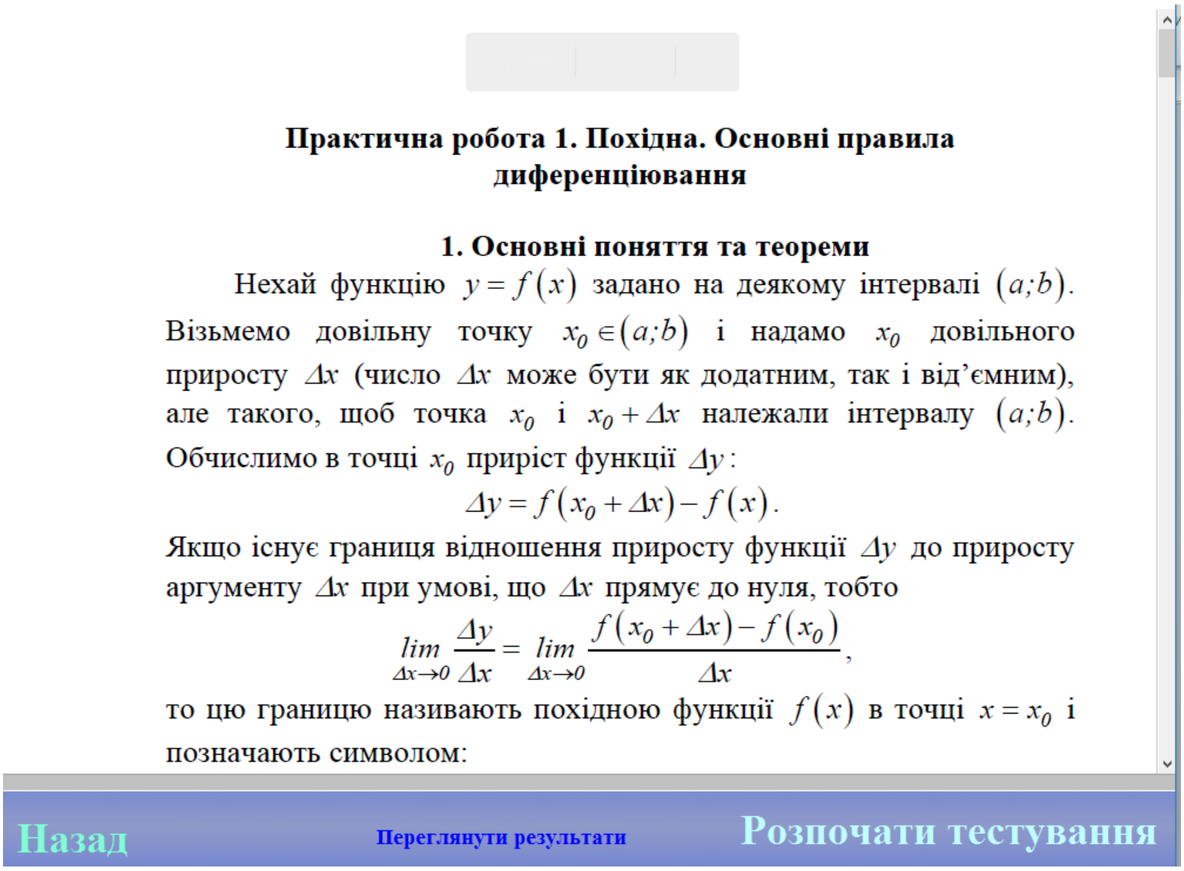
Розділ практики вміщує запропоновані навчальні модулі представленні у електронному додатку:



Після вибору модуля виконується перехід до вікна вибору практичної роботи:



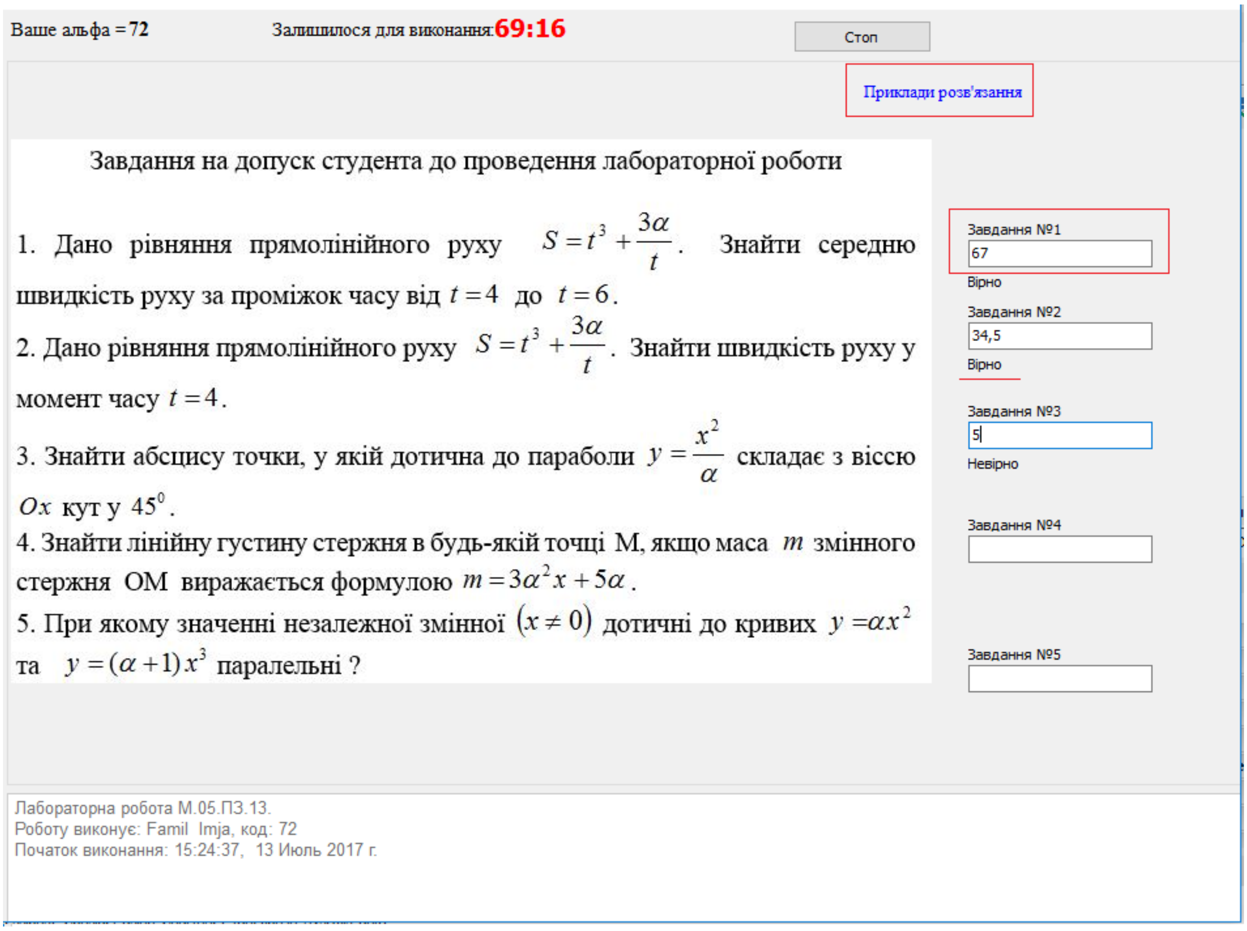
В практичній роботі користувач може ознайомитись з коротким теоретичним матеріалом і приступити до виконання роботи у формі комп'ютерного тесту:



Вітальне вікно тестуючої програми

Вітальне вікно комп’ютерної лабораторної роботи. На цьому етапі запропоновано ознайомитися з загальними правилами ведення розрахунків або перейти до виконання допуску.

Вікно, допуску до виконання, має три візуальних зони:

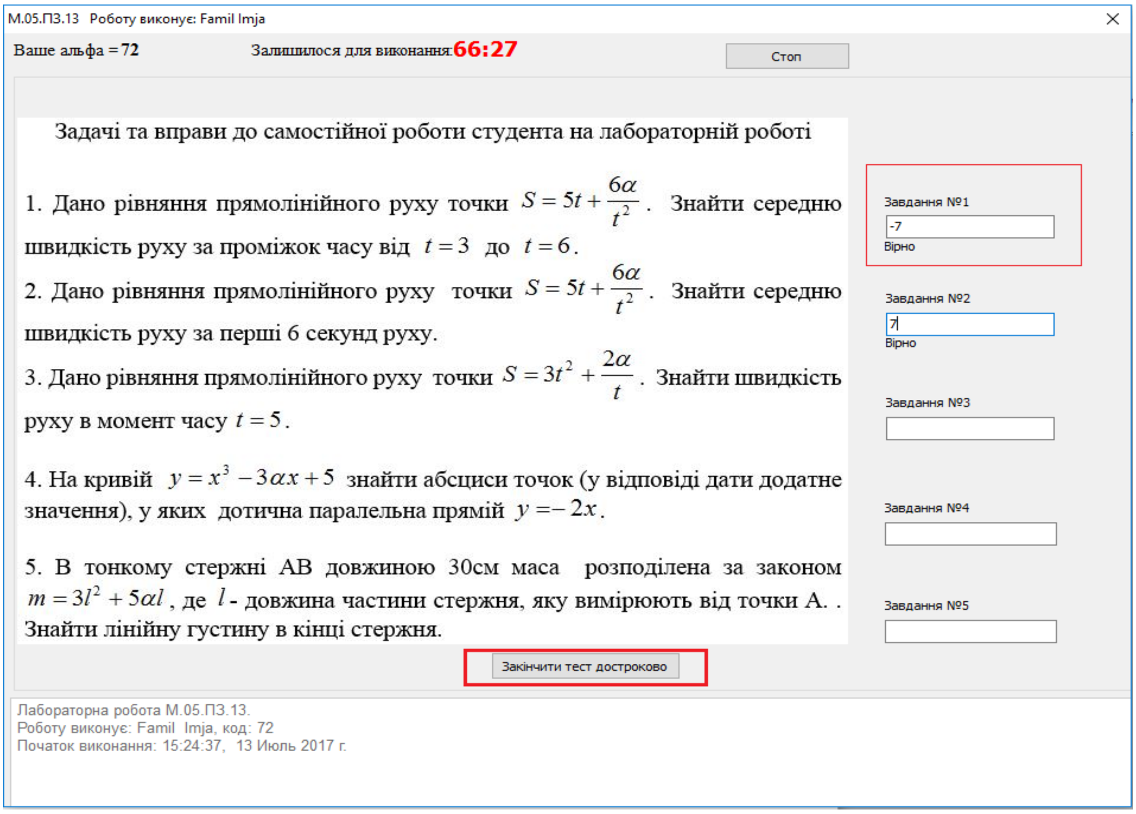


1 – Випадкова складова умов запропонованих задач, таймер що показує залишок часу на виконання.

2 – Умови задач для виконання, поля для вводу відповідей з індикатором правильної відповіді і гіперпосилання на приклади виконання подібних завдань(при виконанні роботи на оцінку ця функція не доступна)

3 – Загальна інформація по виконанню: Прізвище, ім'я, по батькові, група, параметр α, час початку виконання, по завершенню виконання доповнюється результатом виконання і часом завершення.

При задовільному результаті виконання допуску програма автоматично виконає перехід до вікна роботи на оцінку.



Вікно виконання роботи на оцінку візуально має вигляд як вікно допуску. В цьому режимі відсутня можливість перегляду прикладів розв'язання і результат виконаної роботи можна зберегти достроково.

Для використання навчального посібника без комп'ютерної системи здобувач вищої освіти отримує значення параметра α у викладача.

Посібник та комп'ютерна система забезпечені необхідним теоретичним матеріалом та прикладами виконання практичних завдань.

Для роботи з комп'ютерною системою необхідно звернутися до відповідального за електронною адресою atamanyuk@mnau.edu.ua

РОЗДІЛ 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Практична робота 1. Похідна. Основні правила диференціювання

1. Основні поняття та теореми

Нехай функцію $y=f(x)$ задано на деякому інтервалі $(a;b)$. Візьмемо довільну точку $x_0\in(a;b)$ і надамо x_0 довільного *приросту аргументу* Δx (число Δx може бути як додатним, так і від’ємним), але такого, щоб точка x_0 і $x_0+\Delta x$ належали інтервалу $(a;b)$. Обчислимо в точці x_0 *приріст функції* Δy:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x).$$

Якщо існує границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx при умові, що Δx прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то цю границю називають *похідною функції* $f(x)$ в точці $x=x_0$ і позначають символом:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну в кожній внутрішній точці x проміжку $(a;b)$, то похідну позначатимемо y', або $f'(x)$

Щоб знайти значення похідної функції $f(x)$ в даній точці x_0, треба:

1. Значенню x_0 надати довільного приросту Δx, тобто розглянути точку $x_0+\Delta x$.
2. Знайти приріст Δy функції у точці x_0:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x).$$

3. Знайти відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

4. Знайти границю відношення:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x},$$

якщо границя існує, то вона й дорівнює похідній $f'\left(x\right)$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано рівняння прямолінійного руху: $S=t^3+\dfrac{3\alpha}{t}$.

Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t=4$ до $t=6$.

2. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S=t^3+\frac{3\alpha}{t}.$$

Знайти швидкість руху у момент часу $t=4$.

3. Знайти абсцису точки, у якій дотична до параболи $y=\dfrac{x^2}{\alpha}$ утворює з віссю Ox кут 45°.

4. Знайти лінійну густину стержня в будь-якій точці M, якщо маса m змінного стержня OM виражається формулою $m=3\alpha^2x+5\alpha$.

5. При якому значенні незалежної змінної $\left(x\neq 0\right)$ дотичні до кривих $y=\alpha x^2$, та $y=\left(\alpha+1\right)x^3$ паралельні?

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S=t^3+\frac{30}{t}.$$

Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t=4$ до $t=6$.

Розв'язання: Величиною середньої *швидкості руху точки* за проміжок часу Δt називають відношення $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$:

$$V_c=\frac{\Delta S}{\Delta t},$$

$$V_c=\frac{S\left(t+\Delta t\right)-S\left(t\right)}{\Delta t}.$$

Знайдемо приріст шляху ΔS за проміжок часу Δt:

$$\Delta S=\left(t+\Delta t\right)^3+\frac{30}{t+\Delta t}-t^3-\frac{30}{t}=$$

$$=t^3+3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3+\frac{30}{t+\Delta t}-\frac{30}{t}-t^3=$$
$$=3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3+\frac{30}{t+\Delta t}-\frac{30}{t}.$$

Тоді величина середньої швидкості за проміжок часу Δt:

$$V_c=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{3t^2\Delta t+3t\Delta t^2+\Delta t^3+\frac{30}{t+\Delta t}-\frac{30}{t}}{\Delta t}=$$
$$=3t^2+3t\Delta t+\Delta t^2+\frac{30}{(t+\Delta t)\Delta t}-\frac{30}{t\Delta t}.$$

Підставивши в цю рівність значення $t=t_1;\ \Delta t=t_2-t_1$ тобто $t=4$, $\Delta t=2$ будемо мати середню швидкість:

$$V_c=3\cdot 4^2+3\cdot 4\cdot 2+2^2+\frac{30}{(4+2)\cdot 2}-\frac{30}{4\cdot 2}=74{,}75.$$

Відповідь: *74,75*.

2. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S=t^3+\frac{30}{t}.$$

Знайти швидкість руху в момент часу $t=4$.

Розв'язання: Величина миттєвої швидкості V_M у даний момент часу t дорівнює похідній від пройденого шляху S по часу t, тобто $V_M=S'$.

$$S=t^3+\frac{30}{t}\Rightarrow V_M=S'=3t^2-\frac{30}{t^2}.$$

Підставимо значення t:

$$V_M=S'=3(4)^2-\frac{30}{4^2}=48-\frac{30}{16}=46{,}125.$$

Відповідь: *46,125*.

3. Знайти абсцису точки, у якій дотична до параболи $y=\frac{x^2}{12}$ складає з віссю Ox кут 45°.

Розв'язання:

$$tg\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x},\ tg\alpha=y',\ y=\frac{x^2}{12},\ y'=\frac{2x}{12}=\frac{x}{6}\Rightarrow 1=\frac{x}{6}\Rightarrow x=6.$$

Відповідь: *6*.

4. Знайти лінійну густину стержня в будь-якій точці M, якщо маса m змінного стержня OM виражається формулою $m = 48x + 20$.

Розв'язання: Відношення $\dfrac{\Delta m}{\Delta x} = \dfrac{m(x+\Delta x) - m(x)}{\Delta x}$ називають *середньою густиною* стержня на проміжку Δx і позначають

$$P_c = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

Границю середньої густини на проміжку Δx при $\Delta x \to 0$ називають *лінійною густиною* стержня і позначають

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} P_c.$$

Знайдемо лінійну густину, знаючи формулу зміни маси

$$P_c = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{48(x+\Delta x) + 20 - (48x + 20)}{\Delta x} = \frac{48x + 48\Delta x + 20 - 48x - 20}{\Delta x} = 48$$

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} P_c = \lim_{\Delta x \to 0} 48 = 48.$$

Відповідь: *48*.

5. При якому значенні незалежної змінної $(x \neq 0)$ дотичні до кривих $y = 46x^2$ та $y = 47x^3$ паралельні?

Розв'язання:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}, \quad tg\beta = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}.$$

Якщо дотичні до кривих паралельні, то тангенси кутів нахилу повинні бути рівні $tg\alpha = tg\beta$, звідки

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \Rightarrow y_1' = y_2'.$$

Маємо

$$y = 46x^2 \text{ та } y = 47x^3 \Rightarrow y' = 92x \text{ та}$$

$$y' = 141x^2 \Rightarrow 92x = 141x^2 \Rightarrow 92 = 141x,$$

$$x = \frac{92}{141} = 0{,}6525.$$

Відповідь: *0,6525*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 15t + \frac{18\alpha}{t^2}.$$

Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 3$ до $t = 6$.

2. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 15t + \frac{18\alpha}{t^2}.$$

Знайти швидкість руху за перші 6 секунд руху.

3. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 15t^2 + \frac{10\alpha}{t}.$$

Знайти швидкість руху у момент часу $t = 5$.

4. При яких значеннях незалежної змінної $\left(x > 0\right)$ дотична до кривої $y = x^3 - 3\alpha x + 15$ паралельна прямій $y = -2x + 10$?

5. В тонкому стержні AB довжиною 30 см маса розподілена за законом $m = 3x^2 + 5\alpha x + 15$, де x – довжина частини стержня, яку вимірюють від точки A. Знайти лінійну густину в кінці стержня.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 5t + \frac{60}{t^2}.$$

Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 3$ до $t = 6$.

Розв'язання:

Величиною середньої швидкості руху точки за проміжок часу Δt називають відношення $\frac{\Delta S}{\Delta t}$:

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

$$V_c = \frac{S\left(t + \Delta t\right) - S\left(t\right)}{\Delta t}.$$

Знайдемо приріст шляху ΔS за проміжок часу Δt:

$$\Delta S = 5\left(t + \Delta t\right) + \frac{60}{\left(t + \Delta t\right)^2} - 5t - \frac{60}{t^2} =$$

$$= 5t + 5\Delta t + \frac{60}{\left(t + \Delta t\right)^2} - 5t - \frac{60}{t^2} =$$

$$= 5\Delta t + \frac{60}{\left(t + \Delta t\right)^2} - \frac{60}{t^2}.$$

Тоді величина середньої швидкості за проміжок часу Δt:

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = 5 + \frac{60}{\left(t + \Delta t\right)^2 \Delta t} - \frac{60}{t^2 \Delta t}.$$

Підставивши в цю рівність значення $t = t_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$ тобто $t = 3$, $\Delta t = 3$ будемо мати середню швидкість:

$$V_c = 5 + \frac{60}{\left(3 + 3\right)^2 \cdot 3} - \frac{60}{3^2 \cdot 3} = 5 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}333.$$

Відповідь: *3,333*.

2. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 5t + \frac{60}{t^2}.$$

Знайти швидкість руху за перші 6 секунд руху.

Розв'язання:

$$t_2 = 6,\ t_1 = 0,$$

$$V_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{5t + \frac{60}{t_2^2}}{t_2},$$

$$V_c = \frac{5 \cdot 6 + \frac{60}{36}}{6} = 5 + \frac{10}{36} = 5{,}27.$$

Відповідь: *5,27*.

3. Дано рівняння прямолінійного руху:

$$S = 3t^2 + \frac{20}{t}.$$

Знайти швидкість руху в момент часу $t = 5$.

Розв'язання:

$$V = S' = 6t - \frac{20}{t^2} = 6 \cdot 5 - \frac{20}{25} = 29{,}2\,.$$

Відповідь: *29,2*.

4. При яких значеннях незалежної змінної $(x > 0)$, дотична до кривої $y = x^3 - 3\alpha x + 15$ паралельна прямій $y = -2x + 10$?

Розв'язання: В точці дотику кутовий коефіцієнт дотичної $k = -2$ дорівнює значенню похідної $y' = 3x^2 - 30$, підрахованої в точці.

$$3x^2 - 30 = -2 \Rightarrow 3x^2 = 28 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{\frac{28}{3}} < 0,\; x_2 = \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3{,}055.$$

Відповідь: *3,055*.

5. В тонкому стержні AB довжиною 30 см маса розподілена за законом $m = 3x^2 + 50x$, де x – довжина частини стержня, яку вимірюють від точки A. Знайти лінійну густину в кінці стержня.

Розв'язання:

$$m = 3x^2 + 50x \Rightarrow P = m' = 6x + 50 = 6 \cdot 30 + 50 = 230\,.$$

Відповідь: *230*.

Практична робота 2. Диференціал функції та його властивості

1. Основні поняття та теореми

Диференціалом функції називається величина, що пропорційна нескінченно малому приросту аргументу Δx і відрізняється від відповідного приросту функції на нескінченно малу величину вищого порядку ніж Δx. Диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають лінеаризацією процесу.

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції $f(x)$ в цій точці:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $y' = x' = 1$, тому $dy = dx = \Delta x$, тобто диференціал dx незалежної змінної x збігається з її приростом Δx. Отже:

$$dy = f'(x)dx$$

Властивості диференціалу:

$$dC = 0; \qquad d(uv) = vdu + udv;$$

$$d(Cu) = Cdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv;$$

Застосування диференціала в наближених обчисленнях:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти приріст функції $y = x^2 - \alpha x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0{,}1$.

2. Знайти диференціал функції $y = x^2 - \alpha x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0{,}1$.

3. Знайти приріст та диференціал функції $y = x^2 - \alpha x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0{,}1$. Знайти відносну похибку, що виникає при заміні приросту диференціалом. Відповідь дайте у відсотках.

4. Сторона квадрата дорівнює α. Наскільки збільшиться його площа, якщо кожну сторону збільшити на $0{,}5$ см? Оцінити відносну похибку при заміні приросту його головною частиною. Відповідь дати у відсотках.

5. Знайти диференціал функції $y = \dfrac{\alpha x + 1}{\sqrt{\alpha x - 1}}$ в точці $x = 1$, якщо $\Delta x = 0{,}1$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти приріст функції $y = x^2 - 3x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання: Для функції y приріст Δy знаходиться за формулою:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = \left((10,1)^2 - 3 \cdot 10,1\right) - \left(10^2 - 3 \cdot 10\right) = 1,71.$$

Відповідь: 1,71.

2. Знайти диференціал функції $y = x^2 - \alpha x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання: Диференціал функції дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної.

$$dy = f'(x)dx = \left(x^2 - 3x\right)' dx = (2x - 3)dx \approx (2 \cdot 10 - 3) \cdot 0,1 = 2 - 0,3 = 1,7.$$

Відповідь: *1,7*.

3. Знайти приріст та диференціал функції $y = x^2 - \alpha x$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0,1$. Знайти відносну похибку, що виникає при заміні приросту диференціалом.

Розв'язання:

$$\Delta y = 2,01 - 3 \cdot 0,1 = 1,71,$$

$$dy = 2 - 3 \cdot 0,1 = 1,7$$

$$\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} \cdot 100\% = \frac{|1,71 - 1,7|}{|1,71|} \cdot 100\% = 0,59\%.$$

Відповідь: *0,59%*.

4. Сторона квадрата дорівнює α. Наскільки збільшиться його площа, якщо кожну сторону збільшити на $0,5$ см. Оцінити відносну похибку при заміні приросту його головною частиною. Відповідь дати у відсотках.

Розв'язання: Площа знаходиться: $S = 5^2 = 25$. Площа при збільшені сторони:

$$S^+ = (5 + 0,5)^2 = 30,25,$$

$$\Delta S = S^+ - S = 5,25,$$

$$dS \approx 2 \cdot 5 \cdot 0,5 = 5.$$

Відносна похибка в процентах:

$$\delta = \frac{\left|\Delta S - dS\right|}{\left|\Delta S\right|} \cdot 100\% = \frac{\left|5,25 - 5\right|}{\left|5,25\right|} \cdot 100\% = 4,76\% .$$

Відповідь: *4,76%.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти приріст функції $y = 3x^3 + 2\alpha x - 9$ в точці $x = 1$, якщо $\Delta x = 0,1$.

2. Знайти диференціал функції $y = 3x^3 + 2\alpha x - 9$ в точці $x = 1$, якщо $\Delta x = 0,1$.

3. Знайти приріст та диференціал функції $y = 5x^3 - 3\alpha x + 77$ в точці $x = 10$, якщо $\Delta x = 0,1$. Знайти відносну похибку, що виникає при заміні приросту диференціалом. Відповідь дайте у відсотках.

4. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції

$$y = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha - x}{\alpha + x}} \text{ при } x = 0,15 .$$

5. Мідний кубик, ребро якого $\alpha + 40$ см, піддали рівномірній обробці з усіх сторін. Знаючи, що вага його зменшилась на 960 г і вважаючи, що питома вага міді дорівнює 8, визначити на скільки зменшились розміри кубика, тобто на скільки скоротилося ребро.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти приріст функції $y = 3x^3 + x - 1$ в точці $x = 1$, якщо $\Delta x = 0,1$.

Розв'язання: Для функції y приріст Δy знаходиться за формулою:

$$\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$$

$$\Delta y = \left(3\left(x + \Delta x\right)^3 + \left(x + \Delta x\right) - 1\right) - \left(3x^3 + x - 1\right) = 9x^2 \Delta x + 9x \Delta x^2 + 3\Delta x^3 + \Delta x =$$

$$= 9 \cdot 1^2 \cdot 0,1 + 9 \cdot 1 \cdot 0,1^2 + 3 \cdot 0,1^3 + 0,1 = 1,093 .$$

Відповідь: 1,093.

2. Знайти диференціал функції $y=3x^3+x-1$ в точці $x=1$, якщо $\Delta x=0,1$.

Розв'язання: Диференціал функції дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної.

$$dy=f'(x)dx=\left(3x^3+x-1\right)'dx=\left(9x^2+1\right)dx\approx\left(9\cdot 1^2+1\right)\cdot 0,1=1.$$

Відповідь: 1.

3. Знайти приріст та диференціал функції $y=3x^3+x-1$ в точці $x=10$, якщо $\Delta x=0,1$. Знайти відносну похибку, що виникає при заміні приросту диференціалом. Відповідь дайте у відсотках.

Розв'язання:

$$\Delta y=3100,003-3009=91,003,$$

$$dy=f'(x)dx=\left(3x^3+x-1\right)'dx=\left(9x^2+1\right)dx\approx\left(9\cdot 10^2+1\right)\cdot 0,1=90,1$$

$$\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{|\Delta y|}\cdot 100\%=\frac{|91,003-90,1|}{|91,003|}\cdot 100\%=0,99\%.$$

Відповідь: 0,99%.

4. Користуючись поняттям диференціала, знайти наближене значення функції

$$y=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \text{ при } x=0,15.$$

Розв'язання: Нехай $x_1=0$ і $x_2=0,15$. Тоді $dx\approx\Delta x=0,15$. Оскільки $\Delta y=y_2-y_1$, $y_1=1$, а значення y_2- невідоме, то $\Delta y\approx dy$. Знаходимо dy:

$$dy=\left(\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\right)'dx=\left(\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{3}}\right)'dx=\frac{1}{3}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'=-\frac{4dx}{3y^2\left(2+x\right)^2}.$$

$$\Delta y\approx dy=-\frac{4}{3}\cdot\frac{0,15}{1\cdot\left(2+0\right)^2}=-\frac{0,6}{12}=-0,05.$$

Знаходимо y_2

$$y_2=y_1+\Delta y=1-0,05=0,95.$$

Відповідь: *0,95*.

5. Мідний кубик, ребро якого 5 см, піддали рівномірній обробці з усіх сторін. Знаючи, що вага його зменшилась на 960 г і вважаючи, що питома вага міді дорівнює 8, визначити на скільки зменшились розміри кубика, тобто на скільки скоротилося ребро.

Розв'язання: Об'єм куба $V = x^3$, де x- ребро куба. Об'єм дорівнює вазі, яка поділена на питому вагу:

$$V = \frac{P}{d}.$$

Зміна об'єму дорівнює $\Delta V = \frac{960}{8} = 120$ см^3.

Вважаючи $\Delta V \approx dV$ і враховуючи, що $dV = 3x^2 dx$, будемо мати

$$120 = 3 \cdot 5^2 \Delta x$$

звідки

$$\Delta x = \frac{120}{3 \cdot 25} = 1{,}6 \text{ см.}$$

Ребро куба скоротилось на 1,6 см.

Відповідь: *1,6*.

Практична робота 3. Логарифмічне диференціювання

1. Основні поняття та теореми

Якщо потрібно продиференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого складається із добутків, необхідно обидві частини даного виразу спочатку прологарифмувати по основі e, а потім тільки приступати до диференціювання. Даний метод одержав назву метод *логарифмічного диференціювання*.

Цим методом зручно диференціювати вирази, які містять корені з дробів, а також зручно диференціювати *степенево-показникову* функцію, тобто функцію виду

$$y = \left(f(x) \right)^{\phi(x)} \tag{1}$$

де основа і показник степені є функціями від x.

Застосуємо даний метод до функції (1).

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\phi(x)},$$

$$\ln y = \phi(x)\cdot \ln f(x)$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y}y' = \phi'(x)\cdot \ln f(x) + \phi(x)\cdot \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),$$

$$y' = y\cdot\left(\phi'(x)\cdot \ln f(x) + \phi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

$$y' = \left(f(x)\right)^{\phi(x)}\left(\phi'(x)\ln f(x) + \phi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right). \qquad (2)$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $y = x^{\alpha + x}$. Знайти $y'(1)$.

2. Дано $y = (\alpha x)^{\frac{1}{x}}$. Знайти $y'(1)$.

3. Дано $y = (\alpha + \sin x)^{2\cos x}$. Знайти $y'(0)$.

4. Дано $y = \dfrac{(x+\alpha)\sqrt[3]{(3-x)^2}}{\sqrt[5]{(x-1)^4}}$. Знайти $y'(2)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $y = x^{-3+2x}$. Знайти $y'(1)$.

Розв’язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$y = x^{-3+2x},$$

$$\ln y = (-3+2x)\cdot \ln x.$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot \ln x + (-3+2x)\cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = x^{-3+2x} \cdot \left(2\ln x + \frac{(-3+2x)}{x} \right),$$

$$y'(1) = -1.$$

Відповідь: *–1*.

2. Дано $y = (2x)^{\frac{4}{x}}$. Знайти $y'(1)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$y = (2x)^{\frac{4}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{4}{x} \cdot \ln(2x).$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y} y' = -\frac{4}{x^2} \cdot \ln(2x) + \frac{4}{x} \cdot \frac{2}{2x},$$

$$y' = (2x)^{\frac{4}{x}} \cdot \left(-\frac{4}{x^2} \cdot \ln(2x) + \frac{4}{x^2} \right),$$

$$y'(1) = 4 \cdot 2^4 \cdot (1 - \ln 2) \approx 19{,}6386.$$

Відповідь: *19,6386*.

3. Дано $y = (10 + \cos x)^{2\sin x}$. Знайти $y'(0)$.

Розв'язання:

Використовуючи метод логарифмічного диференціювання одержимо

$$\ln y = 2\sin x \ln(10 + \cos x),$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частини останньої рівності

$$\frac{1}{y} y' = 2\cos x \ln(10 + \cos x) - 2\sin x \frac{\sin x}{10 + \cos x},$$

$$y' = 2(10 + \cos x)^{2\sin x} \left(\cos x \ln(10 + \cos x) - \frac{\sin^2 x}{10 + \cos x} \right).$$

$$y'(0) = 2\ln 11 \approx 4{,}7958.$$

Відповідь: *4,7958*.

4. Дано $y=\dfrac{(x+5)\cdot\sqrt[4]{(2-x)^3}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}}$. Знайти $y'(0)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$\ln y=\ln(x+5)+\frac{3}{4}\ln(2-x)-\frac{2}{5}\ln(x+1).$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частини останньої рівності

$$y'=\frac{(x+5)\sqrt[4]{(2-x)^3}}{\sqrt[5]{(x+1)^2}}\left(\frac{1}{(x+5)}-\frac{3}{4\cdot(2-x)}-\frac{2}{5\cdot(x+1)}\right),$$

$$y'(0)=\frac{5\sqrt[4]{8}}{\sqrt[5]{1}}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}-\frac{2}{5}\right)=5\sqrt[4]{8}\,\frac{-23}{40}=-\frac{\sqrt[4]{8}\,23}{8}\approx-4{,}8352\,.$$

Відповідь: *–4,8352*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано $y=(x+\alpha)^{arctg\,x}+15$. Знайти $y'(0)$.

2. Дано $y=10x^{\alpha^x}\alpha^x$. Знайти $y'(1)$.

3. Дано $y=7\left(\dfrac{x^3}{\alpha+x}\right)^x$. Знайти $y'(1)$.

4. Дано $y=\dfrac{3\sqrt{x+\alpha}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}+15$. Знайти $y'(0)$.

5. Дано $y=\dfrac{(\alpha-x^2)e^{3x-1}\cos x}{9(\arccos x)^3}+27$. Знайти $y'(0)$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано $y=(x^3+4)^{\cos x}$. Знайти $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$y = \left(x^3 + 4\right)^{\cos x},$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln\left(x^3 + 4\right).$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y} y' = -\sin x \ln\left(x^3 + 4\right) + \cos x \frac{3x^2}{x^3 + 4},$$

$$y' = \left(x^3 + 4\right)^{\cos x} \left(\frac{3x^2 \cos x}{x^3 + 4} - \sin x \ln\left(x^3 + 4\right) \right),$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 4\right)^{\cos x} \left(\frac{3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 0}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 4} - \ln\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + 4\right) \right) = .$$

$$= -\ln\left(\frac{\pi^3 + 32}{8}\right) \approx -3{,}6889$$

Відповідь: *–3,6889*.

2. Дано $y = x^{e^x} e^x$. Знайти $y'(1)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$\ln y = \ln x^{e^x} + \ln e^x,$$

$$\ln y = e^x \ln x + x.$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частини останньої рівності

$$\frac{1}{y} y' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + 1,$$

$$y' = x^{e^x} e^x \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + 1 \right),$$

$$y'(1)=1^{e^1}e^1\left(e^1\ln 1+\frac{e^1}{1}+1\right)=e(e+1)\approx 10,1073.$$

Відповідь: *10,1073*.

3. Дано $y=\left(\dfrac{x^2}{5+x}\right)^x$. Знайти $y'(1)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$\ln y=x\ln x^2-x\ln x(5+x),$$
$$\ln y=2x\ln x-x\ln x(5+x).$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y}y'=2\ln x-2x\frac{1}{x}-\ln(5+x)-x\frac{1}{(5+x)},$$

$$y'=\left(\frac{x^2}{5+x}\right)^x\left(2\ln x+2-\ln(5+x)-\frac{x}{(5+x)}\right),$$

$$y'(1)=\left(\frac{1^2}{5+1}\right)^1\left(2\ln 1+2-\ln(5+1)-\frac{1}{(5+1)}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{11}{6}-\ln 6\right)\approx 0,0069.$$

Відповідь: *0,0069*.

4. Дано $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$. Знайти $y'(4)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання, одержимо

$$y=\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}=\frac{(x+1)^3(x-2)^{\frac{1}{4}}}{(x-3)^{\frac{2}{5}}},$$

$$\ln y=3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3).$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y}y' = 3\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{2}{5}\frac{1}{x-3},$$

$$y' = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right),$$

$$y'(4) = \frac{5^3\sqrt[4]{2}}{1}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5}\right) = 125\sqrt[4]{2}\,\frac{13}{40} = 48{,}3115.$$

Відповідь: *48,3115.*

5. Дано $y = \dfrac{\left(1-x^2\right)e^{2x}\cos x}{(\arccos x)^2}$. Знайти $y'(0)$.

Розв'язання: Використовуючи метод логарифмічного диференціювання одержимо

$$y = \frac{\left(1-x^2\right)e^{2x}\cos x}{(\arccos x)^2},$$

$$\ln y = \ln\left(1-x^2\right) + 2x + \ln\cos x - 2\ln\arccos x$$

Розглядаючи $\ln y$ як складну функцію змінної x, знайдемо похідну від лівої і правої частин останньої рівності

$$\frac{1}{y}y' = \frac{-2x}{1-x^2} + 2 - \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2}{\arccos x\sqrt{1-x^2}},$$

$$y' = \frac{\left(1-x^2\right)e^{2x}\cos x}{(\arccos x)^2}\left(\frac{-2x}{1-x^2} + 2 - \operatorname{tg} x + \frac{2}{\arccos x\sqrt{1-x^2}}\right),$$

$$y'(0) = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(2 + \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4}{\pi^2}\left(2 + \frac{4}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2}\frac{2\pi+4}{\pi} \approx 1{,}3266.$$

Відповідь: *1,3266.*

Практична робота 4. Похідні та диференціали вищих порядків

1. Основні поняття та теореми

1. *Похідна явно заданої функції.*

Нехай функція $f(x)$ задана на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$ і нехай всередині цього проміжку вона має похідну $f'(x)$. Тоді може трапитися випадок, що $f'(x)$, будучи функцією від x, в деякій точці $x_0 \in \langle a;b\rangle$, а, можливо, і в усіх точках цього проміжку, в свою чергу, має похідну. Цю похідну називають похідною другого порядку або другою похідною функції $f(x)$ в точці x_0.

Похідна другого порядку позначається одним з таких символів:

$$y''; \ f''(x) \ ; \ \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \ \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Отже, за означенням

$$y'' = (y')' \tag{1}$$

Аналогічно визначаються і позначаються:

похідна 3-го порядку

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3} = (y'')',$$

похідна 4-го порядку

$$y^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4 y}{dx^4} = (y''')',$$

похідна n-го порядку

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

2. *Похідна від неявно заданої функції.*

Якщо рівняння $F(x;y)=0$, нерозв'язне відносно y, визначає y як однозначну функцію від x, то y називається неявною функцією від x.

Щоб знайти похідну y' від даної неявної функції, необхідно обидві частини рівняння $F(x;y)=0$ продиференціювати по x, розглядаючи y як функцію від x. З отриманого рівняння

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = 0$$

знайти y'_x.

Для знаходження y''_{xx}, необхідно рівняння $F(x,y)=0$ двічі продиференціювати по x і т.д.

3. *Похідна функції, заданої параметрично.*

Якщо система рівнянь

$$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \ \ \alpha<t<\beta, \end{cases}$$

де $\phi(t)$ і $\psi(t)$ – диференційовані функції і $\phi'(t)\neq 0$, визначає y як однозначну неперервну функцію від x, то похідна y'_x існує і

$$y'_x=\frac{\psi'_t(t)}{\phi'_t(t)}=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (2)$$

Похідні вищих порядків обчислюються послідовно

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \text{ або } y''_{xx}=\frac{x'_t y''_{tt}-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}, \qquad (3)$$

$$y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}. \qquad (4)$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $y=\left(x^2+\alpha\right)^3$. Знайти $y''(1)$.

2. Дано $y=xe^{\alpha x}$. Знайти $y''(0)$.

3. Для функції, заданої неявним рівнянням $x^2+y^2=\alpha^2$, знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$ в точці $(0;\alpha)$.

4. Для функції $x(y)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=\alpha t^2, \\ y=t^3 \end{cases}$$

знайти значення $\frac{d^2x}{dy^2}$, що відповідає значенню параметра $t=1$.

5. Для функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \sqrt{\alpha}\, cos\, t, \\ y = \sqrt{\alpha}\, sin\, t \end{cases}$$

знайти значення $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, що відповідає значенню параметра $t = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $y = \left(x^3 + 5\right)^2$. Знайти $y''(1)$.

Розв'язання: Використовуючи формулу (1), дістанемо

$$y' = \left(\left(x^3 + 5\right)^2\right)' = 2\left(x^3 + 5\right) \cdot 3x^2 = 6x^2\left(x^3 + 5\right) = 6x^5 + 30x^2,$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(6x^5 + 30x^2\right)' = 30x^4 + 60x.$$

Знайдемо значення другої похідної в точці $x = 1$

$$y''(1) = 30 \cdot 1^4 + 60 \cdot 1 = 90.$$

Відповідь: 90.

2. Дано $y = x^2 5^{2x}$. Знайти $y''(1)$.

Розв'язання: Використовуючи формулу (1), дістанемо

$$y' = \left(x^2 5^{2x}\right)' = 2x5^{2x} + x^2 5^{2x} \ln 5 \cdot 2,$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(2x5^{2x} + x^2 5^{2x} \ln 5 \cdot 2\right)' =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot x \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot 2 + 2 \cdot x \cdot 5^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 5 + 4 \cdot x^2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln^2 5 =$$
$$= 2 \cdot 5^{2x} + 8 \cdot x \cdot 5^{2x} \cdot \ln 5 + 4 \cdot x^2 \cdot 5^{2x} \cdot \ln^2 5.$$

Знайдемо значення другої похідної в точці $x = 1$

$$y''(1) = 2 \cdot 5^2 + 8 \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot \ln 5 + 4 \cdot 1 \cdot 5^2 \cdot \ln^2 5 =$$

$$= 50 + 200 \cdot \ln 5 + 100 \cdot \ln^2 5 \approx 630,9166.$$

Відповідь: $630,9166$.

3. Для функції, заданої неявним рівнянням $x^3 + y^3 = 5^3$, знайти значення $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ у точці $(1;\ 1)$.

Розв'язання: Згідно з правилами диференціювання неявно заданих функцій одержимо

$$x^3 + y^3 = 5^3,$$

$$3x^2 + 3y^2 y'_x = 0,$$

$$y' = -\frac{x^2}{y^2},$$

$$y''_{xx} = (y')' = \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)' = \frac{-2xy^2 + x^2 2yy'_x}{y^4} =$$

$$= \frac{-2xy^2 + 2x^2 y\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = \frac{-2xy^2 - \dfrac{2x^4}{y}}{y^4} = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}.$$

$$y''_{xx}(1;\ 1) = \frac{-2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1}{y^5} = -4.$$

Відповідь: *–4*.

4. Для функції $x(y)$, заданої параметричними рівняннями $x = 5t^4$, $y = 2t^3$ знайти значення $\dfrac{d^2x}{dy^2}$, що відповідає параметру $t = 1$.

Розв'язання: Оскільки функція $x(y)$ задана параметричними рівняннями, то, згідно з (2) і (3), одержимо

$$\begin{cases} x = 5t^4, \\ y = 2t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 20t^3, \\ y'_t = 6t^2. \end{cases}$$

Тоді

$$x'_y = \frac{dx}{dy} = \frac{20t^3}{6t^2} = \frac{20}{6}t \Rightarrow x''_{yy} = \frac{\left(x'_y\right)'_t}{y'_t} = \frac{\left(\dfrac{20t}{6}\right)'_t}{6t^2} = \frac{\dfrac{20}{6}}{6t^2} = \frac{20}{36t^2},$$

$$x''_{yy}(t = 1) = \frac{20}{36} \approx 0,5556.$$

Відповідь: *0,5556.*

5. Для функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями $x = 5\cos 2t$, $y = 5\sin 2t$ знайти значення $\frac{d^2y}{dx^2}$, що відповідає параметру $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання: Оскільки функція $y(x)$ задана параметричними рівняннями, то, згідно з (2) і (3), одержимо

$$\begin{cases} x = 5\cos 2t, \\ y = 5\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -10\sin 2t, \\ y'_t = 10\cos 2t. \end{cases}$$

Тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{10\cos 2t}{-10\sin 2t} = -ctg 2t,$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_x}{x'_t} = \frac{\left(-ctg 2t\right)'_t}{-10\sin 2t} = \frac{\frac{2}{\sin^2 2t}}{-10\sin 2t} = -\frac{1}{5\sin^3 2t},$$

$$y''_{xx}\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{5\sin^3 \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{5} = -0{,}2.$$

Відповідь: –0,2.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано $y = \left(x^3 + \alpha\right)\cdot e^{4x+3} + 3x + \alpha$. Знайти $y''(0)$.

2. Дано $y = arctg\frac{100x}{\alpha} + 2x^2 + \alpha x + 2\alpha^2$. Знайти $y'''(0)$.

3. Для функції, заданої неявним рівнянням

$$\sqrt{4y + \alpha} - x^2 + 12x - 50\alpha = 0,$$

знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$ в точці $(5;0)$.

4. Для функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{\alpha}t\cos t + 15, \\ y = 3\sqrt{\alpha}t\sin t + 9, \end{cases}$$

знайти значення $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, що відповідає значенню параметра $t=0$.

5. Для функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = 8e^{\frac{-\alpha t}{100}} + 3t + 15, \\ y = t^3, \end{cases}$$

знайти значення $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, що відповідає значенню параметра $t=0$.

5. Приклад виконання задач та вправ на практичному занятті

1. Дано $y=\left(x^2+2\right)e^{2x}$. Знайти $y''(0)$.

Розв'язання: Використовуючи формулу (1), дістанемо

$$y' = 2xe^{2x} + \left(x^2+2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2,$$

$$y'' = \left(y'\right)' = 2\cdot 1\cdot e^{2x} + 2\cdot 2xe^{2x} + 2\cdot 2xe^{2x} + 2\left(x^2+2\right)\cdot e^{2x}\cdot 2 =,$$

$$= 10e^{2x} + 8xe^{2x} + 4x^2e^{2x},$$

$$y''(0) = 10.$$

Відповідь: 10.

2. Дано $y=\dfrac{1}{2}\arcsin x$. Знайти $y'''(0)$.

Розв'язання:

Використовуючи формулу (1), дістанемо

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2\cdot 2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) = -\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y''' = \left(y''\right)' = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(-2x) =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} + \frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{\left(1-x^2\right)^5}},$$

$$y'''(0)=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Відповідь: *0,5*.

3. Для функції, заданої неявним рівнянням

$$\sqrt{5y+2}-x^2+3x-1=0,$$

знайти значення $\frac{d^2y}{dx^2}$ у точці $(4;\ 0)$.

Розв'язання: Згідно з правилами диференціювання неявно заданих функцій одержимо

$$\sqrt{5y+2}-x^2+3x-1=0\Rightarrow\frac{5y'}{2\sqrt{5y+2}}-2x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5y'}{2\sqrt{5y+2}}=2x-3\Rightarrow y'=\frac{2}{5}(2x-3)\sqrt{5y+2}\Rightarrow,$$

$$\Rightarrow y'=\frac{2}{5}(2x-3)\sqrt{5y+2}\Rightarrow y''=\frac{2}{5}2\sqrt{5y+2}+\frac{2}{5}(2x-3)\frac{5y'}{\sqrt{5y+2}}=$$

$$=\frac{4}{5}\sqrt{5y+2}+\frac{2x-3}{\sqrt{5y+2}}\frac{2}{5}(2x-3)\sqrt{5y+2}=\frac{4}{5}\sqrt{5y+2}+\frac{2(2x-3)^2}{5},$$

$$y''(4;\ 0)=\frac{4}{5}\sqrt{2}+\frac{2\cdot 5^2}{5}=\frac{4\sqrt{2}+50}{5}\approx 11{,}1314.$$

Відповідь: *11,1314*.

4. Для функції $y(x)$, заданої параметричними рівняннями

$$\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t,\end{cases}$$

знайти значення $\frac{d^2y}{dx^2}$, що відповідає параметру $t=\frac{\pi}{4}$.

Розв'язання: Оскільки функція $y(x)$ задана параметричними рівняннями, то, згідно з (2) і (3), одержимо

$$\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'_t=-6\cos^2 t\cdot\sin t,\\ y'_t=6\sin^2 t\cdot\cos t.\end{cases}$$

Тоді

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{6\,sin^2 t\cdot cos\,t}{-6\,cos^2 t\cdot sin\,t}=-tgt\,,$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_t\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-tgt\right)'_t}{-6\,cos^2 t\cdot sin\,t}=\frac{1}{6\,cos^2 t\cdot cos^2 t\cdot sin\,t}=\frac{1}{6\,cos^4 t\cdot sin\,t}\,,$$

$$y''_{xx}\left(t=\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{6\,cos^4\frac{\pi}{4}\cdot sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}\approx 0{,}9428\,.$$

Відповідь: *0,9428*.

5. Для функції $y\left(x\right)$, заданої параметричними рівняннями $x=e^{2t}$, $y=t^2$ знайти значення $\frac{d^3y}{dx^3}$, що відповідає параметру $t=0$.

Розв’язання: Оскільки функція $y\left(x\right)$ задана параметричними рівняннями, то, згідно з $\left(2\right)$ і $\left(3\right)$, одержимо

$$\begin{cases} x=e^{2t}\,, \\ y=t^2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x'_t=2e^{2t}\,, \\ y'_t=2t. \end{cases}$$

Тоді

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{2t}{2e^{2t}}=te^{-2t}\,,$$

$$\left(y'_x\right)'_t=\left(te^{-2t}\right)'=e^{-2t}-2te^{-2t}\,,$$

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}=\frac{e^{-2t}\left(1-2t\right)}{2e^{2t}}=\frac{1}{2}e^{-4t}\left(1-2t\right),$$

$$\left(y''_{xx}\right)'_t=\frac{1}{2}\left(-4\right)e^{-4t}\left(1-2t\right)+\frac{1}{2}e^{-4t}\left(-2\right)=e^{-4t}\left(4t-3\right),$$

$$y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{e^{-4t}\left(4t-3\right)}{2e^{2t}}=\frac{1}{2}e^{-6t}\left(4t-3\right),$$

$$y'''_{xxx}\left(t=0\right)=-\frac{3}{2}=-1{,}5\,.$$

Відповідь: *1,5*.

Практична робота 5. Розкриття невизначеностей за правилом Лопіталя

1. Основні поняття та теореми

1. Невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Теорема: Нехай для функцій $f(x)$, $g(x)$ виконуються умови:

1) Функції визначені на півінтервалі $(a,b]$ і

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

2) В інтервалі $(a;b)$ функції $f(x)$, $g(x)$ диференційовані, причому $g'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$.

3) Існує (скінчена або нескінчена) границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$, тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k. \qquad (1)$$

2. Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема. Нехай для функцій $f(x)$, $g(x)$ виконуються умови:

1) Функції визначені на півінтервалі $(a,b]$ і

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=+\infty.$$

2) В інтервалі $(a;b)$ функції $f(x)$, $g(x)$ диференційовані, причому $g'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$.

3) Існує (скінчена або нескінчена) границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$, тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k. \qquad (2)$$

3. Невизначеність $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$.

Невизначеності даних типів легко зводяться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Справді, нехай маємо невизначеність $\left[0\cdot\infty\right]$. Інакше кажучи, нехай функції $f(x)$, $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}. \qquad (3)$$

У правій частині дістанемо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Нехай маємо невизначеність $\left[\infty-\infty\right]$. Інакше кажучи, функції $f(x)$, $g(x)$ такі, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}. \qquad (4)$$

У правій частині дістанемо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Якщо маємо степінь $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, тобто невизначеність $\left[0^0\right]$, то її розкривають так.

Припускаючи, що $f(x)>0$, вираз $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ надають у вигляді

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}. \qquad (5)$$

У показнику при $x\to a$ дістанемо невизначеність $\left[0\cdot\infty\right]$.

Аналогічно розкриваються невизначеності $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{(\alpha+50)x}-\cos(\alpha+50)x}$.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{x^3-\alpha^3}{x-\alpha}$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\dfrac{\alpha}{x}\right)$.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin\alpha x}}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(\alpha+x)(2\alpha+x)(3\alpha+x)}-x\right)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cdot\cos x}$.

Розв'язання: Використовуючи (1), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x\cos x-\sin x\sin x}=2.$$

Відповідь: 2.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^{2}-\pi^{2}}{x-\pi}$.

Розв'язання: Використовуючи (1), дістанемо

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^{2}-\pi^{2}}{x-\pi}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi}\frac{2x}{1}=2\pi.$$

Відповідь: $2\pi\approx 6{,}28$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$.

Розв'язання: Використовуючи (3), (1), дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(5^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 5}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(5^{\frac{1}{x}}\ln 5\right)=\ln 5\approx 1{,}6094 .$$

Відповідь: $1{,}6094$.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 5x}}$.

Розв'язання: Використовуючи (1) декілька разів, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 5x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sqrt{x}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{x}}}{\frac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\cos 5x}\cdot\sqrt{\frac{\sin 5x}{x}}\cdot\frac{3\cdot 2}{2\cdot 5}\right)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{3\sqrt{x}}}{\cos 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin 5x}{x}}=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{5\cos 5x}{1}}=\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}\approx 1{,}3416 .$$

Відповідь: $1{,}3416$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(1+x)(3+x)(5+x)}-x\right)$.

Розв'язання: Зробивши заміну змінної $x=\dfrac{1}{t}$, згідно з (1)

одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(1+x)(3+x)(5+x)}-x\right)=\begin{bmatrix} x=\frac{1}{t}, \quad t=\frac{1}{x} \\ x\to\infty\Rightarrow t\to 0\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(3+\frac{1}{t}\right)\left(5+\frac{1}{t}\right)}-\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{(1+t)(3t+1)(5t+t)}-1\right)}{t}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot\left((1+t)(3t+1)(5t+1)\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1\cdot(1+3t)\cdot(1+5t)\right)}{t}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+t)\cdot 3\cdot(1+5t)+(1+t)\cdot(1+3t)\cdot 5}{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(1\cdot 1\cdot 1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 3\cdot 1+1\cdot 1\cdot 5\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(1+3+5\right)=\frac{9}{3}=3\,.$$

Відповідь: 3.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(ln\left(x^2-\alpha^2\right)-ln\left(x^2-\alpha x\right)\right)\right)$.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\left(\alpha^2-x^2\right)^2 tg^2\dfrac{\pi x}{2\alpha}\right)$.

3. Знайти

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[(3+2\alpha)]{\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{50}}arctg\sqrt{\frac{50x}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{50}+1}\cdot arctg\sqrt{\frac{x}{\frac{\alpha}{50}+1}}\right)}.$$

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(cos\,\alpha x\right)^{\frac{1}{sin^2\left(\left(\alpha+50\right)x\right)}}\right)^{5+2\alpha}$.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{\sqrt{\alpha}}{ln\left(e^{\sqrt{\alpha}x-1}\right)}}\right)^{7+2\alpha}$.

5. Приклад виконання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(ln\left(x\text{-}5\right)-ln\,x\right)\right)$.

Розв'язання:

Використовуючи (3), (1) та (2) дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\left(ln\left(x-5\right)-ln\,x\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x ln\frac{\left(x\text{-}5\right)}{x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln\dfrac{(x-5)}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x-5}\cdot\dfrac{1\cdot x-(x-5)\cdot 1}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x-5}\cdot\dfrac{5}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1} = -5.$$

Відповідь: -5.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 50}\left(ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)tg\,\dfrac{\pi x}{100}\right)$.

Розв'язання:

Використовуючи (3), (1), дістанемо

$$\lim_{x\to 50}\left(ln\left(2-\frac{x}{50}\right)tg\,\frac{\pi x}{100}\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 50}\frac{ln\left(2-\dfrac{x}{50}\right)}{\dfrac{1}{tg\,\dfrac{\pi x}{100}}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 50}\frac{\dfrac{1}{2-\dfrac{x}{50}}\left(-\dfrac{1}{50}\right)}{-\dfrac{1}{tg^2\,\dfrac{\pi x}{100}}\cdot\dfrac{1}{cos^2\,\dfrac{\pi x}{100}}\cdot\dfrac{\pi}{100}} = \lim_{x\to 50}\frac{\dfrac{50}{100-x}\left(-\dfrac{1}{50}\right)}{-\dfrac{cos^2\,\dfrac{\pi x}{100}}{sin^2\,\dfrac{\pi x}{100}}\cdot\dfrac{1}{cos^2\,\dfrac{\pi x}{100}}\cdot\dfrac{\pi}{100}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 50}\frac{50\cdot sin^2\,\dfrac{\pi x}{100}}{100-x} = \frac{2}{\pi}\approx 0{,}6366.$$

Відповідь: $0{,}6366$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(arctg\sqrt{x}-\sqrt{2}arctg\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)\right)$.

Розв'язання:

Використовуючи (3), (1), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(arctg\sqrt{x}-\sqrt{2}\cdot arctg\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\sqrt{x}-\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{2\sqrt{2}}{2+x}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}2\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{2}{2+x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2-2x}{3x(1+x)(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x(1+x)(2+x)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x)(2+x)}=-\frac{1}{6}\approx -0{,}1667\,.$$

Відповідь: *–1,1667*.

4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Розв'язання:

Використовуючи (5), дістанемо

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2}\cdot\ln(\cos 2x)\right)}=e^{-6}\approx 0{,}0025\text{, оскільки}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ln(\cos 2x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x\cdot 2x}=-3\lim_{x\to 0}\frac{tg 2x}{x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=-3\lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^2 2x\cdot 1}=-3\cdot 2=-6\,.$$

Відповідь: -*6*.

5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

Розв'язання:

Використовуючи (5), дістанемо

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = \left[0^0\right] = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot \ln x)} = e^0 = 1,\text{ оскільки}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin x \ln x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1\cdot\cos x - x\sin x} = 0.$$

Відповідь: *0*.

Практична робота 6. Достатні ознаки зростання та спадання функції на інтервалі. Локальний екстремум

1. Основні поняття та теореми

1. Зростання та спадання функцій (*монотонність функції*).

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$, а x_0 – внутрішня точка цього проміжку.

Функцію $f(x)$ називають зростаючою в точці x_0, якщо існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a;b\rangle$, і такий, що $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0)$ і $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0;x_0+\delta)$.

Функцію $f(x)$ називають спадною в точці x_0, якщо існує окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a;b\rangle$, і такий, що $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0)$ і $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0;x_0+\delta)$.

Якщо функція є зростаючою (спадною) в кожній внутрішній точці $\langle a;b\rangle$, то її називають зростаючою (спадною) на цьому проміжку.

Теорема (достатні ознаки зростання (спадання) функцій в точці).

Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;b\rangle$ має похідну $f'(x)$ і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то функція $f(x)$ у точці x_0 зростає (спадає).

2. Локальний екстремум

Якщо існує такий окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a;b\rangle$ і $f(x)<f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, то точку x_0 називають точкою локального максимуму функції $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ – локальним максимумом функції.

Якщо існує такий окіл $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $\delta>0$ точки x_0, який міститься в проміжку $\langle a;b\rangle$ і $f(x)>f(x_0)$ для всіх $x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)$, $x\neq x_0$, то точку x_0 називають точкою локального мінімуму функції $f(x)$, а саме число $f(x_0)$ – локальним мінімумом функції.

Теорема Ферма (необхідні умови існування екстремуму функції).

Якщо функція $f(x)$ у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a;b\rangle$ має екстремум, то в цій точці похідна $f'(x)$, якщо вона існує, дорівнює нулю.

Теорема (перша достатня умова екстремуму функції).

Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі точки x_0, за винятком, можливо, точки x_0 в якій функція $f(x)$ неперервна. Якщо при переході точки x через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, то в точці x_0 існує екстремум функції, причому максимум, якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, і мінімум, якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс.

Теорема (друга достатня умова екстремуму функції).

Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі своєї стаціонарної точки, тобто в точці, похідна в якій $f'(x)=0$, а в самій точці x_0 має похідну другого порядку. Якщо $f''(x)>0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум. Якщо ж $f''(x)<0$, то функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Визначити x, для якого функція

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}},$$

$\sigma > 0$ досягає максимуму.

2. З кутів квадратного листа картону розміром $\alpha \times \alpha$ см^2 треба вирізати однакові квадрати так, щоб зігнувши лист по пунктирним лініям, одержати коробку найбільшої місткості. Якою повинна бути сторона вирізуваного квадрата?

3. Для функції $y = -x^2 (\alpha - x)^2$, знайти y_{min}.

4. Для функції $y = -\sqrt[3]{\left(x^2 - \alpha^2\right)^2}$, знайти y_{min}.

5. На осі параболи $y^2 = x$ дано точку на відстані α від вершини. Вказати абсцису x найближчої до неї точки кривої.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Визначити x, для якого функція

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}},$$

$\sigma > 0$ досягає мінімуму.

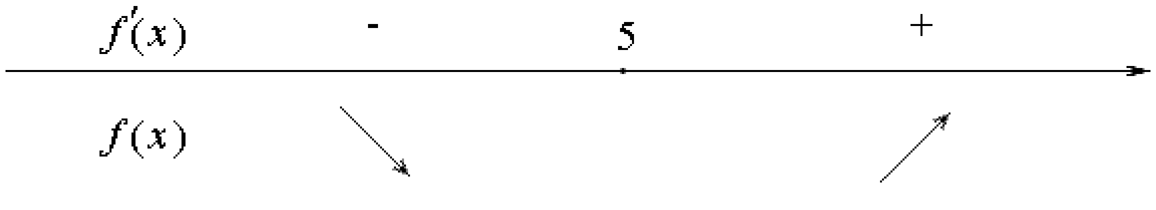
Розв'язання:

Функція може досягати мінімуму тільки в стаціонарних точках, тобто тих, де $f'(x) = 0$. Отже, дістанемо

$$y' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}} \left(2(x-5)\frac{1}{2\sigma^2} \right) = \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}} (x-5)$$

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 5 = 0 \quad \Rightarrow x = 5,$$

отже $x = 5$ – стаціонарна точка. Перевіримо першу достатню умову:



Отже, в точці $x = 5$ функція $f(x)$ досягає мінімуму.

Відповідь: *5*.

2. З кутів квадратного листа картону розміром 180×180 см^2 треба вирізати однакові квадрати так, щоб зігнувши лист по пунктирним лініям, одержати коробку найбільшої місткості (див. рис. 1). Якою повинна бути сторона відрізаного квадрата?

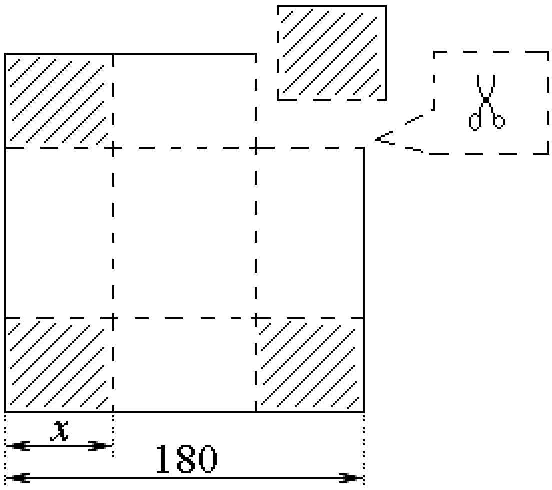


Рис. 1

Розв'язання:

Позначимо через x довжину сторони того квадрата, який треба вирізати, а через V – об'єм одержаного ящика. Тоді V буде функція від x, яка виражається формулою $V(x) = x(180 - 2x)^2$, причому x змінюється на відрізку $[0;90]$.

Оскільки $V(x)$ є неперервна функція на відрізку $[0;90]$, то вона набуває на цьому відрізку найбільшого значення. На кінцях відрізка $V(x)$ не може набувати найбільшого значення, бо в цих точках $V = 0$. Отже, шукана точка міститься всередині відрізка. Знайдемо її. Для цього обчислимо спочатку похідну

$$V'(x) = -4x(180 - 2x) + (180 - 2x)^2 = (180 - 2x)(180 - 6x).$$

Прирівнявши цю похідну до нуля, отримаємо такі корені: $x_1 = 90$, $x_2 = 30$. Точка x_1 не є стаціонарною, бо це є кінець відрізка, а точка x_2 міститься всередині цього відрізка. Отже, x_2 є стаціонарною точкою. Перевіримо, чи є x_2 екстремальною точкою. Для цього знайдемо $V''(x)$.

$$V''(x) = -2(180 - 6x) - 6(180 - 2x).$$

Підставивши сюди $x = 30$, дістанемо

$$V''(30) = -720 < 0\,.$$

Згідно з другою умовою екстремуму, точка $x_2 = 30$ є точкою максимуму. У ній функція набуває найбільшого значення

$$V(30) = 120^2 \cdot 30 = 432000\,.$$

Відповідь: *432000*.

3. Для функції $y = -x^2(150 - x)^2$, знайти y_{min}.

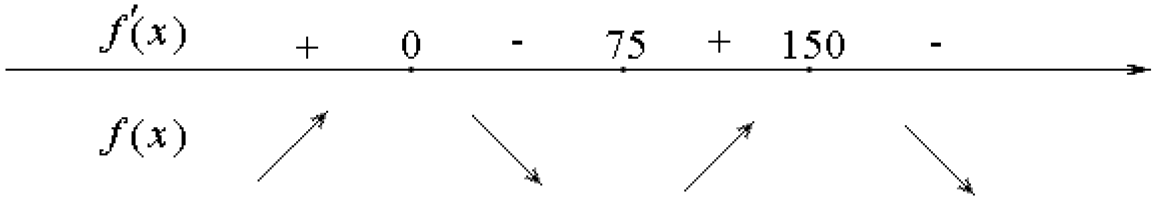
Розв’язання:

Знайдемо стаціонарні точки.

$$y'(x) = -2x(150 - x)^2 + 2x^2(150 - x) = -4x(x - 150)(x - 75).$$

$$y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 150,\ x_3 = 75\,.$$

Використовуючи першу достатню ознаку екстремуму функції, дістанемо:



Отже, $x_{min} = 75,\ \ y_{min} = y(75) = -31640625\,.$

Відповідь: *–31640625*.

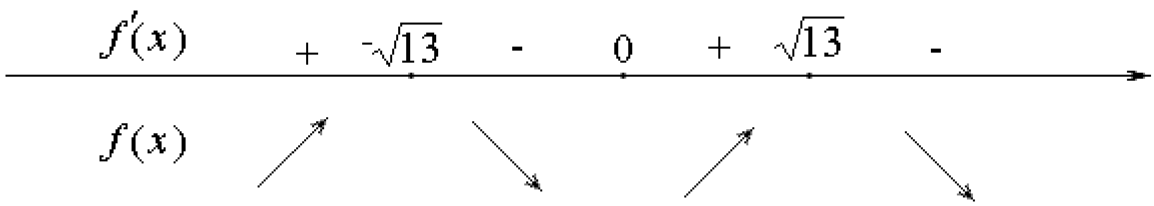
4. Для функції $y = -\sqrt[3]{\left(x^2 - 13\right)^2}$ знайти y_{min}.

Розв’язання:

Знайдемо стаціонарні точки і дослідимо їх на екстремум, використовуючи першу достатню ознаку екстремуму функцій,

$$y'(x) = -\frac{2}{3}\left(x^2 - 13\right)^{-\frac{1}{3}} 2x = \frac{-4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 13}}\,.$$

$y'(x) = 0$ чи не існує при $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{13}$.



Отже, $x_{min} = 0,\ \ y_{min} = y(0) = -\sqrt[3]{169} \approx -5{,}5288\,.$

Відповідь: *–5,5288*.

5. На осі параболи $y^2 = x$ дано точку на відстані 20 від вершини. Вказати ординату y найближчої до неї точки кривої.

Розв'язання:

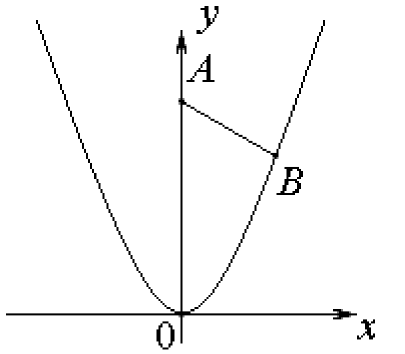


Рис. 2

Нехай $B\left(\sqrt{y};y\right)$ – точка, ординату (рис. 2) якої нам потрібно знайти, і точка $A\left(0;20\right)$. Використовуючи формулу для довжини відрізка, дістанемо

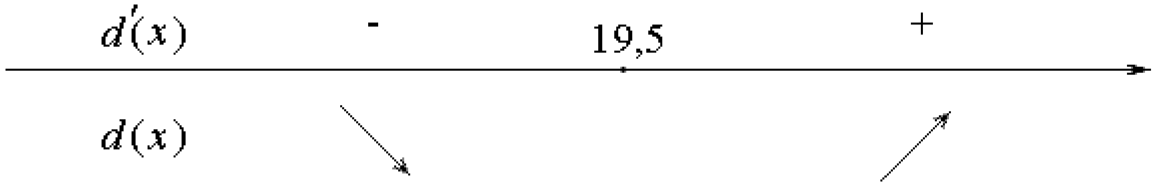
$$d\left(y\right) = AB = \sqrt{\left(\sqrt{y}-0\right)^2 + \left(y-20\right)^2} = \sqrt{y+\left(y-20\right)^2}\ .$$

Дослідимо функцію $d\left(y\right)$ на екстремум

$$d'\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{y+\left(y-20\right)^2}}\left(1+2\left(y-20\right)\right),$$

$$d'\left(y\right)=0 \ \Rightarrow\ 1+2\left(y-20\right)=0 \ \Rightarrow\ y=19{,}5\,.$$

Згідно першої ознаки екстремуму функції, дістанемо



Отже, $y = 19{,}5$ – точка мінімуму.

Відповідь: $19{,}5$.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Визначити x, для якого функція $y = 3xe^{-\frac{x}{\alpha}} + 15$, досягає максимуму.

2. Для функції $y = 5\sqrt[3]{2\alpha x^2 - x^3} + 17$, знайти y_{min}.

3. Для функції $y = x + \sqrt{\alpha\left(1 - x^2\right) + 6}$, знайти y_{max}.

4. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса $\alpha + 40$.

5. Знайти висоту конічної воронки найбільшого об'єму, якщо її твірна дорівнює $\alpha + 40$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Визначити значення x, для якого функція $f\left(x\right) = \sqrt{e^{x^2} + 1}$ досягає мінімуму.

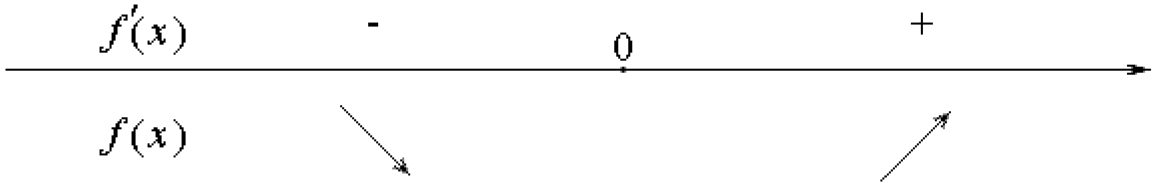
Розв'язання:

Функція $f\left(x\right)$ може досягати мінімуму тільки в стаціонарних точках. Знайдемо їх і дослідимо на екстремум. Знаходимо похідну першого порядку:

$$f'\left(x\right) = \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}.$$

$$f'\left(x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

отже $x = 0$ – стаціонарна точка. Перевіримо першу достатню умову:



Отже, в точці $x = 0$ функція $f\left(x\right)$ досягає мінімуму.

Відповідь: *0*.

2. Для функції $y = \sqrt[3]{\left(2x - 1\right)\left(1 - x\right)^2}$ знайти y_{max}.

Розв'язання:

Знайдемо стаціонарні точки.

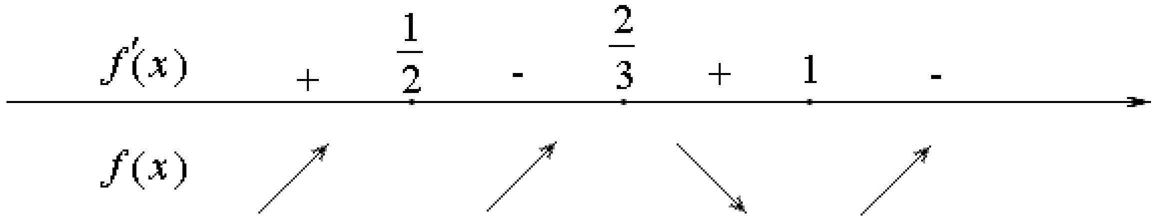
$$y'\left(x\right) = \frac{1}{3}\left(\left(2x - 1\right)\left(1 - x\right)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2\left(1 - x\right)^2 - 2\left(2x - 1\right)\left(1 - x\right)\right);$$

$$y'(x)=\frac{2(1-x)(1-x-2x+1)}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2(1-x)^4}}=\frac{2(1-x)(2-3x)}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2(1-x)^4}}=,$$

$$=\frac{2(2-3x)}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2(1-x)}}.$$

$y'(x)=0$ або не існує в точках $x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3},\ \ x_3=\frac{1}{2}$.

Використовуючи першу достатню ознаку екстремуму, дістанемо:



Отже $x_{max}=\frac{2}{3}$,

$$y_{max}=y\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\left(2\cdot\frac{2}{3}-1\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}\approx 0{,}3333.$$

Відповідь: *0,3333*.

3. Для функції $y=x+\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$ знайти y_{max}.

Розв'язання:

Знайдемо стаціонарні точки

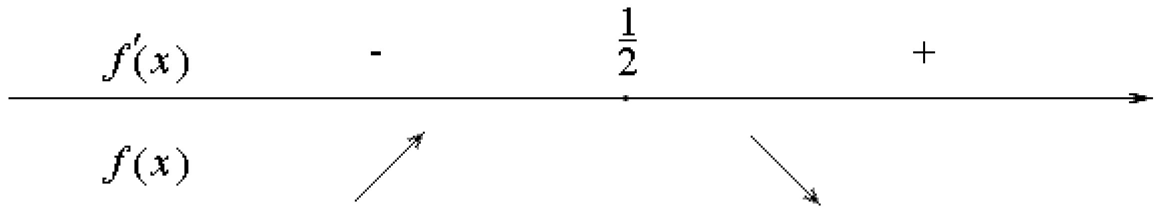
$$y'(x)=1+\frac{3(-2)x}{2\sqrt{3\left(1-x^2\right)}}=\frac{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}-3x}{\sqrt{3\left(1-x^2\right)}},$$

$$y'(x)=0\ \Rightarrow\ \sqrt{3\left(1-x^2\right)}-3x=0\ \Rightarrow\ 3\left(1-x^2\right)=9x^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2=3x^2\ \Rightarrow$$

$$4x^2=1\ \Rightarrow\ x^2=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Значення $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ виключаємо з розгляду, так як даний корінь є стороннім для рівняння. В точці $x = 1$ похідна $y'(x)$ не існує, оскільки за областю визначення функції $y(x)$ $|x| < 1$.



Отже $x_{max} = \dfrac{1}{2}$, $y_{max} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{3 \cdot \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$.

Відповідь: *2*.

4. Знайти висоту конуса (рис.3) найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса $R = 120$.

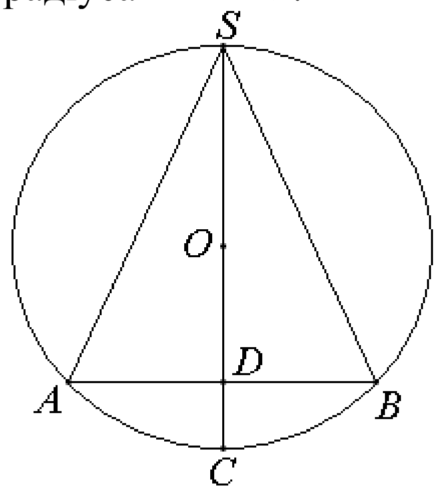


Рис. 3

Розв'язання:

Позначимо висоту конуса, вписаного в кулю радіуса R, через H. ASB – осьовий переріз конуса. Тоді $CD = 2R - H$. Із прямокутного трикутника CAS маємо

$$AD = r = \sqrt{H(2R - H)} = \sqrt{2RH - H^2}.$$

Об'єм конуса

$$V(H) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2RH - H^2}\right)^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2RH^2 - H^3\right),$$

де $0 < H < 2R$ (при $H = 0$ конус перетвориться в точку, а при $H = 2R$ – у діаметр SC). Знайдемо стаціонарні точки $V(H)$.

$$V'(H)=\frac{\pi}{3}\left(4RH-3H^2\right),$$

$$V'(H)=0 \;\Rightarrow\; 4RH-3H^2=0 \;\Rightarrow\; H(4R-3H)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; H_1=0,\; H_2=\frac{4R}{3}.$$

У точці $H_1=0$ $V=0$. Отже, потрібно дослідити на екстремум точку $H_2=\dfrac{4R}{3}$. Використовуючи другу достатню ознаку екстремуму функцій, знайдемо $V''(H)$:

$$V''(H)=\frac{\pi}{3}(4R-6H),$$

$$V''\left(\frac{4R}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\left(4R-6\cdot\frac{4R}{3}\right)=\frac{\pi}{3}(4R-8R)=-\frac{4\pi R}{3}<0.$$

Отже, $H_2=\dfrac{4R}{3}=160$ – точка максимуму, і тому об’єм конуса в даній точці буде найбільшим.

Відповідь: *160.*

5. Знайти висоту конічної воронки (рис. 4) найбільшого об’єму, якщо її твірна дорівнює $L=120$.

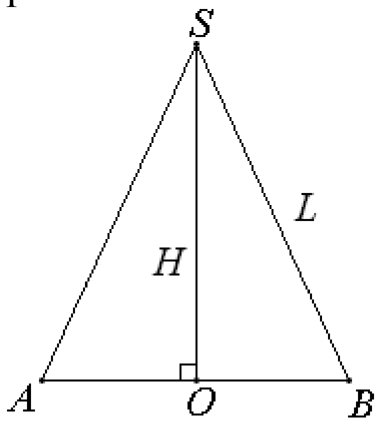


Рис. 4

Розв’язання:

Нехай SAB – осьовий переріз конуса, $SB=L$ – твірна, $SH=H$ – висота, $OA=R$ – радіус основи конуса, тоді об’єм конуса

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{î\,ñí}\cdot H,\ \text{де}\ S=\pi R^2.$$

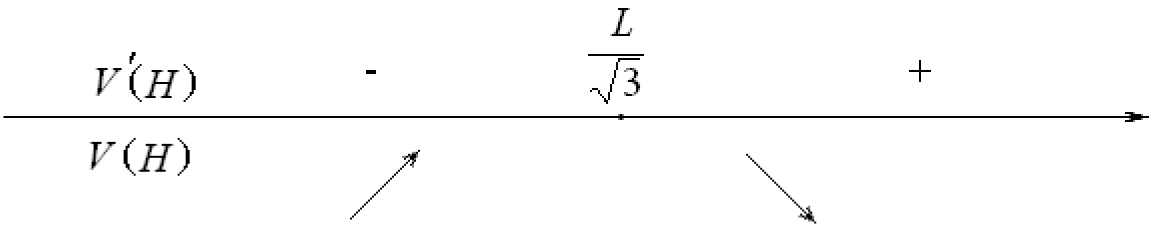
За теоремою Піфагора $R^2=L^2-H^2$, тоді

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi\left(L^2-H^2\right)H=\frac{1}{3}\pi\left(L^2H-H^3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(H)=\frac{1}{3}\pi\left(L^2-3H^2\right).$$

$$V'(H)=0 \quad \Rightarrow H_1=\frac{L}{\sqrt{3}} \text{ і } H_2=-\frac{L}{\sqrt{3}}.$$

Так, як $H>0$, то H_2 – не може бути точкою екстремуму. Згідно з першою достатньою ознакою



$H_1=\frac{L}{\sqrt{3}}=\frac{120}{\sqrt{3}}=83{,}2034$ є точкою максимуму.

Відповідь: *83,2034*.

Практична робота 10. Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину.

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Якщо на інтервалі (a,b) крива лежить над дотичною, проведеною в будь-якій її точці, то криву називають угнутою (або опуклою вниз) на цьому інтервалі (рис. 1).

Означення 2. Якщо на інтервалі (a,b) крива лежить під дотичною, проведеною в будь-якій її точці, то криву називають опуклою (або *опуклою* вгору) на цьому інтервалі (рис. 2).

Означення 3. Точку, в якій крива змінює опуклість на угнутість, або угнутість на опуклість називають *точкою перегину кривої* (рис. 3).

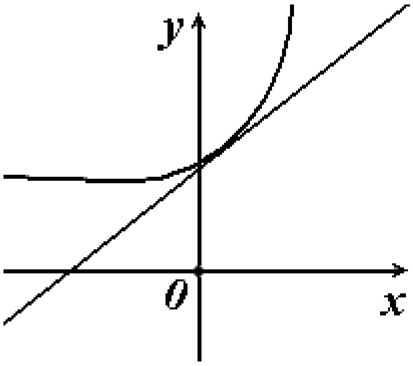


Рис.1

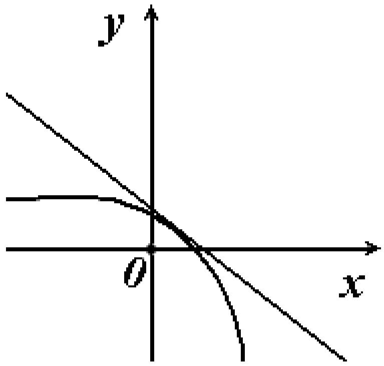


Рис.2

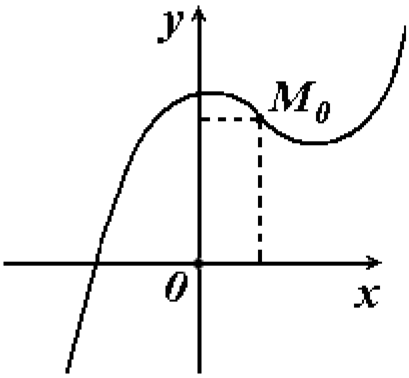


Рис.3

Теорема 1. Дуга кривої $y = f(x)$ опукла (тобто опукла вгору) на інтервалі (a, b), якщо в кожній точці цього інтервалу $f''(x) < 0$. Дуга кривої $y = f(x)$ угнута (тобто опукла вниз) на інтервалі (a, b), якщо в кожній точці цього інтервалу $f''(x) > 0$.

<u>Означення 4.</u> Ті точки кривої, в яких $f''(x) = 0$, або $f''(x) = \infty$, або $f''(x)$ не існує називають критичними точками другого роду.

Точки перегину слід шукати серед критичних точок другого роду.

<u>Правило.</u> Для знаходження точок перегину кривої треба:

1) знайти критичні точки другого роду;

2) перевірити зміну знака другої похідної при переході через критичну точку (зліва на право). Якщо похідна другого порядку змінює знак при переході через критичну точку, то ця точка є точкою перегину, якщо знак другої похідної не змінюється, перегину в критичній точці немає.

2. Завдання та вправи для допуску до практичного заняття

1. Знайти значення абсциси ($x \geq 0$) точки перегину графіка функції:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}.$$

2. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y = \sqrt[3]{x - 2\alpha}$.

3. Знайти множину чисел x, де функція $y = ln\left(\alpha^2 + x^2\right)$ опукла. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

4. Знайти множину чисел x, де функція $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3\alpha^2}$ угнута. У відповіді вказати найбільше ціле додатне значення x з цієї множини.

3. Приклади розв’язування задач для допуску до практичного заняття

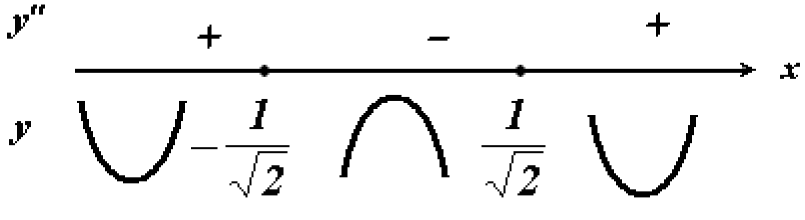
1. Знайти значення абсциси ($x \geq 0$) точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Розв’язання: Для визначення точок перегину графіка функції знаходимо її другу похідну:

$$y' = -2x\, e^{-x^2},$$

$$y'' = 2\left(2x^2 - 1\right) e^{-x^2} = 2\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right) e^{-x^2}.$$

При $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ та при $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ друга похідна дорівнює нулю. Позначимо ці точки на числовій прямій та визначимо знак другої похідної на кожному з одержаних проміжків.



Отже, при $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ крива змінює опуклість на угнутість, а при $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – угнутість на опуклість, тобто ці значення є абсцисами точок перегину графіка функції.

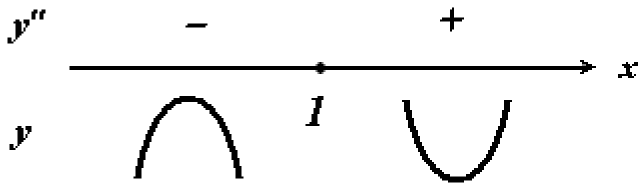
Відповідь: Значення абсциси ($x>0$) точки перегину $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Знайти множину чисел x, де крива графіка функції $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ опукла. У відповіді вказати найбільше ціле від'ємне значення з цієї множини.

Розв'язання:

$$y'=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},\quad y''=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Друга похідна $y''=\infty$ у точці $x=1$. Позначимо цю точку на числовій прямій та визначимо знак другої похідної на одержаних інтервалах.



Оскільки на інтервалі $(-\infty;\ 1)$ друга похідна $y''<0$, крива на цьому інтервалі опукла.

Відповідь: Найбільше ціле від'ємне значення з цього інтервалу $x=-1$.

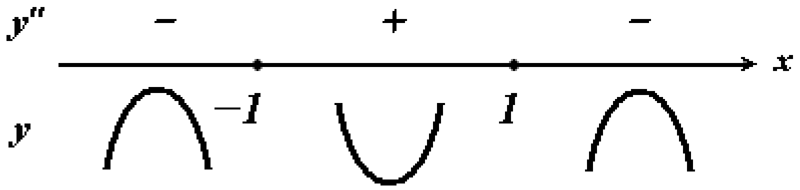
3. Знайти множину чисел x, де функція $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ опукла. У відповіді вказати точку, яка ділить навпіл інтервал угнутості кривої.

Розв'язання:

Знаходимо другу похідну функції:

$$y'=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2},\quad y''=\frac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Друга похідна не дорівнює нулю ні при яких значеннях x. При $x=-1$ та $x=1$ друга похідна $y''=\infty$. Позначимо ці точки на числовій прямій та перевіримо знак другої похідної на кожному з одержаних інтервалів.



Оскільки на інтервалі $(-1;\ 1)$ друга похідна більше нуля, крива угнута на цьому інтервалі.

Відповідь: Точка, яка ділить цей інтервал навпіл $x=0$.

4. Завдання та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y=(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)$.

2. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y=x^2+\dfrac{\alpha^3}{x}$.

3. Знайти множину чисел x, де функція $y=\left(\dfrac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^4$ угнута (опукла вниз). У відповіді вказати найбільше ціле значення x з цієї множини.

4. Знайти інтервал угнутості функції $y=\left(\alpha+\dfrac{x^2}{\alpha}\right)\cdot e^{\frac{x}{\alpha}}$. У відповіді вказати значення точки x, яка ділить цей інтервал навпіл.

5. Знайти множину чисел x, де функція $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-\alpha^2}}$ опукла. У відповіді вказати найбільше ціле значення з цієї множини.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

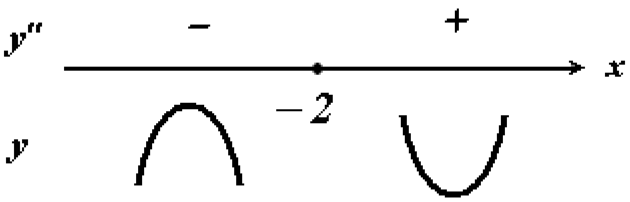
1. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x+2}$.

Розв'язання:

Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y'=\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}},\ y''=-\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

Точок, в яких друга похідна дорівнює нулю немає. Друга похідна не існує в точці $x=-2$, тобто дістали два проміжки $(-\infty;\ -2)$ і $(-2;\ +\infty)$ на яких визначимо знак другої похідної.



Оскільки знак другої похідної змінюється при переході через точку $x=-2$, то ця точка є точкою перегину кривої, де вона змінює опуклість на угнутість.

Відповідь: -2.

2. Знайти інтервал значень x, де функція $y=e^x\left(1+x^2\right)$ опукла (опукла вгору). У відповіді вказати точку, яка ділить цей інтервал навпіл.

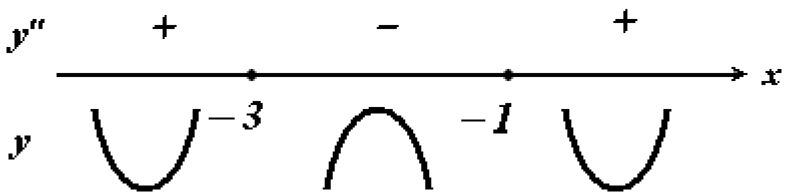
Розв'язання:

Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y'=e^x\left(1+x^2\right)+2xe^x=e^x\left(x^2+2x+1\right)=e^x\left(x+1\right)^2,$$

$$y''=2e^x\left(x+1\right)+e^x\left(x+1\right)^2=e^x\left(x+1\right)\left(x+3\right).$$

Друга похідна дорівнює нулю в точках $x=-3$ і $x=-1$. Відмітимо ці точки на числовій прямій і розглянемо знак другої похідної на кожному з інтервалів: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ -1)$ і $(-1;\ +\infty)$.



Друга похідна від'ємна на інтервалі $(-3;\ -1)$. Звідси випливає, що задана функція опукла (тобто опукла вгору) на цьому інтервалі.

Відповідь: Точка $x=-2$ ділить цей інтервал навпіл.

3. Знайти множину значень x, де функція $y=x^2\ln x$ угнута. У відповіді вказати найменше ціле значення з цього інтервалу.

Розв'язання:

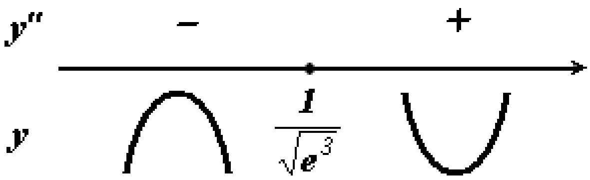
Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = x\left(1+2\ln x\right),\ y'' = 1+2\ln x + x\cdot\frac{2}{x} = 3+2\ln x.$$

Знайдемо точку, в якій друга похідна дорівнює нулю:

$$3+2\ln x = 0;\ \ln x = -\frac{3}{2};\ x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Відмітимо цю точку на числовій прямій, та визначимо знак похідної на кожному з проміжків: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ +\infty\right)$.



Задана функція угнута при $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ +\infty\right)$.

Відповідь: Найменше ціле значення з цієї множини $x = 1$.

Практична робота 8. Асимптоти графіка функції

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Пряму ℓ називають *асимптотою кривої* $y = f(x)$, якщо відстань від точки цієї кривої до прямої ℓ прямує до нуля, коли точка рухається по кривій у нескінченність.

Розрізнятимемо: 1) горизонтальні, 2) вертикальні, 3) похилі асимптоти.

1) Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує скінчення границя функції $f(x)$ при $x \to -\infty$, або $x \to +\infty$ і ця границя дорівнює b; тобто $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$, або $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$.

2) Крива $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

3) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ кривої $y = f(x)$ треба знайти числа k і b за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

(Слід розглядати окремі випадки $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.)

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = 2\alpha + \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = 2\alpha + \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^2 + 1}{2x + 3}$.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^2 + 1}{2x + 3}$.

5. Знайти ординату точки відрізку, що відрізає похила асимптота графіка функції на осі OY $y = \dfrac{x^3 - 3\alpha x^2 + 4}{x^2 - 6\alpha x + 1}$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Розв'язання:

Шукаємо вертикальні асимптоти:

$$y \to +\infty \text{ при } x \to 0-,$$
$$y \to -\infty \text{ при } x \to 0+.$$

Відповідь: Пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою даної кривої.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Розв'язання:

Знайдемо горизонтальні асимптоти графіка функції:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Відповідь: Горизонтальною асимптотою є пряма $y=0$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ до графіка функції $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$.

Розв'язання:

Кутовий коефіцієнт k у рівнянні похилої асимптоти визначається за формулою $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, тобто для даної функції:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1.$$

Відповідь: $k=-1$.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ до графіка функції $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$.

Розв'язання:

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{x^2-x^3}+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $b=\frac{1}{3}$.

5. Знайти ординату точки відрізку, що відрізає похила асимптота графіка функції на осі OY $y=\frac{x^3}{x^2-6x+1}$.

Розв'язання:

Знайдемо рівняння похилої асимптоти $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-6x+1}=1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3+6x^2-x}{x^2-6x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-x}{x^2-6x+1}\right) = 6.$$

Отже рівняння похилої асимптоти $y = x+6$, тобто ордината відрізку по оси Оу – 6.

Відповідь: 6.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = \dfrac{1}{e^{x-2\alpha}-1}$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = \dfrac{2x^2+\alpha x+\alpha^2}{\alpha x^3-x+1}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y = kx+b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^3}{2(x+\alpha)}$.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx+b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^3}{2(x+\alpha)}$.

5. Знайти ординату точки відрізку, що відрізає похила асимптота графіка функції на осі OY $y = \dfrac{x^2-2\alpha x+2}{x-\alpha}$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти вертикальну асимптоту графіка функції $y = \dfrac{1}{2^x-2}$. У відповіді вказати значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$.

Розв'язання:

Знайдемо значення x, при якому знаменник заданого дробу дорівнює нулю.

$$2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Відповідь: Вертикальна асимптота визначається рівнянням $x = 1$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 - x + 2}$.

Розв'язання:

Знайдемо границю заданої функції при $x \to \infty$.

$$b = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 - x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: Вертикальною асимптотою є пряма $y = \dfrac{1}{3}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x + 6}$.

Розв'язання:

Коефіцієнт k знаходимо за формулою $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, тобто

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x(x + 6)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x}} = 2$$

Відповідь: 2.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x + 6}$.

Розв'язання:

Значення параметра b знайдемо за формулою $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right)$. Оскільки ми вже визначили значення параметра k, підставимо його у формулу:

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+3}{x+6}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-11x+3}{x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-11+\frac{3}{x}}{1+\frac{6}{x}}=-11.$$

Відповідь: -11.

5. Знайти ординату кінця відрізка, що відрізає похила асимптота графіка функції $y=\frac{x^2+1}{2x+3}$ на осі OY.

Розв'язання: Якщо графік похилої асимптоти визначається рівнянням $y=kx+b$, то вона відтинає на осі OY відрізок, який дорівнює b. Знайдемо параметри k і b рівняння похилої асимптоти графіка заданої функції:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(2x+3)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3x}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+3}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{4x+6}=-\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-\frac{3}{4}$.

Практична робота 9. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Якщо функцію $f(x)$ задано аналітично, то *областю визначення функції* (або областю існування функції) називається сукупність дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз, який визначає функцію, має числовий сенс і приймає тільки дійсні значення.

Означення 2. Функцію $f(x)$, визначену на множині точок осі OX, розміщених симетрично відносно початку координат, називають *парною*, якщо $f(-x)=f(x)$ і *непарною*, якщо $f(-x)=-f(x)$.

Означення 3. Функція $f(x)$ називається *періодичною*, якщо існує таке число $T\neq 0$, що $f(x+T)=f(x)$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Число T називають періодом функції $f(x)$.

Означення 4. Якщо в точці $x=x_0$ функція $f(x)$ має скінченні границі зліва і справа, і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції в точці $x=x_0$, то точку $x=x_0$ називають точкою усувного розриву функції. Якщо в точці $x=x_0$ функція $f(x)$ має границі зліва і справа, і вони не дорівнюють одна одній, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, то точку $x=x_0$ називають точкою розриву зі скінченим стрибком. Точки усувного розриву та точки розриву функції зі скінченим стрибком називають точками розриву 1-го роду. Якщо ж у точці $x=x_0$ функція має хоча б одну з нескінченних границь зліва або справа, то ця точка називається точкою розриву 2-го роду.

Загальна схема дослідження функції

1) Знаходження області визначення функції.

2) Знаходження точок розриву функції.

3) Дослідження функції на періодичність, парність і непарність.

4) Знаходження інтервалів монотонності функції.

5) Знаходження екстремальних точок.

6) Знаходження інтервалів угнутості і опуклості досліджуваної кривої.

7) Знаходження точок перегину кривої.

8) Знаходження асимптот графіка функції.

9) Побудова графіка функції.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти абсцису точки розриву функції $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

2. Знайти локальний мінімум функції $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-\alpha}$. Вкажіть значення y_{min}.

3. Знайти найбільше ціле значення абсциси точки опуклості $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

4. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

5. Знайти найменше значення функції $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-\alpha}$ на відрізку $[-2;\ 0]$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти абсцису точки розриву функції $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання:
Функція існує для всіх x крім $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty.$$

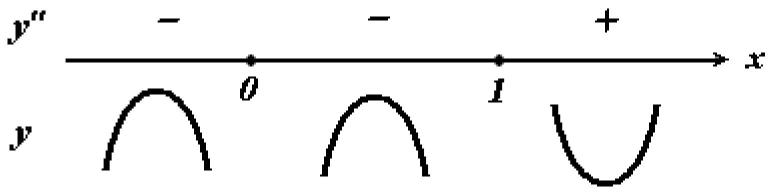
Відповідь: Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

2. Знайти локальний мінімум функції $y = \dfrac{e^x}{x}$. Вкажіть значення y_{min}.

Розв'язання:

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Знаходимо критичні точки. З рівняння $y' = 0$, тобто $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$ випливає, що $x = 1$. При $x = 0$ перша похідна $y' = \infty$, але при $x = 0$ функція не визначена. Точки $x = 0$ і $x = 1$ поділяють область існування функції на інтервали, які відмітимо на числовій прямій.



Перша похідна змінює знак з – на + при переході через точку $x = 1$.

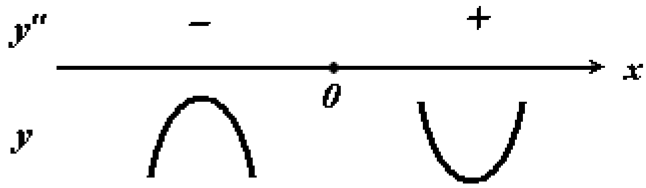
Відповідь: Точка $x = 1$ є точкою локального мінімуму.

3. Знайти найбільше ціле значення абсциси точки угнутості кривої $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання:

$$y'' = \frac{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^3}$$

Чисельник цього дробу не дорівнює нулю ні при яких дійсних значеннях x, оскільки рівняння $x^2 - 2x + 2 = 0$ має тільки комплексні корені. В точці $x = 0$ друга похідна $y'' = \infty$. Таким чином отримали два інтервали $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$, на яких визначимо знак другої похідної.



Отже, на інтервалі $(-\infty;\ 0)$ крива угнута (опукла вгору).

Відповідь: Найбільше ціле значення з інтервалу угнутості є $x = -1$.

4. Знайти параметр b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ графіка функції $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0.$$

Отже, горизонтальна асимптота має рівняння $y = 0$.

Відповідь: $b = 0$.

5. Знайти найбільше значення функції $y=\frac{e^x}{x}$ на відрізку $\left[-3;\ -1\right]$.

Розв’язання:

Оскільки цей сегмент не містить точок екстремуму, достатньо обчислити значення функції на кінцях цього відрізка:

$$y(-3)=\frac{e^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3e^3},\ y(-1)=\frac{e^{-1}}{-1}=-\frac{1}{e}.$$

Відповідь: Найбільше значення набувається у точці $x=-3$ і дорівнює $-\frac{1}{3e^3}$.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти абсциси точок розриву функції $y=\alpha+\frac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

2. Знайти локальний максимум функції $y=\alpha+\frac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$. Вкажіть значення критичної точки x, при якому функція y набуває максимуму.

3. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ до графіка $y=\frac{1}{\alpha}+\frac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

4. Знайти найменше значення функції $y=\alpha+\frac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$ на відрізку $\left[0;\alpha\right]$.

5. Побудувати графік функції $y=\alpha+\frac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти абсциси точок розриву функції $y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$.

Розв'язання:

Визначимо значення x, при яких знаменник x^2+2x+3 дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2+2x+3=0$. Це рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь: Точок розриву не існує.

2. Знайти інтервали зростання функції $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

Розв'язання:

Визначимо критичні точки функції. Розв'яжемо рівняння y', тобто рівняння $\dfrac{x^2\left(x^2+4x+9\right)}{x^2+2x+3}=0$. Чисельник цього виразу перетворюється на нуль тільки при $x=0$, оскільки рівняння $x^2+4x+9=0$ не має дійсних коренів. Ні при якому дійсному значенні x перша похідна не набуває нескінченно великих значень, оскільки знаменник має тільки комплексні корені. Тобто маємо тільки одну критичну точку $x=0$, яка поділяє числову вісь на два інтервали $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Якщо на кожному з цих інтервалів вибрати довільну точку і підрахувати значення похідної, дістанемо, що похідна більше нуля на кожному з цих інтервалів.

Відповідь: Функція зростає на всій області її існування.

3. Знайти абсциси точок перегину графіка функції

$$y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}.$$

Розв'язання:

Знаходимо другу похідну функції

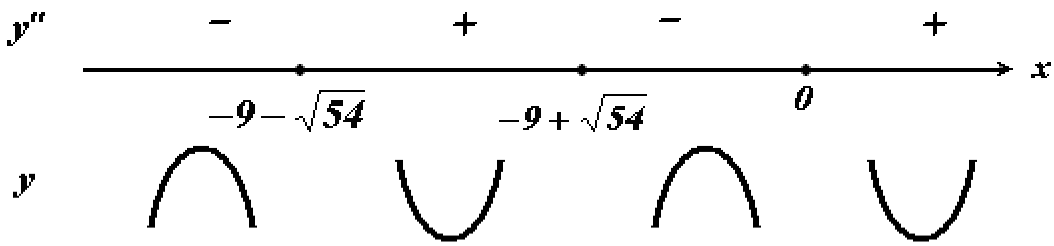
$$y''=\frac{2x\left(x^2+18x+27\right)}{\left(x^2+2x+3\right)}.$$

Точок, в яких знаменник цього дробу дорівнює нулю, немає, оскільки рівняння $x^2+2x+3=0$ не має дійсних коренів. Знайдемо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю:

$$2x\left(x^2+18x+27\right)=0,$$

$$x_1=-9-\sqrt{54}\approx-16{,}2;\ x_2=-9+\sqrt{54}\approx-1{,}8;\ x_3=0.$$

Відмітимо ці точки на числовій прямій та розглянемо знак похідної другого порядку на кожному з проміжків



Оскільки, друга похідна змінює знак в точках x_1, x_2, x_3, то ці точки є точками перегину кривої.

Відповідь: $-9-\sqrt{54}$; $-9+\sqrt{54}$; 0.

4. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ графіка функції $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

Розв'язання:

Знайдемо параметри k та b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2+2x-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3}=-2$$

.

Відповідь: $b=2$.

5. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

Розв'язання:

Врахуємо результати задач 1–4:

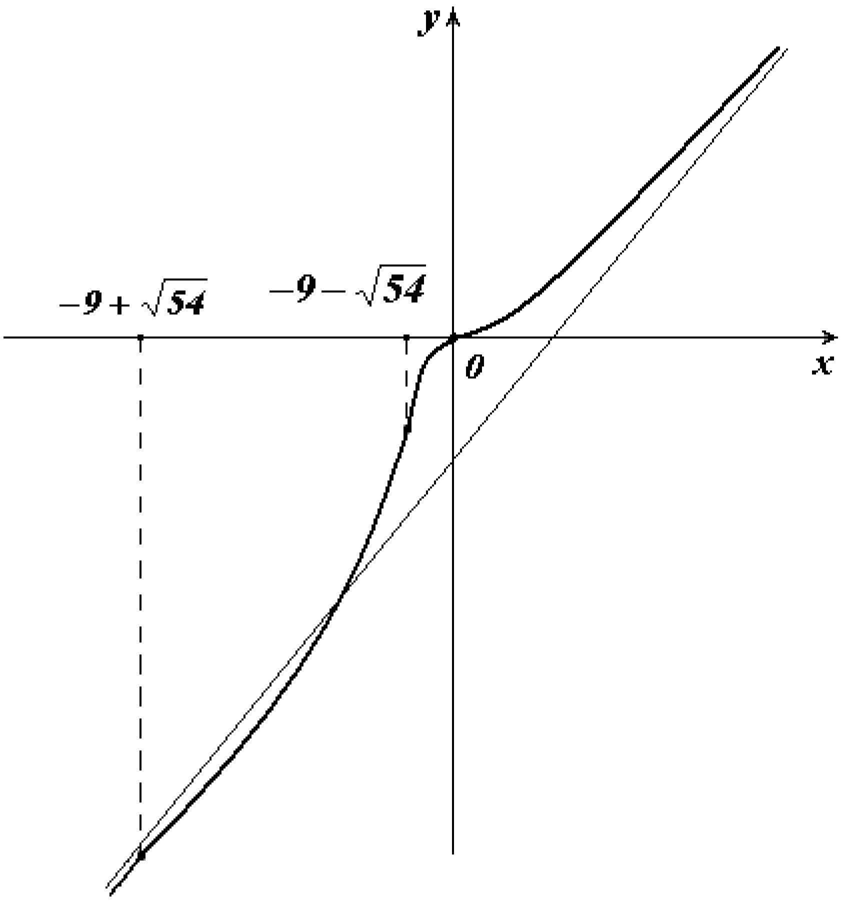


Рис. 4

Відповідь: Графік функції на рис. 4.

РОЗДІЛ 2
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Практична робота №1. Табличні інтеграли. Найпростіші правила інтегрування.

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$, якщо виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Будь-яка неперервна функція $f(x)$ має нескінчену множину первісних, які відрізняються одна від одної сталим доданком.

Означення 2. Загальний вираз $F(x)+C$ сукупності всіх первісних для функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від цієї функції: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Таблиця невизначених інтегралів:

1. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,$ при $n\neq 1.$	7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$.
2. $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$.	8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$.
3. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.
4. $\int e^x dx=e^x+C$.	10. $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.
5. $\int \cos xdx=\sin x+C$.	11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$.
6. $\int \sin xdx=-\cos x+C$.	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a}\right\rvert+C$.

Основні властивості невизначених інтегралів:

1. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, $a\neq 0$ - стала.

Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла, якщо функція $f(x)$ має первісну.

2. $\int(f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Невизначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) невизначених інтегралів від кожної функції, якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ мають первісну.

3. $(\int(f(x)dx))' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції.

4. $d(\int(f(x)dx)) = d(F(x)+C) = dF(x) = f(x)dx$.

Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x) = \int x^{\alpha} dx$, обчислити $F(1) - F(0)$.
2. Знайшовши $F(x) = \int(\alpha+1)^x dx$, обчислити $F(1) - F(0)$.
3. Знайшовши $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$, обчислити $F(2) - F(1)$.
4. Знайшовши $F(x) = \int \frac{\cos^3 x + \alpha}{\cos^2 x} dx$, обчислити $F(\frac{\pi}{4}) - F(0)$.
5. Знайшовши $F(x) = \int \frac{1+\alpha x}{x} dx$, обчислити $F(e) - F(1)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x) = \int x^{12} dx$, обчислити $F(1) - F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося таблицею інтегралів:

$$F(x) = \int x^{12} dx = \frac{x^{12+1}}{12+1} + C = \frac{x^{13}}{13} + C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень:

$$F(1) - F(0) = \frac{1^{13}}{13} + C - \frac{0^{13}}{13} - C = \frac{1}{13} = 0{,}0769.$$

Відповідь: *0,0769*.

2. Знайшовши $F(x)=\int 23^x dx$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int 23^x dx=\frac{23^x}{\ln 23}+C$$

$$F(1)-F(0)=\frac{23^1}{\ln 23}+C-\frac{23^0}{\ln 23}+C=\frac{23}{\ln 23}-\frac{1}{\ln 23}=\frac{22}{\ln 23}=7{,}0164.$$

Відповідь: *7,0164*.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+15^2}}$, обчислити $F(2)-F(1)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+15^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+15^2}\right|+C.$$

$$F(2)-F(1)=\ln\left|2+\sqrt{229}\right|+C-\ln\left|1+\sqrt{226}\right|-C=$$

$$=\ln\left|\frac{2+\sqrt{229}}{1+\sqrt{226}}\right|=0{,}0663.$$

Відповідь: *0,0663*.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{\cos^3 x+28}{\cos^2 x}dx$, обчислити $F(\frac{\pi}{4})-F(0)$

.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{\cos^3 x+28}{\cos^2 x}dx=\int(\cos x+\frac{28}{\cos^2 x})dx=\int\cos x dx+\int\frac{28}{\cos^2 x}dx=$$

$$=\sin x+28tgx+C$$

$$F(\frac{\pi}{4})-F(0)=\sin(\frac{\pi}{4})+28tg(\frac{\pi}{4})+C-\sin 0-28tg0-C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+28=28{,}7071.$$

Відповідь: *28,7071*.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{1+30x}{x}dx$, обчислити $F(e)-F(1)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{1+30x}{x}dx=\int(\frac{1}{x}+30)dx=\int\frac{dx}{x}+30\int dx=ln|x|+30x+C$$

$$F(e)-F(1)=ln\,e+30e+C-ln1-30-C=1+30e-30=$$

$$=1+30(e-1)=52{,}5485.$$

Відповідь: *52,5485.*

4 Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt[\alpha]{x}}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{3x+5}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{x^2+2x-3\alpha}{\sqrt{x}}dx$, обчислити $F(1)-F(0)$.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{\alpha+cos^2x}{1+cos\,2x}dx$, обчислити $F(\frac{\pi}{4})-F(0)$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{\alpha^2dx}{cos\,2x+sin^2x}$, обчислити $F(\frac{\pi}{6})-F(0)$.

6. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+x}}$, обчислити $F(0)$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

У підінтегральній функції перейдемо від показника кореня до показника степеня і застосуємо табличний інтеграл від степеневої функції.

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

$$F(1)-F(0)=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Відповідь: *1,5*.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{3x+5}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

Використаємо табличний інтеграл з лінійною внутрішньою функцією $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}ln\left|ax+b\right|+C$.

Маємо:

$$F(x)=\int\frac{dx}{3x+5}=\frac{1}{3}ln\left|3x+5\right|+C.$$

$$F(1)-F(0)=\frac{1}{3}ln\left|3+5\right|-\frac{1}{3}ln\left|3\cdot 0+5\right|=\frac{1}{3}ln8-\frac{1}{3}ln5=$$

$$=\frac{1}{3}ln\frac{8}{5}=0{,}1566$$

Відповідь: *0,1566*.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{x^2+2x-6}{\sqrt{x}}dx$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

Розділимо почленно чисельник на знаменник, подавши знаменник у вигляді степеневої функції:

$$F(x)=\int\frac{x^2+2x-6}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}-6x^{-\frac{1}{2}})dx$$

Інтеграл від алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів:

$$F(x)=\int x^{\frac{3}{2}}dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx-6\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+\frac{4\sqrt{x^3}}{3}-12\sqrt{x}+C\cdot$$

Знайдемо шукану різницю:

$$F(1)-F(0)=\frac{2}{5}+\frac{4}{3}-12=\frac{26}{15}-12=-10{,}2667.$$

Відповідь: *-10,266*.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{3+cos^2 x}{1+cos\,2x}dx$, обчислити $F(\frac{\pi}{4})-F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося найпростішими тригонометричними перетвореннями і розділимо почленно функцію, що стоїть під знаком інтеграла:

$$\int\frac{3+cos^2 x}{1+cos\,2x}dx=\int\frac{3+cos^2 x}{1+cos^2 x-sin^2 x}dx=\int\frac{3+cos^2 x}{2cos^2 x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{3dx}{cos^2 x}+\frac{1}{2}\int dx=\frac{3}{2}tgx+\frac{1}{2}x+C.$$

Знайдемо відповідну різницю:

$$F(\frac{\pi}{4})-F(0)=\frac{3}{2}tg(\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4})-\frac{3}{2}tg0+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{8}=1{,}8927.$$

Відповідь: *1,8927.*

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{9dx}{cos\,2x+sin^2 x}$, обчислити $F(\frac{\pi}{6})-F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося найпростішими тригонометричними перетвореннями:

$$\int\frac{9dx}{cos\,2x+sin^2 x}=9\int\frac{dx}{cos^2 x-sin^2 x+sin^2 x}=9\int\frac{dx}{cos^2 x}=9tgx+C.$$

Знайдемо відповідну різницю:

$$F(\frac{\pi}{6})-F(0)=9\cdot tg(\frac{\pi}{6})-9\cdot tg0=\frac{9}{\sqrt{3}}=5{,}1962.$$

Відповідь: *5,1962.*

6. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$, обчислити $F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося табличним інтегралом

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}=ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right|+C.$$

Одержимо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}=ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C.$$

Знайдемо відповідне значення:

$F(0)=ln\sqrt{5}=0,8047$.

Відповідь: *0,8047*.

Практична робота №2. Інтегрування заміною змінної (підстановкою) та частинами

1. Основні поняття та теореми

Метод інтегрування заміною змінної або інтегрування *підстановкою* полягає в тому, що замінюють x на $\phi(t)$, де $\phi(t)$ - неперервна диференційована функція і отримують:

$$\int f(x)dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

причому після інтегрування повертаються до старої змінної, виконавши обернену підстановку $t=\phi^{-1}(x)$.

Формулою *інтегрування частинами* називається формула:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

де u і v диференційовані функції по x. Для застосування цієї формули підінтегральний вираз треба подати у вигляді добутку однієї функції на диференціал другої функції.

Зауваження: при знаходженні інтегралу виду $\int P(x)\cdot e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$, за u слід прийняти многочлен $P(x)$; при знаходженні інтегралу виду $\int P(x)\cdot ln\, x dx$, $\int P(x)\cdot arcsin\, x dx$, $\int P(x)\cdot arccos\, x dx$, $\int P(x)\cdot arctg x dx$, за u треба прийняти $ln\, x$, $arcsin\, x$, $arccos\, x$, $arctg x$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x)=\int sin\frac{x}{\alpha}dx$, обчислити $F(\pi\alpha)-F(0)$.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\alpha^2+x^2}$, обчислити $F(\alpha)-F(0)$.

3. Знайшовши $F(x)=\int sin^2\alpha x\cdot cos\,\alpha xdx$, обчислити $F\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)-F(0)$.

4. Знайшовши $F(x)=\int x\cdot cos\frac{x}{\alpha}dx$, обчислити $F(\pi\alpha)-F(0)$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\sqrt{\alpha^2+x^2}dx$, обчислити $F(\alpha)-F(0)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x)=\int sin\frac{x}{17}dx$, обчислити $F(17\pi)-F(0)$.

Розв’язання:

У даному інтегралі внесемо під знак диференціала число $\frac{1}{17}$, і в наслідок інваріантності формул таблиці інтегралів знайдемо невизначений інтеграл, використавши табличний.

$$F(x)=\int sin\frac{x}{17}=17\int sin\frac{x}{17}d\left(\frac{x}{17}\right)=17\left(-cos\frac{x}{17}\right)+C$$

Знайдемо шукану різницю:

$$F(17\pi)-F(0)=-17\,cos\frac{17\pi}{17}+C+17\,cos\frac{0}{17}-C=$$

$$=-17\,cos\,\pi+17\,cos\,0=17+17=2\cdot 17=34$$

Відповідь: *34*.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{19^2+x^2}$, обчислити $F(19)-F(0)$.

Розв’язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{19^2+x^2}=\frac{1}{19^2}\int\frac{19d\left(\frac{x}{19}\right)}{1+\left(\frac{x}{19}\right)^2}=\frac{1}{19}arctg\left(\frac{x}{19}\right)+C.$$

Знайдемо різницю:

$$F(19)-F(0)=\frac{1}{19}arctg\left(\frac{19}{19}\right)+C-\frac{1}{19}arctg\left(\frac{0}{19}\right)-C=\frac{1}{19}\cdot\frac{\pi}{4}=$$

$$=\frac{\pi}{4\cdot 19}=0,0413.$$

Відповідь: *0,0413*.

3. Знайшовши $F(x)=\int sin^2 50x\cdot cos 50xdx$, обчислити $F\left(\frac{\pi}{2\cdot 50}\right)-F(0)$.

Розв'язання:

Внесемо $cos 50x$ під знак диференціала і, скориставшись таблицею інтегралів, знайдемо первісну:

$$F(x)=\int sin^2 50x\cdot cos 50xdx=\int sin^2 50x\cdot\frac{1}{50}d(sin 50x)=$$

$$=\frac{1}{50}\cdot\frac{sin^2 50x}{3}+C.$$

Знайдемо шукану різницю:

$$F\left(\frac{\pi}{2\cdot 50}\right)-F(0)=\frac{1}{3\cdot 50}sin^3\frac{50\pi}{2\cdot 50}+C-\frac{1}{3\cdot 50}sin^3 50\cdot 0-C=$$

$$\frac{1}{3\cdot 50}sin^3\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3\cdot 50}=0,0067.$$

Відповідь: *0,0067*.

4. Знайшовши $F(x)=\int x\cdot cos\frac{x}{27}dx,$ обчислити $F(27\pi)-F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося формулою інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu.$

$$F(x) = \int x \cdot \cos\frac{x}{27}dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos\frac{x}{27}dx, v = 27 \cdot \sin\frac{x}{27} \end{bmatrix} =$$

$$= x\sin\frac{x}{27} \cdot 27 - \int 27 \cdot \sin\frac{x}{27}dx = 27x\sin\frac{x}{27} + 27^2\cos\frac{x}{27} + C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень:

$$F(27\pi) - F(0) = 27\pi 27\sin\frac{\pi \cdot 27}{27} + 27^2\cos\frac{\pi \cdot 27}{27} + C -$$

$$- 27 \cdot 0\sin\frac{0}{27} - 27^2\cos\frac{0}{27} - C =$$

$$= 27^2\pi\sin\pi + 27^2\cos\pi - 27^2\cos o = -27^2 - 27^2 = -2 \cdot 27^2 = -1458.$$

Відповідь: -1458.

5. Знайшовши $F(x) = \int\sqrt{17^2 + x^2}dx,$ обчислити $F(17) - F(0)$.

Розв'язання:

Скористаємося формулою інтегрування частинами $\int udx = u \cdot v - \int vdu.$

$$F(x) = \int\sqrt{17^2 + x^2}dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{17^2 + x^2}, du = \dfrac{2x}{2\sqrt{17^2 + x^2}}dx \\ dv = dx, v = x \end{bmatrix} =$$

$$\sqrt{17^2 + x^2} \cdot x - \int x\frac{2x}{2\sqrt{17^2 + x^2}}dx = x\sqrt{17^2 + x^2} - \int\frac{x^2 + 17^2 - 17^2}{\sqrt{x^2 + 17^2}}dx =$$

$$x\sqrt{17^2 + x^2} - \int\left(\frac{x^2 + 17^2}{\sqrt{x^2 + 17^2}} - \frac{17^2}{\sqrt{x^2 + 17^2}}\right)dx =$$

$$x\sqrt{17^2 + x^2} - \int\sqrt{17^2 + x^2}dx + 17^2\int\frac{dx}{\sqrt{17^2 + x^2}}.$$

Нехай $I = \int\sqrt{17^2 + x^2}dx,$ тоді одержимо таку рівність:

$$I = x\sqrt{17^2 + x^2} - I + 17^2\int\frac{dx}{\sqrt{17^2 + x^2}},$$

$$2I = x\sqrt{17^2 + x^2} + 17^2 \int \frac{dx}{\sqrt{17^2 + x^2}},$$

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{17^2 + x^2} + \frac{17^2}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{17^2 + x^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{17^2 + x^2} + \frac{17^2}{2} \cdot ln\left|x + \sqrt{17^2 + x^2}\right| + C.$$

$$F(17) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \sqrt{17^2 + 17^2} + \frac{17^2}{2} ln\left|17 + \sqrt{17^2 + 17^2}\right| -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot 0\sqrt{17^2 + 0} = \frac{17^2}{2} ln\left|0 + \sqrt{17^2 + 0}\right| =$$

$$= \frac{1}{2} 17^2 \sqrt{2} + \frac{17^2}{2} ln\left|17 + 17\sqrt{2}\right| - \frac{17^2}{2} ln|17| =$$

$$= \frac{17^2}{2}\left(\sqrt{2} + ln\left|17 + 17\sqrt{2}\right| - ln|17|\right) = \frac{17^2}{2}\left(\sqrt{2} + ln\frac{17 + 17\sqrt{2}}{17}\right) =$$

$$= \frac{17^2}{2}\left(\sqrt{2} + ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) = 331{,}712.$$

Відповідь: *331,1712*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x) = \int x \sin \alpha x dx,$ знайти $F\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - F(0).$

2. Знайшовши $F(x) = \int \frac{dx}{\alpha + \sqrt{x + \alpha}},$ знайти $F(0).$

3. Знайшовши $F(x) = \int x^2 \alpha^x dx,$ знайти $F(0).$

4. Знайшовши $F(x) = \int \frac{x + \alpha}{x + \sqrt{x - 2\alpha}} dx,$ знайти $F(4\alpha)$.

5. Знайшовши $F(x) = \int e^{\alpha x} \sin x dx,$ знайти $F(0).$

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int x\sin 12x dx,$ знайти $F\left(\frac{\pi}{12}\right)-F(0).$

Розв'язання:

Проінтегруємо частинами за формулою

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$\int x\sin 12x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin 12x dx, v = -\frac{1}{12}\cos 12x \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{x}{12}\cos 12x + \frac{1}{12}\int \cos 12x dx = -\frac{x}{12}\cos 12x + \frac{1}{144}\sin 12x + C$$

$$F(x) = -\frac{x}{12}\cos 12x + \frac{1}{144}\sin 12x + C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F\left(\frac{\pi}{12}\right) - F(0) = -\frac{\pi}{144}\cos 12\frac{\pi}{12} + \frac{1}{144}\sin 12\frac{\pi}{12} + \frac{0}{12}\cos 12\cdot 0 -$$

$$-\frac{1}{144}\sin 12\cdot 0 = \frac{\pi}{144} = 0{,}0218.$$

Відповідь: *0,0218*.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{50+\sqrt{x+50}}$, знайти $F(0)$.

Розв'язання:

Знайдемо даний інтеграл, скориставшись заміною змінної:

$$\int\frac{dx}{50+\sqrt{x+50}} = \left[\begin{array}{l} x+50 = t^2, dx = 2tdt \\ x = t^2 - 50 \end{array}\right] =$$

$$= 2\int\frac{tdt}{50+t} = 2\int\frac{t+50-50}{50+t}dt = 2\left(\int dt - 50\int\frac{dt}{t+50}\right) =$$

$$= 2(t - 50\ln|t+50|) + C = 2\left(\sqrt{x+50} - 50\ln\left|\sqrt{x+50}+50\right|\right) + C.$$

Знайдемо відповідне значення первісної:

$$F(0)=2\left(\sqrt{0+50}-50\ln\left|\sqrt{0+50}+50\right|\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{50}-50\ln\left|\sqrt{50}+50\right|\right)=-390{,}2876.$$

Відповідь: *-390,2876.*

3. Знайшовши $F(x)=\int x^2 2^x dx,$ знайти $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

Знайдемо інтеграл частинами, за формулою $\int udv=u\cdot v-\int vdu:$

$$\int x^2 2^x dx=\begin{bmatrix} u=x^2, du=2xdx \\ dv=2^x dx, v=\dfrac{2^x}{\ln 2}\end{bmatrix}=\frac{x^2 2^x}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\int x2^x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x, du=dx \\ dv=2^x dx, v=\dfrac{2^x}{\ln 2}\end{bmatrix}=\frac{x^2 2^x}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\int 2^x dx\right)=$$

$$=\frac{x^2 2^x}{\ln 2}-\frac{2x\cdot 2^x}{\ln^2 2}+\frac{2\cdot 2^x}{\ln^3 2}+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(1)-F(0)=\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{4}{\ln^2 2}+\frac{4}{\ln^3 2}\right)-\frac{2}{\ln^3 2}=\frac{2}{\ln 2}-\frac{4}{\ln^2 2}-\frac{2}{\ln^3 2}=$$

$$=\frac{2}{\ln 2}\left(1-\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=-11{,}4458.$$

Відповідь: *-11,4458.*

4. Знайшовши $F(x)=\int\dfrac{x+33}{x\sqrt{x-66}}dx,$ знайти $F(132)$.

Розв'язання:

Знайдемо даний інтеграл, скориставшись заміною змінної:

$$\int\frac{x+33}{x\sqrt{x-66}}dx=\begin{bmatrix} x-66=t^2, dx=2tdt \\ x=t^2+66\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{t^2+66+33}{\left(t^2+66\right)t}2tdt=2\int\frac{t^2+99}{t^2+66}dt=2\int\left(1+\frac{33}{t^2+66}\right)dt=$$

$$=2\left(\int dt+33\int\frac{dt}{t^2+66}\right)=2\left(t+\frac{33}{\sqrt{66}}arctg\frac{t}{\sqrt{66}}\right)+C=$$

$$=2\left(\sqrt{x-66}+\frac{33}{\sqrt{66}}arctg\sqrt{\frac{x-66}{66}}\right)+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(132)=2\sqrt{66}+\frac{66}{\sqrt{66}}arctg1=2\sqrt{66}+\frac{66}{\sqrt{66}}\cdot\frac{\pi}{4}=22{,}6286.$$

Відповідь: *22,6286.*

5. Знайшовши $F(x)=\int e^{5x}\sin xdx,$ знайти $F(\pi)-F(0)$.

Розв'язання:

Застосуємо формулу інтегрування по частинам два рази.

$$\int e^{5x}\sin xdx=\begin{bmatrix}u=\sin x,du=\cos xdx\\ dv=e^{5x}dx,v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}e^{5x}\sin x-\frac{1}{5}\int e^{5x}\cos xdx=\begin{bmatrix}u=\cos x,du=-\sin xdx\\ dv=e^{5x}dx,v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}e^{5x}\sin x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\cos x+\frac{1}{5}\int e^{5x}\sin xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}e^{5x}\sin x-\frac{1}{25}e^{5x}\cos x-\frac{1}{25}\int e^{5x}\sin xdx.$$

Нехай $I=\int e^{5x}\cdot\sin xdx,$ тоді:

$$I=\frac{1}{5}e^{5x}\sin x-\frac{1}{25}e^{5x}\cos x-\frac{1}{25}I$$

$$I+\frac{1}{25}I=\frac{1}{5}e^{5x}\left(\sin x-\frac{1}{5}\cos x\right)$$

$$I(25+1)=e^{5x}(5\sin x-\cos x)$$

$$I=\frac{e^{5x}(5\sin x-\cos x)}{26}+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(\pi)-F(0)=\frac{e^{5\pi}(5\sin\pi-\cos\pi)}{26}-\frac{e^{5\,0}(5\sin 0-\cos 0)}{26}=$$

$$=\frac{e^{5\pi}+1}{26}=253192{,}0609.$$

Відповідь: *253192,0609.*

Практична робота №3. Інтегрування раціональних функцій

1. Основні поняття та теореми

Простішими *раціональними дробами* називаються правильні раціональні дроби такого виду:

1. $\dfrac{A}{x-a}$.
2. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$, де m - ціле число, більше одиниці.
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів.
4. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, де n - ціле число, більше одиниці, і квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів.

Інтегрування простіших дробів 1-го та 2-го типів виконується безпосередньо:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=\frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C.$$

Для знаходження інтегралу дробу третього типу необхідно в чисельнику виділити похідну знаменника і розкласти одержаний інтеграл на суму двох інтегралів: тоді перший з них за допомогою підстановки $x^2+px+q=t$ зводиться до інтегралу виду $\int\frac{dt}{t}=ln|t|=ln\left|x^2+px+q\right|$, а другий виділенням повного квадрата – до виду $\int\frac{dt}{u^2+k^2}=\frac{1}{k}arctg\frac{u}{k}$.

Для знаходження інтеграла дробу четвертого типу необхідно в чисельнику виділити похідну квадратного тричлена і розкласти одержаний інтеграл на суму двох інтегралів. Перший з яких за допомогою підстановки $x^2+px+q=t$ зводиться до інтеграла виду $\int\frac{dt}{t^n}=\frac{1}{(1-n)t^{n-1}}$, а другий буде мати вигляд $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$. За допомогою підстановки $x+\frac{p}{2}=u$ він перетворюється до інтеграла виду $I_n=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}$, який за допомогою інтегрування частинами можна звести до простішого інтеграла виду $I_{n-1}=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}$ того ж типу, але показник знаменника зменшується на один. При цьому справедлива така рекурентна формула:

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Продовжуючи цей процес, в результаті одержимо інтеграл $I_1=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}$.

Інтегрування раціональної функції після виділення цілої частини зводиться до інтегрування правильного раціонального дробу

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - цілі многочлени, причому степінь многочлена чисельника $P(x)$ нижче степіня знаменника $Q(x)$. Якщо

$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\dots(x-1)^{k}$,

де $a,\dots,1$ - різні дійсні корені многочлена $Q(x)$ і $\alpha,\dots,k$ - натуральні числа (кратності коренів), то справедливий розклад дробу на простіші:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots +$$

$$+ \frac{L_1}{x-1} + \frac{L_2}{(x-1)^2} + \frac{L_k}{(x-1)^k}.$$

Числа $A_1, A_2, \dots, L_k$ знаходять за допомогою методу невизначених коефіцієнтів.

Якщо многочлен $Q(x)$ має комплексні корені $a \pm bi$ кратності k, то розклад на простіші дроби буде мати вигляд:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{M_k x + N_k}{\left(x^2 + px + q\right)^k},$$

де $x^2 + px + q = \left[x - (a+bi)\right]\ \left[x - (a-bi)\right]$

$M_1, N_1, \dots, M_k, N_k$ - невизначені коефіцієнти.

2 . Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x) = \int \frac{dx}{x-\alpha}$, обчислити $F(110) - F(101)$.

2. Знайшовши $F(x) = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$, обчислити $F(110) - F(101)$.

3. Знайшовши $F(x) = \int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\alpha^2}dx$, обчислити $F(1) - F(0)$

.

4. За допомогою підстановки $x+\frac{p}{2}$ інтеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ зводиться до інтеграла $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$. Визначити число a^2 у разі інтеграла $\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\alpha^2}$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{x^2+\alpha x+\alpha^2}$, обчислити $F(0)-F\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{x-25}$, обчислити $F(110)-F(101)$.

Розв'язання:

$F(x)=\int\frac{dx}{x-25}=ln|x-25|+C.$

$F(110)-F(101)=ln|110-25|+C-ln|101-25|-C=$

$=ln\frac{85}{76}=0,1119.$

Відповідь: *0,1119*.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{(x-21)^2}$, обчислити $F(110)-F(101)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{(x-21)^2}=\int(x-21)^{-2}dx=\frac{(x-21)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x-21}+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$F(110)-F(101)=-\frac{1}{110-21}+C+\frac{1}{10-21}-C=$

$=\frac{1}{80}-\frac{1}{89}=0,0012.$

Відповідь: *0,0012*.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{2x+27}{x^2+27x+27^2}dx$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{2x+27}{x^2+27x+27^2}dx=\begin{bmatrix} t=x^2+27x+27^2 \\ dt=(2x+27)\,dx \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=ln|t|+C=$$

$$=ln\left|x^2+27x+27^2\right|+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(1)-F(0)=ln\left(1^2+27\cdot 1+27^2\right)+C-ln\left(0^2+27\cdot 0+27^2\right)-C=$$

$$=ln\frac{1+27+27^2}{27^2}=0,0376.$$

Відповідь: *0,0376.*

4. За допомогою підстановки $x+\frac{p}{2}$ інтеграл $\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ зводиться до інтеграла $\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}$. Визначити число a^2 у випадку інтеграла $\int\frac{dx}{x^2+33x+33^2}$.

Розв'язання:

$$a^2=q-\frac{p^2}{2},\ a^2=33-\frac{33^2}{2}=\frac{3\cdot 33^2}{4}=816,75.$$

Відповідь: *816,75.*

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{x^2+7x+7^2}$, обчислити $F(0)-F\left(-\frac{7}{2}\right)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{x^2+7x+7^2}=\int\frac{d\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+7^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{\frac{7\sqrt{3}}{2}}arctg\frac{\left(x+\frac{7}{2}\right)}{\frac{7\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(0)-F\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{2}{7\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+C-\frac{2}{7\sqrt{3}}arctg0-C=$$

$$=\frac{2}{7\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{21\sqrt{3}}=0{,}0863.$$

Відповідь: *0,0863*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{xdx}{(\alpha x+1)(2\alpha x+1)}$, знайти $F(1)$.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{x^5+x^4-\alpha}{x^3-\alpha^2 x}dx$, знайти $F(2)$.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{x\left(x^2+\alpha\right)}$, знайти $F(2)$.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)\left(x^2-2x+\alpha\right)}dx$, знайти $F(3)$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-\alpha)(x+2\alpha)(x-3\alpha)}dx$, знайти $F(1)$

.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$, знайти $F(3)-F(2)$..

Розв'язання:

Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Всі корені знаменника дійсні, другий з них кратний, тому підінтегральна функція розкладеться на суму трьох простіших дробів у вигляді:

$$\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)},$$

де A, B, C - коефіцієнти, які треба визначити.

Звівши до спільного знаменника і прирівнявши чисельники, маємо тотожність

$$x=A(x+1)^2+B(x-1)+C(x+1)(x-1)$$

Розкривши дужки, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частині тотожності. Отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 0=A+\tilde{N} \\ 1=2A+B \\ 0=A-\tilde{N}-B. \end{cases}$$

Розв’язавши систему, маємо:

$$A=\frac{1}{4} \qquad B=\frac{1}{2} \qquad \tilde{N}=-\frac{1}{4}.$$

Отже:

$$F(x)=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}ln|x-1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}ln|x+1|+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(3)-F(2)=\left(\frac{1}{4}ln2-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}ln4\right)-\left(\frac{1}{4}ln1-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}ln3\right)=$$

$$=\frac{1}{4}ln2-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}ln4+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}ln3=0,143.$$

Відповідь: $0,143$.

2. Знайшовши $F(x)=\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$, знайти $F(4)$.

Розв'язання:

У підінтегральній функції степінь чисельника більший степеня знаменника, тобто раціональний дріб неправильний. Треба виділити цілу частину. Поділивши чисельник на знаменник, отримаємо:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тобто:

$$F(x)=\int x^2dx+\int xdx+4\int dx+\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx$$

Перші три інтеграли табличні. Останній треба взяти окремо.

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=\int \frac{4x^2+16x-8}{x\left(x^2-4\right)}dx=\int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx.$$

Підінтегральна функція розкладається на суму трьох простіших дробів:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звівши до спільного знаменника і прирівнявши чисельники, маємо тотожність

$$4x^2+16x-8=A\cdot(x-2)\cdot(x+2)+Bx\cdot(x+2)+Cx\cdot(x-2).$$

Розкривши дужки порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x і утворюємо систему для знаходження значень коефіцієнтів A, B, C

$$\begin{cases} 4=A+B+C \\ 16=2B-2C \\ -8=-4A. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $A=2$ $B=5$ $C=-3.$

Тоді розв'язання інтеграла буде:

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}dx = 2\int\frac{dx}{x} + 5\int\frac{dx}{x-2} - 3\int\frac{dx}{x+2} =$$

$$= 2\cdot ln|x| + 5\cdot ln|x-2| - 3\cdot ln|x+2| + C.$$

Загальний розв’язок:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\,ln|x| + 5\,ln|x-2| - 3\,ln|x+2| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C.$$

Знайдемо відповідне значення первісної:

$$F(4) = \frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 16 + ln\left|\frac{16\cdot 32}{216}\right| = 46{,}1963.$$

Відповідь: *46,1963*.

3. Знайшовши $F(x) = \int\frac{dx}{x(x^2+1)}$, знайти $F(1)$.

Розв’язання:

Один з двох коренів знаменника раціонального дробу, який інтегрується, - комплексний. Тому підінтегральна функція розкладається на суму двох простіших дробів:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B\cdot x + C}{x^2+1}$$

$$1 = A\cdot(x^2+1) + x\cdot(B\cdot x + C)$$

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 0 = C \\ 1 = A \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -1 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Тоді:

$$F(x)=\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}$$

Перший інтеграл табличний, а другий легко береться за допомогою заміни:

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\left[\begin{array}{l} x^2+1=t, dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}dt \\ x=\sqrt{t-1} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}ln|t|+C=\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|+C.$$

Звідки $F(x)=ln|x|-\dfrac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|+C$.

Отже $F(1)=ln1-\dfrac{1}{2}ln2=-0{,}3465.$

Відповідь: *-0,3465*.

4. Знайшовши $F(x)=\int\dfrac{xdx}{x^3+1}$, знайти $F(1)$.

Розв'язання.

Знаменник раціонального дробу розкладається на множники $x^3+1=(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)$, причому другий співмножник не розкладається на дійсні множники. Тому розклад даного дробу на найпростіші буде мати вигляд:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2-x+1}.$$

Звідки:

$$x=A\left(x^2-x+1\right)+(x+1)(Bx+D)$$

$$x=(A+B)x^2+(-A+B+D)x+(A+D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, розв'язуючи систему одержимо:

$$A=-\frac{1}{3}\quad,\ B=\frac{1}{3}\quad,\ D=\frac{1}{3}$$

Таким чином:

$$F(x)=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{3}J_1.$$

Для обчислення інтеграла $J_1=\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx$, виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Виконаємо підстановку $x-\frac{1}{2}=t$, тоді:

$$J_1=\int\frac{t+\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C$$

Повертаючись до змінної x, маємо:

$$J_1=\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2-x+1\right)+\sqrt{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Таким чином, первісна матиме вигляд:

$$F(x)=\int\frac{x}{x^3+1}dx=-\frac{1}{3}ln|x+1|+\frac{1}{6}ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Знайдемо відповідне значення:

$$F(1)=-\frac{1}{3}ln|1+1|+\frac{1}{6}ln\left(1^2-1+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{2\cdot1-1}{\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln 1+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=$$
$=0,0712.$

Відповідь: *0,0712*.

Практична робота №4. Інтегрування деяких ірраціональних та тригонометричних функцій

1. Основні поняття та теореми

Деякі типи інтегралів від алгебраїчних *ірраціональностей* заміною змінної можна звести до інтегралів від раціональних функцій.

Якщо під знаком інтеграла стоїть раціональна функція від дробових степенів незалежної змінної x, тобто функція має вид

$$R\left(x,x^{\frac{\rho_1}{q}},\dots,x^{\frac{\rho_k}{q_k}}\right),$$

то раціоналізація інтеграла відбувається за допомогою *підстановки* $x=t^m$, де m - це найменше спільне кратне чисел $q_1,q_2,\dots,q_k$.

Якщо під знаком інтеграла стоїть раціональна функція від x і дробових степенів дробово-лінійної функції виду: $\frac{ax+b}{cx+d}$, то раціоналізація інтеграла відбувається підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$, де m - це найменше спільне кратне знаменників дробів.

Інтеграл виду $\int \sin^m x\cos^n xdx$, де m і n - раціональні числа, знаходиться методом підстановки, яка має вид: $\sin x=t$, якщо n - непарне, та $\cos x=t$, якщо m - непарне.

Якщо сума чисел $(m+n)$ - парна, то використовується підстановка $tgx=t.$ У цьому випадку $sin^2 x=\frac{t^2}{t^2+1}$, $cos^2 x=\frac{1}{t^2+1}$, $dx=\frac{1}{t^2+1}dt$.

Інтеграли виду $\int R(sin\,x, cos\,x)\,dx$, де R - раціональна функції від $sin\,x$ і $cos\,x$, перетворюються на інтеграли від раціональної функції універсальною тригонометричною підстановкою $tg\frac{x}{2}=t.$ Тоді $sin\,x=\frac{2t}{t^2+1}$, $cos\,x=\frac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx=\frac{2dt}{t^2+1}$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\alpha+\sqrt{x}}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

2. Знайшовши $F(x)=\int(cos\,\pi\alpha-cos\,2x)\,dx$, обчислити $F(\pi)-F(0)$.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{sin^3\alpha x}{1+cos\,\alpha x}dx$, обчислити $F\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)-F(0)$

.

4. Знайшовши $F(x)=\int cos^2\frac{x}{\alpha}dx$, обчислити $F(\pi\alpha)-F(0)$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\alpha+\sqrt[4]{x}\right)^3}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{31+\sqrt{x}}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв’язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{31+\sqrt{x}}=\begin{bmatrix}31+\sqrt{x}=t, dx=2(t-31)\,dt\\ x=(t-31)^2\end{bmatrix}=$$

$$\int\frac{2(t-31)\,dt}{t}=\int\frac{2t-2\cdot 31}{t}dt=\int\left(2-\frac{2\cdot 31}{t}\right)dt=2t-2\cdot 31 ln\,t+C=$$

$$=2\left(31+\sqrt{x}\right)-2\cdot 31ln\left(31+\sqrt{x}\right)+C$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(1)-F(0)=2(31+1)-2\cdot 31ln(31+1)+C-$$

$$-2\cdot 31+2\cdot 31ln\,31-C=2\cdot 31+2-2\cdot 31+$$

$$+2\cdot 31\cdot ln\frac{31}{31+1}=2+2\cdot 31\cdot ln\frac{31}{31+1}=0{,}0315.$$

Відповідь: *0,0315*.

2. Знайшовши $F(x)=\int(cos\,18\pi-cos\,2x)\,dx$, обчислити $F(\pi)-F(0)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int(cos\,18\pi-cos\,2x)\,dx=x\,cos\,18\pi-\frac{1}{2}sin\,2x+C.$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F(\pi)-F(0)=\pi\,cos\,18\pi-\frac{1}{2}sin\,2\pi+C-0+\frac{1}{2}0-C=$$

$$=\pi(-1)^{18}=3{,}1415.$$

Відповідь: *3,1415*.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{sin^3 20x}{1+cos\,20x}dx$, обчислити $F\left(\frac{\pi}{2\cdot 20}\right)-F(0)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{sin^3 20x}{1+cos\,20x}dx=\int\frac{sin^2 20x}{1+cos\,20x}sin\,20x dx=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 20x}{1+\cos 20x}\sin 20x dx=\int\frac{(1-\cos 20x)(1+\cos 20x)}{1+\cos 20x}\cdot\sin 20x dx=$$

$$=\int(1-\cos 20x)\sin 20x dx=\left[\begin{matrix} t=\cos 20x, \sin 20x dx=-\dfrac{dt}{20} \\ dt=-20\sin 20x dx \end{matrix}\right]=$$

$$=\int(1-t)\left(-\frac{dt}{20}\right)=-\frac{1}{20}\int(1-t)\,dt=-\frac{1}{20}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{20}\cos 20x+\frac{1}{20}\frac{\cos^2 20x}{2}+C$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F\left(\frac{\pi}{2\cdot 20}\right)-F(0)=-\frac{1}{20}\cos 20\frac{\pi}{2\cdot 20}+\frac{1}{20}\frac{\cos^2 20\dfrac{\pi}{2\cdot 20}}{2}+\frac{1}{20}\cdot 1-$$

$$-\frac{1}{2\cdot 20}\cdot 1=\frac{1}{20}-\frac{1}{2\cdot 20}=\frac{1}{2\cdot 20}=0,025.$$

Відповідь: *0,025*.

4. Знайшовши $F(x)=\int\cos^2\frac{x}{33}dx$, обчислити $F(33\pi)-F(0)$.

Розв'язання:

Понизимо степінь косинуса.

$$F(x)=\int\cos^2\frac{x}{33}dx=\int\frac{1+\cos\dfrac{2x}{33}}{2}dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\cos\frac{2x}{33}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{33}{2}\sin\frac{2x}{33}+C$$

$$F(33\pi)-F(0)=\frac{1}{2}33\pi+\frac{33}{4}\sin 2\frac{\pi 33}{233}+C-0-0=\frac{33\pi}{2}=51,8368.$$

Відповідь: *51,8369*.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^3}$, обчислити $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^3}=\begin{bmatrix} x=t^4, dx=4t^3dt \\ \sqrt[4]{x}=t, \sqrt{x}=t^2 \end{bmatrix}=\int\frac{4t^3dt}{t^2(10+t)^3}=$$

$$=4\int\frac{tdt}{(10+t)^3}=4\int\left(\frac{A}{10+t}+\frac{B}{(10+t)^2}+\frac{C}{(10+t)^3}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{(10+t)^{-1}}{-1}-10\frac{(10+t)^{-2}}{-2}\right)=-\frac{4}{10+\sqrt[4]{x}}+\frac{2\cdot 10}{\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^2}+C=$$

$$=\frac{2\cdot 10}{\left(10+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\frac{4}{10+\sqrt[4]{x}}+C.$$

Відповідь: *0,0016.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти $F(1)$, знайшовши $F(x)=\int\sqrt{\frac{\alpha x+1}{\alpha x-1}}\cdot\frac{dx}{\alpha x-1}$.

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{\alpha}{(\alpha-x)^2}\sqrt[3]{\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}dx$, знайти $F(0)$.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{xdx}{\sqrt{x+\alpha}+\sqrt[3]{x+\alpha}}$, знайти $F(0)$.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\alpha+\cos x}$, знайти $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{\alpha^3 sin^3 x}$, знайти $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайшовши $F(x)=\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x-1}$, знайти $F(4)$.

Розв'язання:

Знайдемо інтеграл $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x-1}$. Використаємо спосіб підстановки. Покладемо $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. Тоді $t^2=\frac{x+1}{x-1}$, $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $x-1=\frac{2}{t^2-1}$, $dx=-\frac{4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$.

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x-1}=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-1}=-2\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$-2t-2ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\right)^2+C.$$

$$F(x)=-2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-2ln\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2}{2}.$$

Знайдемо $F(4)$

$$F(4)=-2\sqrt{\frac{5}{3}}-2ln\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)^2=-1,2117.$$

Відповідь: *-1,2117.*

2. Знайшовши $F(x)=\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$, знайти $F(1)-F(0)$.

Розв'язання:

Знайдемо інтеграл $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$. Використаємо підстановку: $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=t$, $\frac{2-x}{2+x}=t^3$, $x=\frac{2-2t^3}{1+t^3}$, $2-x=\frac{4t^3}{1+t^3}$, $dx=\frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt.$

Після заміни змінної маємо:

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int\frac{2\left(1+t^3\right)^2 t\cdot 12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$$

Знайдемо $F(1)-F(0)$, $F(1)-F(0)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{9}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{1}=0,3894$.

Відповідь: *0,3894*.

3. Знайшовши $F(x)=\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$, знайти $F(1)-F(0)$.

Розв'язання.

Знайдемо інтеграл $\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx$. Використаємо спосіб заміни змінної, звівши інтеграл від ірраціональної функції до інтегралу від раціональної функції.

$$\int\frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}dx=\begin{bmatrix}1+x=y^6,\sqrt{x+1}=y^3\\ x=y^6-1,\sqrt[3]{x+1}=y^2\end{bmatrix}=$$

$$=6\int\frac{\left(y^6-1\right)^2+y^3}{y^2}\cdot y^5dy=\int\left(y^{15}-2y^9+y^3+y^6\right)dy=$$

$$=6\left(\frac{y^{16}}{16}-\frac{2y^{16}}{10}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^7}{7}\right)+C.$$

Повернемося до попередньої змінної x. Відповідно матимемо:

$$F(x)=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x+1)^8}-\frac{6}{5}\sqrt[3]{(x+1)^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7}+C.$$

$$F(1)-F(0)=\frac{3}{8}\sqrt[3]{2^8}-\frac{6}{5}\sqrt[3]{2^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2^2}+\frac{6}{7}\sqrt[3]{2^7}+C-\frac{3}{8}+\frac{6}{5}-\frac{3}{2}-\frac{6}{7}-C=$$

$$=\frac{12}{8}\sqrt[3]{4}-\frac{12}{5}\sqrt[3]{4}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}+\frac{24}{7}\sqrt[3]{2}-\frac{3}{8}+\frac{6}{5}-\frac{3}{2}-\frac{6}{7}=4,364$$

Відповідь: $4,364$.

4. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{2+\cos x}$, знайти $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання:

Знайдемо інтеграл $\int\frac{dx}{2+\cos x}$. Застосуємо підстановку $t=tg\frac{x}{2}$, тоді $x=2arctgt$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\int\frac{dx}{2+\cos x}=\int\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=3\int\frac{dt}{3-t^2}dt=3\frac{1}{2\sqrt{3}}ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|+C$$

Прийдемо від нової змінної t до попередньої x, одержимо:

$$F(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}+tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-tg\frac{x}{2}}\right|+C$$

Знайдемо різницю відповідних значень первісної:

$$F\left(\frac{3\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}+tg\frac{3\pi}{4}}{\sqrt{3}-tg\frac{3\pi}{4}}\right|+C-\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}+tg\frac{\pi}{4}}{\sqrt{3}-tg\frac{\pi}{4}}\right|-C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|+\frac{\sqrt{3}}{2}ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|=$$

$$=\sqrt{3}\,ln\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|=-2,281.$$

Відповідь: *-2,281.*

5. Знайшовши $F(x)=\int\frac{dx}{8\sin^3 x}$, знайти $F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання:

Знайдемо інтеграл $\int\frac{dx}{8\sin^3 x}$. Застосуємо підстановку:

$tg\frac{x}{2}=z$, тоді $x=2arctgz$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$,

Тому

$$\int\frac{dx}{8\sin^3 x}=\frac{1}{8}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{\left(1+z^2\right)^3}}=\frac{1}{32}\int\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z^3}dz=$$

$$=\frac{1}{32}\int\frac{1+2z^2+z^4}{z^3}dz.$$

розділивши на z^3, матимемо три інтеграли:

$$\frac{1}{32}\left(\int\frac{dz}{z^3}+2\int\frac{dz}{z}+\int zdz\right)=\frac{1}{32}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}+2\,ln|z|+\frac{z^2}{2}\right)+C.$$

Повернемося до початкової змінної, замінивши z на $tg\frac{x}{2}$.

$$F(x)=-\frac{1}{64}ctg^2\frac{x}{2}+\frac{1}{16}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+64tg^2+C.$$

Знайдемо $F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{64}ctg^2\frac{\pi}{4}+\frac{1}{64}ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|+\frac{1}{64}tg^2\frac{\pi}{4}+$$

$$+\frac{1}{64}ctg^2\frac{\pi}{6}-\frac{1}{64}ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right|-\frac{1}{64}tg^2\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{1}{64}+0+\frac{1}{64}+\frac{3}{64}-\frac{1}{64}ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{64}\left(3-ln59-\frac{1}{3}\right)=-0,0220.$$

Відповідь: *-2,281*.

Практична робота №5. Формула Ньютона-Лейбниця. Інтегрування заміною змінної та частинами в визначеному інтегралі

1. Основні поняття та теореми

1. Означення *визначеного інтеграла*.

Нехай на відрізку $[a;b]$, де $a\le b$, задано функцію $y=f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин так, щоб $a=x_0<x_1<...<x_k<x_{k+1}<...<x_n=b$.

Сукупність точок $x_0,x_1,...,x_n$ називатимемо Т – розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини.

На кожному частинному відрізку $[x_k;x_{k+1}]$, $k = 0,1,..., n – 1$, виберемо довільно по одній точці $c_k\in[x_k;x_{k+1}]$.

Нехай $\lambda=\max\limits_{0\le k\le n-1}\Delta x_k,\ \Delta x_k=x_{k+1}-x_k,\ k=0,1,...,n-1.$

Зрозуміло, що для різних Т – розбиттів відрізка $[a;b]$ число λ, взагалі кажучи, буде різним. Отже, λ залежить від Т: $\lambda=\lambda$(Т). Надалі розглядатимемо тільки такі розбиття, для яких λ(Т)$\to$ 0. Побудуємо суму

$$\delta = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Суму (1) називають *інтегральною сумою* функції $f(x)$, побудовану на відрізку $[a;b]$ для даного Т – розбиття.

Означення 1. Число I називають границею інтегральної суми (1) при λ(Т)$\to$ 0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число δ>0 , що як тільки $\lambda(T) < \delta$, то при будь-якому виборі точок c_k і будь-якому Т – розбитті відрізка $[a;b]$ справджується нерівність $|\delta - I| < \varepsilon.$

Це записують так:

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(C_k)\Delta x_k. \tag{2}$$

Означення 2. Границя інтегральної суми, якщо вона існує, називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\,0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \tag{3}$$

де a і b – межі інтегрування.

1. *Формула Ньютона-Лейбніца*.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{4}$$

2. *Заміна змінної* у визначеному інтегралі.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1) $f(x)$ неперервна функція на відрізку $[a;b]$;

2) функція $x = \phi(t)$ і її похідна $x' = \phi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$;

3) $\phi(\alpha) = a,\ \phi(\beta) = b$ і значення $x = \phi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta].$

Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt. \tag{5}$$

3. Формула *інтегрування частинами*.

$$\int_a^b u(x)dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \qquad (6)$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца інтеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha} dx.$$

2. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца інтеграл

$$\int_0^{\pi\alpha} \sin\frac{x}{\alpha} dx.$$

3. Обчислити методом підстановки інтеграл

$$\int_9^{16} \frac{dx}{\alpha + \sqrt{x}}.$$

4. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_1^{\alpha} \ln x dx.$$

5. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_0^{\alpha} \arcsin\frac{x}{\alpha} dx.$$

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца інтеграл

$$\int_1^2 x^{-5} dx.$$

Розв'язання:

Згідно з (4) одержимо

$$\int_1^2 x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1}\Bigg|_1^2 = \frac{x^{-4}}{-4}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4}\right) \approx 0,2344.$$

Відповідь: *0,2344*.

2. Обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца інтеграл

$$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{4}dx.$$

Розв'язання:

Використовуючи метод внесення під знак диференціала і формулу Ньютона-Лейбніца (4), одержимо

$$\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{4}dx = 4\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{4}d(\frac{x}{4}) = -4\cdot\cos\frac{x}{4}\Big|_0^{\pi} = -4\cdot(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0) =$$

$$= -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 1{,}1716.$$

Відповідь: *1,1716.*

3. Обчислити методом підстановки інтеграл

$$\int_9^{36} \frac{dx}{100+\sqrt{x}}.$$

Розв'язання:

Використовуючи (4), (5), дістанемо

$$\int_9^{36} \frac{dx}{100+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{ll} 100+\sqrt{x} = t & dx = 2(t-100)dx \\ \sqrt{x} = t - 100 & \begin{array}{ll} x & t \\ 9 & 103 \end{array} \\ x = (t-100)^2 & \begin{array}{ll} 36 & 106 \end{array} \end{array} \right| = \int_{103}^{106} \frac{2(t-100)}{t}dt =$$

$$= 2\int_{103}^{106} (1 - \frac{100}{t})dx = 2(t - 100\ln|t|)\Big|_{103}^{106} = 2(106 - 100\cdot\ln 106 -$$

$$-103 + 100\ln 103) = 2(3 - 100\ln\frac{106}{103}) \approx 0{,}2580$$

Відповідь: *0,258.*

4. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_1^{120} ln(2x)dx.$$

Розв'язання:

Використовуючи (4), (6), дістанемо

$$\int_1^{120} ln(2x)dx = \begin{vmatrix} u = ln(2x) & du = \frac{2}{2x}dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\,ln(2x)\Big|_1^{120} - \int_1^{120}\frac{xdx}{x} = (x\,ln(2x) - x)\Big|_1^{120} =$$

$$= 120\,ln\,240 - 120 - 1\,ln\,2 + 1 = 120\,ln\,240 - ln\,2 - 119 \approx 537{,}9835.$$

Відповідь: *537,9835*.

5. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_0^1 arcsin\,xdx.$$

Розв'язання:

Використовуючи (4), (6), дістанемо

$$\int_0^1 arcsin\,xdx = \begin{vmatrix} u = arcsin\,x & du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\,arcsin\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= (1\,arcsin\,1 - 0\ \ arcsin\,0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}2\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} + (\sqrt{1-1^2} - \sqrt{1-0^2}) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}5708.$$

Відповідь: *0,5708*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_{1}^{\alpha} ln^3 x dx.$$

2. Обчислити методом підстановки інтеграл

$$\int_{0}^{\frac{\alpha}{10}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\left(\frac{\alpha}{10}\right)^2 + x^2\right)}}.$$

3. Обчислити, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, інтеграл

$$\int_{0}^{3} \frac{\alpha dx}{(x+\alpha)(x+2\alpha)}.$$

4. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_{1}^{\alpha} arctg\sqrt{\sqrt{x} - 1}dx.$$

5. Розв’язати рівняння

$$\int_{\sqrt{2}}^{\frac{x}{\alpha}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{12}.$$

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_{1}^{e} ln^3 \alpha dx.$$

Розв’язання:

Застосовуємо тричі метод інтегрування частинами (6)

$$\int_1^e ln^3 x dx = \left| \begin{matrix} u = ln^3 x & du = \dfrac{3ln^2 x}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x ln^3 x \Big|_1^e - 3\int_1^e \frac{x ln^2 x}{x}dx =$$

$$= x ln^3 x \Big|_1^e - 3\int_1^e ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = ln^2 x & du = \dfrac{2ln x}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x ln^3 x \Big|_1^e - 3\left(x ln^2 x \Big|_1^e - 2\int_1^e \frac{x ln x}{x}dx \right) =$$

$$= x ln^3 x \Big|_1^e - 3x ln^2 x \Big|_1^e + 6\int_1^e ln x dx = \left| \begin{matrix} u = ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(x ln^3 x - 3x ln^2 x \right)\Big|_1^e + 6\left(x ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x dx}{x} \right) =$$

$$= \left(x ln^3 x - 3x ln^2 x + 6x ln x - 6x \right)\Big|_1^e = \left(e ln^3 e - 3e ln^2 e + 6e ln e - 6e \right) -$$

$$- \left(1 ln^3 1 - 3 \cdot 1 ln^2 1 + 6 \cdot 1 ln 1 - 6e \right) = e - 3e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e \approx 0,5634$$

Відповідь: *0,5634.*

2. Обчислити методом підстановки інтеграл

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{\left(25 + x^2\right)^3}}.$$

Розв'язання:

Застосовуємо підстановку $x = 5tgt$. Тоді

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{\left(25 + x^2\right)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 5tgt & & x & t \\ & & 0 & 0 \\ dx = \dfrac{5}{cos^2 t}dt & & 5 & \dfrac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5dt}{cos^2 t\sqrt{\left(25 + 25\, tg^2 t\right)^3}} =$$

$$=\frac{5}{5^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(1+tg^2 t\right)^3}}=\frac{1}{25}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}}=\frac{1}{25}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{25}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt==\frac{1}{25}\sin t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{25}\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0\right)=\frac{\sqrt{2}}{50}\approx 0,0283.$$

Відповідь: *0,0283*.

3. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, обчислити інтеграл

$$\int_2^5\frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$$

Розв'язання:

Для обчислення даного інтеграла подамо підінтегральну функцію у вигляді суми елементарних раціональних дробів

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}.$$

Звідси

$$1=(x+2)+B(x-1)$$

Невідомі коефіцієнти визначаємо, послідовно підставляючи в ліву і праву частини рівності значення $x_1=-2, x_2=1$ (корені знаменника).

При $x_1=-2$ знаходимо: $B=-\frac{1}{3}$

При $x_2=1$ знаходимо: $A=\frac{1}{3}$

Отже,

$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int_2^5 \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)} \right) dx = \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int_2^5 \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} ln|x-1| - \frac{1}{3} ln|x=2| \right) \Bigg|_2^5 = \frac{1}{3} ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \Bigg|_2^5 = \frac{1}{3}\left(ln\frac{5-1}{5+2} - ln\frac{2-1}{2+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{3}(ln 2 + ln 4) \approx \frac{1}{3} ln(2 \cdot 4) = \frac{1}{3} ln 8 \approx 0,6931.$$

Відповідь: *0,6931.*

4. Обчислити методом інтегрування частинами інтеграл

$$\int_4^9 arctg\sqrt{\sqrt{x}-2}\, dx.$$

Розв'язання:

Застосуємо спочатку підстановку $\sqrt{x} - 2 = t^2$

$$\int_4^9 arctg\sqrt{\sqrt{x}-2}\, dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} - 2 = t^2 & & x & t \\ x = (t^2+2)^2 & & 1 & 0 \\ dx = 2(t^2+2)2tdt & & 9 & 1 \end{matrix} \right| = 4\int_0^1 arctgt \cdot (t^3 + 2t)dt.$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами

Нехай

$$u = arctgt, \qquad dv = (t^3 + 2t)di$$

Тоді

$$du = \frac{dt}{1+t^2}, \qquad v = \frac{t^4}{4} + \frac{2t^2}{2} = \frac{t^4 + 4t^2}{4.}$$

Отже,

$$4\int_0^1 arctgt\cdot(t^3+2t)dt=4\left(\left(\frac{t^4+4t^2}{4}arctgt\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{t^4+4t^2}{t^2+1}dt\right)=$$

$$=\left(\left(t^4+4t^2\right)arctgt\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1\left(t^2+3-\frac{3}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\left[\left(t^4+4t^2\right)arctgt-\frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3}+3t-3arctgt\right)\right]\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(1^4+4\cdot1^2\right)arctg1-\frac{1}{4}\left(\frac{1^3}{3}+3\cdot1-arctg1\right)-$$

$$-\left(0^4+4\cdot0^2\right)arctg0+\frac{1}{4}\left(\frac{0^3}{3}+3\cdot0-arctg0\right)=$$

$$=5\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+3-3\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)=$$

$$=5\frac{\pi}{4}-\frac{5}{6}+\frac{3\pi}{16}=\frac{23\pi}{16}-\frac{5}{6}\approx3,6827.$$

Відповідь: *3,6827.*

5. Розв’язати рівняння

$$\int_{ln2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\frac{\pi}{6}.$$

Розв’язання:

Обчислимо значення інтеграла в лівій частині.

Застосуємо підстановку $e^x-1=t^2$.

Тоді

$$e^x dx=2tdt,$$

$$dx=\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Знайдемо межі по t

x	t
$ln2$	1
x	$e^x - 1$

Отже,

$$\int_{ln2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=2\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{tdt}{\left(t^2+1\right)t}=2\int_{1}^{\sqrt{e^x-1}}\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)}=$$

$$=2arctgt\Big|_{1}^{\sqrt{e^x-1}}=2\left(arctg\sqrt{e^x-1}-arctg1\right)==2\left(arctg\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Прирівняємо одержаний вираз до $\frac{\pi}{6}$,

$$2\left(arctg\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6},$$

$$arctg\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12},$$

$$arctg\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{3.}$$

Розв’язуючи дане рівняння, дістанемо

$$e^x-1=3,$$

$$e^x=4,$$

$$x=ln4\,.$$

Відповідь: *ln4*.

Практична робота №6. Невласні інтеграли. Деякі застосування визначеного інтеграла

1. Основні поняття та теореми.

Невласні інтеграли з нескінченими межами.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;+\infty)$ і є неперервною на будь-якому відрізку $[a;b]$, де $b>a$ є довільне дійсне число. Тоді існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

і він є функцією верхньої межі (a – стале число)

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Означення 1. Якщо існує скінчена границя інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$, то границю називають *невласним інтегралом* функції $f(x)$ від a до $+\infty$ і записують

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

В цьому випадку інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, а саму функцію $f(x)$ - інтегровною на проміжку $[a;+\infty]$.

Якщо границя (1) є невласним числом ($+\infty$ або $-\infty$) або зовсім не існує, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx,$ називають розбіжним.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty;b]$ і є неперервною на будь-якому відрізку , де a – довільне число і $a<b$.

Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є функцією нижньої межі

$$\varphi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Означення 2. Якщо існує скінчена границя інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $a \to -\infty$, то цю границю називають невласним інтегралом функції $f(x)$ від $-\infty$ до a і записують

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\grave{a} \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

В цьому випадку інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають збіжним, а саму функцію $f(x)$ - інтегровною на проміжку ($-\infty$;-$\boldsymbol{b}$].

Якщо границя (2) є не власним числом або зовсім не існує, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають розбіжним.

Інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають невласними.

Справедлива рівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{c}$ - довільне дійсне число.

Невласні інтеграли від необмежених функцій.

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку [a;b], крім, можливо, кінців, і є необмеженою, наприклад, поблизу точки $x=a$, зокрема на відрізку $[a;\ a+\varepsilon],$ де $0<\varepsilon<b-a.$ Нехай $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;b]$. Точку a при цьому називають особливою.

Означення 3. Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0,$ то цю границю називають невластним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{4}$$

Цей невласний інтеграл називається збіжним. Якщо границя (4) є невласним числом або зовсім не існує, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ також називається невласним інтегралом і про нього кажуть, що він розбігається.

Нехай функція $f(x)$ є обмеженою і інтегрованою на будь-якому відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$ і не є інтегрованою на відрізку $[b-\varepsilon;b]$.

<u>Означення 4.</u> Якщо існує скінчена границя визначеного інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$, то цю границю називають невласним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і записують

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (5)$$

Цей невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають збіжним. Якщо границя (5) є невласне число або зовсім не існує, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають також невласним інтегралом і про нього кажуть, що він розбіжний.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{\alpha}} dx$$

2. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\sqrt{\alpha}+1}}$$

3. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} (\alpha + 1)^{-x} dx$$

4. Обчислити невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x}} dx$$

5. Обчислити невласний інтеграл

$$\int_{1}^{1} ln\ \alpha x\, dx.$$

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити невласний інтеграл $\int_{0}^{+\infty} e^{-13x} dx.$

Розв'язання:

Згідно з (1), дістанемо

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-13x} dx = -\frac{1}{13} \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} e^{-13x} d(-13x) = -\frac{1}{13} \lim_{b\to+\infty} e^{-13x}\Big|_{0}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{13} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{13\cdot b}} - \frac{1}{e^{13\cdot 0}} \right) = -\frac{1}{13} \left(\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^{13\cdot b}} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{13}(0-1) = \frac{1}{13} \approx 0{,}0769.$$

Отже, заданий інтеграл збігається.

Відповідь: *0,0769*.

2. Обчислити невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{102}}$

Розв'язання:

Згідно з (1), дістанемо

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{102}} = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} x^{-102} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^{-101}}{-101}\Bigg|_{1}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{101} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{101}} - 1 \right) = +\frac{1}{101} \approx 0{,}01.$$

Відповідь: *0,01*.

3. Обчислити невласний інтеграл $\int_{1}^{+\infty} 103^{-x}\, dx.$

Розв'язання:

Згідно з (1), дістанемо:

$$\int_{1}^{+\infty} 103^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b} 103^{-x}dx = -\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{103^{-x}}{ln\ 103}\right|_{1}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{ln\ 103}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{103^{b}} - \frac{1}{103^{1}}\right) = -\frac{1}{ln\ 103}\cdot\left(-\frac{1}{103}\right) =$$

$$= \frac{1}{103\cdot ln\ 103} \approx 0{,}0021.$$

Відповідь: *0,0021.*

4. Обчислити невласний інтеграл $\int_{0}^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Розв'язання:

Оскільки поблизу точки $x=0$ підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не є обмеженою, то згідно з (4), дістанемо

$$\int_{0}^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left.x^{\frac{2}{3}}\right|_{0+\varepsilon}^{13} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{13^{2}} - \sqrt[3]{10} + \varepsilon\right)^{2} \approx \frac{3}{2}\cdot 5{,}5288 \approx 8{,}2932.$$

Відповідь: *8,2932.*

5. Обчислити невласний інтеграл $\int_{0}^{13} ln\ (113x)\,dx$.

Розв'язання:

Оскільки поблизу точки $x=0$ підінтегральна функція $f(x)= ln\ (113x)$ не є обмеженою, то згідно з (4), дістанемо

$$\int_{0}^{13} ln\ (113x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{13} ln(113x)dx.$$

Для знаходження одержаного інтеграла застосовуємо метод інтегрування частинами.

Нехай

$$u = \ln 113x, \qquad dv = dx$$

Тоді

$$du = \frac{113}{113x}dx, \qquad v = x$$

Отже,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{13} \ln 113x dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(x \ln 113x \Big|_{0+\varepsilon}^{13} - \int_{0+\varepsilon}^{13} x \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (x \ln 113x - x) \Big|_{0+\varepsilon}^{13} = \lim(13 \ln(113 \cdot 13) - 13 - \varepsilon \ln(113\varepsilon) + \varepsilon) =$$

$$= 13 \ln 1469 - 13 \approx 81{,}8004,$$

де

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varepsilon \ln 113\varepsilon) = [0 \cdot \infty] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(113\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{113\varepsilon} \cdot 113}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0.$$

Відповідь: *0*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{\frac{\alpha}{10}}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

2. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+\alpha)}$.

3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{2}^{2\alpha} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

4. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{a} x \ln x dx$.

5. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+\alpha}{\sqrt[3]{x^2}}$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}2^{-\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання:

Використовуючи (1),дістанемо

$$\int\limits_{0}^{+\infty}2^{-\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}2^{-\sqrt{x}}dx=\left|\begin{matrix}x=t^2 & \begin{array}{c|c}x & t\\ 0 & 0\\ b & \sqrt{b}\end{array}\\ dx=2tdt & \end{matrix}\right|=\lim_{b\to\infty}2\int\limits_{0}^{\sqrt{b}}t\cdot 2^{-t}dt=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=t & dv=2^{-t}dt\\ du=dt & v=-\dfrac{2^{-t}}{\ln 2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2^{-t}t}{\ln 2}\Bigg|_0^{\sqrt{b}}+\frac{1}{\ln 2}\int\limits_{0}^{\sqrt{b}}2^{-t}dt\right)=2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2^{-t}t}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}2^{-t}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{b}}=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{2^{-\sqrt{b}}\sqrt{b}}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}2^{-\sqrt{b}}+\frac{2^{-0}0}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 2}2^{-0}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\ln 2}\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{b}}{2^{\sqrt{b}}}-\frac{2}{\ln^2 2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{b}}}+\frac{2}{\ln^2 2}=\frac{2}{\ln^2 2},$$

де

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{b}}{2^{\sqrt{b}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{b\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{b}}}{\frac{2^{\sqrt{b}}\ln 2}{2\sqrt{b}}}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{b}}\ln 2}=0,$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{b}}}=0.$$

Відповідь: *0.*

2. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Розв'язання:

Використовуючи (1), дістанемо

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^2(x+1)}$$

Розглянемо окремо інтеграл $\int\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

Розкладемо підінтегральну функцію на найпростіші, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)},\quad (\ast)$$

$1=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2.$

Якщо x = - 1, то 1 = C.

Якщо x = 0, то 1 = A.

Прирівняємо коефіцієнти при $\tilde{o}^2$ у рівності (*):

0 = B + C

B = - 1.

Тому маємо

$$\int\frac{dx}{x^2(x+1)}=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x+1|=-\frac{1}{x}+$$

$$+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+C.$$

Отже, невласний інтеграл дорівнює

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^2(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}+ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)\Bigg|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+ln\left|\frac{b+1}{b}\right|+1-ln\left|\frac{1+1}{1}\right|\right)=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}+ln\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{b}+1-ln2=$$

$$=1-ln2\approx0{,}3069,$$

äå $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{b}=0,$

$$ln\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{b}=ln\lim_{b\to\infty}\frac{1+\frac{1}{b}}{b}=ln1=0.$$

Відповідь: *0*.

3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_2^{130}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Розв'язання:

Так як підінтегральна функція поблизу точки $x=2$ не є обмеженою, то згідно з (4), дістанемо:

$$\int_2^{230}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{2+\varepsilon}^{230}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{2+\varepsilon}^{230}\left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(x^2-4\right)=$$

$$=\frac{1}{2}2\lim_{\varepsilon\to0}\sqrt{x^2-4}\Big|_{2+\varepsilon}^{230}=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt{230^2-4}-\sqrt{(2+\varepsilon)^2}\right)\approx229{,}9913.$$

Відповідь: *229,9913*.

4. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{a}x\,ln(2x)dx$.

Розв'язання:

Оскільки підінтегральна функція поблизу точки $x=0$ не є обмеженою, то згідно з (4), дістанемо:

$$\int_0^2 x\ln(2x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{2} x\ln 2x dx.$$

Застосуємо метод інтегрування частинами
Нехай

$$u = ln(2x), \qquad dv = xdx$$

Тоді

$$du = \frac{2}{2x}dx, \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Отже,

$$\int_0^2 x\ln(2x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{2} x\ln 2x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big|_{0+\varepsilon}^{2} - \frac{1}{2}\int_{0+\varepsilon}^{2} x^2\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\ln 2x\Big|_{0+\varepsilon}^{2} - \frac{1}{2}\int_{0+\varepsilon}^{2} xdx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2^2}{2}\ln 4 - \frac{1}{4}2^2 - \frac{(0+\varepsilon)^2}{2}\ln 2(0+\varepsilon) + \frac{1}{4}(0+\varepsilon)^2\right) =$$

$$= 2\ln 4 - 1 - \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln 2\varepsilon + \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 = 2\ln 4 - 1,$$

де

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon^2\ln 2\varepsilon\right) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln 2\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{2}{2\varepsilon}}{-\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^4}} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 = 0.$$

Відповідь: *0*.

5. Обчислити невласний інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

Розв’язання:

Відрізок [-1;1] розіб'ємо точкою $x = 0$ на два відрізка [-1;0] і [0;1]. Тоді, згідно з (3), якщо існують інтеграли $\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$ і $\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$, то можна записати таку рівність:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx + \int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$$

Знайдемо невласні інтеграли у правій частині

$$\int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \left(x^{\frac{2}{5}} + x^{-\frac{3}{5}} \right) dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{5x^{\frac{7}{5}}}{7} + \frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2} \right) \Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{5}{7}(-\varepsilon)^{\frac{7}{5}} + \frac{5}{2}(-\varepsilon)^{\frac{2}{5}} - \frac{5}{7}(-1)^{\frac{7}{5}} - \frac{5}{2}(-1)^{\frac{2}{5}} \right) = \frac{5}{7} - \frac{5}{2}.$$

Аналогічно

$$\int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + \frac{5}{2} x^{\frac{2}{5}} \right) \Bigg|_{0+\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{5}{7} 1^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{2} 1^{\frac{2}{5}} - \frac{5}{7} (+\varepsilon)^{\frac{7}{5}} - \frac{5}{2} (+\varepsilon)^{\frac{2}{5}} \right) = \frac{5}{7} + \frac{5}{2}.$$

Тому існує невласний інтеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx = \frac{5}{7} - \frac{5}{2} + \frac{5}{7} + \frac{5}{2} = \frac{10}{7} \approx 1{,}4286.$$

Відповідь: *1,4286.*

РОЗДІЛ 3
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практична робота №1. Частинні похідні. Повний диференціал

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Зміна величина u називається *функцією незалежних змінних* $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо кожній сукупності значень цих змінних у області їх змінювання відповідає єдине значення $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Означення 2. Якщо кожній парі *(x;y)* значень двох незалежних змінних величин *x* і *y* з деякої області їх змінювання відповідає єдине значення величини *z*, говоритимемо, що *z* є функцією двох незалежних змінних *x* і *y*, визначеною у області *z*.
Функція двох змінних позначається *z=f(x,y)*.

Означення 3. Сукупність пар *(x;y)* значень *x* і *y*, для яких визначається функція *z=f(x,y)*, називають *областю визначення* або областю існування цієї функції.

Означення 4. Різницю $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ *при* $\Delta x \neq 0$ називають *частинним приростом* по *x* функції *f(x,y)*.

Різницю $\Delta_y z = f(x, y + \Delta x) - f(x, y)$ *при* $\Delta y \neq 0$ називають частинним приростом по y функції *f(x,y)*.

Різницю $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta x) - f(x, y)$ називають повним приростом функції *z*.

Означення 5. *Частиною похідною* по *x* функції *z=f(x,y)* називають границю відношення частинного прироста $\Delta_x z$ по *x* до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля. Частинну похідну по *x* від функції *f(x,y)* позначають одним із символів

$$z'_x, f'_x(x, y)\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Тобто за означенням,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Аналогічно, частинна похідна по *y* від функції *f(x,y)* визначається як границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ по *y* до приросту Δy, якщо Δy прямує до нуля.

Частина похідна по *y* позначається одним з символів

$z'_y,\ f'_y(x,y),\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Тобто

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta y}$$

<u>Примітка.</u>

Частинна похідна z'_x обчислюється при незмінному y, тобто її означення можна сформулювати таким чином: частинною похідною по *x* від функції *f(x,y)* називається похідна по *x*, яка обчислена у припущенні, що *y* -стала. Аналогічно, частинною похідною по *y* від функції *z=f(x,y)* називається похідна по *y*, яка обчислена у припущенні, що змінна *x* – стала.

<u>Означення 6</u>. Функції *z=f(x,y),* повний приріст якої у даній точці *(x;y)* може бути наданим у виді суми

$$\Delta y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \alpha\ \Delta x + \beta\ \Delta y,$$

де

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0,}} \alpha = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0,}} \beta = 0,$$

називається диференційованою у даній точці.

Лінійна частина приросту називається повним диференціалом і позначається

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta y$$

Прирости незалежних змінних Δx *і* Δy називатимемо диференціалами незалежних змінних *x* і *y* і позначатимемо відповідно *dx і dy*.

Отже, вираз *повного диференціала* має вигляд

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy$$

Примітка.

Якщо обчислити частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції двох незалежних змінних *z=f(x,y),* вони також будуть функціями від незалежних змінних *x* і *y*, отже, від кожної з них можна знайти частинні похідні по *x* або по *y*.

Означення 7. *Частина похідна* по x від частинної похідної $f'_x(x,y)$ називається частиною похідною другого порядку по x^2 від функції $z - f(x,y)$ в точці (x,y) і позначається

$$z''_{xx},\ f''_{x^2}(x,y),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Таким чином,

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогічно

$$z''_{yy} = \frac{\partial z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти значення частинної похідної z'_x функції

$$z = -(x - y)^{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha\ y}{x}} \text{ у точці } (1;0).$$

2. Знайти значення частинної похідної z'_y функції

$$z=-(x-y)^{\alpha}\cdot e^{-\frac{\alpha y}{x}}$$ у точці (1;0).

3. Знайти значення частинної похідної другого порядку z''_{xx} функції $z=sin^2(\alpha x+y)$ у точці $(1;-\alpha)$.

4. Знайти значення мішаної частинної похідної другого порядку z''_{xy} функції $z=sin^2(\alpha x+y)$ у точці $(1;-\alpha)$.

5. Знайти повний диференціал функції $z=x^3+\alpha x^2y-y^2$ у точці $x=1,\ y=1,$ відповідний $\Delta x=0{,}01,\ \Delta y=-0{,}01.$

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти значення частинної похідної z'_x функції

$$z=(x^2+y)^{3x}\cdot e^{y^2}$$ у точці (1;0).

Розв'язання:

Частинна похідна z'_x обчислюється за припущенням, що ***y*** - стала, тобто

$$z'_x=((x^2+y)^3\cdot e^{x^2y})'_x=3(x^2+y)^2 2xe^{x^2y}+(x^2+y)^3e^{x^2y}2xy=$$

$$=2(x^2+y)^2xe^{x^2y}(3+(x^2+y)y)=2x(x^2+y)^2e^{x^2y}(3+x^2y+y^2)$$

$$z'_x(1,0)=2\cdot 1(1+0)^2e^{1\,0}(3+1\cdot 0+0)=6.$$

Відповідь: *6*.

2. Знайти значення частинної похідної z'_y функції $z=(x^2+y)^{3x}e^{y^2}$ у точці (1;0).

Розв'язання:

Частинна похідна z'_y обчислюється за припущенням, що у - стала, тобто

$$z'_y = ((x^2+y)^3 e^{x^2y})'_y = 3(x^2+y)^2 e^{x^2y} + (x^2+y)^3 e^{x^2y} x^2 =$$
$$= (x^2+y)^2 e^{x^2y}(3+x^4+x^2y).$$
$$z'_y(1,0) = 4.$$

Відповідь: 4.

3. Знайти значення частинної похідної другого порядку z''_{xx} функції $z = cos(x^2+y)$ у точці $(1;-1)$.

Розв'язання:

Знаходимо першу частинну похідну z'_x від функції z за припущенням, що y - стала.

$$z'_x = -sin(x^2+y)\cdot 2x = -2x\cdot sin(x^2+y).$$

Друга частинна похідна z''_{xx} є частинною похідною по x від похідної першого порядку z'_x, тобто

$$z''_{xx} = (z'_x)' = -sin(x^2+y)\cdot 2x = -2sin(x^2+y) - 4x^2\cdot cos(x^2+y),$$
$$z''_{xx}(1,-1) = -2sin(1-1) - 4\cdot cos(1\text{-}1) = \text{-}4.$$

Відповідь: *-4*.

4. Знайти значення мішаної частинної похідної другого порядку z''_{xy} від функції $z = cos(x^2+y)$ *у точці* $(1;-1)$.

Розв'язання:

$$z'_x = -2x\ sin(x^2+y).$$

Щоб знайти z''_{xy} треба обчислити похідну по *y* від першої частинної похідної z'_x.

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (-2x\ sin(x^2+y))'_y = -2x\ sin(x^2+y))'_y =$$
$$= (-2x)(-cos(x^2+y)),$$
$$z''_{xy}(1,-1) = 2cos0 = 2.$$

Відповідь: *2*.

5. Знайти повний диференціал функції $z = x^2 + xy - y^2$ у точці *x*=1, *y*=1, якій відповідає $\Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = \text{-}0{,}01.$

Розв'язання:

За означенням диференціала

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial x}dy.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$, то за цією формулою, а також, враховуючи умову того, що $dx = \Delta x$ та $dy = \Delta y$, дістанемо повний диференціал функції $dz = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y.$

Підставивши замість *x, y*, $\Delta x, \Delta y$ їх значення x=1, y=1, $\Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = -0{,}01,$ дістанемо:

$$dz = (2 \cdot 1 + 1) \cdot 0{,}01 + (1 - 2) \cdot (-0{,}01) = 0{,}04$$

Відповідь: *0,04*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти значення частинної похідної z'_x функції

$$z = arctg\sqrt{(x + \frac{1}{\alpha})^{\alpha y}} \text{ у точці } (0, \frac{1}{\alpha}).$$

2. Знайти значення частинної похідної z'_y від функції

$$z = arctg\sqrt{(x + \frac{1}{\alpha})^{\alpha y}} \text{ у точці } (e^2 - \frac{1}{\alpha};\ 0).$$

3. Знайти значення частинної похідної другого порядку z''_{xx} функції $z = e^{\alpha(x-1)}(\alpha x\cos y - y\sin y)$ у точці $(1;0)$.

4. Знайти значення мішаної частинної похідної другого порядку z''_{xy} функції $z = ln(e^{\alpha x} + e^{\alpha y})$ у точці $(0;0)$.

5. Знайти повний диференціал функції

$$z = x^3 + \alpha x^2 y - (\alpha + 1)xy^3 + (\alpha + 2)y^5$$

у точці x=1, y=1, відповідний $\Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = -0{,}01.$

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти значення частинної похідної z'_x від функції

$z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$ у точці $(1;1)$.

Розв'язання:

Частинну похідну від z по x знаходимо як похідну від складеної функції, вз'яту за припущенням, що y - стала.

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x =$$

$$\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{(1-xy)-(-y)(x+y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{1-xy+xy+y^2}{1-2xy+x^2y^2+2xy+y^2} = \frac{1+y^2}{1+y^2+x^2\cdot(1+y^2)} =$$

$$\frac{1+y^2}{(1+y^2)\cdot(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

У точці $(1;1)$ знаходимо значення похідної z'_x

$$z'_x(1,1) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

2. Знайти значення частинної похідної z'_y від функції

$z = ln\sqrt[3]{x^y+1}$ у точці з кординатами $(0;0)$.

Розв'язання:

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^y+1}} \cdot ((x^y+1)^{\frac{1}{3}})'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^y+1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^y+1)^2}} \cdot (x^y+1)'_y =$$

$$= \frac{1}{3(x^y+1)} \cdot x^y \cdot \ln x.$$

$$z'_y(e,0) = \frac{1}{3(e^0+1)} \cdot e^0 \cdot \ln e = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: *1/6*.

3. Знайти значення частинної похідної другого порядку z''_{xx} функції $z = x \cdot \sin(x+y)$ *у точці* $(\frac{\pi}{2};\ 0)$

Розв'язання:

$$z'_x = \sin(x+y) + x \cdot \cos(x+y),$$

$$z''_{xx} = \cos(x+y) + \cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y) = 2\cos(x+y) - x \cdot \sin(x+y),$$

$$z''_{xx} = z''_{xx}(\frac{\pi}{2},\ 0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: *-1,57.*

4. Знайти значення мішаної частинної похідної другого порядку z''_{xy} функції $z = \ln(e^{x^2} + y^2)$ у точці $(0;\ 0)$.

Розв'язання:

$$z'_x = \frac{1}{e^{x^2} + y^2} \cdot 2x \cdot e^{x^2},$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \frac{1}{(e^{x^2} + y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-4xy \cdot e^{x^2}}{(e^{x^2} + y^2)^2},$$

$$z''_{xy}(0,0) = 0.$$

Відповідь: *0*.

5. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 + 2xy^2 - 3x^2y + 4xy + y^5 + x^5$ у точці x=1, y=1, відповідний $\Delta x = 0,01,\ \Delta y = -0,01.$

Розв'язання:

Застосуємо формулу повного диференціала

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y,$$

$$z'_x = 3x^2 + 2y^2 - 6xy + 4y + 5x^4,$$

$$z'_y = 4xy - 3x^2 + 4x + 5y^4,$$

$$dz = (3+2-6+4+5)\cdot 0{,}01 + (4-3+4+5)\cdot(-0{,}01) = 0{,}08 - 0{,}1 = -0{,}02.$$

Відповідь: *-0,02.*

Практична робота №2. Неявні функції та їх диференціювання. Дотична площина та нормаль до поверхні

1. Основні поняття та теореми

<u>Означення 1.</u> Якщо незалежна змінна x і функція y зв'язані рівнянням

$$f(x,y)=0\ , \qquad (1)$$

яке не є розв'язаним відносно y**,** говорять, що y є *неявною функцію* від x (або функцію y від x задано неявно).

Щоб знайти похідну від y по x, не розв'язуючи рівняння (1) відносно y, використовують формулу

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad (2)$$

Щоб знайти другу похідну від y по x, треба записати рівняння (2) у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'_x = 0,$$

продиференціювати його по x та у виразі, який дістанемо, замінити y'_x значенням, яке вже було знайденим за формулою (2). Таким чином визначається y'', а також *похідні вищих порядків*.

<u>Означення 2.</u> Якщо функцію z від двох незалежних змінних x і y задано рівнянням $f(x,y,z)=0$, яке не є розв'язаним відносно z, говорять, що z є неявною функцією від змінних x і y.

Якщо z є неявною функцією від x і y, то частинні похідні функції z по незалежним змінним x і y визначаються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{3}$$

Рівняння дотичної прямої до кривої $x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t)$ у точці $M(x_0;y_0;z_0)$ має вид

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}}=\frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}}. \tag{4}$$

Рівняння нормальної площини в цій точці:

$$\frac{dx}{dt}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{dy}{dt}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$

$$+\frac{dz}{dt}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{5}$$

Рівняння дотичної площини до поверхні $z=f(x,y)$ у точці $M(x_0;y_0;z_0)$ має вид

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{6}$$

Рівняння нормалі у точці M визначається за формулою

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (7)$$

Якщо рівняння поверхні задано у неявному виді $F(x, y, z)=0$, то маємо відповідно *рівняння дотичної площини*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\,(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\,(y-y_0)+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\,(z-z_0)=0 \qquad (8)$$

і *рівняння нормалі*

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \qquad (9)$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти похідну y'_x від функції, яка задана рівнянням $arctg\frac{x+y}{\alpha}-\frac{y}{\alpha}=arctg\frac{1}{\alpha}$ при $x=1, y=0.$

2. Знайти частину похідну z'_y від функції, яка задана рівнянням $z^3+3xyz=\alpha^3$, при $x=\alpha^2$, $y=0$, $z=\alpha$.

3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $\alpha z=2x^2-4y^2$ при $x=2\alpha$, $y=\alpha$. У відповіді вказати значення відрізка, який відтинає площина на координатній осі $0Z$.

4. Скласти рівняння нормалі до поверхні

$\Phi(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz=6\alpha^3$ у точці $x=\alpha,\ y=2\alpha,\ z=-\alpha$.

У відповіді вказати значення різниці $\overline{y}-\overline{x}$, де $\overline{x},\overline{y}$ -абсциса та ордината точки перетину нормалі з площиною z=0.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти похідну y'_x від функції, яку задано рівнянням $ln\sqrt{x^2+y^2}=arctg\frac{y}{x}$ при $x=1,\ y=0.$

Розв'язання:

Перепишемо це рівняння у виді $f(x,y)=\ ln\sqrt{x^2+y^2}\ -arctg\frac{y}{x}=0$ і застосуємо формулу (2)

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}y\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Підставимо ці вирази у формулу (2). Після перетворень дістанемо $y'_x=\frac{x+y}{x-y}$, $y'_x(1,0)=1$.

Відповідь: *1*.

2. Знайти частинну похідну z'_y від функції, яку задано рівнянням $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ при $x=0,\ y=1,\ z=1.$

Розв'язання:

Для знаходження похідної z'_y використовується формулу (3)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$, де за умовами $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2$;

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z};$$

$z'_y(0,1,1)=-1.$

Відповідь: *-1*.

3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $z = z^2 + y^2$ у точці $M(1;2;5)$. У відповіді вказати значення відрізка, який відтинає площина на координатній осі 0Z.

Розв'язання:

Застосуємо рівняння (6)

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Для знаходження z_0 знайдемо $f(x_0,y_0)$:

$z_0 = f(x_0, y_0) = f(1,2) = 5,$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = 2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 4.$$

$z-5=2(x-1)+4(y-2).$

$2x+4y-z-5=0$ – загальне рівняння площини.

Запишемо його у виді рівняння площини у відрізках:

$2x\text{-}4y\text{-}z=5$

$$\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{\frac{5}{4}}+\frac{z}{-5}=1.$$

Площина перетинає вісь у точці (0;0;-5).

Відповідь: *5*.

4. Скласти рівняння нормалі до поверхні $F=x^2+2y^2+3z^2=1$ у точці $M_0(1;2;3)$. У відповіді вказати значення різниці $\bar{y}-\bar{x}$, де $\bar{x},\bar{y}$ - абсциса та ордината точки перетину нормалі з площиною $z=0$.

Розв'язання:

Використовуємо рівняння нормалі (9)

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

де $\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=4y$, $\frac{\partial F}{\partial z}=6z$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3)=2,\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,2,3)=8,\ \frac{\partial F}{\partial z}(1,2,3)=18.$$

Підставимо ці значення у рівняння

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{18},\text{ або}$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{9}.$$

Запишемо ці рівняння у параметричному виді

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=4t+2, \\ z=9t+3. \end{cases}$$

У точці перетину з площиною $z=0$ знайдемо значення параметра t:

$0=9t+3,\ t=-\frac{3}{9}$, тобто в точці

$\bar{x}=-\frac{3}{9}+1=\frac{2}{3},\ \bar{y}=-4\cdot\frac{3}{9}+2=\frac{2}{3}$,

$\bar{y}-\bar{x}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0.$

Відповідь: 0.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти похідну y'_x від функції, яку задано рівнянням $\alpha xe^{\alpha y}+(y+1)e^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha xy}=0.$

2. Знайти частинну похідну z'_y від функції, яку задано рівнянням $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{(\alpha+1)^2}+\frac{z^2}{(\alpha+2)^2}=1$ у точці (0;1;1).

3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2+y^2+z^2-2\alpha x+3\alpha y-4\alpha z-1=0$ у точці $M(\frac{\alpha}{2};\alpha;\alpha)$.

4. Скласти рівняння нормалі до поверхні $\alpha^{\frac{x}{z}}+\alpha^{\frac{y}{z}}=\alpha$ у точці $M(\alpha;\alpha;\frac{\alpha}{2})$.У відповіді вказати значення суми $\bar{x}+\bar{y}$, де $\bar{x}$, $\bar{y}$-абсциса та ордината точки перетину нормалі з площиною $z=0$**.**

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти похідну y'_x від функції, яку задано рівнянням $e^y+xy=e$, у точці $(1;1)$.

Розв'язання:

Знайдемо похідні по x і по y від функції $f(x,y)=0$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^y+x$.

Використовуючи формулу $y'_x = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$, дістанемо $y'_x = -\dfrac{y}{e^y + x}$.

У точці *(1;1)* похідна набуває наступне значення

$$y'_x = \frac{1}{e+1}.$$

Відповідь: *0,269*.

2. Знайти частинну похідну z'_x від функції, яку задано рівнянням $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} - 2z = 0$ у точці $(0;1;\dfrac{1}{8})$.

Розв'язання:

Позначимо *f(x,y,z)* ліву частину рівняння і знайдемо її похідні по *x, y, z*:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{y}{2}}{-2} = \frac{1}{4}.$$

У точці $(0;1;\dfrac{1}{8})$ похідна дорівнює $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,1,\dfrac{1}{8}) = \dfrac{1}{4}$.

Відповідь: *0,25*.

3. Скласти рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + 3y^2 - z = 0$ у точці *M(1;1;4)*.

Розв'язання:

Рівняння дотичної площини до поверхні *f(x,y,z)*=0 у точці *M* $(x_0; y_0; z_0)$ має вид (8)

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)\,(y - y_0) +$$

$$+ f'_z(x_0, y_0, z_0)\,(z - z_0) = 0.$$

Знайдемо похідні від функції $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z$ по *x, y ,z*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=6y,\ \frac{\partial f}{\partial z}=-1.$$

У даній точці $M(1;1;4)$ відповідні похідні набувають значення

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,4)=2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,4)=6,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,4)=-1.$$

Підставимо ці значення та координати точки M у рівняння (8) $2(x-1)+6(y-1)-(z-4)=0$, тобто рівняння дотичної площини має вигляд $2x+6y-z-4=0$.

Відповідь: $2x+6y-z-4=0$.

4. Скласти рівняння нормалі до поверхні $e^{xy}+e^{yz}=1$ у точці $M(1;1;1)$. У відповіді вказати значення суми $\bar{x}+\bar{y}$, де $\bar{x}$, $\bar{y}$-абсциса та ордината точки перетину нормалі з площиною $z=0$.

Розв'язання:

Рівняння нормалі до поверхні $f(x,y,z)=0$ у точці дотику з координатами $M(x_0;y_0;z_0)$ має вид (9)

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Знайдемо похідні від функції $f(x,y,z)$ по x, y, z

$$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy},\ \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}+ze^{xy}=e^{xy}(x+z),\ \frac{\partial f}{\partial z}=ye^{yz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=e,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=2e,\ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=e.$$

Підставимо ці значення та координати точки M у рівняння (9). Дістанемо

$$\frac{x-1}{e}=\frac{y-1}{2e}=\frac{z-1}{e}\ \text{або}\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

При $z=0$ маємо

$$\frac{\bar{x}-1}{1}=-1,\ \bar{x}=0,\ \frac{\bar{y}-1}{2}=-1,\ \bar{y}=-1,\ \bar{x}+\bar{y}=-1.$$

Відповідь: *-1*.

Практична робота №3. Формула Тейлора функції двох змінних. Екстремум функції двох змінних

1.Основні поняття та теореми

Теорема 1.

Якщо функція $f(x,y)$ в області $D\in R_2$ має неперервні частинні похідні по x і y до $(n+1)$-го порядку включно, то в точках відрізка, який сполучає дві точки $(x_0;y_0)\in D$ і $(x;y)\in D$ і цілком належить області D, правильна наступна формула, яку називають *формулою Тейлора* з додатковим членом у формі Лагранжа для функції від двох змінних x і y.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0,y_0)\Delta y^2)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\Delta x^{n-i}\Delta y^i+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{\partial^{n+1} f(x_0+e\Delta x, y_0\Delta y)}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}\Delta x^{n+1-i}\Delta y^i,$$

де

$$C_n^i=\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{n!},\ \Delta x=x-x_0,\ \Delta y=y-y_0.$$

<u>Означення 1.</u> Функція $z=f(x,y)$ має *максимум (мінімум) в точці* ($x_0; y_0$), якщо при всіх можливих достатньо малих за абсолютною величиною значеннях Δx, $\Delta y,$ повний приріст

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ зберігає знак мінус (плюс).

Максимум і мінімум функції в цій точці називаються екстремумами цієї функції в даній точці. Якщо функція $f(x,y)$ в точці $(x_0; y_0)$ має максимум (мінімум), то точка $(x_0; y_0)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції. Точки максимуму і мінімуму функції називаються точками екстремуму функції.

<u>Теорема 2.</u>

Якщо функція $f(x,y)$ в точці $(x_0; y_0)$ має екстремум і частинні похідні першого порядку по x і y, то ці частинні похідні дорівнюють нулю.

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

<u>Означення 2.</u> Точка $(x_0; y_0)$, у якій частинні похідні по x і y від функції $f(x,y)$ дорівнюють нулю, називається *критичною точкою* функції $f(x,y)$.

<u>Теорема 3.</u>

Нехай функція $f(x,y)$ має стаціонарну точку $(x_0; y_0)$. Якщо

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

то в точці $(x_0; y_0)$ функція $f(x,y)$ має екстремум, максимум при $y''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$ і мінімум при $y''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Якщо

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot f''_{y^2}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

то функція в точці $(x_0; y_0)$ не має екстремуму.

<u>Правило 1.</u>

Щоб знайти *екстремум функції $z=f(x,y)$* двох незалежних змінних слід:

1) визначити стаціонарні точки, у яких функція може набувати екстремуму. Для цього розв'язати систему рівнянь

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0;$$

2) знайти другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

3) обчислити значення других частинних похідних у кожній стаціонарній точці. Числа, які дістанемо, позначимо відповідно *A,B* і *C*;

4) скласти вираз $\Delta = AC - B^2$:

а) якщо $\Delta > 0,$ екстремум у стаціонарній точці є, якщо A>0, це буде мінімум, при A<0 -максимум;

б) якщо $\Delta < 0,$ екстремуму в стаціонарній точці немає.

Правило 2.

Щоб знайти найбільше та найменше значення функції в області *D*, слід

1) знайти всі стаціонарні точки функції *f(x,y)*. Для цього розв’язати систему рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

2) обчислити значення функції в цих стаціонарних точках;

3) обчислити значення, які набуває функція на межі області *D*;

4) порівнявши значення в стаціонарних точках і значення на межі області *D*, знайти серед них найбільше та найменше значення функції.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $F(x,y) = x^3 + 2y^2 - xy,$ розвинути функцію $F(x+h, y+k)$ за степенями *h* та *k*. У відповіді дати значення числа, якому дорівнює сума коефіцієнтів при h^2, hk, k^2, якщо $x=-\alpha$, $y=\alpha$.

2. Знайти стаціонарні точки функції $z = xy(\alpha - x - y)$. У відповіді навести найбільше значення абсциси серед множини стаціонарних точок.

3. Для функції $z = x^3 - 2y^3 - 3\alpha^2 x + 6\alpha^2 y$ знайти $z_{min.}$

4. Знайти найбільше значення функції $z = x^2 - y^2$ в крузі $x^2 + y^2 = \alpha^2$.

5. Розкласти додатнє число α на три додатних доданка так, щоб добуток їх був найбільшим. У відповіді вказати число, якому дорівнює добуток трьох знайдених чисел.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Дано $f(x,y)=x^2y+xy^2-2xy,$ розвинути функцію $f(x+h, y+k)$ за степенями h та k. У відповіді дати значення числа, якому дорівнює сума коефіцієнтів при h^2, hk, k^2, якщо x=1, y=-1.

Розв'язання:

Щоб застосувати формулу Тейлора для розвинення функції у ряд, знайдемо відповідні значення функції, перших та других частинних похідних у даній точці.

$$f(1;-1)=2$$

$$f'_x=2xy+y^2-2y, \qquad f'_x(1,-1)=1,$$

$$f'_y=x^2+2xy-2x, \qquad f'_y(1,-1)=-3,$$

$$f''_{x^2}=x^2+2xy-2x, \qquad f''_{x^2}(1,-1)=-2,$$

$$f''_{xy}=2x+2y-2, \qquad f''_{xy}(1,-1)=-2,$$

$$f''_{y^2}=2x, \qquad f''_{y^2}(1,-1)=2.$$

Підставимо ці значення у формулу Тейлора

$$f(x+h,y+k)=2+h-3k+\frac{1}{2!}(-2h^2-4kn+2k^2)+\ldots=$$

$$=2+h-3k-h^2-2kh+k^2+\ldots$$

Відповідь: *-2*.

2. Знайти стаціонарні точки функції $z=(x-x^2)(2y-y^2).$ У відповіді навести найбільше значення абсциси серед множини стаціонарних точок.

Розв'язання:

Знайдемо частинні похідні заданої функції

$$z'_x=(1-2x)(2y-y)^2=(1-2x)y(2-y)$$

$$z'_y=(x-x^2)(2-2y)=2x(1-x)(1-y).$$

Знайдемо значення *x* і *y*, які є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2x)\cdot y\cdot(2-y) = 0; \\ (1-y)\cdot x\cdot(1-x) = 0; \end{cases}$$

Розв'язками системи рівнянь є наступні пари чисел *x* і *y* $\left\{\frac{1}{2};1\right\}$, $\{0;0\}$, $\{1;0\}$, $\{1;2\}$, $\{0;2\}$.

Найбільшим значенням абсциси стаціонарної точки є ***x*=*1***.

Відповідь: *1*.

3. Для функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ знайти $z_{min.}$

Розв'язання:

Для знаходження стаціонарних точок розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0; \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0; \\ y^2 - x = 0, \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи є пари значень $\{0;0\}$, $\{1;0\}$, тобто ці точки є стаціонарними і у них функція може набувати екстремум. Для дослідження цих точок знайдемо другі частинні похідні $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$.

Розглянемо точку (0;0).

Позначимо значення других похідних в цій точці відповідно *A*, *B*, *C*, дістанемо

$$A=0,\ B=-3,\ C=0.$$

Складемо вираз $\Delta = ACB^{2}$.

Оскільки Δ=-9<0, екстремуму в цій точці функція не має. Розглянемо точку (1;1). Відповідні значення других частинних похідних в цій точці дорівнюють *A*=6, *B*=-3, *C*=6.

$$\Delta = AC - B^2 = 36-9=27>0.$$

Оскільки в цій точці $\Delta > 0$ і A>0, то ця точка є точкою мінімуму функції, тобто z_{min}=-1 при x=1, y=1.

Відповідь: *-1*.

4. Знайти найбільше значення функції $z = 4x^2 - y^2$ у крузі $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання:

Точки, у яких функція набуває найбільше і найменше значення, можуть знаходитися як у середині області так і на її межі. Якщо функція набуває найбільше (найменше) значення у внутрішній точці області, то її частинні похідні дорівнюють нулю в цій точці: $z'_x = 2x = 0$, $z'_y = -2y = 0$ у точці (0,0), z(0;0)=0.

Досліджуємо функцію на межі області, тобто на лінії

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

З цього рівняння випливає $y^2 = 9 - \frac{9x^2}{4}$, тобто функція z набуває

вид $z = 4x^2 - (9 - \frac{9x^2}{4}) = \frac{25x^2}{4} - 9.$

Знайдемо точку, у якій похідна цієї функції перетворюється в нуль: $z'_x = \frac{25x}{2} = 0$, при $x=0$. Дістанемо два відповідних значення $y_1 = 3, y_2 = -3$. У точках (0;3) і (0;-3) функція z дорівнює –9. Оскільки x змінюється на відрізку $[-2;2]$, треба розглянути значення функції на кінцях цього відрізку, тобто у точках (-2;0), (2;0) .

z=(-2;0)=z(2;0)=16. Це значення є найбільшим у середині та на межі заданої функції.

Відповідь: *16*.

5. Розкласти число 144 на три додатних доданка так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

Розв'язання:

Позначимо перший доданок *x,* другий доданок *y*, тоді третій доданок буде дорівнювати *144-x-y.* Складемо суму квадратів цих чисел.

$S = x^2 + y^2 + (144 - x - y)^2$.

Для знаходження мінімуму цієї функції розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} S'_x = 0; \\ S'_y = 0, \end{cases} \quad \text{то} \quad \begin{cases} 2x + y - 144 = 0; \\ x + 2y - 144 = 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є x=48, y=48, звідси дістанемо значення третього доданка *144-x-y=48***.**

Відповідь: *48***.**

4. Задачі та вправи до самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{4} - yx^3 + \dfrac{x^2y^2}{2} - 2x + 3y - 4$. Розвинути функцію *f(x+h; y+k)* за степенями *h* та *k.* У відповіді дати значення числа, якому дорівнює сума коефіцієнтів при h^2, *hk*, k^2, якщо ***x***$=\alpha$**,** *y*$=2\alpha$**.**

2. Знайти стаціонарну точку функції

$$z = \frac{\alpha + (\alpha + 1)x + (\alpha + 2)y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

У відповіді вказати її абсцису.

3. Знайти мінімум функції

$$z = xy + \frac{(\alpha + 1)^3}{\tilde{o}} + \frac{\alpha^3}{y}.$$

У відповіді вказати відповідне значення ***x***.

4.Знайти найбільше значення функції $z = x^2 - xy + y^2$, якщо $|x| + |y| \le \alpha$.

5. Розкласти число α на три множника так, щоб їх сума була найменшою. У відповіді вказати значення цієї суми.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Дано $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-39x+18y+4$. Розвинути функцію *f(x+h, y+k)* за степенями *h* та *k*. У відповіді дати значення числа, якому дорівнює сума коефіцієнтів при h^2, *hk*, k^2, якщо *x=5*, *y=6*.

Розв'язання:

Щоб застосувати формулу Тейлора для розвинення функції у ряд, знайдемо відповідні значення функції, перших та других частинних похідних у даній точці.

$$f(5,6)=-102,$$

$$f'_x=3x^2-6y-39, \qquad f'_x(5,6)=0,$$

$$f'_y=2y-6x+18, \qquad f'_y(5,6)=0,$$

$$f''_{x^2}=6x, \qquad f''_{x^2}(5,6)=30,$$

$$f''_{xy}=-6, \qquad f''_{xy}(5,6)=-6,$$

$$f''_{y^2}=2, \qquad f''_{y^2}(1,-1)=2.$$

Підставимо ці значення у формулу Тейлора

$$f(x+h,y+k)=-102+\frac{1}{2!}(30h^2-12kn+2k^2)+\ldots=$$

$$=-102+15h^2-6kn+k^2+\ldots$$

Сума коефіцієнтів при h^2, *hk*, k^2 дорівнює 10.

Відповідь: *10*

2. Знайти стаціонарні точки функції $z=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y}$.

Розв'язання:

Для знаходження стаціонарної точки знайдемо частинні похідні заданої функції

$$z'_x=\frac{y}{2\sqrt{1+x}}+\sqrt{1+x}, \quad z'_y=\sqrt{1+x}+\frac{x}{2\sqrt{1+y}}$$

Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+y} = 0; \\ \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} + \sqrt{1+x} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2\sqrt{(1,+x)(1+y)} = 0; \\ x + 2\sqrt{(1+x)(1+y)} = 0. \end{cases}$$

Віднімемо друге рівняння від першого рівняння.

Дістанемо $y\text{-}x=0$ або $y=x$.

Підставляючи в перше рівняння дістанемо $x + 2\sqrt{(1+x)(1+x)} = 0$. Враховуючи, що за умовами $1+x>0$, запишемо це рівняння у виді $x+2(1+x)=0$, звідси $x = -\dfrac{2}{3}$, $y = x = -\dfrac{2}{3}$, тобто $(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3})$ є стаціонарною точкою заданої функції.

Відповідь: $-0{,}6667$

3. Знайти мінімум функції $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.

Розв’язання:

Знайдемо перші частинні похідні z'_x і z'_y.

$$z'_x = 6x^2 - 36y, \; z'_y = 6y^2 - 36x.$$

Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0, \end{cases} \text{, тобто}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 36y = 0; \\ 6y^2 - 36x = 0, \end{cases} \text{ або після скорочення } \begin{cases} x^2 - 6y = 0; \\ y^2 - 6x = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння $y = \dfrac{x^2}{6}$. Підставляючи в друге рівняння, дістанемо

$$\frac{x^4}{36} - 6x = 0 \text{ або } x^4 - 216x = 0,$$

$$x(x^3 - 216) = 0, \text{ тобто } x_1 = 0, \; x_2 = 6.$$

Відповідні значення $y_1 = 0,\ y_2 = 6.$

Для дослідження цих точок знайдемо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -36,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y.$$

Знайдемо числа Δ, A B,C для точки $(0;0)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = 0,\ \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = -36,\ \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

Число $\Delta = AC - B^2 = -36$.

Оскільки $\Delta < 0$, то при $x=0,\ y=0$ функція не має екстремуму.

Для точки (6;6) числа A,B,C,Δ дорівнюють

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(6,6) = 72,\ \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(6,6) = -36,\ \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(6,6) = 72,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 72^2 - 36^2 = 3888.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то при цих значеннях x і y функція набуває мінімум. Для знаходження z_{min} підставимо $x=6$ і $y=6$, дістанемо $z_{min} = -2$.

Відповідь: -2.

4.Знайти найбільше значення функції $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ у замкненому трикутнику, обмеженому осями координат і прямої $x+y+5=0$.

Розв'язання:

Знаходимо стаціонарні точки функції $z'_x = 2x - y + 3$, $z'_y = -x + 4y + 2$

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0; \\ -x + 4y + 2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2; \\ y = -1. \end{cases}$$

Звідси $(-2;-1)$ є єдиною стаціонарною точкою, значення функції в цій точці $z(-2,-1) = -3$.

Переходимо до дослідження функції на межах області, яка складається з відрізка осі OX, відрізка осі OY і відрізка прямої $x+y+5+0$.

а) На осі OX $y=0$, і функція при $\boldsymbol{y=0}$ набуває вид $z=x^2+3x+1$, де $-5\le \tilde{o}\le 0.$

Цю функцію можна розглянути на відрізку $\left[-5;0\right]$.

На цьому відрізку функція може досягати найбільшого або найменшого значення у точках стаціонарності функції, або на кінцях цього відрізка.

Знайдемо точку стаціонарності

$$z'_x=2x+3,\quad 2x+3=0,\quad x=-\frac{3}{2},$$

$$z(-\frac{3}{2},0)=-\frac{5}{4}.$$

На кінцях відрізка $z(-5,0)=11,\ z(0,0)=1.$

Зрівнюючи ці значення, дістанемо $z_{найб}=11.$

б) На осі 0Y при $x=0$ функцію можна записати у наступному виді

$z=2y^2+2y=1,\quad (-5\le y\le 0)$

Стаціонарна точка функції знаходиться з рівняння

$$z'_y=4y+2=0,\quad тоді\ y=-\frac{1}{2},\quad z(0;-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}.$$

Знайдемо значення функції на кінцях відрізка

$z(0,-5)=41,\quad z(0,0)=1,\quad z_{найб}=41.$

в) Досліджуємо функцію на відрізку AB.

Рівняння прямої AB $x+y+5=0$, звідси $y=-x-5$ на цій прямій.

Підставляючи це значення у дану функцію, дістанемо

$$z=4x^2+26x+41,\quad z'_x=8x+26=0,\quad x=-\frac{13}{4}.$$

Відповідне значення $y=-\frac{7}{4},\ z(-\frac{13}{4},\ -\frac{7}{4})=-\frac{5}{4}.$

На кінцях відрізка *AB* $z(-5,0)=11$, $z(0,-5)=41$.

Найбільше значення $z=41$. Зрівнюючи це значення з тими, що було знайдено у пунктах а) і б), дістанемо, що у даній замкнутій області $z_{найб}=41$.

Відповідь: *41*.

5. Розкласти число 64 на три множника так, щоб сума їх обернених величин була найменшою. У відповіді вказати значення цієї суми.

Розв'язання:

Позначимо за x перший з трьох множників числа 64, у -другий, третій множник дорівнює $\frac{64}{xy}$.

Складемо суму обернених величин $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{xy}{64}$ і знайдемо похідні по ***x*** і ***y*** від функції ***S***.

$$S'_x=-\frac{1}{x^2}+\frac{y}{64},\qquad S'_y=-\frac{1}{y^2}+\frac{x}{64}.$$

Для знаходження точки мінімуму розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -\dfrac{1y}{x^2}+\dfrac{}{64}=0; \\ -\dfrac{1x}{y^2}+\dfrac{}{64}=0. \end{cases}$$

Дістанемо $x=4$, $y=4$**,** третій множник дорівнює $\frac{64}{xy}=4$. Сумою цих чисел є $S=12$.

Відповідь: *12*.

РОЗДІЛ 4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Практична робота 1. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними та однорідні

1. Основні поняття та теореми

Якщо в диференціальне рівняння першого порядку $f(x,y,y')=0$ похідна входить у першому степені, то після розв'язку його відносно y отримаємо рівняння виду:

$$f(x,y)+\phi(x,y)y'=0.$$

Так як $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то рівняння буде таким:

$$f(x,y)dx+\phi(x,y)dy=0.$$

Кожна з функцій $f(x,y)$ і $\phi(x,y)$ є добутком двох функцій, одна з яких функція тільки x, а друга тільки y, тобто:

$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y),$$

а $\phi(x,y)=\phi_1(x)\phi_2(y)$

рівняння прийме вигляд:

$$f_1(x)f_2(y)dx+\phi_1(x)\phi_2(y)dy=0.$$

Це рівняння називається рівнянням з *відокремлюваними змінними*. Після ділення на $\phi_1(x)\cdot f_2(y)$ це рівняння матиме вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}dx+\frac{\phi_2(y)}{f_2(y)}dy=0.$$

Загальний інтеграл запишеться так:

$$\int\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}dx+\int\frac{\phi_2(y)}{f_2(y)}dy=C.$$

Якщо рівняння $y'=f(x,y)$, або $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ не змінюється при заміні x на kx і y на ky, то вони називаються *однорідними*. Підстановка $y=u\cdot x$, де u - нова шукана функція, перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Після того як нове рівняння буде проінтегровано, слід замінити u на $\dfrac{y}{x}$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. При якому значенні параметра b функція $y=e^{bx}$ буде розв'язком диференціального рівняння $y'-\alpha y=e^{bx}$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'tgx-y=\alpha$, що задовольняє початковим умовам $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\alpha$, та підрахувати його значення в точці $x=-\frac{\pi}{6}$.

3. При якому значенні параметра p диференціальне рівняння $y^{\alpha}+x^{\alpha}y'=x^{p}yy'$ буде однорідним?

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$, що задовольняє початковим умовам $y\left(\frac{1}{2}\right)=1$, та підрахувати його значення в точці $x=\alpha$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. При якому значенні параметра b функція $y=e^{bx}$ буде розв'язком диференціального рівняння $y'-21y=e^{bx}$.

Розв'язання:

Розглянемо задане диференціальне рівняння $y'-21y=e^{bx}$.

Підставимо в диференціальне рівняння першу похідну функції і саму функцію:

$be^{bx}-21e^{bx}=e^{bx}$.

Звідки:

$b-21=1$;

$b=21+1=22$.

Відповідь: 22.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'tgx-y=27$, що задовольняє початковим умовам $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=27$, та обчислити його значення в точці $x=-\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання:

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$y'tgx-y=27$;

$y'tgx = 27 + y$;

$y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Підставимо в рівняння значення y':

$$27 + y = tgx\frac{dy}{dx}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y + 27} = tgxdx.$$

Проінтегруємо обидві частини:

$ln|y + 27| = ln|c\sin x|$.

Після потенціювання маємо:

$y + 27 = c\sin x$ або $y = c\sin x - 27$.

Підставимо початкові умови в одержаний загальний розв'язок, та матимемо лінійне відносно c рівняння:

$$27 = c\frac{1}{2} - 27;$$

$$\frac{1}{2}c = 2 \cdot 27;$$

$c = 27 \cdot 4 = 108.$

Частинний розв'язок буде мати вигляд:

$y = 108\sin x - 27$.

Обчислимо його значення при $x = -\dfrac{\pi}{6}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 108 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 27 = -81.$$

Відповідь: *-81*.

3. При якому значенні параметра p диференціальне рівняння $y^{22} + x^{22}y' = x^p yy'$ буде однорідним?

Розв'язання:

Розглянемо степені доданків лівої та правої частини рівняння: $p + 1 = 22$, $p = 22 - 1 = 21$.

Відповідь: *21*.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$, що задовольняє початковим умовам $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, та обчислити його значення в точці $x = 15$.

Розв'язання: Розглянемо задане рівняння $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

Оскільки рівняння однорідне, введемо підстановку $y = zx$, та одержимо:

$$(zx)' = \frac{z^2x^2}{x^2} - 2;$$

$$z'x + zx' = z^2 - 2;$$

$$z'x + z = z^2 - 2;$$

$$z'x = z^2 - z - 2;$$

$$z'x = (z-2)(z+1); \qquad z' = \frac{dz}{dx};$$

$$\frac{dz}{dx}x = (z-2)(z+1).$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{1}{3}\left(\int\frac{dz}{z-2} - \int\frac{dz}{z+1}\right) = \int\frac{dx}{x};$$

$$ln\left|\frac{z-2}{z+1}\right| = 3\,ln|x| + ln|c|.$$

Після потенціювання одержимо загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$\frac{z-2}{z+1} = cx^3.$$

Повернемося до змінної y, замінивши z на $\frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1} = cx^3;$$

$$\frac{y-2x}{y+x} = cx^3.$$

Підставимо початкові умови для визначення c:

$$\frac{1-2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=c\cdot\frac{1}{8};$$

$c=0$.

Отже розв’язок задачі Коші: $y=2x$. Знайдемо значення одержаної функції при $x=15$: $y(15)=2\cdot 15=30$;

Відповідь: *30*.

5. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y-xy'=10(1+x^2y')$, що задовольняє початковим умовам $y(1)=1$, та обчислити його значення в точці $x=0$.

Розв’язання:

Виконаємо деякі перетворення в диференціальному рівнянні:

$$y-xy'=10+10x^2y';$$

$$y'(10x^2+x)=y-10 \qquad y'=\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx}(10x^2+x)=y-10.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y-10}=\frac{dx}{x(10x+1)};$$

$$\frac{dy}{y-10}=\frac{dx}{x}-\frac{10dx}{10x+1}.$$

Проінтегрувавши, маємо:

$$ln\left|y-10\right|=ln\left|x\right|=ln\left|10x+1\right|+ln\,c;$$

$$y-10=\frac{cx}{10x+1}.$$

Підставивши початкові умови, підрахуємо c:

$$1-10=\frac{c}{10+1};$$

$$-9=\frac{c}{11};$$

$c=-99.$

Частинний розв’язок диференціального рівняння буде:

$$y = 10 + \frac{(-99x)}{10x+1} = 10 - \frac{99x}{10x+1} = \frac{10(10x+1) - 99x}{10x+1} =$$

$$= \frac{100x + 10 - 99x}{10x+1} = \frac{x+10}{10x+1}.$$

Значення частинного розв'язку в точці $x = 0$ буде:

$$y = \frac{0+10}{10 \cdot 0 + 1} = 10.$$

Відповідь: *10*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $x^2(y^3 + \alpha)dx + (x^3 + \alpha)y^2 dy = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, та підрахувати його значення в точці $x = \alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy' + \alpha y = y^2$, що задовольняє початковим умовам $y(1) = \alpha$. У відповіді дати значення постійної диференціального рівняння.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{y-1} = xdx$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = \alpha^2$, та обчислити його значення в точці $x = 0$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(\sqrt{\alpha}) = \alpha$, та підрахувати його значення в точці $x = \alpha$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' tgx - y = \alpha^2$, що задовольняє початковим умовам $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, та підрахувати його значення в точці $x = \frac{\pi}{6}$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $x^2(y^3 + 7)dx + (x^3 + 7) \cdot y^2 \cdot dy = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(1) = 1$, та обчислити його значення в точці $x = 7$.

Розв'язання: В заданому рівнянні $x^2(y^3+7)dx+(x^3+7)y^2dy=0$ виконаємо перетворення, розділимо кожний доданок рівності на $(x^3+7)(y^3+7)$, одержимо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x^2}{x^3+7}dx+\frac{y^2}{y^3+7}dy=0.$$

Проінтегрувавши, маємо:

$$\frac{1}{3}ln(x^3+7)+\frac{1}{3}ln(y^3+7)=\frac{1}{3}lnC.$$

Після потенціювання:

$$(x^3+7)(y^3+7)=C.$$

Визначимо значення постійної C, підставивши початкові умови:

$(1+7)(1+7)=C$; $C=64$.

Знайдемо частинний розв'язок:

$$(x^3+7)(y^3+7)=64;$$

$$y=\sqrt[3]{\frac{64}{x^3+7}-7}.$$

Підрахуємо значення частинного розв'язку при $x=7$:

$$y(7)=\sqrt[3]{\frac{64}{350}-7}=-1,8961.$$

Відповідь: *-1,8961*.

2. Знайти частинний розв'язок однорідного диференціального рівняння $y'+\frac{x^2+y^2}{xy}=0$, що задовольняє початковим умовам $y(\pi)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. У відповіді надати значення постійної диференціального рівняння C.

Розв'язання:

Доведемо, що рівняння однорідне. Замінюємо x на kx та y на ky і бачимо, що рівняння не змінилось.

Це доводить, що рівняння однорідне. Виконаємо підстановку $y=ux$. Тоді $y'=u'x+u$, і рівняння запишеться так:

$$u'x + u + \frac{x^2 + u^2x^2}{xux} = 0.$$

Скоротимо на x^2:

$$u'x + u + \frac{1 + u^2}{u} = 0 \quad \text{звідки:}$$

$$u'x + \frac{1 + 2u^2}{u} = 0; \qquad \frac{du}{dx}x = -\frac{1 + 2u^2}{u}.$$

Відокремимо змінні:

$$-\frac{u}{1 + 2u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши, отримуємо:

$$\frac{1}{4}ln\left(1 + 2u^2\right) = ln|x| + ln|C|;$$

$$ln(1 + 2u^2)^{-1} = 4\,ln|x| + 4\,ln|C|.$$

Переходячи від логарифмів до чисел, тобто пропотенціювавши, маємо:

$$\frac{1}{1 + 2u^2} = Cx^4 \cdot$$

Замінимо u на $\frac{y}{x}$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1 + \frac{2y^2}{x^2}} = Cx^4 \quad ; \quad \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} = Cx^4.$$

Скоротимо на x^2.

Розв'язок зручніше записати у вигляді $\frac{1}{(x^2 + 2y^2)x^2} = C$, або $x^2(x^2 + 2y^2) = \frac{1}{C}$.

Замінимо $\frac{1}{C}$ на C_1, отримаємо $x^2(x^2 + 2y^2) = C_1$.

Підставимо значення початкової умови і визначимо C.

$$\pi^2\left(\pi^2 + 2\frac{\pi^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right) = C_1; \quad 4\pi^4 = C_1; \quad C_1 = 194,8181.$$

Відповідь: *194,8181.*

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$, що задовольняє початковій умові $y(\sqrt{3}) = 0$, та обчислити його значення при $x = 10$.

Розв'язання:

Відокремимо змінні в даному рівнянні. Для цього розділимо обидві його частини на $\sqrt{1+y^2}\cdot\sqrt{1+x^2}$.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримаємо загальний інтеграл $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy = C$.

Звідки $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$, $(\ C > 0\ )$.

Частинний розв'язок отримаємо з умови $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$:

$\sqrt{1+3} + \sqrt{1+0} = C$; $C = 3$.

Частинним розв'язком буде

$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3$.

Знайдемо значення y при $x = 10$

$$y = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1+x^2}\right)^2 - 1};$$

$$y(10) = \sqrt{\left(3 - \sqrt{1+100}\right)^2 - 1} = 6,9785.$$

Відповідь: *6,9785.*

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $tgydx - x\ln xdy = 0$, що задовольняє початковим умовам $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$, та підрахувати його значення при $y = 0$.

Розв'язання:

Для того, щоб відокремити змінні, розділимо обидві частини рівняння на $tgy\cdot x\cdot\ln x$, і отримаємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dx}{x\ln x}-\frac{dy}{tgy}=0.$$

Проінтегрувавши, рівняння $\int\frac{dx}{x\ln x}-\int\frac{dy}{tgy}=\ln C$, знайдемо його загальний інтеграл $\ln(\ln x)-\ln(\sin y)=\ln C$.

Звідки $\qquad \frac{\ln x}{\sin y}=C$;

або $\qquad \ln x=C\sin y$.

Загальний розв'язок рівняння:

$x=e^{C\cdot\sin y}$.

Визначимо значення постійної C диференціального рівняння

$e=e^{C\cdot\sin\frac{\pi}{2}}; \quad C=1.$

Частинний розв'язок диференціального рівняння буде:

$x=e^{\sin y}$.

Визначимо значення частинного розв'язку при $y=0$

$x=e^{\sin 0}=1$.

Відповідь: 1.

Практична робота 2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Рівняння виду $y'+p(x)y=q(x)$ називається *лінійним* тому, що шукана функція y і її похідна y' входять до рівняння в першому степені. Функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні на інтервалі $[a;b]$, в якому знаходиться розв'язок рівняння. Якщо права частина рівняння – функція $q(x)$ тотожньо рівна нулеві при всіх значеннях x із $[a;b]$, то рівняння запишеться:

$y'+p(x)y=0$

і називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням* першого порядку. Якщо $q(x)\neq 0$, то рівняння називається неоднорідним.

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння можна знайти за допомогою підстановки $y = e^{-\int p(x)dx} v(x)$, де $v(x)$ - нова шукана функція. Множник $e^{-\int p(x)dx}$ - загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння. Для розв’язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння застосовуємо так званий метод варіації довільної сталої. Цей метод полягає в тому, що спочатку знаходимо загальний розв’язок відповідного однорідного лінійного рівняння, тобто множник $e^{-\int p(x)dx}$. Потім підставляємо у рівняння y та y' і з отриманого диференціального рівняння визначаємо функцію $v(x)$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв’язок однорідного диференціального рівняння $y' - \alpha y = 0$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити значення його похідної у точці $x = 0$.

2. Знайти частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння $y' - \alpha y = e^{\alpha x}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити значення його похідної у точці $x = 0$. Врахувати те, що $y = e^{\alpha x}$ - розв’язок однорідного диференціального рівняння.

3. Знайти частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння $y' - \alpha y = 2$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити його похідну у точці $x = 0$.

4. Знайти частинний розв’язок неоднорідного диференціального рівняння $y' - \alpha y = e^{\alpha x} + 2$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити значення його похідної у точці $x = 0$ (використати принцип накладання).

5. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$, що задовольняє початковій умові $y(\alpha) = 0$, та обчислити його значення у точці $x = 0$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв’язок однорідного лінійного рівняння $y' + y = 0$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити значення його похідної у точці $x = 0$.

Розв’язання:

$y' + y = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними, враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$ одержимо:

$$\frac{dy}{dx} = -y; \quad \frac{dy}{y} = -dx.$$

Проінтегрувавши, отримуємо:

$$ln|y| = -x + ln|c|; \; ln|y| - ln|c| = -x;$$

$$ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x; \quad \left|\frac{y}{c}\right| = e^{-x}; \quad |y| = |c| \cdot e^{-x};$$

$$y = ce^{-x}.$$

Визначимо довільну сталу C, використовуючи початкові умови $y(0) = 1$:

$$1 = c \cdot e^{0}; \quad c = 1; \; y = e^{-x}.$$

Визначимо похідну $y' = e^{-x}$. Знайдемо її при $x = 0$

$$y'(0) = -1.$$

Відповідь: *-1*.

2. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' - 4y = e^{4x}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити значення його похідної при $x = 0$.

Розв'язання:

$$y' - 4y = e^{4x};$$

$$y = e^{4\int dx} v(x) = e^{4x} v(x) \quad ;$$

$$y' = 4e^{4x} v(x) + e^{4x} v'(x);$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & y' = 4e^{4x} v(x) + e^{4x} v'(x) \\ -4 & y = e^{4x} v(x) \\ \hline & e^{4x} = e^{4x} v'(x) \end{array}$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx};$$

$$e^{4x} = e^{4x} \frac{dv}{dx};$$

$$dv = dx;$$

$v = x + c$.

Підставимо знайдену функцію $v(x)$ в загальний розв'язок: $y = e^{4x}(x + C)$. За допомогою початкових умов $y(0) = 1$, визначимо параметр C.

$1 = e^{4\,0}(0 + C); \quad C = 1.$

Частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння запишеться:

$y = e^{4x}(x + 1).$

Обчислимо значення похідної y' при $x = 0$:

$y' = 4e^{4x}(x + 1) + e^{4x}; \quad y'(0) = 4e^{4\,0}(0 + 1) = 4;$

$y'(0) = 4$.

Відповідь: *4*.

3. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' - 4y = \cos x$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$, та обчислити його значення при $x = 0$.

Розв'язання:

$y' - 4y = \cos x;$

$y = e^{4\int dx} v(x) = e^{4x} v(x);$

$y' = v'(x)e^{4x} + 4ve^{4x}.$

Підставимо значення y та знайдене значення y' в задане рівняння:

$$
\begin{array}{r|l}
1 & y' = 4ve^{4x} + v'(x)e^{4x} \\
-4 & y = ve^{4x} \\
\hline
 & \cos x = v'e^{4x}
\end{array}
$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dv}{dx} e^{4x} = \cos x$$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини рівняння на dx

$dv = e^{-4x} \cos x dx$.

Проінтегрувавши, маємо:

$$v = \frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C.$$

Підставимо знайдену функцію $v(x)$ в загальний розв'язок:

$$y = \left(\frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C \right) e^{4x};$$

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x)\cdot$$

Щоб визначити частинний розв'язок підставимо початкові умови:

$$1 = C - \frac{4}{17}; \quad C = \frac{21}{17}.$$

Тому частинний розв'язок буде:

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x).$$

Обчислимо значення частинного розв'язку в точці $x = 0$:

$$y(0) = \frac{1}{17}\left(21e^{4\cdot 0} + \sin 0 - 4\cos 0\right) = \frac{1}{17}(21 - 4) = 1.$$

Відповідь: *1*.

4. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$, та обчислити його значення при $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання:

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x;$$

$$y = e^{-\int \cos x dx} v(x) = e^{-\sin x} v(x);$$

$$y' = -ve^{-\sin x}\cos x + v'e^{-\sin x}.$$

Підставимо значення y та y' в задане рівняння, отримаємо:

$$\begin{array}{c|l} & y' = -ve^{-\sin x}\cos x + v'e^{-\sin x} \\ \cos x & \\ & y = ve^{-\sin x} \\ \hline & \sin x \cos x = v'e^{-\sin x} \end{array}$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними:

$\frac{dv}{dx}e^{-\sin x}=\sin x\cos x$;

$dv=e^{\sin x}\sin x\cos xdx$;

$v=e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}+C$.

Підставляючи значення $v(x)$ в загальний розв'язок отримаємо:

$y=\left(e^{\sin x}\sin x-e^{\sin x}+C\right)e^{-\sin x}$;

$y=Ce^{-\sin x}+\sin x-1$.

Тепер знайдемо частинний розв'язок. Підставимо в загальний розв'язок початкові умови $y(0)=0$:

$0=Ce^{-\sin 0}+\sin 0-1$; $C=1$.

Частинний розв'язок буде:

$y=e^{-\sin x}+\sin x-1$.

Значення його в точці $x=\frac{\pi}{2}$: $y=\frac{1}{e}$.

Відповідь: *0,3678.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y'+\alpha y=e^{2x}$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha$, та обчислити його значення при $x=0$.

2. Знайти частинний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння $xy'+y-e^{2x}=0$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha^2$, та обчислити його значення при $x=\alpha$.

3. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y\sin x+y'\cos x=1$, що задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\alpha$, та обчислити його значення при $x=0$.

4. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y'+y=\cos x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha$, та обчислити його значення при $x=0$.

5. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $z'+\frac{z}{x}=-2\frac{\ln x}{x}$, що задовольняє початковій умові $z(1)=\alpha$, та обчислити його значення при $x=\alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' - ytgx = sec\,x$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$, та обчислити його значення при $x = \pi$.

Розв'язання

$y' - ytgx = sec\,x$;

$y = e^{-\int(-tgx)dx} v(x) = e^{\int tgx \cdot dx} v(x) = e^{-ln|cos\,x|} \cdot v(x) = \frac{1}{cos\,x} \cdot v(x)$;

$y' = cos^{-2}x \cdot sin\,x \cdot v(x) + cos^{-1}x \cdot v'(x)$;

$$\begin{array}{r|l} -tgx & y' = cos^{-2}x \cdot sin\,x \cdot v(x) + cos^{-1}x \cdot v'(x) \\ & y = cos^{-1}x \cdot v(x) \\ \hline & \frac{1}{cos\,x} = \frac{v'(x)}{cos\,x}; \end{array}$$

$1 = \frac{dv}{dx}$;

$dx = dv$; $x + C = v$. Звідки:

$y = \frac{x}{cos\,x} + C$.

Підставимо у загальний розв'язок значення змінних, що відповідають початковій умові $y(0) = 0$ та визначимо сталу C:

$C = 0$.

Частинний розв'язок диференціального рівняння

$y = \frac{x}{cos\,x}$.

Визначимо значення його при $x = \pi$, одержимо:

$y(\pi) = -\pi$.

Відповідь: *-3,14*.

2. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $z' - \frac{z}{x} = -\frac{ln\,x}{x}$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 5$, та обчислити його значення при $x = 10$.

Розв'язання:

$$z' - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x};$$

$$z = e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} v(x) = e^{\ln x} v(x) = xv(x);$$

$$z' = v(x) + xv'(x);$$

$$\frac{1}{x}\left|\begin{array}{l} z' = v(x) + xv'(x) \\ z = xv(x) \end{array}\right.$$

$$-\frac{\ln x}{x} = xv'(x);$$

$$-\frac{\ln x}{x} = x\frac{dv}{dx}.$$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини рівняння на $\frac{dx}{x}$, одержимо:

$$-\frac{\ln x}{x^2}dx = dv.$$

Проінтегрувавши, маємо:

$$\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C = v.$$

Загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$z = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right)x = \ln x + 1 + Cx$$

Знайдемо частинний розв'язок, підставивши початкові умови $y(1) = 5$

$$5 = \ln 1 + 1 + C; \quad C = 4;$$

$$z = \ln x + 1 + 4x.$$

Знайдемо значення частинного розв'язку в точці $x = 10$,

$$z = \ln 10 + 1 + 4 \cdot 10 = 43{,}3025.$$

Відповідь: $43{,}3025$.

3. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння $y' + 5y = e^{3x}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$, та обчислити його значення при $x = 0$.

Розв'язання:

$y' + 5y = e^{3x}$;

$y = e^{-5\int dx} v(x) = e^{-5x} v(x)$;

Визначимо y': $y' = -5e^{-5x} v(x) + e^{-5x} v'(x)$;

$$\begin{array}{c|l} 5 & \begin{array}{l} y' = -5e^{-5x} v(x) + e^{-5x} v'(x) \\ y = e^{-5x} v(x) \end{array} \\ \hline & e^{3x} = e^{-5x} v'(x); \end{array}$$

$$e^{3x} = e^{-5x} \frac{dv}{dx}.$$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини рівняння на $e^{5x} dx$

$$e^{3x} e^{5x} dx = dv;$$
$$e^{x(3+5)} dx = dv.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності, маємо:

$\frac{1}{8} e^{8x} + C = v$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння запишеться:

$y = e^{-5x} (\frac{1}{8} e^{8x} + C)$.

Визначимо значення сталої диференціального рівняння C, підставивши початкові умови $y(0) = 4$

$4 = e^{0} \left(\frac{1}{8} e^{0} + C \right)$; $\quad C = \frac{31}{8}$.

Частинний розв'язок запишеться:

$y = e^{-5x} \left(\frac{1}{8} e^{8x} + \frac{31}{8} \right)$.

Знайдемо значення його при $x = 0$

$y(0) = e^{0} \left(\frac{1}{8} e^{0} + \frac{31}{8} \right)$;

$y(0) = 4$.

Відповідь: *4*.

4. Знайти частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 6$, та обчислити його значення при $x = 12$.

Розв'язання:

$$y' - \frac{2y}{x} = \frac{x}{2};$$

$$y = e^{\int \frac{2dx}{x}} v(x) = e^{2\ln x} v(x) = x^2 v(x);$$

$$y' = 2xv(x) + x^2 v'(x);$$

$$\begin{array}{r|l} & y' = 2xv(x) + x^2 v'(x) \\ -\frac{2}{x} & y = x^2 v(x) \\ \hline & \frac{x}{2} = x^2 v'(x); \end{array}$$

$$\frac{x}{2} = x^2 \frac{dv}{dx}.$$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини на $\frac{dx}{x^2}$:

$$\frac{dx}{2x} = dv.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності, маємо:

$$\frac{1}{2}\ln x + C = v.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння запишемо у вигляді:

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right).$$

Визначимо значення сталої C, підставивши початкові умови $y(1) = 6$:

$$6 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\ln 1 + C\right); \qquad C = 6.$$

Частинний розв'язок запишемо у вигляді

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}ln\,x + 6\right).$$

Знайдемо значення частинного розв'язку при $x = 12$

$$y = 144\left(\frac{1}{2}ln\,12 + 6\right) = 1042{,}9132.$$

Відповідь: *1042,9132*.

Практична робота 3. Диференціальні рівняння вищих порядків. Метод зниження порядку диференціального рівняння

1. Основні поняття та теореми

Розглянемо типи диференціальних рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку.

1.1 Рівняння, що містять тільки похідну порядку n і незалежну змінну

Ці рівняння мають вигляд $F(x, y^{(n)}) = 0$. Якщо вдається розв'язати це рівняння відносно $y^{(n)}$, то воно записується:

$$y^{(n)} = f(x).$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1}.$$

З цього видно, що для отримання загального розв'язку рівняння треба n разів проінтегрувати функцію $f(x)$ і додати до отриманого результату многочлен від x степені $n-1$, коефіцієнти якого є довільні сталі.

1.2 Рівняння, що не містять шукану функцію

Рівняння порядку n, що не містить шуканої функції має вигляд:

$$f(x, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок його може бути знижений на одиницю за допомогою підстановки $y' = p(x)$, де $p(x)$ - нова шукана функція.

Ця підстановка приводить до рівняння

$$f(x, p, p', p'', \ldots\ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Після визначення функції $p(x)$ рівняння може бути зведеним до рівняння першого типу, розв'язання якого показано вище.

1.3 Рівняння, що не містять незалежної змінної

Ці рівняння мають в загальному випадку такий вигляд:

$f(y,y',y'',\ldots\ldots,y^{(n)})=0$.

Зниження порядку досягається підстановкою $y'=p(y)$, де $p(y)$ – нова шукана функція, що залежить від y. В цьому разі за незалежну змінну приймається не x, а y.

Тому рівняння набуває вигляду:

$$f\left(y,p,\frac{dp}{dy},\frac{d^2p}{dy^2},\ldots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$F(y,p,C_1,C_2,\ldots,C_{n-1})=0$.

Оскільки $p=\dfrac{dy}{dx}$, то загальний розв'язок це рівняння першого порядку, з якого і визначається шукана функція y.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=2$ при початкових умовах $y(\alpha)=0$, $y'(\alpha)=0$ та обчислити його значення при $x=2\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''(x^2+1)=2xy'$ при початкових умовах $y(1)=\alpha$, $y'(1)=6$, та обчислити його значення при $x=0$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2yy''=3+(y')^2$ при початкових умовах $y(1)=1$, $y'(1)=1$, та обчислити його значення при $x=2\alpha$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy^V=y^{IV}$ при початкових умовах $y(1)=2\alpha$, $y'(1)=0$, $y''(1)=0$, $y'''(1)=-6\alpha$, $y^{(4)}(1)=0$ та обчислити його значення при $x=2$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=x+\sin x$ при початкових умовах $y(\pi)=0$, $y'(0)=0$, та обчислити його значення при $x=\pi$.

Розв'язання:

$y''=x+\sin x$

Дано рівняння, що містить тільки похідну другого порядку і незалежну змінну. Для того, щоб отримати загальний розв'язок рівняння, треба двічі проінтегрувати функцію $f(x)$ і додати до результату многочлен від x коефіцієнтами якого є довільні сталі.

$$y'=\int(x+\sin x)dx=\int xdx+\int\sin xdx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1;$$

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\int x^2dx-\int\cos xdx+\int C_1dx=$$

$$=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2.$$

Підставимо до y' та y значення початкових умов $y(\pi)=0$ та $y'(0)=0$ і визначимо C_1 та C_2.

$$y'=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1;$$

$$0=\frac{0}{2}-\cos 0+C_1;$$

$$C_1=1.$$

$$y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1\cdot x+C_2;$$

$$0=\frac{\pi^3}{6}-\sin\pi+\pi+C_2;$$

$$0=\frac{\pi^3}{6}+\pi+C_2;$$

$$C_2=-\frac{\pi^3}{6}-\pi.$$

Частинний розв'язок запишеться:

$$y=\frac{x^3}{6}-\sin x+x-\frac{\pi^3}{6}-\pi.$$

Обчислимо його значення при $x=\pi$:

$$y=\frac{\pi^3}{6}-\sin\pi+\pi-\frac{\pi^3}{6}-\pi,$$

$$y=0.$$

Відповідь: 0.

2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $(1-x^2)y''-xy'=2$ при початкових умовах $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $y'(0)=1$, та обчислити його значення при $x=\frac{\pi}{6}$.

Розв’язання:

Дане рівняння другого порядку не містить шуканої функції у. Порядок його може бути знижений на одиницю за допомогою підстановки $y'=p(x)$, де $p(x)$ - нова шукана функція.

$(1-x^2)y''-xy'=2$;

$y'=p(x)=p$; $\quad y''=\frac{dp}{dx}=p'$.

Отже, $(1-x^2)p'-xp=2$.

Розділимо кожну частину рівняння на $(1-x^2)$:

$$p'-\frac{x}{1-x^2}p=\frac{2}{1-x^2}.$$

Загальний розв’язок будемо шукати у вигляді:

$p=e^{-\int\left(-\frac{x}{1-x^2}\right)dx}v(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}v(x)$;

$\int\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}ln(1-x^2)$; $\quad e^{-\frac{1}{2}ln(1-x^2)}=e^{ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v(x)$. Знайдемо похідну p':

$p'=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}v(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v'(x)$;

$$\begin{array}{c|l} 1 & p'=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}v(x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v'(x) \\ -\frac{x}{1-x^2} & p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v(x) \\ \hline & \frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v'(x) \end{array}$$

$$v'(x)=\frac{dv}{dx};$$

$$\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dv}{dx}.$$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини рівності на dx :

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad dv=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

Проінтегрувавши маємо:

$$v=2\arcsin x+C_1.$$

Звідки загальний розв'язок буде:

$$p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1);$$

але $p=y'=\dfrac{dy}{dx}$, тому

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1); \; dy=\frac{2\arcsin x+C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Проінтегрувавши маємо:

$$y=2\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+C_1\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C_2;$$

$$y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2.$$

Підставивши початкові умови $y'(0)=1$ в $p=y'$, визначимо значення сталої C_1

$$y'=p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1);$$

$$1=\frac{1}{\sqrt{1-0}}(2\arcsin 0+C_1);$$

$$C_1=1.$$

Підставивши початкові умови $y(\frac{\pi}{2})=0$ в y, визначимо значення C_2:

$$y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2;$$

$0=\arcsin^2\frac{\pi}{2}+C_1\arcsin\frac{\pi}{2}+C_2;$

$C_2=-2.$

Частинний розв’язок має вигляд:

$y=\arcsin^2 x+\arcsin x-2.$

Визначимо його значення при $x=\frac{\pi}{6}$:

$y=\arcsin^2\frac{\pi}{6}+\arcsin\frac{\pi}{6}-2;$

$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{4}.$

Відповідь: *-1,25.*

3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $2yy''=3+(y')^2$ при початкових умовах $y(1)=1$, $y'(1)=1$, та обчислити його значення при $x=15$.

Розв’язання:

$2yy''=3+(y')^2$

Рівняння не містить незалежну змінну x. Зниження порядку досягається підстановкою $y'=p(y)$, де $p(y)$ - нова шукана функція. В цьому випадку за незалежну змінну приймається не x, а y.

При чому

$$y'=p(y)=p$$

$$y''=(p(y))'=\frac{dp}{dy}p$$

Підставивши маємо:

$2ypp'=3+p^2;$

$2yp\frac{dp}{dy}=3+p^2;$

$\frac{2p}{3+p^2}dp=\frac{dy}{y}.$

Проінтегрувавши, маємо:

$3+p^2=C_1y.$

Підставимо початкові умови $y'(1)=1$, вважаючи що $y'=p$:

$3+1=C_1\cdot 1\ \Rightarrow\ C_1=4;$

$3+p^2=4y;$

$p=\sqrt{4y-3};$

$p=2\sqrt{y-\frac{3}{4}}$, враховуючи, що $p=y'$ маємо

$y'=2\sqrt{y-\frac{3}{4}};$

$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y-\frac{3}{4}}.$

Відокремимо змінні, помноживши обидві частини рівняння на $\frac{dx}{\sqrt{y-\frac{3}{4}}}$:

$2dx=\left(y-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}dy\cdot$

Проінтегрувавши, обидві частини рівняння, маємо:

$\frac{\sqrt{y-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}}=2x+C_2;$

$\sqrt{y-\frac{3}{4}}=x+\frac{C_2}{2};$ нехай $\frac{C_2}{2}=C_2'$, тоді

$\sqrt{y-\frac{3}{4}}=x+C_2'.$

Підставимо початкові умови $y(1)=1$:

$\sqrt{1-\frac{3}{4}}=1+C_2';$

$C_2'=-\frac{1}{2}.$

Знайдемо значення частинного розв’язку коли $x=15$

$$\sqrt{y-\frac{3}{4}}=x-\frac{1}{2}$$

$$y-\frac{3}{4}=\left(15-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y=225-15+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=211.$$

Відповідь: *211*.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy^{(5)}=y^{(4)}$ при початкових умовах $y(1)=6$; $y'(1)=0$; $y''(1)=0$; $y'''(1)=-18$; $y^{(4)}(1)=0$ та обчислити його значення при $x=11$.

Розв'язання:

$xy^{(5)}=y^{(4)}$

Проведемо заміну $y^{(4)}=z$, $y^{(5)}=z$

$xz'=z$

$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$; $z=C_1x$;

$y^{(4)}(x)=C_1x$; $y^{(4)}(1)=C_1$; $C_1=0$;

$y^{(4)}=0$; $y'''(x)=C_2$; $y'''(1)=C_2$; $C_2=-18$;

$y'''(x)=-18$; $y''(x)=-18x+C_3$; $y''(1)=-18\cdot 1+C_3$; $C_3=18$

$y''(x)=-18x+18$; $y'(x)=-9x^2+18x+C_4$;

$y'(1)=-9\cdot 1+18\cdot 1+C_4$; $C_4=-9$; $y'(x)=-9x^2+18x-9=$

$=-9\cdot(x^2-2x+1)=-9\cdot(x-1)^2$;

$y(x)=-9\cdot\frac{(x-1)^3}{3}+C_5$; $y(x)=-3\cdot(x-1)^3+C_5$;

$y(1)=C_5=6$; $y(x)=-3\cdot(x-1)^3+6$;

Знайдемо значення частинного розв'язку при $x=11$.

$y(11)=-3(11-1)^3+6=-2994$.

Відповідь: *-2994*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'''=\frac{1}{x}$ при початкових умовах $y(1)=\alpha$; $y'(1)=2\alpha$; $y''(1)=-2\alpha$, та обчислити його значення при $x=1$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2ctgxy' = sin^3 x$ при початкових умовах $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha$ та обчислити його значення при $x = 0$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(y')^2 + 2yy'' = 0$ при початкових умовах $y(1) = \alpha^2$, $y'(1) = \alpha$ та обчислити суму довільних сталих C_1 і C_2.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2y'y'' - (y')^2 = 1$ при початкових умовах $y(0) = \alpha$; $y'(0) = 2\alpha$ та обчислити його значення при $x = \alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y^{(4)} = sin\,x$ при початкових умовах $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ та обчислити його значення при $x = \pi$.

Розв'язання:

$y^{(4)} = sin\,x$

Диференціальне рівняння має тільки похідну четвертого порядку і незалежну змінну. Для отримання загального розв'язку треба чотири рази проінтегрувати функцію $f(x) = sin\,x$, а для отримання частинного розв'язку треба за допомогою початкових умов ще чотири рази визначити довільну сталу C.

$$y''' = \int sin\,xdx = -cos\,x + C_1;\ 0 = -cos\frac{\pi}{2} + C_1;\ C_1 = 0;$$

$$y'' = \int(-cos\,x + C_1)dx = -\int cos\,xdx + C_1\int dx = -sin\,x + C_1x + C_2;$$

$$1 = -sin\frac{\pi}{2} + 0\cdot\frac{\pi}{2} + C_2;\ \ C_2 = 2.$$

$$y' = \int(-sin\,x + C_1x + C_2)dx = -\int sin\,xdx + C_1\int xdx + C_2\int dx =$$

$$= cos\,x + \frac{C_1\cdot x^2}{2} + C_2x + C_3;$$

$$2 = cos\frac{\pi}{2} + \frac{0 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + C_3; \; C_3 = 1 - \pi .$$

$$y = \int\left(cos\,x + \frac{C_1 \cdot x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)dx = \int cos\,xdx + \frac{C_1}{2}\int x^2 dx +$$

$$+\tilde{N}_2 \int xdx + C_3 \int dx = sin\,x + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 .$$

$$1 = sin\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi^2}{4} + (1 - \pi) \cdot \frac{\pi}{2} + C_4; \; C_4 = \frac{\pi(\pi - 2)}{4};$$

Частинний розв’язок:

$$y = sin\,x + x^2 + 1 - \pi + \frac{\pi(\pi - 2)}{4}.$$

Знайдемо значення частинного розв’язку при $x = \pi$:

$$y(\pi) = sin\pi + \pi^2 + 1 - \pi + \frac{\pi(\pi - 2)}{4}$$

$$y(\pi) = \frac{5\pi - 3\pi + 4}{4} = 10{,}9808 .$$

Відповідь: *10,9808*.

2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' = 5y'$ при початкових умовах $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$ та обчислити його значення при $x = 1$.

Розв’язання:

$y'' = 5y'$

Рівняння не має шуканої функції. Порядок його знижується на одиницю при допомозі підстановки $y' = p(x), y'' = \frac{dp}{dx}$.

Рівняння має вигляд:

$$\frac{dp}{dx} = 5p .$$

Змінні відокремлюються:

$$\frac{dp}{p} = 5dx .$$

Інтегрування обох частин рівності дає:

$ln\, p = 5x + ln\, C_1$; $ln \dfrac{p}{C_1} = 5x$; ; $\dfrac{p}{C_1} = e^{5x}$ $p = C_1 e^{5x}$.

Оскільки $y' = p(x)$; підставивши початкові умови $y'(0) = 2$ маємо:

$$2 = C_1 e^0;\; C_1 = 2;$$

$$p = \frac{dy}{dx};\; \frac{dy}{dx} = C_1 e^{5x}.$$

Знову змінні відокремлюються:

$$dy = C_1 e^{5x} dx;\; y = \frac{C_1}{5} e^{5x} + C_2;\; \frac{C_1}{5} = C_1.$$

$$y = C_1 \cdot e^{5x} + C_2;$$

Підставивши початкові умови $y(0) = 3$ маємо: $3 = 2e^0 + C_2$; $C_2 = 1$;

Частинний розв'язок: $y = 2e^{5x} + 1$.

Знайдемо значення частинного розв'язку при $x = 1$:

$y(1) = 2e^5 + 1 = 293{,}3320$.

Відповідь: $293{,}332$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' = 3e^y$ при початкових умовах $y(1) = 0$; $y'(1) = 4$ та обчислити суму сталих диференціального рівняння.

Розв'язання:

Рівняння не містить незалежної змінної. Тому $y' = p(y)$, $y'' = \dfrac{dp}{dy} p$. Рівняння запишеться у вигляді:

$$p\frac{dp}{dy} = 3e^y;$$

$$pdp = 3e^y dy.$$

Інтегруючи отримаємо:

$$\frac{p^2}{2} = 3e^y + \frac{C_1}{2}.$$

Звідки:

$$p=\sqrt{2\cdot 3e^{y}+C_1}\,.$$

Підставивши початкові умови $y'(1)=4$, маємо

$$4=\sqrt{6e^{0}+C_1}\,;\;\;C_1=10\,.$$

Відокремивши змінні, отримуємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{6e^{y}+C_1}}=dx\,.$$

Проінтегрувавши обидві частини рівності, маємо

$$\int\frac{dy}{\sqrt{6e^{y}+C_1}}=x+C_2\,.$$

Оскільки інтеграл від лівої частини рівності знайти важко, наведемо його розв'язок:

$$I=\int\frac{dy}{\sqrt{6e^{y}+C_1}}=\begin{bmatrix}6e^{y}+C_1=z^2 & 3e^{y}dy=zdz & 3e^{y}=\dfrac{z^2-C_1}{2}\\ 6e^{y}dy=2zdz & dy=\dfrac{zdz}{3e^{y}} & dy=\dfrac{2zdz}{z^2-C_1}\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{2dz}{z^2-C_1}=2\frac{1}{2\sqrt{C_1}}ln\frac{z-\sqrt{C_1}}{z+\sqrt{C_1}}=\frac{1}{\sqrt{C_1}}ln\frac{\sqrt{6e^{y}+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{6e^{y}+C_1}+\sqrt{C_1}}\,.$$

Повернемося до розв'язку диференціального рівняння:

$$x+C_2=\frac{1}{\sqrt{C_1}}ln\frac{\sqrt{6e^{y}+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{6e^{y}+C_1}+\sqrt{C_1}}\,.$$

Підставивши початкові умови $y(1)=0$ маємо:

$$1+C_2=\frac{1}{\sqrt{10}}ln\frac{\sqrt{6e^{0}+10}-\sqrt{10}}{\sqrt{6e^{0}+10}+\sqrt{10}}\,;\;C_2=-1{,}2145\,.$$

За умовою складемо суму постійних C_1 та C_2 диференціального рівняння:

$$C_1+C_2=10-1{,}2145=8{,}7855\,.$$

Відповідь: *8,7855*.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2xy''=y'$ при початкових умовах $y(1)=1$, $y'(1)=3$ та обчислити його значення при $x=4$.

Розв'язання:

$$2xy''=y'$$

Застосовуємо підстановку $z=y'$, тоді $y''=z'$.

Рівняння набуває виду $2xz'=z$.

Дістали рівняння першого порядку, яке допускає відокремлення змінних

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{2x}.$$

Звідси знаходимо:

$$ln|z|=\frac{1}{2}ln|x|+ln|C_1|;$$

або $\quad z=C_1\sqrt{x}$.

Підставивши в останню рівність значення $z=y'$, матимемо диференціальне рівняння першого порядку. Підставивши початкові умови $y'(1)=3$, визначимо значення C_1

$$y'=C_1\sqrt{x};\quad 3=C_1\sqrt{1};\;\; C_1=3.$$

Загальний розв'язок цього, а отже і заданого рівняння, є

$$y=\int C_1\sqrt{x}dx+C_2=\frac{2}{3}C_1x^{\frac{2}{3}}+C_2$$

Для отримання частинного розв'язку визначимо значення сталої C_2, підставивши початкові умови $y(1)=1$, та значення $C_1=3$

$$1=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 1^{\frac{3}{2}}+C_2;\;\; C_2=-1.$$

Отже частинний розв'язок буде:

$$y=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^{\frac{3}{2}}-1=2x^{\frac{3}{2}}-1$$

За умовою знайдемо значення частинного розв'язку при $x=4$:

$$y(4)=2\cdot\sqrt{4^3}-1=15\cdot$$

Відповідь: *15*.

Практична робота 4. Лінійні диференціальні рівняння n – ного порядку

1. Основні поняття та теореми

Лінійним диференціальним рівнянням n – ного порядку називається рівняння виду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots +$$
$$+p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

де $f(x)$ – функція незалежної змінної x. Функції $p_i(x)(i = 1,2,\ldots n)$ і права частина рівняння - функція $f(x)$ неперервні на проміжку $\left[a;b\right]$. Функції $p_i(x)$ називаються коефіцієнтами рівняння. Якщо в рівнянні права частина $f(x)$ тотожно рівна нулеві на проміжку $\left[a;b\right]$, то рівняння набуває вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

і називається лінійним однорідним рівнянням. При $f(x) \neq 0$ рівняння називається неоднорідним.

Якщо функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ є розв'язками лінійного однорідного рівняння n – ного порядку і на проміжку $\left[a;b\right]$ і вони лінійно незалежні, то загальний розв'язок рівняння набуває вигляд:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots C_ny_n .$$

Ця формула визначає структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння порядку n і вказує спосіб побудови загального розв'язку. Таким чином, щоб знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння, треба знайти n його частинних лінійно незалежних в $\left[a;b\right]$ розв'язків, кожний з яких помножити на довільну сталу величину і всі ці добутки скласти. Система лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння називається фундаментальною. Для того, щоб функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$ були лінійно незалежними на проміжку $\left[a;b\right]$, необхідно і достатньо, щоб їх так званий визначник Вронського

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

був відмінним від нуля хоча б в одній точці проміжку $\left[a;b\right]$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Функції 1 та x утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку. Знайти частинний розв'язок цього рівняння , що задовольняє початковим умовам $y(1)=2$, $y'(1)=1$, та обчислити його значення при $x=\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$, що задовольняє початковим умовам $y(1)=2\alpha e$, $y'(1)=0$ та обчислити його значення при $x=\alpha$. Врахувати, що $y=e^x$ - один з його частинних розв'язків.

3. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку $y''-\dfrac{2x}{x^2+1}y'+\dfrac{2y}{x^2+1}=2$, що задовольняє початковим умовам $y(1)=-1$, $y'(1)=0$, та обчислити його значення при $x=\alpha$. Врахувати, що $y=1$ є частинним розв'язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння, а $y=x$ - частинний розв'язок відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Функції 1 та x утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку. Знайти частинний розв'язок цього рівняння , що задовольняє початковим умовам $y(2)=9$, $y'(2)=12$, , та обчислити його значення при $x=7$.

Розв'язання:

Загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння :

$$\begin{cases} y=C_1\cdot 1+C_2\cdot x \\ y'=C_2 \end{cases};\ \begin{cases} 9=C_1+2C_2 \\ 12=C_2 \end{cases};\ \begin{cases} 9=C_1+24 \\ C_2=12 \end{cases};\ \begin{cases} C_1=-15 \\ C_2=12 \end{cases}.$$

Отже частинний розв'язок цього рівняння буде, враховуючи знайдені значення C_1 і C_2:

$y=-15+12x$

Обчислити його значення при $x=7$:

$y=-15+12\cdot 7=69,$

Відповідь: *69.*

2. Знайти частинний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$, що задовольняє початковим умовам

$y(1)=4e$, $y'(1)=0$, та обчислити його значення при $x=2$. Врахувати, що $y=e^x$ – один з його частинних розв'язків.

Розв'язання:

$$y=ze^x\ ,\ y'=z'e^x+ze^x\ ,\ \ y''=z''e^x+z'e^x2+ze^x\,.$$

Підставимо значення частинного розв'язку та знайдені значення першої та другої похідної у задане лінійне диференціальне рівняння

$$xe^x(z''+z'2+z)-(2x+1)(z'+z)e^x+(x+1)ze^x=0$$

Розкривши дужки і звівши подібні маємо:

$$e^x(xz''-z')=0\,.$$

Проведемо заміну $z'=t\quad z''=t'$:

$$xt'-t=0\,.$$

Розв'язком цього рівняння є $t=x$. Отже $z'=x$.

Інтегруючи , знайдемо z: $z=\dfrac{x^2}{2}$, $\quad y=\dfrac{x^2}{2}e^x$.

Звідси система y та y' запишеться:

$$\begin{cases} y=C_1e^x+C_2x^2e^x \\ y'=C_1e^x+2C_2xe^x+C_2x^2e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1)=C_1e+C_2e=4e \\ y'(1)=C_1e+2C_2e+C_2\cdot e=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=4 \\ C_1+C_2+2C_2=0 \end{cases}\qquad \begin{cases} C_2=-2 \\ C_1=6 \end{cases}$$

Частинний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку знайдеться у вигляді:

$$y=6e^x+2x^2e^x$$

$$y=2(3-x^2)e^x$$

$$y=2(3-4)e^2=14{,}6882$$

Відповідь: *14,6882.*

3. Знайти частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку $y''-\dfrac{2x}{x^2+1}y'+\dfrac{2y}{x^2+1}=2$, що задовольняє початковим умовам $y(1)=-1$, $y'(1)=0$, та обчислити його значення при $x=21$.

Врахувати, що $y=1$ є частинним розв'язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння, а $y=-2x+(x^2-1)+1=x^2-2x+1-1=$ $=(x-1)^2-1$ – частинний розв'язок відповідного однорідного лінійного диференціального рівняння.

Розв'язання:

$$y_2=x\int e^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx}\frac{dx}{x^2}=x\int e^{ln\left(x^2+1\right)}\frac{dx}{x^2}=x\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=x^2-1$$

$$y=C_1x+C_2(x^2-1)$$

Враховуючи, що $y=1$ частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння, складемо систему y та y':

$$\begin{cases} y=C_1x+C_2\left(x^2-1\right)+1 \\ y'=C_1x+2C_2x \end{cases} \quad \begin{cases} y(1)=C_1+1 \\ y'(1)=C_1+2\cdot C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1=-2 \\ C_2=1 \end{cases}$$

Знаючи C_1 та C_2, частинний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння запишемо:

$$y=-2\cdot x+(x^2-1)+1=x^2-2\cdot x+1-1=(x-1)^2-1$$

Знайдемо значення частинного розв'язку при $x=21$

$$y(21)=(21-1)^2-1=399.$$

Відповідь: *399.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $(x-1)y''-xy'+y=0$, якщо відомо, що його частинний розв'язок $y_1=x$. Знайти частинний розв'язок при початкових умовах $y(0)=\alpha$, $y'(0)=2\alpha$ та обчислити його значення при $x=1$.

2. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $(1-ln\,x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, якщо відомо, що його частинний розв'язок $y_1=ln\,x$. Знайти частинний розв'язок при початкових умовах $y(1)=\alpha$, $y'(1)=2\alpha$ та обчислити його значення при $x=\alpha$.

3. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=2e^x(2x+1)^3$, знаючи, що функція $y_1=e^{-2x}$ є частинним розв'язком відповідного йому однорідного рівняння. Знайти частинний розв'язок при початкових умовах $y(0)=\alpha^2, y'(0)=2\alpha$ та обчислити його значення при $x=0$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $(x-1)y''-xy'+y=0$, якщо відомо, що його частинний розв'язок $y_1=x$. Знайти частинний розв'язок при початкових умовах $y(0)=1$, $y'(0)=2$ та обчислити його значення при $x=5$.

Розв'язання:

Дане рівняння – лінійне неоднорідне рівняння другого порядку. Зведемо його до виду $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$, в якому коефіцієнт при y'' дорівнює одиниці. Отримуємо

$$y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{y}{x-1}=0.$$

Тут коефіцієнт при y' - функція $p_1(x)=-\frac{x}{x-1}$. Обчислимо перш за все інтеграл $\int p_1(x)dx$.

$$\int p_1(x)dx=-\int(-\frac{x}{x-1})dx=\int\frac{x}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx=x+ln(x-1)$$

Довільну сталу вводити не треба тому, що вона об'єднується з довільною сталою, яка вводиться при побудові загального розв'язку.

$$y=y_1\int\frac{e^{-\int p_1dx}}{y_1^2}dx$$

$$e^{-\int p_1dx}=e^{x+ln(x-1)}=e^xe^{ln(x-1)}=e^x(x-1)\cdot$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = x\int \frac{e^x(x-1)}{x^2}dx = x\left[\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right] =$$

$$= x\left[\frac{1}{x}e^x + \int \frac{e^x}{x^2}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \dfrac{1}{x} & du = -\dfrac{1}{x^2}dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = x\frac{1}{x}e^x = e^x$$

$$y_2 = e^x.$$

Помножимо y_1 на C_1, а y_2 на C_2 і, додавши добутки, отримаємо розв'язок заданого рівняння.

$$y = C_1 x + C_2 e^x.$$

Щоб знайти частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам, тобто щоб розв'язати задачу Коші, треба початкові умови підставити в систему рівнянь, визначити з цієї системи довільні постійні і підставити їх значення в знайдений загальний розв'язок.

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 e^x \\ y' = C_1 + C_2 e^x \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = C_1 0 + C_2 e^0 \\ 2 = C_1 + C_2 e^0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

Шуканий частинний розв'язок буде

$$y = x + e^x.$$

Знайдемо значення частинного розв'язку при $x = 5$:

$$y(5) = 5 + e^5 = 151{,}1660.$$

Відповідь: *151,166.*

2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2$, знаючи, що частинним розв'язком відповідного йому однорідного рівняння є функція $y_1 = x^2$. Знайти частинний розв'язок при початкових умовах $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ та обчислити його значення при $x = 12$.

Розв'язання:

Перетворимо дане рівняння так, щоб коефіцієнт старшої похідної y'' дорівнював одиниці. Для цього обидві частини рівняння розділимо на x^2.

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1.$$

Тепер права частина рівняння $f(x) = x^2 - 1$. Відкинемо її і знайдемо загальний розв'язок рівняння

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

знаючи один частинний розв'язок його $y_1 = x^2$. Знайдемо другий частинний розв'язок:

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$$

$$p(x) = -\frac{4}{x}$$

$$-\int p(x)dx = \int\frac{4}{x}dx = 4\ln x = \ln x^4;$$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4$$

$$y_1 = x^2; \quad y_2 = x^2\int\frac{x^4}{x^4}dx = x^2x = x^3.$$

Таким чином

$$y_2 = x^3.$$

Загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$y = C_1x^2 + C_2x^3$$

Складемо систему, визначимо значення сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} y = C_1x^2 + C_2x^3 \\ y' = 2C_1x + 3C_2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = 2C_1 + 3C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = -2 \\ C_1 = 3 \end{cases}$$

Частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y = 3x^2 - 2x^3.$$

Для визначення частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння складемо визначник Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4;$$

$$\int\frac{y_1f(x)}{W}dx = \int\frac{x^2(x^2-1)}{x^4}dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)dx = x + \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W}dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4}dx = \int \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|;$$

$$y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)}{W}dx & \int \frac{y_2 f(x)}{W}dx \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \begin{vmatrix} x + \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} - \ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|$$

Склавши частинний розв’язок заданого неоднорідного рівняння з загального розв’язку відповідного йому однорідного, отримаємо загальний розв’язок заданого рівняння.

$$y = 3x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x| = 4x^2 - 2x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 \ln|x|$$

Знайдемо значення загального розв’язку при $x = 12$

$$y(12) = 4 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 + \frac{12^4}{2} + 12^2 \cdot \ln|12| = 7845{,}8265.$$

Відповідь: 7845,8265.

Практична робота 5. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод Лагранжа відшукання частинного розв’язку

1. Основні поняття та теореми

Рівняння виду:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x);$$

де

$$p_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)}, \; i = 1,2.... \quad f(x) = \frac{q(x)}{a_0(x)}$$

називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Функція $f(x)$ називається правою частиною рівняння. Якщо функція $f(x)$ дорівнює нулю, то рівняння називається лінійним рівнянням без правої частини (або однорідним).

Інакше рівняння називається лінійним рівнянням з правою частиною (або неоднорідним). Щоб знайти загальний розв'язок *неоднорідного диференціального рівняння* y, треба знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $\bar{y}$ і додати до нього один будь-який розв'язок y^* неоднорідного рівняння. Отже загальний розв'язок буде мати вид: $y = \bar{y} + y^*$.

Метод варіації сталих (інакше метод Лагранжа), дозволяє відшукувати частинні розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x).$$

Відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

має загальний розв'язок виду:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукається у вигляді:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ - невідомі функції, які треба визначити. y_1, y_2 – відомі часткові розв'язки однорідного рівняння.

Склавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = 0 \end{cases},$$

визначник якої не дорівнює нулеві, можемо спочатку знайти C_1' і C_2', а потім інтегруванням і самі функції C_1 і C_2. Якщо при інтегруванні довільних C_1' і C_2' ввести довільні сталі, то ми одразу отримаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, та обчислити його значення при $x = ln\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ та обчислити значення $e^{-x} \cdot y$ при $x = \alpha$.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2\alpha$, $y'(0) = 0$ та обчислити значення $e^{-x}y$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy'' - y' = x$, враховуючи, що функції 1 та x^2 утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння без правої частини. Обчислити $3y(x)$ при $x = \alpha$.

5. Знайти частинний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$ і обчислити його значення при $x = ln\alpha$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 8y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ та обчислити його значення при $x = ln2$.

Розв'язання:

$$y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння, взявши $y'' = k^2, y' = k$, $y = 1$.

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$
$$k_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$
$$k_1 = 4, k_2 = 2.$$

Частинні розв'язки запишуться: $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = e^{2x}$.

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x}$. Знайшовши похідну y', складемо систему і визначимо з неї C_1 і C_2, підставивши початкові умови.

$$\begin{cases} y = C_1e^{4x} + C_2e^{2x} \\ y' = 4C_1e^{4x} + 2C_2e^{2x} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = 4C_1 + 2C_2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Підставимо визначені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок.

Будемо мати:

$$y = -e^{4x} + 2e^{2x}.$$

Замість x підставимо $x = ln 2$. Отримаємо:

$y = -e^{4\ln 2} + 2e^{2\ln 2}$ або:

$y = -e^{ln 2^4} + 2e^{ln 2^2}$ звідки:

$y = -2^4 + 2 \cdot 2^2$

$y = -8$.

Відповідь: *-8.*

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ та обчислити значення $e^{-x} \cdot y$ при $x = 21$.

Розв'язання:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

Корені його будуть $k_1 = k_2 = 1$.

Загальний розв'язок має вид: $y = C_1e^x + C_2xe^x$.

Знайдемо похідну y'. Підставимо в y і y' значення початкових умов і складемо систему, з якої визначимо C_1 і C_2.

$$\begin{cases} y = C_1e^x + C_2xe^x \\ y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x \end{cases};$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 + 0 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Будемо мати:

$$y = e^x + x \cdot e^x;$$

$$y = e^x(1 + x).$$

Замість x підставимо значення $x = 21$, отримаємо:

$$e^{-x}y = 22.$$

Відповідь: *22.*

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 5y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 25$, $y'(0) = 0$ та обчислити значення $e^{-x}y$ при $x = 0$.

Розв'язання:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k + 5 = 0.$$

Оскільки дискримінант від'ємний, корені характеристичного рівняння будуть комплексні:

$$k_1 = 1 - 2i, \quad k_2 = 1 + 2i.$$

Отже, загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Знайдемо похідну y'. Підставимо в y і y' значення початкових умов і складемо систему, з якої визначимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x); \\ y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 = C_1; \\ 0 = C_1 + 2 \cdot C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 25; \\ C_2 = -\dfrac{25}{2}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок:

$$y = e^x\left(25 \cos 2x - \frac{25}{2} \sin 2x\right).$$

Обчислимо значення $e^{-x}y$ при $x = 0$:

$$e^{-x}y(x)\big|_{x=0} = 25.$$

Відповідь: *25*.

4. Знайти розв'язок рівняння $xy'' - y' = x$, враховуючи, що функції 1 та x^2 утворюють фундаментальну систему розв'язків цього рівняння без правої частини. Обчислити $3y(x)$ при $x = 17$.

Розв'язання:

Система розв'язків рівняння $xy'' - y' = x$ має вигляд:

$$\begin{cases} C_1' 1 + C_2' x^2 = 0; \\ C_1' 0 + C_2' 2x = x, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1' = -\dfrac{x^2}{2}; \\ C_2' = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{x^3}{6}; \\ C_2 = \dfrac{x}{2}, \end{cases}$$

$$y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x);$$

$$y = 1 \cdot \left(-\frac{x^3}{6} \right) + x^2 \left(\frac{x}{2} \right);$$

$$3y = x^3.$$

Обчислимо значення $3y(x)$ при $x = 17$:

$$3y(17) = 289.$$

Відповідь: *289.*

5. Знайти частинний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$ і обчислити його значення при $x = ln6$.

Розв'язання:

$2y'' + y' - y = 2e^x$

Складемо характеристичне рівняння:

$2k^2 + k - 1 = 0$;

$k^2 + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Корені характеристичного рівняння будуть:

$k_1 = -1, \quad k_2 = \frac{1}{2}$.

Загальний розв'язок буде мати вигляд:

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$.

Складемо фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{\frac{x}{2}} = 0; \\ -C_1' e^{-x} + \frac{1}{2} C_2' e^{\frac{x}{2}} = e^x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{2}{3} e^{2x}; \\ C_2' = \frac{2}{3} e^{\frac{x}{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{3} e^{2x}; \\ C_2 = \frac{4}{3} e^{\frac{x}{2}}. \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення C_1 та C_2 у загальний розв'язок:

$$y = -\frac{1}{3} e^{2x} \cdot e^{-x} + \frac{4}{3} \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

Після перетворювань маємо:

$$y = e^{x}.$$

Обчислимо значення частинного розв'язку коли $x = ln6$:

$$y = e^{ln6} = 6.$$

Відповідь: *6*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ та обчислити його значення при $x = ln\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2\alpha$ та обчислити значення $e^{-x}y$ при $x = \alpha$.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(\pi) = -2\alpha$, $y'(\pi) = -3$ та обчислити значення $e^{-x}y$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$ і обчислити його значення при $x = ln\alpha$.

5. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = x$ і обчислити його значення при $x = \alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ та обчислити його значення при $x = ln15$.

Розв'язання:

$y'' - 4y' + 3y = 0$

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 - 4 \cdot k + 3 = 0;$$

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3};$$

$$k_1 = 3, \qquad k_2 = 1.$$

Частинні розв'язки матимуть вид: $y_1 = e^{3x}$, $y_1 = e^x$, тоді загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$.

Знайдемо похідну y'. Підставимо в y і y' значення початкових умов і складемо систему, з якої визначимо C_1 і C_2.

$$\begin{cases} y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x; \\ y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} 6 = C_1 + C_2; \\ 10 = 3C_1 + C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо визначені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок та отримаємо частковий розв'язок:

$$y = 2e^{3x} + 4e^x.$$

Знайдемо значення y при $x = ln15$:

$y = 2e^{3ln15} + 4e^{ln15}$ виконавши відповідні перетворення одержимо значення функції:

$y = 2 \cdot e^{ln15^3} + 4 \cdot e^{ln15}$;

$y = 2 \cdot 15^3 + 4 \cdot 15$;

$y = 6765$.

Відповідь: *6765*.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ та обчислити значення $e^{-x} y$ при $x = 9$.

Розв'язання:

$y'' - 2y' + y = 0$.

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$k^2 - 2k + 1 = 0$.

Корені характеристичного рівняння: $k_1 = 1$, $k_2 = 1$.

Загальний розв'язок має вигляд $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

Знайдемо похідну y'. Підставимо в y і y' значення початкових умов і складемо систему, з якої визначимо C_1 і C_2:

$$\begin{cases} y = (C_1 + C_2 x)e^x; \\ y' = C_1 e^x + C_2(e^x + xe^x), \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = C_1; \\ 4 = C_1 + C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2; \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Підставимо визначені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок:

$$y = (2 + 2x)e^x;$$

$$y = (1 + x)2e^x.$$

Обчислимо значення $e^{-x}y$: $e^x y = 2(1 + x)$.

Обчислимо значення $e^{-x}y$ при $x = 9$:

$e^{-x}y(9) = 2(1 + 9) = 20$.

Відповідь: *20*.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(\pi) = -2$, $y'(\pi) = -3$ та обчислити значення $e^{-x}y$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання:

$y'' - 2y' + 2y = 0$.

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$k^2 - 2k + 2 = 0$.

Оскільки дискримінант від'ємний, корені характеристичного рівняння будуть комплексні:

$k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$.

Загальний розв'язок має вигляд:

$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$.

Знайдемо похідну y'. Підставимо в y і y' значення початкових умов і складемо систему, з якої визначимо C_1 і C_2.

$$\begin{cases} y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x; \\ y' = C_1(e^x \cos x - e^x \sin x) + C_2(e^x \sin x + e^x \cos x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = -C_1 e^{\pi}; \\ -3 = C_1 e^{\pi} - C_2 e^{\pi}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2 \cdot e^{-\pi}; \\ C_2 = e^{-\pi}. \end{cases}$$

Знайдені значення C_1 і C_2 підставимо у загальний розв'язок:

$$y = 2e^{-\pi} e^x \cos x + e^{-\pi} e^x \sin x;$$

$$y = 2e^{x-\pi} \cos x + e^{x-\pi} \sin x;$$

$$y = e^{x-\pi}(2\cos x + \sin x);$$

$$y = \frac{e^x(2 \cdot \cos x + \sin x)}{e^{\pi}}.$$

Обчислимо значення $e^{-x}y$ при $x=\frac{\pi}{2}$:

$$ye^{-x}=\frac{2\cos x+\sin x}{e^{\pi}};$$

$$ye^{-x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{e^{\pi}}=\frac{1}{22,9199}=0,0436.$$

Відповідь: *0,0436*.

4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''-3y'+2y=e^{x}$ і обчислити його значення при $x=ln12$.

Розв'язання:

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2-3k+2=0.$$

Корені характеристичного рівняння: $k_1=1$, $k_2=2$.

Загальний розв'язок має вигляд: $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$.

Складемо фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases}C_1'e^{x}+C_2'e^{2x}=0;\\ C_1'e^{x}+2C_2'e^{2x}=e^{x};\end{cases}\quad \begin{cases}C_1'=-2;\\ C_2'=e^{-x};\end{cases}\quad \begin{cases}C_1=-2;\\ C_2=-e^{-x}.\end{cases}$$

Частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y=-2e^{x}-e^{-x}e^{2x};$$

$$y=-3e^{x}.$$

Обчислимо значення частинного розв'язку при $x=ln12$:

$y(ln12)=-3e^{ln12}=-3\cdot 12=-36$.

Відповідь: *36*.

5. Знайти частинний розв'язок рівняння $y''+4y'+4y=x$ і обчислити його значення при $x=12$.

Розв'язання:

Складемо відповідне характеристичне рівняння:

$k^2+4k+4=0$.

Корені характеристичного рівняння будуть:

$k_1=k_2=-2$.

Складемо фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases} 0 = e^{-2x}(C_1' + C_2'x); \\ x = C_2'e^{-2x} - 2e^{-2x}(C_1' + C_2'x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -x^2e^{2x}; \\ C_2' = xe^{2x}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = e^{2x}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right); \\ C_2 = e^{2x}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right). \end{cases}$$

Частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)xe^{-2x};$$

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4};$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Обчислимо значення частинного розв'язку при $x = 12$:

$$y(12) = \frac{12^2 - 1}{2} = 71,5.$$

Відповідь: *71,5*.

Практична робота 6. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною

1. Основні поняття та теореми

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами p і q має вид:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Якщо k_1 і k_2 – корені характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0,$$

то загальний розв'язок однорідного рівняння може бути представленим одним із таких трьох видів:

1. $y = c_1 e^{kx_1} + c_2 e^{k_2 x}$, якщо k_1 і k_2 - дійсні і $k_1 \neq k_2$;

2. $y = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$, якщо $k_1 = k_2$;

3. $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$, якщо k_1 і k_2- комплексні: $k_1 = \alpha \pm \beta i$.

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ можна записати у вигляді суми: $y = y_0 + y_1$,
де
y_0 - загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння і
y_1 - частковий розв’язок даного неоднорідного рівняння.

Функцію y_1 знаходять за методом невизначених коефіцієнтів.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 2y = 2x$ та обчислити його значення при $x = \alpha$.

2. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$ та обчислити значення $e^{-x}y(x)$ при $x = \alpha$.

3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' + 6y' + 2y = 2e^{-3x}$ та обчислити значення $e^{3x}y(x)$ при $x = \alpha$.

4. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + \alpha \sin 2x)$ та обчислити його значення при $x = 0$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 5y' = 7$, та обчислити його значення при $x = 5$.

Розв’язання:

Відповідне однорідне рівняння має вигляд:

$$y'' - 5y' = 0.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k = 0.$$

Його корені: $k_1 = 0$; $k_2 = 5$. Частковими розв’язками рівняння будуть:

$$y_1 = 1, y_2 = e^{5x}.$$

Загальний розв'язок заданого рівняння буде мати вид: $y=C_1+C_2e^{5x}$.

Порівняємо праву частину рівняння з еталонною функцією порівняння $f(x)=e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right)$.

Права частина рівняння не містить ні множника $e^{\alpha x}$ ні тригонометричних функцій, отже, $\alpha=0$ та $\beta=0$. Тому число $\alpha+\beta i=0$. Воно співпадає з одним із коренів характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння будемо шукати у вигляді: $y=x^k e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x\right)$, в якому слід взяти $k=1;\alpha=0$; $\beta=0$, а многочлени $p(x)$ та $q(x)$ повинні бути того ж степеня, що й многочлен у правій частині заданого рівняння, тобто нульового. Таким чином частинній розв'язок матиме вид: $y=Ax$.

$$\begin{array}{r|ll} 0 & y=Ax & \\ -5 & y'=A & \\ 1 & y''=0 & \\ \hline & 7=-5A & \qquad A=-\dfrac{7}{5} \end{array}$$

Підставимо знайдене значення A у частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння. Таким чином цей розв'язок буде: $y=-\dfrac{7}{5}x$.

Обчислимо його значення при $x=5$:

$y(5)=-\dfrac{7}{5}\cdot 5=-7$.

Відповідь: – *7.*

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''+2y'+5y=-\dfrac{17}{2}\cos 2x$ та обчислити його значення при $x=0$.

Розв'язання:

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y''+2y'+5y=0.$$

Складемо його характеристичне рівняння: $k^2+2k+5=0$, корені якого: $k_1=-1+2i$, $k_2=-1-2i$.

Порівняємо праву частину заданого рівняння з загальним видом. Права частина не містить множника $e^{\alpha x}$, але містить тригонометричну функцію $cos\,2x$. Звідси слідує, що $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Складемо число $\alpha + \beta i = 0 + 2i = 2i$, яке не співпадає з жодним коренем характеристичного рівняння. Таким чином розв'язок диференціального рівняння будемо шукати у вигляді: $y = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x \right)$, в якому слід узяти $\alpha = 0$ та $\beta = 2$, а многочлени з невизначеними коефіцієнтами $p(x)$ та $q(x)$ повинні бути того ж степеня, що й многочлен у правій частині, тобто нульового. Таким чином: $y = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Визначимо числові коефіцієнти A та B:

$$
\begin{array}{l|l}
5 & y = A\cos 2x + B\sin 2x \\
2 & y'' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\
1 & y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \\
\hline
\end{array}
$$

$$-\frac{17}{2}\cos 2x = 5A\cos 2x + 5B\sin 2x - 4A\sin 2x +$$

$$+4B\cos 2x - 4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$-\frac{17}{2}\cos 2x = \cos 2x(A + 4B) + \sin 2x(B - 4A);$$

$$\begin{cases} -\dfrac{17}{2} = -\dfrac{17}{2} = A + 4B; \\ 0 = B - 4A; \end{cases} \to \begin{cases} -\dfrac{17}{2} = A + 4B; \\ 4A = B; \end{cases} \to -\begin{cases} \dfrac{17}{2} = 17A; \\ 4A = B; \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2}; \\ B = -2. \end{cases}$$

Підставимо A і B у вираз для y:

$$y = -\frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$$

Знайдемо значення частинного розв'язку y при $x = 0$:

$$y = -\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-0,5$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$, та обчислити його значення при $x = 0$.

Розв'язання:

$y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

Запишемо однорідне рівняння: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0$, корені якого $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Порівняємо праву частину заданого рівняння з еталонною правою частиною. Права частина рівняння містить множник $e^{\alpha x}$ та не містить тригонометричних функцій. Звідси слідує, що $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Складемо число $\alpha + \beta i = -1 + 0i = -1$. Число не співпадає з жодним з коренів характеристичного рівняння. Таким чином розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = Ae^{\alpha x}$, в якому слід взяти $\alpha = -1$ та $\beta = 0$, а многочлен $p(x)$ повинен бути нульового степеня, як і многочлен у правій частині рівняння. Таким чином: $y = Ae^{-x}$.

Визначимо числовий коефіцієнт A:

$$\begin{array}{r|l} 2 & y = Ae^{x} \\ -3 & y' = -Ae^{x} \\ 1 & y'' = Ae^{x} \\ \hline & 10 \cdot e^{-x} = 2A \cdot e^{-x} + 3A \cdot e^{-x} + A \cdot e^{-x} \end{array}$$

$$10 = 6A \qquad A = \frac{5}{3}$$

Підставимо значення A у вираз y розв'язок та отримаємо: $y = \dfrac{5}{3}e^{-x}$.

Знайдемо значення розв'язку при $x = 0$: $y = \dfrac{5}{3}$.

Відповідь: *1,667*.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$ та обчислити його значення при $x = 0$.

Розв'язання:

Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 3k + 2 = 0$, корені якого: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Порівняємо праву частину заданого рівняння з еталонною правою частиною. Права частина рівняння не містить множника $e^{\alpha x}$, але містить тригонометричну функцію $\sin x$. Звідси слідує, що $\alpha=0$, $\beta=1$. Складемо число $\alpha+\beta i=0+1i=i$. Число не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Отже, частинний розв'язок диференціального рівняння будемо шукати при $\alpha=0$, $\beta=1$, а многочлени $p(x)$ та $q(x)$ повинні бути нульового степеня як і в правій частині заданого рівняння. Таким чином: $y=A\cos x+B\sin x$.

Визначимо числові коефіцієнти A та B.

$$\begin{array}{l|l} 2 & y=A\cos x+B\sin x \\ -3 & y'=-A\sin x+B\cos x \\ 1 & y''=-A\cos x-B\sin x \\ \hline & 2\sin x=2A\cos x+2B\sin x+3A\sin x-3B\cos x-A\cos x-B\sin x \end{array}$$

$$2\sin x=(A-3B)\cos x+(B+3A)\sin x;$$

$$\begin{cases} 2=B+3A; \\ 0=A-3B; \end{cases} \to \begin{cases} 2=B+3A; \\ 3B=A; \end{cases} \to \begin{cases} B=\dfrac{1}{5}; \\ A=\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Підставимо A і B у вираз для частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння та одержимо:

$$y=\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Знайдемо значення частинного розв'язку y при $x=0$:

$$y=\frac{3}{5}.$$

Відповідь: *0,6.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-6y'+3y=2x^2-x+3$ та обчислити його значення при $x=\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-3y'+2y=3e^{2x}$ та обчислити значення $e^{-2x}y(x)$ при $x=\alpha$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2y''+5y'=5x^2-2x-1$ та обчислити його значення при $x=\alpha$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''+y'-6y=xe^{2x}$ та обчислити його значення $e^{-2x}y(x)$ при $x=\alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$ та обчислити його значення при $x = 17$.

Розв'язання:

Складемо однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку, а потім складемо характеристичне:

$$y'' - 3y' + 2y = 0;$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0\cdot$$

Корені його будуть: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\cdot$$

Визначимо частинний розв'язок заданого неоднорідного диференціального рівняння.

Порівнюючи праву частину рівняння з стандартною правою частиною

$$f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x),$$

маємо, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, число $\alpha + \beta i = 0$ та не співпадає з коренями характеристичного рівняння. Таким чином частинний розв'язок будемо шукати у вигляді $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

$$\begin{array}{r|l}
2 & y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\
-3 & y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \\
1 & y'' = 6Ax + 2B \\
\hline
 & 2x^3 - 30 = 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + 6Ax + 2B;
\end{array}$$

$$2x^3 - 30 = 2Ax^3 + x^2(2B - 9A) + x(2C - 6B + 6A) + 2D - 3C + 2B;$$

$$\begin{cases} -2 = 2A; \\ 0 = 2B - 9A; \\ 0 = 2C - 6B + 6A; \\ -30 = 2D - 3C + 2B; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = 9/2; \\ C = 21/2; \\ D = -15/4. \end{cases}$$

Підставимо знайдені значення коефіцієнтів A,B,C,D у визначення частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}.$$

Знайдемо значення частинного розв'язку у при $x = 17$:

$$y(17) = 17^3 + \frac{9}{2}\cdot 17^2 + \frac{21}{2}\cdot 17 - \frac{15}{4};$$

$$y(17) = 6388,25.$$

Відповідь: *6388,25*.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 4y = (x+2)e^{3x}$, та обчислити значення $e^{-3x}y(x)$ при $x = -27$.

Розв'язання:

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $y'' - 2y' + 4y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 4 = 0$ має корені:

$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_0 = e^x\left(C_1 \cos\sqrt{3}x + C_2 \sin\sqrt{3}x\right).$$

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, порівнявши його праву частину з стандартним видом $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$.

Робимо висновок, що $\alpha = 3$, $\beta = 0$. Многочлен $p(x)$ має перший степінь. Число $\alpha + \beta i = 3$. Воно не співпадає з коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y = e^{3x}(Ax + B).$$

$$\begin{array}{l|l} 4 & y = e^{3x}(Ax + B) \\ -2 & y'' = e^{3x}(3Ax + A + 3B) \\ 1 & y'' = e^{3x}(9Ax + 6A + 9B) \\ \hline & \end{array}$$

$(x+2)e^{3x} = e^{3x}(7Ax+4A+7B)$.

Скоротивши на e^{3x} та порівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо

$$\begin{cases} 1 = 7A; \\ 2 = 4A + 7B; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{7}; \\ B = \dfrac{10}{49}. \end{cases}$$

Тому частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння буде:

$$y = e^{3x}\left(\frac{1}{7}x + \frac{10}{49}\right).$$

Обчислимо значення $e^{-3x}y(x)$ при $x = 27$:

$$y(27)e^{-81} = \frac{1}{7}27 + \frac{10}{49};$$

$$y(27)e^{-81} = 20{,}2040.$$

Відповідь: *20,204*.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 7y' + 6y = \sin x$, та обчислити його значення при $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Розв'язання:

Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$ має корені:

$$k_1 = 1, k_2 = 6.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_0 = c_1e^x + c_2e^{6x}.$$

Відшукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, порівнюючи праву частину з стандартним видом.

Робимо висновок, що $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Число $\alpha + \beta i = i$. Воно не є коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

$$
\begin{array}{l|l}
6 & y = A\cos x + B\sin x \\
-7 & y'' = -A\sin x + B\cos x \\
1 & y'' = -A\cos x - B\sin x \\
\hline
 & \sin x = 6(A\cos x + B\sin x) - 7(-A\sin x + B\cos x) - A\cos x - B\sin x;
\end{array}
$$

$\sin x = 6A\cos x + 6B\sin x + 7A\sin x - 7B\cos x - A\cos x - B\sin x;$

$\sin x = \cos x(6A - 7B - A) + \sin x(6B + 7A - B);$

$$
\begin{cases} 1 = 5B + 7A; \\ 0 = 5A - 7B; \end{cases} \to \begin{cases} A = \dfrac{7}{74}; \\ B = \dfrac{5}{74}. \end{cases}
$$

Знаючи коефіцієнти A і B частинний розв’язок запишемо:

$$y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

Визначимо значення частинного розв’язку при $x = \dfrac{\pi}{6}$:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{74}\cos\frac{\pi}{6} + \frac{5}{74}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{7}{74}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{74}\frac{1}{2} = 0{,}1157.$$

Відповідь: $0{,}1157$.

РОЗДІЛ 5
ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Практична робота 1. Числові ряди з додатними членами. Необхідна умова збіжності ряду. Достатні ознаки збіжності ряду

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. *Числовим рядом* (рядом) називається вираз виду

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (1)$$

де $u_1, u_2, \ldots, u_n$ - дійсні чи комплексні числа, що називаються членами ряду: u_1 – перший член ряду, u_2 – другий член ряду, ... u_n - n - ний (загальний член) ряду.

Ряд вважається заданим, якщо відомий n - ний член ряду u_n, виражений як функція його номера n, тобто $u_n = f(n)$.

Якщо в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ всі члени невід'ємні, тобто $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ то такий ряд називається *знакододатним*.

Означення 2. *Сума скінченого* числа *n* перших членів ряду називається частинною сумою ряду, і позначають її так

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i . \qquad (2)$$

Означення 3 (означення збіжності ряду).

Якщо існує скінчена границя послідовності частинних сум ряду

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S , \qquad (3)$$

то вона називається сумою ряду, і *ряд називається збіжним*. Якщо границя $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд називається розбіжним.

Означення 4. Ряд виду

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1} \qquad (4)$$

називається геометричною прогресією. Число $u_1 \neq 0$ називається першим членом, а число q – знаменником геометричної прогресії. Геометрична прогресія (4) збіжна при $|q| < 1$ і має суму

$$S = \frac{u_1}{1 - q} \tag{5}$$

і розбіжна при $|q| \geq 1$.

Означення 5. Числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{6}$$

називається узагальненим *гармонійним*, або *рядом Діріхле*.

Ряд (6) є збіжним при $p > 1$ і розбіжним при $p \leq 1$. При $p = 1$ ряд (6) перетворюється на гармонійний ряд.

Означення 6. Ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{7}$$

називається *гармонійним рядом*.

Теорема 1. Гармонійний ряд є розбіжним.

Теорема 2 (необхідна умова збіжності ряду).

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Наслідок (достатня ознака розбіжності ряду).

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$ або не існує, то ряд розбігається.

Теорема 3 (ознака порівняння).

Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні та $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ є збіжним, то збіжним є і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжним буде і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Теорема 4 (гранична ознака порівняння).

Якщо задано знакододатні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \neq 0$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = k$ $(0 < k < \infty)$ існує і не дорівнює 0, то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Теорема 5 (ознака Д'Аламбера).

Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, то при $\ell < 1$ ряд збіжний, при $\ell > 1$ ряд розбіжний, при $\ell = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим (ряд може збігатися, може й розбігатися).

Теорема 6 (радикальна ознака Коші).

Якщо для ряду з додатними членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, то при $\ell < 1$ ряд збіжний, при $\ell > 1$ ряд розбіжний, при $\ell = 1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим (ряд може збігатися, може й розбігатися).

Теорема 7 (інтегральна ознака Коші).

Нехай функція $f(x)$, визначена на проміжку $\left[1; +\infty\right)$, є додатною та незростаючою на цьому проміжку. Тоді невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збіжний (розбіжний) одночасно із знакододатним числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots .$$

Означення 7. Величина $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ називається n-ним залишком ряду, тобто це сума ряду, який утворюється із заданого ряду після відкидання перших n його членів $u_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти суму $\alpha + 5$ перших членів ряду

$$\frac{\alpha}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{\alpha}{n(n+1)} + \ldots .$$

2. Знайти суму ряду

$$\alpha + \alpha \frac{1}{2} + \alpha \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \ldots + \alpha \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + \ldots .$$

3. Знайти відношення наступного члена ряду

$$\frac{1 \cdot \alpha}{2} + \frac{2 \cdot \alpha}{2^2} + \frac{3 \cdot \alpha}{2^3} + \ldots + \frac{n \cdot \alpha}{2^n} + \ldots$$

до попереднього та обчислити його значення при $n = \alpha + 5$.

4. Знайти $\sqrt[n]{a_n}$ для числового ряду

$$\frac{1}{2 + \alpha} + \frac{4}{(4 + \alpha)^2} + \frac{27}{(6 + \alpha)^3} + \ldots + \left(\frac{n}{2n + \alpha} \right)^n + \ldots .$$

5. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність числовий ряд

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{9} + \ldots + \frac{\alpha}{n^2} + \ldots .$$

Обчислити значення $\int_0^{\alpha} f(x) dx$, де $f(x) = a_n, n = 1, 2, \ldots$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти суму перших десяти членів ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots .$$

Розв'язання:

Розглянемо послідовність частинних сум ряду

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Оскільки

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \; n = 1, 2, \ldots,$$

то

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отже, сума перших десяти членів ряду

$$S_n = 1 - \frac{1}{10+1} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \approx 0,909.$$

Відповідь: *0,909*.

2. Знайти суму ряду

$$13 + 13 \cdot \frac{1}{2} + 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots.$$

Розв'язання:

Оскільки

$$13 + 13 \cdot \frac{1}{2} + 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + 13 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots =$$

$$= 13 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots\right),$$

то у дужках ми маємо геометричну прогресію (4) з першим членом $u_n = 1$ і знаменником геометричної прогресії $q = \frac{1}{2}$.

Оскільки $|q| < 1$, то геометрична прогресія збіжна і згідно (5) дістанемо суму ряду $S = 13 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 13 \cdot 2 = 26$.

Відповідь: *26*.

3. Знайти відношення наступного члена ряду

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$$

до попереднього та обчислити його значення при $n=50$.

Розв'язання:

Оскільки

$$u_n=\frac{n}{3^n}, \text{ а } u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}},$$

то отримаємо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{3n}.$$

Тоді при $n=50$

$$\frac{u_{51}}{u_{50}}=\frac{50+1}{3\cdot 50}=\frac{51}{150}=0,34.$$

Відповідь: *0,34*.

4. Знайти $\sqrt[n]{a_n}$ для числового ряду

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{27}{100}+\ldots+\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n+\ldots$$

та обчислити його значення при $n=5$.

Розв'язання:

Оскільки

$$a_n=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n,$$

то

$$\sqrt[n]{a_n}=a_n^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{n}{3n+1}.$$

При $n=5$ дістанемо

$$\sqrt[5]{a_5}=\frac{5}{3\cdot 5+1}=\frac{5}{16}=0,3125.$$

Відповідь: *0,3125*.

5. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність числовий ряд

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots .$$

Обчислити $\int_0^5 f(x)dx$, де $f(n)=a_n$, $n=1,2,\ldots$

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

Оскільки функція $f(x)$ визначена на проміжку $\left[1;+\infty\right)$, додатна та монотонно спадна на цьому проміжку, то згідно з інтегральною ознакою Коші (теорема 7) отримаємо

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^2}+\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, тому за теоремою 7 заданий ряд теж збіжний.

Обчислимо

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_1^5\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^5=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{1^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-1\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-25}{25}=\frac{24}{2\cdot 25}=\frac{12}{25}=0{,}48.$$

Відповідь: *0,48.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. За допомогою означення збіжності ряду дослідити на збіжність числовий ряд

$$\frac{\alpha}{1\cdot 4}+\frac{\alpha}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{\alpha}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$$

та обчислити суму $\alpha+10$ перших членів ряду.

2. За допомогою ознаки Д'Аламбера дослідити на збіжність ряд

$$\sin\frac{\pi}{\alpha+1}+4\cdot\sin\frac{\pi}{(\alpha+1)^2}+\ldots+n^2\cdot\sin\frac{\pi}{(\alpha+1)^n}+\ldots,$$

обчисливши значення

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

3. За допомогою узагальненого гармонійного ряду (v_n) та граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{4\alpha+1}+\frac{1}{9\alpha+1}+\ldots+\frac{1}{n^2\alpha+1}+\ldots,$$

обчисливши значення

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}.$$

4. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{\alpha^n},$$

обчисливши значення

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}.$$

5. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)\ln^2(n+\alpha)},$$

обчисливши значення

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \text{ де } f(n)=a_n, \quad n=1,2,3,\dots .$$

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. За допомогою означення збіжності ряду дослідити на збіжність числовий ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\dots$$

та обчислити суму 5 перших членів ряду.

Розв'язання:

Для того щоб знайти n–ну частинну суму ряду, подамо загальний член $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ у вигляді суми двох елементарних раціональних дробів. Для цього скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Отримаємо

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1},$$

де A і B – невизначені коефіцієнти. Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники (знаменники будуть тотожно рівні):

$$1=A(2n+1)+B(2n-1).$$

Ця рівність справджується тоді і лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях n рівні.

Отже,

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Тоді

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Враховуючи дану рівність, знаходимо

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Згідно (3)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S = \frac{1}{2}$.

Обчислимо суму 5 перших членів ряду

$$S_5 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\cdot 5+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{11-1}{11}\right) = \frac{10}{2\cdot 11} = \frac{5}{11} \approx 0{,}454.$$

Відповідь: *0,454*.

2. За допомогою ознаки Д'Аламбера дослідити на збіжність ряд

$$\sin\frac{\pi}{10} + 2^2 \sin\frac{\pi}{10^2} + \ldots + n^2 \sin\frac{\pi}{10^n} + \ldots,$$

обчисливши значення

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Розв'язання:

Оскільки $u_n = n^2 \sin\frac{\pi}{10^n}$ і $u_{n+1} = (n+1)^2 \sin\frac{\pi}{10^{n+1}}$, то застосувавши ознаку Д'Аламбера (теорема 5), отримаємо

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\sin\frac{\pi}{10^{n+1}}}{n^2\sin\frac{\pi}{10^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{10^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{10^n}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{10^{n+1}}}{\frac{\pi}{10^{n+1}}}\cdot\frac{\pi}{10^{n+1}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{10^n}}{\frac{\pi}{10^n}}\cdot\frac{\pi}{10^n}} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(\lim_{n\leftarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2 \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{10^{n+1}}}{\frac{\pi}{10^{n+1}}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{10^n}}{\frac{\pi}{10^n}}} = \frac{1}{10}.$$

Оскільки $\ell = \frac{1}{10} < 1$, то заданий ряд збіжний.

Відповідь: *0,1*.

3. За допомогою узагальненого гармонійного ряду $\{v_n\}$ та граничної ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряд $\{u_n\}$.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{82}+\ldots+\frac{1}{3n^3+1}+\ldots,$$

обчисливши значення

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}.$$

Розв'язання:

Розглянемо як еталонний ряд узагальнений гармонійний ряд (6) при $p=3$, тобто ряд $\{v_n\}$ виду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots,$$

який є збіжним.

Тоді, згідно з граничною ознакою порівняння рядів (теорема 4), отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^3+1}{n^3}=3\neq 0\,.$$

Оскільки отримали скінчену ненульову границю, то обидва ряди мають однакову збіжність, тому заданий ряд також збіжний.

Відповідь: *3*.

4. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n},$$

обчисливши значення

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}\,.$$

Розв'язання:

Загальний член ряду має вигляд $u_n=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n}$, тоді застосувавши радикальну ознаку Коші (теорема 6), отримаємо

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}u_n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{100}=\frac{1}{100}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{100}\cdot e=\frac{e}{100}\approx 0{,}027<1\,.$$

Оскільки $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, то за радикальною ознакою Коші ряд збіжний.

Відповідь: *0,027*.

5. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+100)\,ln^3(n+100)},$$

обчисливши значення

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx, \text{ де } f(n) = a_n, \quad n = 1,2,3,\dots.$$

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{(x+100)\,ln^3(x+100)}$.

Ця функція задовольняє умови інтегральної ознаки Коші (теорема 7), тому що вона визначена, монотонно спадна і додатна на проміжку $\left[1; +\infty\right)$. Знайдемо невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+100)\,ln^3(x+100)} = \lim_{n\to\infty} \int_1^{+\infty} \frac{d\left(ln(x+100)\right)}{ln^3(x+100)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,ln^2(x+100)} \right]\Bigg|_1^b = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,ln^2(b+100)} + \frac{1}{2\,ln^2 101} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\,ln^2 101} \approx 0,0469.$$

Оскільки невласний інтеграл збіжний, то і заданий ряд також збіжний.

Відповідь: *0,0469*.

Практична робота 2. Знакозмінні числові ряди. Абсолютна та умовна збіжність ряду

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Числовий ряд, члени якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називається *знакозмінним*.

До знакозмінних належать і ряди виду

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n , \qquad (1)$$

де $u_n > 0$, $n = 1,2,\ldots,$ в яких знаки членів строго чергуються. Такі ряди називаються знакопочережними.

Теорема 1 (достатня ознака Лейбніца збіжності знакопочережного ряду).

Знакозмінний ряд (1) збіжний, якщо

$$u_{n+1} < u_n , \ \ n = 1,2,\ldots . \qquad (2)$$

та

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 .$$

Означення 2. Ряд, для якого виконуються умови ознаки Лейбніца, називається рядом лейбніцового типу.

Наприклад, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} . \qquad (3)$$

Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми S ряду лейбніцового типу (3) будь-якою його частинною сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S - S_n| \le u_{n+1} , \ \ n = 1,2,\ldots,.$$

Оскільки $|S - S_n| = |r_n|$, то модуль n-ного залишку r_n ряду лейбніцового типу (1) не перевищує модуля $(n+1)$-го члена цього ряду, тобто

$$\left|r_n\right| \le u_{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots,. \qquad (4)$$

Теорема 2.

Якщо ряд, складений з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду збіжний, то збіжним є і заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Означення 3. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n\right|$, складений з абсолютних величин його членів, є збіжним.

Означення 4. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n\right|$, складений з абсолютних величин його членів, розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається умовно збіжним (не абсолютно збіжним).

Наприклад, знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ умовно збіжний.

Для дослідження абсолютної збіжності знакозмінного ряду можна використовувати всі достатні умови збіжності знакододатних рядів.

Властивості абсолютно та умовно збіжних рядів

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ абсолютно збіжний, то абсолютно збіжним є також і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$, де C - $const$.

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні, то абсолютно збіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$.

3. Правило Коші.

Добутком двох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

де u_n, v_n – числа, називається третій ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, загальний член якого має вигляд

$$c_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1. \quad (5)$$

Тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (6)$$

Примітка.

1. Формула (6) виконується тоді, коли один із рядів збіжний, а другий абсолютно збіжний, або коли всі три ряди збіжні.

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ абсолютно збіжні і мають суми відповідно S_1 і S_2, то ряд (6) також абсолютно збіжний і має суму $S = S_1 \cdot S_2$.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Оцінити $(\alpha + 5)$-й залишок умовно збіжного знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\alpha}{n}$, обчисливши абсолютну величину першого відкинутого члена.

2. Оцінити $(\alpha+5)$-й залишок абсолютно збіжного знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\alpha^2}{n^2}$, обчисливши абсолютну величину першого відкинутого члена.

3. Оцінити $(\alpha+5)$-й залишок знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^2}{n^2}$, обчисливши $\int_{a+5}^{+\infty} f(x)dx$, де $f(n)=a_n$, $n=1,2,\ldots,$.

4. При якому значенні числа b різниця розбіжних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha n}{n^2+1}$ буде рядом збіжним?

5. Знайти другий член ряду добутку рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)^{-n}}{n(n+1)} \text{ та } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+1)^n} \quad \text{(за Коші).}$$

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Оцінити 5-й (r_5) залишок умовно збіжного знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}$, обчисливши абсолютну величину першого відкинутого члена.

Розв'язання:

Доведемо, що заданий ряд умовно збіжний.

Оскільки

$$u_n=\frac{1}{3n}, \quad u_{n+1}=\frac{1}{3(n+1)}, \text{ то } u_{n+1}<u_n .$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(n+1)}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

отже, заданий ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца (2). Дослідимо заданий ряд на абсолютну збіжність.

Розглянемо ряд складений з абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right),$$

який є добутком числа $\frac{1}{3}$ на гармонійний ряд.

Оскільки гармонійний ряд розбіжний, то і ряд, складеній з абсолютних величин його членів, також буде розбіжним. Отже, заданий ряд буде умовно збіжний і за наслідком з ознаки Лейбніца (4) отримаємо, що

$$|r_5|\le u_{5+1},\quad \text{де } u_{5+1}=\left|\frac{(-1)^{5+1+1}}{3(5+1)}\right|=\frac{1}{18}\approx 0{,}056.$$

Відповідь: *0,056*.

2. Оцінити 5-й залишок (r_5) абсолютно збіжного знакопочережного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$, обчисливши абсолютну величину першого відкинутого члена.

Розв'язання:

Доведемо, що заданий ряд абсолютно збіжний.

Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots.$$

Оскільки одержаний ряд є узагальненим гармонійним рядом при $p=3$ і є рядом збіжним, то і заданий ряд абсолютно збіжний.

Використовуючи наслідок із ознаки Лейбніца (4), оцінимо 5-й залишок заданого ряду, тобто

$$|r_5| \le u_{5+1} = \left| \frac{(-1)^{5+1+1}}{(5+1)^3} \right| = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0{,}005.$$

Відповідь: *0,005*.

3. Оцінити 5-й залишок (r_5) знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, обчисливши $\int\limits_5^{+\infty} f(x)dx$, де $f(n) = a_n$, $n = 1,2,\ldots,$.

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^4}$, що визначена на проміжку $[5;+\infty)$. Вона є додатна та монотонно спадна на цьому проміжку, тобто задовольняє умови інтегральної ознаки Коші.

Обчислимо невласний інтеграл

$$\int\limits_5^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \int\limits_5^{+\infty} x^{-4}dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_5^{b} x^{-4}dx =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{3x^3} \right) \Bigg|_5^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \leftarrow \infty} \left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} \right) = \frac{1}{3 \cdot 5^3} = \frac{1}{375} \approx 0{,}002667..$$

Оскільки невласний інтеграл $\int\limits_5^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, то і заданий ряд збіжний.

Відповідь: *0,002667*.

4. При якому значенні числа b різниця розбіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b}{3n}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{n^2+1}$ буде рядом збіжним?

Розв'язання:

Використовуючи властивості рядів, одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{3n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{3n} - \frac{6n}{n^2+1} \right) =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b\cdot n^2+b-18\cdot n^2}{3n(n^2+1)}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b\cdot n^2-18\cdot n^2+b}{n\left(n^2+1\right)}\right)\Rightarrow$$

$$b\cdot n^2-18\cdot n^2=0,\quad n^2(b-18)=0;\quad b=18.$$

Отже, при значенні $b=18$, різниця заданих рядів дорівнює ряду

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{n^3+n}=\frac{b}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n},$$

який є рядом збіжним.

Відповідь: *18*.

5. Знайти другий член ряду добутку рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n}}{n(n+1)} \text{ та } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n} \text{ (за Коші).}$$

Розв'язання:

Оскільки задані ряди можна переписати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{-n}}{n(n+1)}=\frac{5^{-1}}{1\cdot 2}+\frac{5^{-2}}{2\cdot 3}+\frac{5^{-3}}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{5^{-n}}{n(n+1)}+\ldots$$

та

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1}{5^0}+\frac{1}{5^1}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots,$$

то, використовуючи правило добутку Коші (6), одержимо

$$c_2=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_0=\frac{5^{-1}}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{5^1}+\frac{5^{-2}}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{5^0}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{6\cdot 5^2}=\frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{5^2\cdot 6}=\frac{2}{5^2\cdot 3}=\frac{2}{75}\approx 0{,}027.$$

Відповідь: *0,027*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+\alpha)^2}$ абсолютно збіжний та обчислити $\int_1^{\infty} f(x)dx$, де $f(n)=a_n$, $n=1,2,\ldots,$.

2. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\alpha^n}$ абсолютно збіжний та обчислити $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

3. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+\alpha)}$ умовно збіжний та обчислити 5 - й залишок (r_5) першого відкинутого члена.

4. Записати різницю рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{n-1}} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+1)^{n-1}}$$

та обчислити суму отриманого ряду.

5. Обчислити суму перших трьох членів $(c_1+c_2+c_3)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty}c_n-$ добутку рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\alpha^n}{(n+1)!} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n n!}{n^n}.$$

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(5n-1)^2}=\frac{1}{4^2}-\frac{1}{9^2}+\frac{1}{14^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(5n-1)^2}+\ldots$$

абсолютно збіжний та обчислити

$$\int_1^{\infty}f(x)dx\text{, де } f(n)=a_n,\;\; n=1,2,\ldots,.$$

Розв'язання:

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів заданого ряду

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{14^2}+\ldots+\frac{1}{(5n-1)^2}+\ldots$$

Для одержаного ряду застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Для цього розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{(5x-1)^2}$, яка визначена, додатна та монотонно спадна на проміжку $\left[1;+\infty\right)$, тобто функцію яка задовольняє умови інтегральної ознаки Коші.

Обчислимо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(5x-1)^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{(5x-1)^2}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5x-1}\right)\Bigg|_1^b=-\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{5b-1}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{20}=0,05\,.$$

Отже, невласний інтеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ збіжний, тому і ряд, складений із абсолютних величин заданого ряду, також збіжний, і заданий ряд збіжний абсолютно (згідно з означенням 3).

Відповідь: *0,05*.

2. Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 13^n}=\frac{1}{13^1}-\frac{1}{2\cdot 13^2}+\frac{1}{3\cdot 13^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 13^n}+\ldots$$

абсолютно збіжний та обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

Розв'язання:

Для того, щоб довести абсолютну збіжність заданого ряду, розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду

$$\frac{1}{13^1}+\frac{1}{2\cdot 13^2}+\frac{1}{3\cdot 13^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 13^n}+\ldots$$

і застосуємо до нього радикальну ознаку Коші

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 13^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{13}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{13}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n}}=\frac{1}{13}\cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{n}{n^2}}{1}}=$$

$$=\frac{1}{13}\cdot e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{13}\cdot e^0=\frac{1}{13}\approx 0,077.$$

Оскільки $l=0,077<1$, то ряд, складений із абсолютних величин заданого ряду, збіжний, а сам заданий ряд абсолютно збіжний (згідно з означенням 3).

Відповідь: *0,077.*

3. Довести, що ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

умовно збіжний та обчислити n-ний залишок першого відкинутого члена, якщо $n=10$.

Розв'язання:

Дослідимо спочатку ряд на абсолютну збіжність. Для цього розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів даного ряду

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 5}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$$

Застосуємо ознаку порівняння рядів з додатними членами. Одержаний ряд розбіжний, тому що його члени більші відповідних членів розбіжного гармонійного ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Застосуємо ознаку Лейбніца (2) для заданого знакозмінного ряду.

Оскільки

$$u_n=\frac{1}{\ln n},\ u_{n+1}=\frac{1}{\ln(n+1)},$$

і

$$u_{n+1}<u_n,\ \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0,$$

то заданий ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца (2).

Таким чином, оскільки ряд, складений із абсолютних величин, розбіжний, а сам знакозмінний ряд збіжний за ознакою Лейбніца, то заданий знакозмінний ряд є умовно збіжним (згідно з означенням 4).

Оцінимо n-ний залишок заданого ряду при $n=10$, використовуючи наслідок ознаки Лейбніца (4).

$$|r_{10}|\le u_{10+1}=\left|\frac{(-1)^{10+1}}{\ln(10+1)}\right|=\frac{1}{\ln 11}\approx 0,417.$$

Відповідь: *0,417.*

4. Записати різницю рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots$$

та обчислити суму отриманого ряду.

Розв'язання:

Кожен із заданих рядів збіжний, бо є геометричною прогресією

$$q_1=\frac{1}{2}<1,\ q_2=\frac{1}{3}<1.$$

Суми цих рядів є відповідно

$$S_1 = \frac{u_1}{1 - q_1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

і

$$S_2 = \frac{v_1}{1 - q_2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Отже, і різниця заданих рядів є ряд збіжний, тобто збіжним є ряд

$$(1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{19}{216} + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}\right),$$

і його сума дорівнює

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: *0,5.*

5. Обчислити суму перших трьох членів ряду - добутку рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 17^n}{(n+1)!} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17^n n!}{n^n}.$$

Розв'язання:

Задані ряди можна записати більш розширено

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 17^n}{(n+1)!} = \frac{17^1}{2!} - \frac{17^2}{3!} + \frac{17^3}{4!} - \frac{17^4}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} 17^n}{(n+1)!} + \ldots,$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17^n \cdot n!}{n^n} = \frac{17^1 \cdot 1!}{1^1} - \frac{17^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{17^3 \cdot 3!}{3^3} + \ldots + \frac{17^n n!}{n^n} + \ldots,$$

Тоді, використовуючи правило добутку Коші (5), отримаємо

$$c_1 = u_1 v_1 = \frac{17^1}{2!} \cdot \frac{17^1 \cdot 1!}{1^1} = \frac{17^2}{2}.$$

$$c_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1 = \frac{17^1}{2!} \cdot \frac{17^2 \cdot 2!}{2^2} - \frac{17^2}{3!} \cdot \frac{17^1 \cdot 1!}{1^1} = \frac{17^3}{4} - \frac{17^3}{6} = \frac{17^3}{12}.$$

$$c_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \frac{17^1}{2!} \cdot \frac{17^3 \cdot 3!}{3^3} - \frac{17^2}{3!} \cdot \frac{17^2 \cdot 2!}{2^2} +$$

$$+ \frac{17^3}{4!} \cdot \frac{17^1 \cdot 1!}{1^1} = \frac{17^4}{9} - \frac{17^4}{12} + \frac{17^4}{24} = \frac{5 \cdot 17^4}{72}.$$

Остаточно,

$$c_1 + c_2 + c_3 = \frac{17^2}{2} + \frac{17^3}{12} + \frac{5 \cdot 17^4}{72} = \frac{36 \cdot 17^2 + 6 \cdot 17^3 + 5 \cdot 17^4}{72} \approx 6353{,}986$$

Відповідь: *6353,986.*

Практична робота 3. Степеневі ряди. Область збіжності. Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди Тейлора-Маклорена

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \quad (1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні числа, називається *степеневим рядом* за степенями $(x-a)$.

Означення 2. Множина всіх значень x, в яких степеневий ряд збіжний, називається *областю збіжності степеневого ряду*.

Означення 3. Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ називається такий інтервал $(a-R; a+R)$, що для кожної точки x, що лежить всередині цього інтервалу – ряд збіжний і причому абсолютно, а для точок x, які знаходяться поза цим інтервалом – ряд розбіжний. Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Теорема 1. Кожний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ збіжний абсолютно всередині деякого інтервалу$(a-R; a+R)$, де радіус збіжності $R>0$ визначається за формулою Коші-Адамара

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell}, якщо\ l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \\ 0, якщо\ \ell = +\infty \\ +\infty, якщо\ \ell = 0 \end{cases} \quad (2)$$

або за формулою

$$R = \lim_{n\to 0} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (3)$$

якщо дана границя існує.

За межами інтервалу $(a-R;a+R)$ степеневий ряд розбігається. Питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу при $x=a-R$ і $x=a+R$ вирішується для кожного ряду додатково.

Теорема Абеля.

Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{4}$$

збіжний при $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збіжний при всіх значеннях x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ степеневий ряд розбіжний, то він розбіжний і при всіх значеннях x, для яких $|x| > |x_1|$.

Теорема 2. (про почленне диференціювання степеневого ряду).

Якщо степеневий ряд (4) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має інтервал збіжності $(-R;R)$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} \tag{5}$$

утворений почленним диференціюванням ряду (4), має той самий інтервал збіжності $(-R;R)$, при цьому якщо $f(x)$ є сума ряду (4), а $\phi(x)$ - сума ряду (5), то

$$\phi(x) = f'(x), \ \ x \in (-R,R).$$

Теорема 3. (про почленне інтегрування степеневого ряду).

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, що належить його інтервалу збіжності.

Означення 4. Ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots, \tag{6}$$

де $x \in (a - R; a + R)$ називається *рядом Тейлора*.

Теорема 4. Якщо функцію $f(x)$ на інтервалі $(a - R; a + R)$ можна подати у вигляді степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції.

Теорема 5. Для того, щоб ряд Тейлора (6) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(a - R; a + R)$, тобто для того, щоб справджувалася рівність

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \; x \in (a - R; a + R), \tag{7}$$

необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків, і щоб залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x - a))}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} = 0, \; 0 < \theta < 1.$$

Означення 5. Ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots, \tag{8}$$

де $x \in (-R; R)$ називається *рядом Маклорена*.

Розклад елементарних функцій у ряд Маклорена

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty) \tag{9}$$

2. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

(10)

$x \in (-\infty; \infty)$

3. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

(11)

$x \in (-\infty; \infty)$

4.

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot x^n =$$

$$1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \qquad (12)$$

$x \in (-1; 1)$

5. $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

$x \in (-1; 1)$ (13)

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \alpha^n}.$$

2. Знайти коефіцієнт c_2 при степені x^2 ряду – добутку степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n x^n}{n!} \text{ та } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

3. Скласти лінійне диференціальне рівняння, яке задовольняє сума $S(x)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+3)^n x^n}{n!}$, і, розв'язавши його, обчислити значення $\ln S(\alpha)$.

4. Застосувавши розвинення функцій у степеневі ряди, обчислити границю

$$\lim \left[\frac{\alpha + \cos x}{x \sin x} - \frac{\alpha + 1}{x^2} \right].$$

5. Знайти третій член (коефіцієнт при x^2) розвинення у ряд Маклорена розв'язку рівняння $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1$, що задовольняє умову $y(0) = \alpha$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Знайти радіус збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 113^n}.$$

Розв'язання:

Використовуючи формулу Коші-Адамара (теорема 1) у виді (3), отримаємо

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n \cdot 113^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 113^{n+1}}{1} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot 113^{n+1}}{n \cdot 113^n} = 113 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 113.$$

Отже, радіус збіжності ряду $R = 113$.

Відповідь: *113*.

2. Знайти коефіцієнт c_2 при степені x^2 ряду – добутку степеневих рядів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{200^n x^n}{n!} \quad \text{та} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

Розв'язання:

Запишемо задані ряди розширено

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{200^n x^n}{n!} = \frac{200^0 x^0}{0!} + \frac{200^1 x^1}{1!} + \frac{200^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{200^n x^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^n}{n!}=\frac{(-1)^0x^0}{0!}+\frac{(-1)^1x^1}{1!}+\frac{(-1)^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^nx^n}{n!}+\ldots.$$

Тоді за правилом множення рядів (правило Коші):

$$c_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\ldots+u_nv_1$$

отримаємо,

$$c_2=u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0=\frac{200^0x^0}{0!}\cdot\frac{(-1)^2x^2}{2!}+$$

$$+\frac{200^1x^1}{1!}\cdot\frac{(-1)^1x^1}{1!}+\frac{200^2x^2}{2!}\cdot\frac{(-1)^0x^0}{0!}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-200x^2+\frac{200^2x^2}{2}=\frac{1-400+40000}{2}x^2=\frac{39601}{2}x^2=19800{,}5x^2$$

Отже, коефіцієнт $C_2=19800{,}5$.

Відповідь: *19800,5*.

3. Скласти лінійне диференціальне рівняння, яке задовольняє сума $S(x)$ степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{13^nx^n}{n!}$ і, розв'язавши його, обчислити значення $\ln S(3)$.

Розв'язання:

Оскільки даний ряд степеневий, то згідно з теоремою 2, його можна диференціювати всередині інтервалу збіжності ряду, тобто

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{13^nx^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^n n\,x^{n-1}}{n!}=13\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=13\sum_{m=0}^{\infty}\frac{13^mx^m}{m!}=13\,S(x).$$

Отже,

$$S'(x)=13\,S(x)\Rightarrow\frac{dS}{dx}=13\,S(x).$$

Розв'язавши отримане лінійне диференціальне рівняння відносно $S(x)$, отримаємо

$$\frac{dS}{S(x)}=13dx;\qquad \int\frac{dS}{S(x)}=13\int dx;$$

$$\ln S(x)=13x;\quad S(x)=e^{13x}.$$

Якщо $x=3$, то $\ln S(3)=13\cdot 3=39$.

Відповідь: *39*.

4. Застосувавши розвинення функцій у степеневі ряди, обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{200+\cos x}{x\sin x}-\frac{201}{x^2}\right].$$

Розв'язання:

Використовуючи розклад тригонометричних функцій $\cos x$ та $\sin x$ у степеневі ряди (11) та (10), отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{200+\cos x}{x\sin x}-\frac{201}{x^2}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{200x+x\cos x-201\sin x}{x^2\sin x}\right]\approx$$

$$\approx\lim_{x\to 0}\frac{200x+x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)-201\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{200x+x-\frac{x^3}{2!}+0(x^5)-201x+201\frac{x^3}{3!}+0(x^5)}{x^3\left(1-\frac{x^2}{3!}+0(x^3)\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{201}{3!}-\frac{1}{2!}\right)+0(x^5)}{x^3\left(1+0(x^5)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\frac{201}{6}-\frac{1}{2}\right)}{x^3}=\frac{201}{6}-\frac{1}{2}=\frac{198}{6}=33,$$ де

$0(x^5)$ - нескінченно мала величина.

Відповідь: 33.

5. Знайти третій член (коефіцієнт при x^2) розвинення у ряд Маклорена розв'язку рівняння $y'=\frac{1-x^2}{y}+1$, що задовольняє умові $y(0)=1$.

Розв'язання:

Нехай функція $y(x)$ є розв'язок даного диференціального рівняння при заданих початкових умовах.

Запишемо її розклад у ряд Маклорена

$$y(x)\approx y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Згідно умови $y(0)=1$.

Для знаходження значення похідних $y'(0)$, $y''(0)$, …, необхідно задане диференціальне рівняння послідовно продиференціювати декілька разів, використовуючи початкову умову.

Отже,

$$y'=\frac{1-x^2}{y}+1;$$

$$y'(0)=\frac{1-0^2}{1}+1=2;$$

$$y''(x)=\left(y'(x)\right)'=\left(\frac{1-x^2}{y}+1\right)'=\frac{-2xy-(1-x^2)y'}{y^2};$$

$$y''(0)=\frac{-2\cdot 0\cdot 1-(1-0)\cdot 2}{1^2}=-2.$$

Підставивши знайдені значення в ряд Маклорена, отримаємо розклад функції $y(x)$, яка є розв'язком заданого диференціального рівняння у вигляді ряду

$$y(x)\approx 1+\frac{2}{1!}x-\frac{2}{2!}x^2+\ldots,$$

і значення коефіцієнта $a_3=-\frac{2}{2}=-1$.

Відповідь: -1.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)^n(x-1)^n}{\alpha^n\sqrt{n}}.$$

У відповіді вказати той кінець інтервалу, в якому ряд збіжний умовно.

2. Обчислити суму перших трьох коефіцієнтів ряду – добутку степеневих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)^n(x-1)^n}{\alpha^n\sqrt{n}} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,\alpha^{n-1}}.$$

3. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \text{ при } x=\alpha.$$

4. Застосувавши розвинення функцій у степеневі ряди, обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+(\alpha+1)x}-\sqrt{1+\alpha x}}{x}.$$

5. Знайти коефіцієнт при x^2 розкладу у ряд Маклорена розв'язку диференціального рівняння $y' = x + x^2 - y^2 + \cos x$, що задовольняє умову $y(0) = \alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}$. У відповіді вказати той кінець інтервалу, в якому ряд збіжний умовно.

Розв'язання:

Оскільки заданий ряд є степеневим рядом (1), то для знаходження радіуса збіжності використаємо формулу Коші-Адамара (теорема 1) у виді (3)

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{2^n\sqrt{n}} \cdot \frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3^n 2^{n+1}\sqrt{n+1}}{3^{n+1}2^n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Визначимо інтервал збіжності

$$-\frac{2}{3} < x - 1 < \frac{2}{3};$$

$$-\frac{2}{3} + 1 < x < \frac{2}{3} + 1;$$

$$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}.$$

Отже, інтервал збіжності ряду $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x = \frac{1}{3}$ заданий степеневий ряд матиме вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3} - 1\right)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n 2^n}{2^n \sqrt{n} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Отриманий ряд є знакопочережним.

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$, і $u_{n+1} < u_n$, то за ознакою Лейбніца даний ряд є збіжним. Але ряд, складений з його абсолютних величин

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

є ряд розбіжний як ряд Діріхле при $p = \frac{1}{2} < 1$, тому при $x = \frac{1}{3}$ заданий ряд умовно збіжний.

Дослідимо заданий степеневий ряд на збіжність при $x = \frac{5}{3}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{5}{3} - 1\right)^n}{2^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n 2^n}{2^n \sqrt{n} \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Одержаний числовий ряд розбіжний. Дійсно, порівнявши його члени відповідно з членами гармонічного ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

згідно з ознакою порівняння рядів з додатними членами упевнимося в цьому.

Таким чином, при $x = \frac{5}{3}$ заданий ряд розбіжний.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є проміжок $\left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$, або $\frac{1}{3} \le x < \frac{5}{3}$, і при $x = \frac{1}{3}$ ряд умовно збіжний.

Відповідь: $\frac{1}{3} \approx 0,333333$.

2. Обчислити суму перших трьох коефіцієнтів ряду – добутку степеневих рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 7^n x^n \qquad \text{та} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 7^{n-1}}.$$

Розв'язання:

Запишемо задані ряди у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 7^n x^n = 1 \cdot 7^1 x^1 + 2 \cdot 7^2 x^2 + 3 \cdot 7^3 x^3 +$$
$$+ 4 \cdot 7^4 x^4 + \ldots + n \cdot 7^n \cdot x^n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 7^{n-1}} = \frac{x^1}{1 \cdot 7^0} + \frac{x^2}{2 \cdot 7^1} + \frac{x^3}{3 \cdot 7^2} + \frac{x^4}{4 \cdot 7^3} + \ldots + \frac{x^n}{n 7^{n-1}} + \ldots .$$

Тоді, використовуючи правило добутку Коші, отримаємо

$$c_1 = u_1 v_1 = 1 \cdot 7^1 x^1 \frac{x^1}{1 \cdot 7^0} = 7x^2.$$

$$c_2 = u_1 v_2 + u_2 v_1 =$$
$$= 1 \cdot 7^1 x^1 \frac{x^2}{2 \cdot 7^1} + 2 \cdot 7^2 x^2 \frac{x^1}{1 \cdot 7^0} = \frac{x^3}{2} + 98x^3 = \frac{197}{2} x^3.$$

$$c_3 = u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 =$$
$$= 1 \cdot 7^1 x^1 \frac{x^3}{3 \cdot 7^2} + 2 \cdot 7^2 x^2 \frac{x^2}{2 \cdot 7^1} + 3 \cdot 7^3 x^3 \frac{x^1}{1 \cdot 7^0} =$$

$$=\frac{x^4}{21}+7x^4+1029x^4=\frac{21757}{21}x^4.$$

Отже, ряд - добуток має такий вигляд

$$7x^2+\frac{197}{2}x^3+\frac{21757}{21}x^4+\dots,$$

а сума відповідних коефіцієнтів

$$7+\frac{197}{2}+\frac{21757}{21}=\frac{294+4137+43154}{21\cdot 2}=\frac{47495}{42}\approx 1141{,}548.$$

Відповідь: *1141,548.*

3. Обчислити суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\dots \text{ при } x=0{,}5.$$

Розв'язання:

Використовуючи формулу Коші-Адамара (3), визначимо радіус збіжності даного степеневого ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right|=1.$$

За теоремою 2, степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності $(-1;1)$.

Маємо

$$S'(x)=\left(\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\dots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\dots\right)'=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$

Аналогічно отримаємо, що

$$S''(x)=(S'(x))'=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right)'=$$
$$=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots$$

Знаходимо суму одержаного ряду, як суму геометричної прогресії при $b_1=1$, $q=x$ де $|x|<1$.

$$S''(x)=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1-x}.$$

Проінтегруємо останню рівність двічі на відрізку $[0,x]\subset(-1;1)$;

$$S'(x)=\int_0^x S''(x)dx=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-ln|1-t|\Big|_0^x=-ln(1-x).$$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dx=-\int_0^x ln(1-t)dt=$$

$$=\begin{vmatrix} ln(1-t)=u & dv=dt \\ -\dfrac{dt}{1-t}=du & v=t \end{vmatrix}=-(t\cdot ln(1-t)\Big|_0^x+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt)=$$

$$=-x\,ln(1-x)+x+ln(1-x)=ln(1-x)\cdot(1-x)+x.$$

Таким чином, сума ряду при довільному значені x
$$S(x)=ln(1-x)\cdot(1-x)+x,$$
а її значення при $x=0,5$

$$S(0,5)=ln(1-0,5)\cdot(1-0,5)+0,5=ln0,5\cdot0,5+0,5\approx$$
$$\approx-0,347+0,5=0,153.$$

Відповідь: 0,153.

1. Застосувавши розвинення функцій у степеневі ряди, обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+7x}-\sqrt{1-6x}}{x}.$$

Розв'язання:

Використовуючи розклад функції у степеневі ряди (12), отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{3}(7x)+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{(7x)^2}{2!}+0\left(x^3\right)\right)-\left(1+\frac{1}{2}(6x)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(6x)^2}{2!}+0\left(x^3\right)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{36}x^2+0(x^3)}{x}=-\frac{2}{3},$$

де $0(x^3)$ - нескінченно мала величина.

Відповідь: *-0,66667.*

2. Знайти коефіцієнт при x^3 розкладу у ряд Маклорена розв'язку диференціального рівняння $y'=x+x^2-y^2+\cos x$, що задовольняє умову $y(0)=1$.

Розв'язання:

Нехай функція $y(x)$ є розв'язком даного диференціального рівняння при вказаних початкових умовах. Якщо функція $y(x)$ допускає розклад в ряд Маклорена, то маємо

$$y(x)\approx y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots \qquad (*)$$

Значення $y(0)=1$ (задано за умовою).

Для знаходження значень $y'(0), y''(0), y'''(0),\ldots,$ потрібно задане рівняння послідовно продиференціювати по змінній x декілька раз, а потім обчислити значення похідних при $x=0$:

$$y'=x+x^2-y^2+\cos x;$$

$$y'(0)=0+0^2-1+\cos 0=-1+1=0;$$

$$y''(x) = 1 + 2x - 2y\,y' - \sin x\,;$$
$$y''(0) = 1 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 0 - \sin 0 = 1\,;$$

$$y'''(x) = 1 + 2 - 2(y'y' - yy'') - \cos x = 3 - 2((y')^2 - yy'') - \cos x\,;$$
$$y'''(0) = 3 - 2(0^2 - 1\cdot 1) = 3 + 2 = 5\,.$$

Підставивши знайдені значення похідних при $x = 0$ в (*), одержимо розклад розв'язку заданого диференціального рівняння в ряд Маклорена:

$$y(x) \approx 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \ldots$$

або

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \ldots$$

Таким чином, коефіцієнт при x^3 дорівнює $\frac{5}{6} \approx 0{,}8333$.

Відповідь: *0,8333*.

Практична робота 4. Тригонометричний ряд. Розкладання функцій у тригонометричний ряд Фур'є

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Нехай $f(x)$ - інтегрована функція на відрізку $[-\pi;\pi]$. Числа a_0, a_n і b_n, що визначаються формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{1}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,2,3\ldots\ , \tag{3}$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Означення 2. *Тригонометричний ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4}$$

коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називається *рядом Фур'є* цієї функції і записується

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{5}$$

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ можна подати на відрізку $[-\pi;\pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду (4), то цей тригонометричний ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Ряд Фур'є для парних та непарних функцій.

1. Нехай кусково-диференційована функція $f(x)$ парна на відрізку $[-\pi;\pi]$, тоді $f(x)\sin nx$, $n=1,2,\dots$ – непарні, $f(x)\cos nx$, $n=1,2,\dots$ – парні функції на цьому відрізку.

Тому

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0, \tag{6}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx, \tag{7}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \qquad n=1,2,3\dots \tag{8}$$

Отже, ряд Фур'є матиме вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{9}$$

2. Нехай кусково-диференційована функція $f(x)$ непарна на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Аналогічно

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0, \tag{10}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0, \tag{11}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,3\dots \tag{12}$$

Тоді ряд Фур'є матиме вигляд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \tag{13}$$

Примітка 1.

Якщо функція $f(x)$ задана не в інтервалі $(-\pi;\pi)$, а в інтервалі $(0;2\pi)$, також довжиною 2π, то її можна розкласти в ряд Фур'є (4), але коефіцієнти визначаються формулами

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \tag{14}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \tag{15}$$

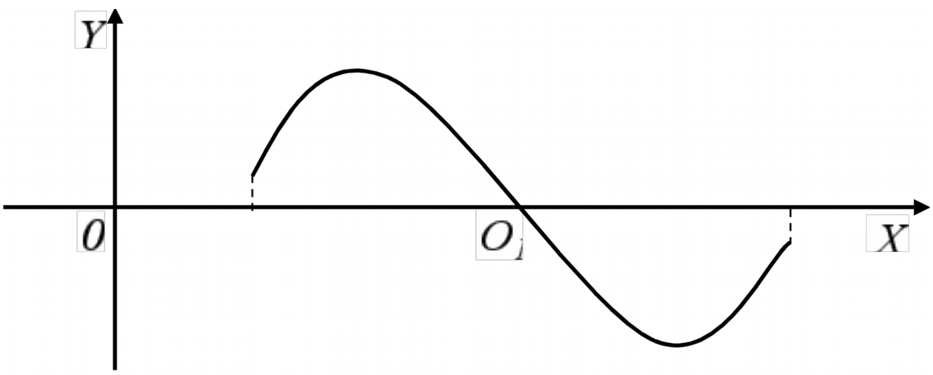


Рис.1

Примітка 2.

Якщо графік функції $f(x)$, яку потрібно розвинути у ряд Фур'є, має на осі Ox центр симетрії точку O_1 (рис.1), то, прийнявши дану точку за початок координат, отримаємо, що $f(-x)=-f(x)$. Функція $f(x)$– непарна, її розклад у ряд Фур'є включає тільки синуси, а, відповідно, усі коефіцієнти $a_n=0 \quad (n=1,2,\ldots)$.

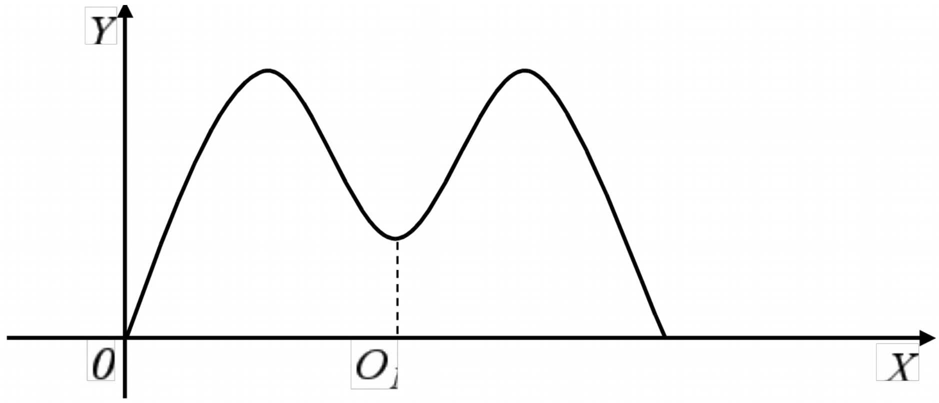


Рис.2

Примітка 3.

Якщо графік функції $f(x)$, яку потрібно розвинути у ряд Фур'є, має вісь симетрії (рис.2), то, прийнявши дану вісь за вісь ординат і розмістивши початок координат у точці O_1 перетину осі симетрії з віссю Ox, отримаємо, що $f(-x)=f(x)$. Функція $f(x)$– парна, а її ряд Фур'є включає тільки косинуси і стале число a_0, а, відповідно, усі коефіцієнти $b_n=0$.

Отже, парна функція розкладається за косинусами (парними функціями), а непарна функція – за синусами (непарними функціями).

Теорема Діріхле (достатня умова подання функції через ряд Фур'є).

Нехай $f(x)$– 2π- періодична і кусково-диференційована на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція. Тоді ряд Фур'є цієї функції збіжний на відрізку $[-\pi;\pi]$ до функції $S(x)$, при цьому

1) $S(x)=f(x)$ в усіх точках неперервності функції $f(x)$;

2) якщо x_0 – точка розриву 1-го роду функції $f(x)$, то

$$S(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)}{2};$$

3) $S(-\pi)=S(\pi)=\dfrac{\lim\limits_{x\to \pi+0}f(x)+\lim\limits_{x\to \pi-0}f(x)}{2}.$

Розклад функції у ряд Фур'є на інтервалі $\left[-l;l\right]$

Якщо функція $f(x)$ на довільному інтервалі $\left[-l;l\right]$ має скінчене число екстремумів і є неперервною, за винятком, можливо, скінченого числа точок розриву 1 роду (тобто задовольняє умови Діріхле), то вказана функція може бути записана у вигляді суми ряду Фур'є

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right), \tag{16}$$

де:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \tag{17}$$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx, \tag{18}$$

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx. \tag{19}$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ для $-\pi<x<\pi$. Обчислити коефіцієнт Фур\`є a_α.

2. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ для $0<x<2\pi$. Обчислити коефіцієнт Фур'є a_α.

3. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ при } 0<x<\pi\\ 0, \text{ при } -\pi<x<0\end{cases}.$$

Обчислити коефіцієнт Фур'є a_α.

4. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ для $-\pi < x < 2\pi$. Обчислити коефіцієнт Фур'є b_α.

5. Обчислити значення суми ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a_n \sin\frac{n}{\alpha}}{n},$$

розклавши у ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ для $-\pi < x < \pi$.

3. Приклад виконання завдання для допуску студента до практичного заняття

1. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ для $-\pi \le x \le \pi$. Обчислити коефіцієнт Фур'є a_5.

Розв'язання:

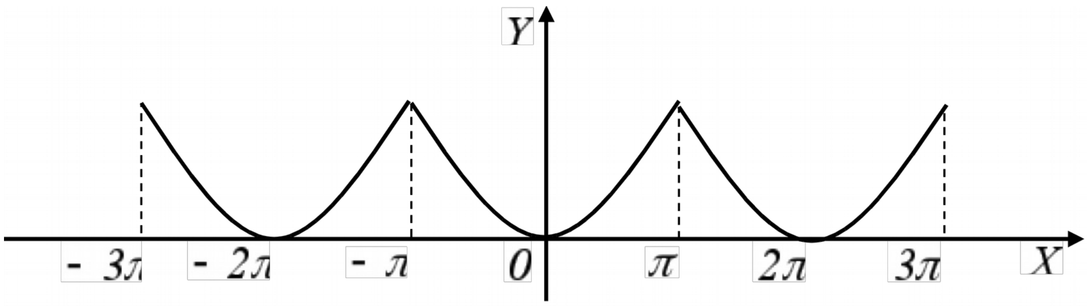


Рис.3

Задана функція парна на відрізку $[-\pi;\pi]$, (рис. 3), тому знайдемо її коефіцієнти Фур'є, використовуючи формули (6), (7), (8) і метод інтегрування за частинами.

$$b_0=0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx \right] =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right] = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в рівність (9).

Оскільки функція $f(x) = x^2$ неперервна на відрізку $\left[-\pi;\pi\right]$, то

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2},$$

а значення коефіцієнта $\alpha_5 = (-1)^5 \frac{4}{5^2} = -0,16$.

Відповідь: -0,16.

2. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$ для $0 < x < 2\pi$. Обчислити коефіцієнт Фур'є a_{15}.

Розв'язання:

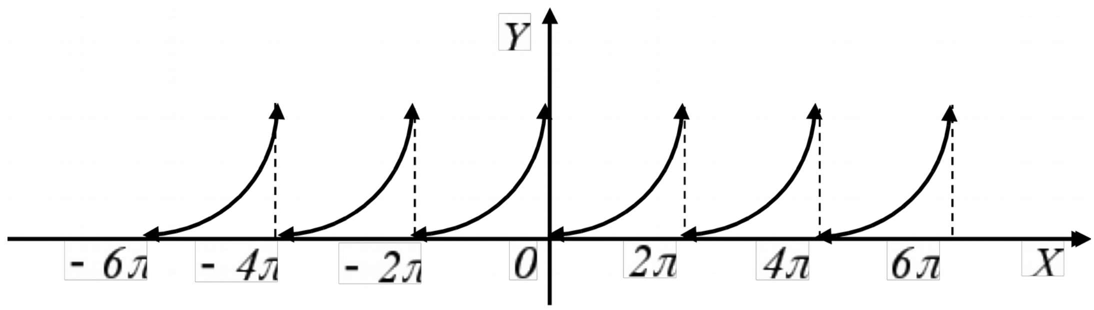


Рис.4

Для знаходження коефіцієнтів Фур'є функції $f(x) = x^2$ (рис.4) застосуємо формули (14), (15) і метод інтегрування частинами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx \right] = \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[-\frac{x \cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx \Bigg|_0^{2\pi} \right] = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \sin nx dx \\ du = 2x dx & v = -\dfrac{\cos nx}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2 \cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2 \cdot 1}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right] =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix} \right| = -\frac{4\pi}{n} + \frac{2}{\pi n}\left[-\frac{x \sin nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin nx dx \right] =$$

$$= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n} \cdot \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2}(1 - 1) = -\frac{4\pi}{n}.$$

Підставимо знайдені коефіцієнти в рівність (4).

Оскільки функція $f(x) = x^2$ неперервна на інтервалі $(0; 2\pi)$, то:

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},$$

а відповідне значення коефіцієнта $a_{15} = \dfrac{4}{15^2} = 0{,}0178$.

Відповідь: $0{,}0178$.

3. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & при\ 0<x<\pi \\ 0, & при\ -\pi<x<0 \end{cases}.$$

Обчислити коефіцієнт Фур'є a_{25}.

Розв'язання:

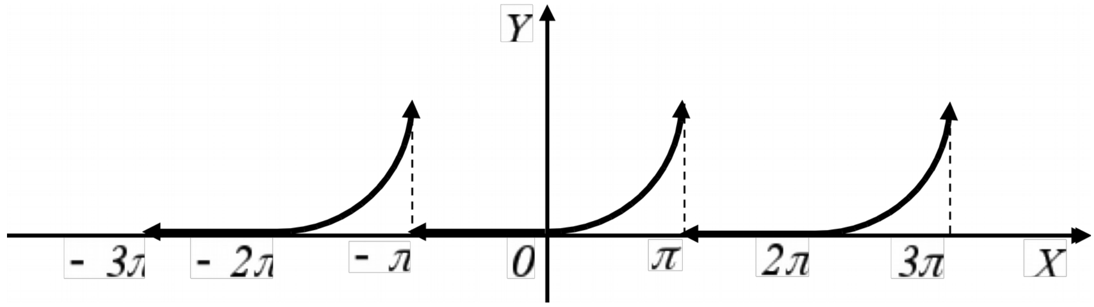


Рис.5

Оскільки функція $f(x)$ (рис.5) задана різними аналітичними виразами, то проміжок $(-\pi;\pi)$ потрібно розбити на два проміжки, а потім уже знаходити коефіцієнти Фур'є.

Використовуючи (1), (2) знаходимо коефіцієнти Фур'є

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\cdot\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{2}{n^2}$$

Тоді, $a_{25}=(-1)^{25}\cdot\frac{2}{625}=-0,0032$.

Відповідь: *-0,0032*.

4. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ для $-\pi<x<\pi$. Обчислити коефіцієнт Фур'є b_{35}.

Розв'язання:

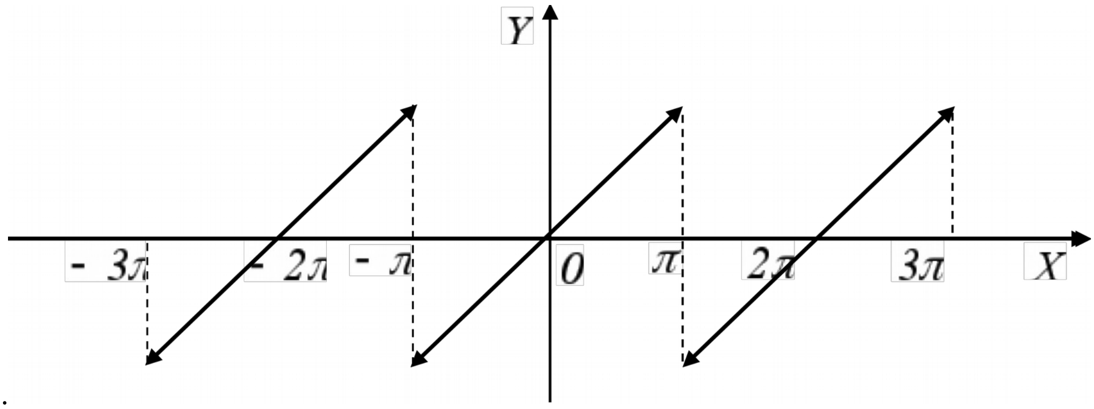


Рис. 6

Задана функція задовольняє умовам Діріхле і тому її можна розкласти у ряд Фур'є. На інтервалі $(-\pi;\pi)$ функція $f(x)$– непарна (рис.6).

Отже, ряд Фур'є даної функції включатиме тільки синуси, а при косинусах усі коефіцієнти $a_n = 0\ (n = 0,1,2,\dots)$.

Коефіцієнти b_n визначимо за формулою (12), а саме

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi} \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\pi\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Підставивши значення b_n у (13), отримаємо ряд

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

який матиме місце на інтервалі $(-\pi;\pi)$, де функція $f(x)$ неперервна.

Шукане значення $b_{35} = (-1)^{36}\cdot\dfrac{2}{35} \approx 0{,}057$.

Відповідь: *0,057*.

5. Обчислити значення суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n}{5}}{n}$, розвинувши у ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ для $-\pi<x<\pi$.

Розв'язання:

Використовуючи розклад функції $f(x)$ в ряд Фур'є на інтервалі $(-\pi;\pi)$, одержаний у попередньому завданні, маємо

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n};$$

$$\frac{1}{5}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n}{5}}{n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n}{5}}{n}=\frac{1}{10}.$$

Відповідь: *0,1*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=\alpha e^{x}$ для $0<x<2\pi$. Визначити значення суми коефіцієнтів Фур'є $a_0+a_\alpha+b_\alpha$.

2. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi}(\pi-x) \text{ для } 0<x<2\pi.$$

Визначити значення суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n}{\alpha}}{n}$.

3. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\alpha-\frac{\alpha}{\pi^2}(x-\pi)^2 \text{ для } 0\le x\le 2\pi.$$

Визначити значення суми коефіцієнтів Фур'є $a_0+a_\alpha+b_\alpha$.

4. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, якщо & -\alpha \le x \le 0 \\ x, якщо & 0 < x < \dfrac{\alpha}{2} \\ \dfrac{\alpha}{2}, якщо & \dfrac{\alpha}{2} \le x \le \alpha \end{cases}.$$

Визначити значення суми коефіцієнтів $a_0 + a_\alpha + b_\alpha$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x) = e^x$ для $0 < x < 2\pi$. Визначити значення суми коефіцієнтів Фур'є $a_0 + a_5 + b_5$.

Розв'язання:

Розглянемо графік заданої функції e^x (рис.7).

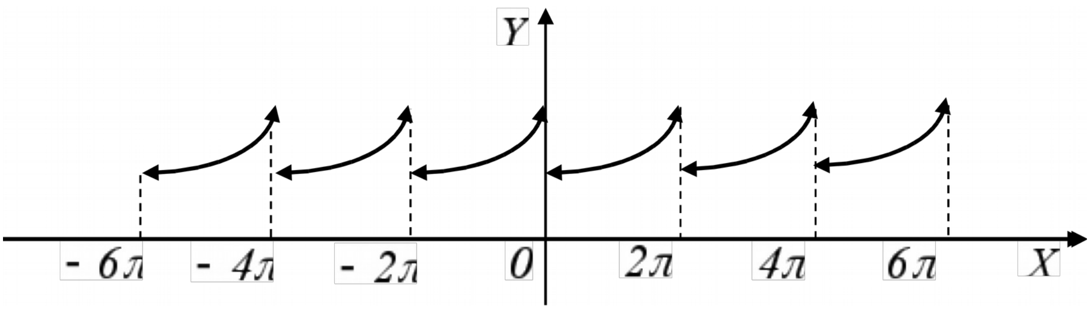


Рис. 7

Для знаходження коефіцієнтів Фур'є застосуємо формули (14), (15).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} e^x \Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos nx dx.$$

Розглянемо окремо невизначений інтеграл $\int e^x \cos nx dx$.

Застосувавши двічі метод інтегрування частинами, отримаємо

$$\int e^x \cos nx dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \cos nx dx \\ du = e^x dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} = \frac{e^x \sin nx}{n} -$$

$$- \frac{1}{n} \int \sin nx \cdot e^x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \sin nx dx \\ du = e^x dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{e^x \sin nx}{n} - \frac{1}{n}\left(-\frac{e^x \cos nx}{n} + \frac{1}{n} \int e^x \cos nx dx \right) = ;$$

$$= \frac{e^x \sin nx}{n} + \frac{e^x \sin nx}{n^2} - \frac{1}{n^2} \int e^x \cos nx dx.$$

$$\int e^x \cos nx dx \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{ne^x \sin nx + e^x \cos nx}{n^2};$$

$$\int e^x \cos nx dx = \frac{\left(ne^x \sin nx + e^x \cos nx \right) n^2}{n^2 (n^2 + 1)} = \frac{e^x (n \sin nx + \cos nx)}{n^2 + 1}.$$

Тоді

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x (n \sin nx + \cos nx)}{n^2 + 1} \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi (1 + n^2)}.$$

Аналогічно визначимо коефіцієнт b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^x \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^x (\sin nx - n \cos nx}{1 + n^2} \right] \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{-(e^{2\pi} - 1)n}{\pi (1 + n^2)},$$

Враховуючи, що

$$\int e^x \sin nx dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \sin nx dx \\ du = e^x dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{e^x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\int e^x\cos nxdx=\begin{vmatrix} u=e^x & dv=\cos nxdx \\ du=e^xdx & v=-\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{e^x\cos nx}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{e^x\sin nx}{n}-\frac{1}{n}\int e^x\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{e^x\cos nx}{n}+\frac{e^x\sin nx}{n^2}-\frac{1}{n^2}\int e^x\sin nxdx;$$

$$\int e^x\sin nxdx\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{-ne^x\cos nx+e^x\sin nx}{n^2};$$

$$\int e^x\sin nxdx=\frac{e^x(\sin nx-n\cos nx)}{1+n^2}.$$

Таким чином на інтервалі $(0;2\pi)$ функцію $f(x)=e^x$ можна розкласти у ряд Фур'є

$$e^x=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right],$$

а сума коефіцієнтів Фур'є дорівнює

$$a_0+a_5+b_5=\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[1+\frac{1}{26}-\frac{5}{26}\right]=\frac{22}{26}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}=\frac{11}{13}\cdot\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\approx$$

$$\approx\frac{11}{13}\cdot 170{,}134\approx 143{,}960.$$

Відповідь: $143{,}960.$

2. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=\dfrac{\pi-x}{\pi}$ для $0<x<2\pi$. Визначити значення суми ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Розв'язання:

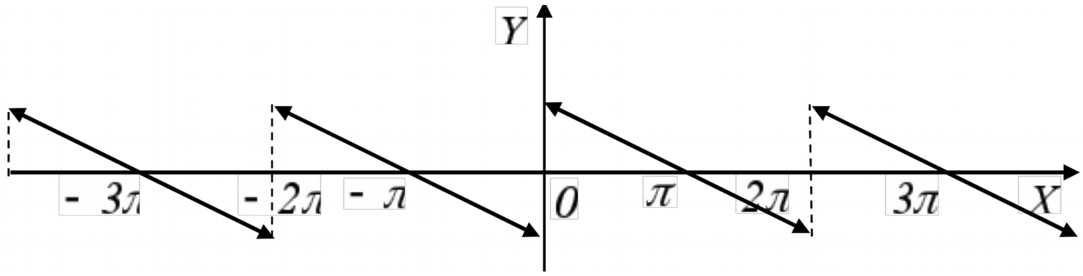


Рис. 8

Аналізуючи графік даної функції (рис.8) на основі зауваження 2, можна зробити висновок, що ряд Фур'є буде включати тільки синуси.

Згідно з (12), одержимо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{\pi}\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = \pi - x & dv = \sin nx dx \\ du = -dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\left.\frac{-(\pi - x)\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{-(\pi - 2\pi)\cos 2\pi}{n} - \frac{-\left(\pi - 0\right)\cos 0}{n} - \frac{1}{n}\cdot\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x - \pi & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi^3 n}\left[-\left.\frac{(x - \pi)\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right] =$$

Отже, на інтервалі $(0;2\pi)$ функцію $f(x) = \dfrac{\pi - x}{\pi}$ можна розкласти в такий ряд Фур'є

$$\frac{\pi - x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\sin nx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Звідси отримаємо,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

і відповідно при $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-1}{2}\approx 1{,}071.$$

Відповідь: *1,071*.

3. Розкласти у ряд Фур'є функцію

$$f(x)=1-\frac{(x-\pi)^2}{\pi^2} \text{ для } 0\le x\le 2\pi.$$

Визначити значення суми коефіцієнтів Фур'є $a_0+a_5+b_5$.

Розв'язання:

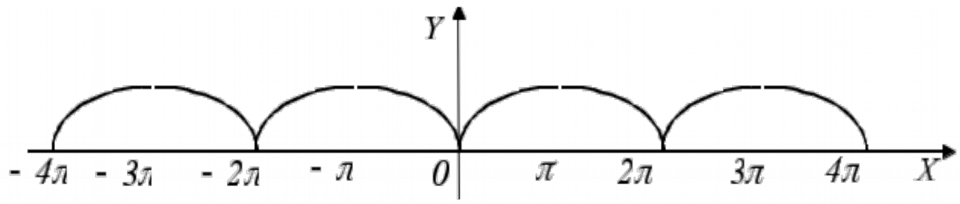


Рис. 9

На основі примітки 3 і графіка функції (рис.9), можна зробити висновок, що розклад функції в ряд Фур'є буде включати тільки стале число a_0 і косинуси.

Використовуючи (14), дістанемо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{(x-\pi)^2}{\pi^2}\right)dx=\left[x-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[2\pi-\frac{(2\pi-\pi)^3}{3\pi^2}-0+\frac{(0-\pi)^3}{3\pi^2}\right]=\frac{1}{\pi}\left[2\pi-\frac{\pi^3}{3\pi^2}-\frac{\pi^3}{3\pi^2}\right]=$$

$$=\frac{6\pi^3-\pi^3-\pi^3}{\pi\cdot 3\pi^2}=\frac{4\pi^3}{3\pi^3}=\frac{4}{3}.$$

Згідно з (14), отримаємо

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{(x-\pi)^2}{\pi^2}\right)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos nxdx-$$

$$-\frac{1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos nxdx=\begin{vmatrix} u=(x-\pi)^2 & dv=\cos nxdx \\ du=2(x-\pi)dx & v=\dfrac{\sin nx}{x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{\pi^3}\left[\frac{(x-\pi)^2\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin nxdx\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x-\pi & dv=\sin nxdx \\ du=dx & v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=\frac{2}{\pi^3 n}\left[-\frac{(x-\pi)\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^3 n}\left[-\frac{(2\pi-\pi)\cos 2\pi n}{n}+\frac{(0-\pi)\cos(0\cdot n)}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^3 n}\left[-\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right]=-\frac{4\pi}{\pi^3 n^2}=-\frac{4}{\pi^2 n^2}.$$

Таким чином, задана функція розкладається в ряд Фур’є таким чином

$$f(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

А сума коефіцієнтів Фур’є

$$a_0+a_5+b_5=\frac{4}{3}+\left(-\frac{4}{\pi^2 5^2}\right)+0=\frac{4}{3}-\frac{4}{25\pi^2}=\frac{100\pi^2-12}{75\pi^2}\approx 1,317.$$

Відповідь: *1,317.*

4. Розкласти у ряд Фур`є функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & якщо\ -20\le x\le 0 \\ x, & якщо\ \ 0< x<10 \\ 10, & якщо\ \ 10\le x\le 20\end{cases}.$$

Визначити значення суми коефіцієнтів $a_0 + a_5 + b_5$.

Розв'язання:

Оскільки функція $f(x)$ задана на проміжку $(-l;l)$, де $\ell = 20$, то згідно з (17), (18), (19) отримаємо

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{1}{20}\int_{-20}^{0} 0dx + \frac{1}{20}\int_{0}^{10} xdx + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 10dx =$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{10} + \frac{1}{2}x\bigg|_{10}^{20} = \frac{100}{40} + \frac{20}{2} + \frac{10}{2} = \frac{100+400-200}{40} = \frac{300}{40} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{20}\int_{0}^{10} x\cos\frac{n\pi x}{20}dx + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 10\cos\frac{n\pi x}{20}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos\frac{n\pi x}{20}dx \\ du = dx & v = \frac{20}{4\pi}\sin\frac{n\pi x}{20} \end{vmatrix} = \frac{1}{20}\left[\frac{20x}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{20}\bigg|_0^{10} - \frac{20}{\pi n}\int_0^{10}\sin\frac{n\pi x}{20}dx\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{\pi n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{20}\bigg|_{10}^{20} = \frac{1}{20}\left(-\frac{20}{\pi n}\right)\left(-\frac{20}{\pi n}\right)\cos\frac{n\pi x}{20}\bigg|_0^{10} = \frac{20}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{20} - 1\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{1}{20}\int_{0}^{10} x\sin\frac{n\pi x}{20}dx + \frac{1}{20}\int_{10}^{20} 10\sin\frac{n\pi x}{20}dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x & dv=\sin\frac{n\pi x}{20}dx \\ du=dx & v=-\frac{20}{4\pi}\cos\frac{n\pi x}{20}\end{matrix}\right|=\frac{1}{20}\left[-\frac{20x}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{20}\Big|_0^{10}+\frac{20}{\pi n}\int_0^{10}\cos\frac{n\pi x}{20}dx\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{\pi n}\cos\frac{n\pi x}{20}\Big|_{10}^{20}=$$

$$=\frac{1}{20}\left[-\frac{200}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{20}+\frac{20}{\pi n}\cdot\frac{20}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{20}\Big|_0^{10}\right]-\frac{10}{\pi n}\cdot\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=-\frac{10}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{20}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{10}{\pi n}(-1)^n+\frac{10}{\pi n}\cos\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\frac{20}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{10}{\pi n}(-1)^n.$$

Тоді значення суми коефіцієнтів буде дорівнювати

$$a_0+a_5+b_5=\frac{15}{2}+\frac{20}{5^2\pi^2}\left(\cos\frac{5\pi}{2}-1\right)+\frac{20}{5^2\pi^2}\sin\frac{5\pi}{2}-\frac{10}{5\pi}(-1)^5=$$

$$=\frac{15}{2}+\frac{20}{25\pi^2}(0-1)+\frac{20}{25\pi^2}+\frac{2}{\pi}=\frac{15}{2}-\frac{4}{5\pi^2}+\frac{4}{5\pi^2}+\frac{2}{\pi}=$$

$$=\frac{15\pi+4}{2\pi}\approx 8{,}1366.$$

Відповідь: 8,1366.

РОЗДІЛ 6
КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Практична робота 1. Подвійний інтеграл. Обчислення подвійного інтеграла повторним інтегруванням у декартових координатах

1. Основні поняття та теореми

1. Означення *подвійного інтеграла*

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у замкненій обмеженій області D площини xOy. Розіб'ємо область D довільним чином на n елементарних областей, що мають площі $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$ і діаметри $d_1, d_2, ..., d_n$ (діаметром області називається найбільша із відстаней між двома точками контуру цієї області). У кожній з областей візьмемо довільну точку $P_k(\varepsilon_k; \eta_k)$ і помножимо значення функції в цій точці на площу елементарної області.

Інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ по області D називається сума виду

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta\sigma_k = \qquad (1)$$
$$= f(\varepsilon_1, \eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\varepsilon_2, \eta_2)\Delta\sigma_2 + f(\varepsilon_3\eta_3)\Delta\sigma_3 + ... + (\varepsilon_n, \eta_n)\Delta\sigma_n.$$

Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D називається границя інтегральної суми при умові, що найбільший із діаметрів елементарних областей прямує до нуля:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k, \eta_k)\Delta\sigma_k . \qquad (2)$$

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D, то границя інтегральної суми існує і не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні, ні від вибору точок P_k (теорема про існування подвійного інтеграла).

2. Основні властивості подвійного інтеграла

а) $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]d\sigma = \iint_D f_1(x,y)d\sigma \pm f_2(x,y)d\sigma$;

б) $\iint\limits_D c\, f(x,y)d\sigma = c\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$, де c – стала;

в) Якщо область інтегрування D розбита на дві області D_1 і D_2, то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma;$$

г) Теорема про середнє значення.

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в зв'язаній замкненій квадрованій області D, то в цій області існують такі точки $(\overline{x},\ \overline{y})$, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y})S, \text{ де } S \text{ - площа області } D. \qquad (3)$$

В декартових координатах подвійний інтеграл записують так:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3. Правила обчислення подвійного інтеграла

Розділяють дві основні області інтегрування.

а) Область інтегрування D обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, а знизу і зверху - неперервними кривими $y = \phi_1(x)$ і $y = \phi_2(x)$ $\phi_1(x) < \phi_2(x)$, кожна з яких перетинається вертикальною прямою тільки в одній точці (рис.1).

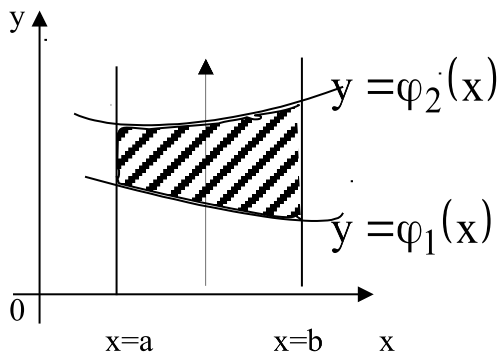


Рис.1

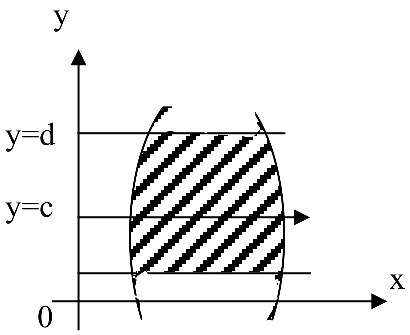


Рис. 2

Для такої області подвійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{4}$$

причому спочатку обчислюється інтеграл

$$\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x.y)dy,$$

в якому x є величина стала.

б) *Область інтегрування* D обмежена знизу і зверху прямими $y=c$ і $y=d$ $(c<d)$, а зліва і справа - неперервними кривими $x=\psi_1(y)$ і $x=\psi_2(y)$ $(\psi_1(y)\le\psi_2(y))$, кожна з яких перетинається горизонтальною прямою тільки в одній точці (рис.2).

Для такої області подвійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \tag{5}$$

причому спочатку обчислюється інтеграл

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx,$$

в якому y є величина стала.

Праві частини формул (4), (5) називають двократними, або повторними інтегралами.

4. Застосування подвійного інтеграла

а) *Площа плоскої фігури*, обмеженої областю D, знаходиться за формулою

$$S = \iint_D dxdy \tag{6}$$

б) *Об'єм тіла обертання*, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x;y)$, знизу площиною $z = 0$ і з боків прямою циліндричною поверхнею, що відтинає на площині xOy область D, обчислюється за формулою

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{7}$$

в) Якщо гладку однозначну поверхню задано рівнянням $z = f(x,y)$, то *площа поверхні* визначається за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy, \tag{8}$$

де D - проекція заданої поверхні на площину xOy.

г) Якщо пластинка займає область D площини xOy і має змінну поверхневу густину $\rho = \rho(x,y)$, то *маса* M *пластинки* обчислюється за формулою

$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy \tag{9}$$

д) *Статичні моменти* M_x і M_y пластинки відносно осі Ox та осі Oy рівні:

$$M_x = \iint_D y \cdot \rho(x,y)dxdy,$$
$$My = \iint_D x \cdot \rho(x,y)dxdy. \qquad (10)$$

Якщо пластинка однорідна, то $\rho = const$.

е) Координати *центра маси* пластинки $\overline{x}, \overline{y}$ визначають за формулами:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M}, \ \overline{y} = \frac{M_x}{M}, \qquad (11)$$

де M - маса пластинки і M_x, M_y - її статичні моменти відносно осей координат.

Якщо пластинка однорідна, ці формули набувають виду:

$$\overline{x} = \frac{\iint_D xdxdy}{S}; \quad \overline{y} = \frac{\iint_D ydxdy}{S} \qquad (12)$$

є) *Моменти інерції* пластинки відносно осі Ox та осі Oy відповідно рівні:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy,$$
$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy. \qquad (13)$$

ж) Момент інерції пластинки відносно початку координат дорівнює:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy = I_x + I_y \qquad (14)$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1.Оцінити інтеграл $\alpha^{-2} \iint_D (x + y + 1)dxdy$, де D – прямокутник $0 \le x \le \alpha, \ \ 0 \le y \le 2\alpha$, та обчислити середнє арифметичне цих оцінок.

2. Знайти середнє значення функції $z = 2x + y$ в області, що обмежена осями координат та прямою $x + y = \alpha$.

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xdxdy$, де D - область,

обмежена лініями $y = x^2$, $y = \alpha \ \ (x \geq 0)$.

4. Знайти подвійним інтегруванням площу фігури, що міститься між параболою $y = 36\alpha x$ та прямою $y = 6x$.

5. Знайти статичний момент однорідної плоскої фігури (щільність $\rho = 1$) прямокутника зі сторонами α та 2α відносно сторони α.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Оцінити інтеграл $I = \dfrac{1}{150^2} \iint\limits_D (x + y + 1)dxdy$,

де D - прямокутник $0 \leq x \leq 150, \ 0 \leq y \leq 300$, та обчислити середнє арифметичне цих оцінок.

Розв'язання:

Оскільки підінтегральна функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області D, то за теоремою Вейєрштрасса функція $f(x,y)$ в області D має своє найбільше і найменше значення $m \leq f(x,y) \leq M$.

Використовуючи властивості подвійного інтеграла, дістанемо, що

$$m \cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S,$$

де S - площа області D, а m та M - її найменше та найбільше значення в цій області.

В даному випадку $S = 150 \cdot 300 = 45000$ (кв.од),

$$m = \frac{1}{150^2}(0 + 0 + 1) = \frac{1}{150^2},\ M = \frac{1}{150^2}(150 + 300 + 1) = \frac{451}{150^2}.$$

Тоді заданий інтеграл оціниться таким чином:

$$\frac{1}{150^2} \cdot 45000 \leq \frac{1}{150^2} \iint\limits_D (x + y + 1)dxdy \leq \frac{451}{150^2} \cdot 45000;$$

$$2 \leq \frac{1}{150^2} \iint\limits_D (x + y + 1)dxdy \leq 451 \cdot 2.$$

Середнє арифметичне оцінок дорівнює $\dfrac{2+451\cdot 2}{2}=452$.

Відповідь: *452*.

2. Знайти середнє значення функції $z=2x+y$ в області, що обмежена осями координат та прямою $x+y=170$.

Розв'язання:

Для знаходження середнього значення функції на області її визначення (рис.3), згідно з теоремою про середнє значення функції (3), необхідно спочатку обчислити подвійний інтеграл і площу самої області.

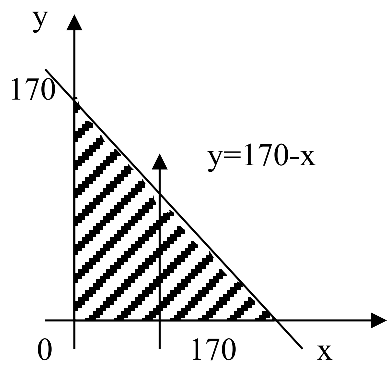


Рис. 3

Отже,

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 170^2$, а оскільки $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 170;\ 0\le y\le 170-x\}$,

то згідно з (4)

$$\iint\limits_D (2x+y)dxdy=\int\limits_0^{170}dx\int\limits_0^{170-x}(2x+y)dy=\int\limits_0^{170}(2xy+\frac{y^2}{2})\Bigg|_0^{170-x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{170}(2x(170-x)+\frac{(170-x)^2}{2})dx=\int\limits_0^{170}(340x-2x^2+\frac{(170-x)^2}{2})dx=$$

$$=\left(340\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{(170-x)^3}{2\cdot 3}\right)\Bigg|_0^{170}=170\cdot 170^2-\frac{2}{3}\cdot 170^3+\frac{170^3}{6}=$$

$$=\frac{170^3(6-4+1)}{6}=\frac{170^3}{2}.$$

Тоді з формули (3) дістанемо, що середнє значення дорівнює:

$$f(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{2}{170^2}\cdot\frac{170^3}{2}=170.$$

Відповідь: *170*.

3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xdxdy$, де D - область, обмежена лініями $y=x^2, y=100\ (x\geq 0)$.

Розв'язання:

Розглянувши область D (рис.4), знайдемо, що

$$D=\{(x,y):\ \ 0\leq x\leq\sqrt{100},\ \ x^2\leq y\leq 100\}.$$

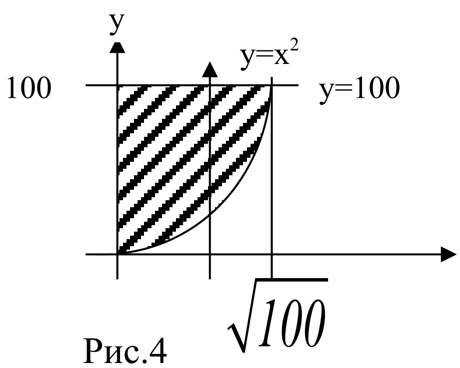


Рис.4

Звівши подвійний інтеграл до двократного за (4), дістанемо

$$\iint_D xdxdy=\int_0^{10}xdx\int_{x^2}^{100}dy=\int_0^{10}x(100-x^2)dx=\left(100\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{10}=$$

$$=50\cdot 10^2 - \frac{10^4}{4} = 5000 - \frac{10000}{4} = \frac{20000 - 10000}{4} = \frac{10000}{4} = 2500.$$

Відповідь: *2500*.

4. Знайти подвійним інтегруванням площу фігури, що міститься між параболою $y = 3600x$ та прямою $y = 6x$.

Розв'язання:

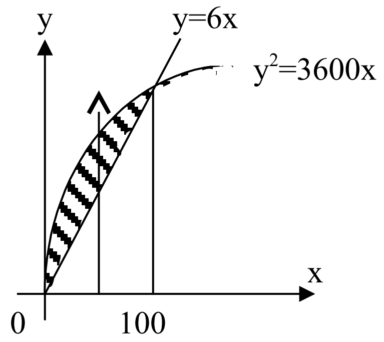


Рис. 5

Для знаходження площі фігури, зобразимо її спочатку в системі координат (рис.5), а потім застосуємо формулу для знаходження площі плоскої фігури (6)

$$S = \iint_D dxdy.$$

Для цього розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y^2 = 3600x \\ y = 6x \end{cases}$ і знайдемо координати точок перетину A і O:

$$\sqrt{3600x} = 6x;$$

$$60\sqrt{x} - 6x = 0;$$

$$6\sqrt{x}(10 - \sqrt{x}) = 0;$$

$$x_1 = 0;\ \ x_2 = 100;$$

$$y_1 = 0;\ \ y_2 = 600.$$

Отже, точки перетину $O(0;0)$ і $A(100;600)$, а область D прийме вид:

$$D = \{(x,y):\ \ 0 \le x \le 100,\ \ 6x \le y \le 60\sqrt{x}\}.$$

Використовуючи формулу (4), дістанемо, що

$$S = \int\limits_0^{100} dx \int\limits_{6x}^{60\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^{100} (60\sqrt{x} - 6x)dx = 6\int\limits_0^{100} (10\sqrt{x} - x)dx =$$

$$= 6\left(2 \cdot 10\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^{100} = 6\left(\frac{20}{3}\sqrt{100^3} - \frac{1}{2}100^2 \right) =$$

$$= 6\left(\frac{20000}{3} - \frac{10000}{2} \right) = 10000.$$

Відповідь: *1000.*

5. Знайти статичний момент однорідної плоскої фігури (щільність $\rho = 1$) – прямокутника зі сторонами довжиною 200 та 400 відносно сторони довжиною 200.

Розв'язання:

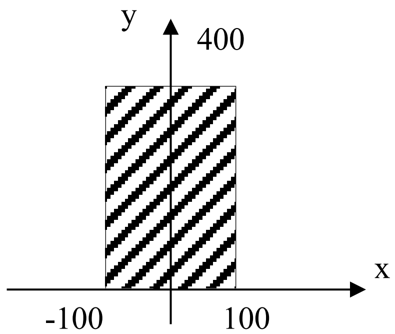


Рис. 6

Область, статичний момент якої треба знайти, зображена на рис.6. Скориставшись формулами (10), маємо $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy = \iint\limits_D ydxdy$, оскільки

$$\rho(x,y) \equiv 1 \cdot$$

Використовуючи формулу (4) і те, що область D, має вид:

$$D = \{(x,y) : -100 \le x \le 100, \ \ 0 \le y \le 400\},$$

дістанемо

$$M = \int\limits_{-100}^{100} dx \int\limits_0^{400} ydy = \int\limits_{-100}^{100} \frac{400^2}{2} dx = \int\limits_{-100}^{100} 80000dx = 80000x \Big|_{-100}^{100} =$$

$$= 80000(100 + 100) = 16000000.$$

Відповідь: *16000000.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити подвійний інтеграл $I = \frac{1}{\alpha^4}\iint\limits_D y^2\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dxdy$, де D - круг радіуса α, з центром в початку координат.

2. Обчислити суму моментів інерції прямокутника відносно його основи $\sqrt{\alpha}$ і висоти $2\sqrt{\alpha}$.

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = \alpha^2$ та $x^2 + z^2 = \alpha^2$.

4. Знайти площу, обмежену гіперболами $y = \frac{\alpha^2}{x},\ y = \frac{2\alpha^2}{x}$ і прямими $x = 1,\ x = 2$.

5. Знайти координати центра маси однорідної $(\rho(x,y) = 1)$ області, обмеженої верхнього частиною еліпса, яка опирається на велику піввісь, якщо канонічне рівняння еліпса $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1.$

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити подвійний інтеграл $I = \frac{1}{9}\iint\limits_D y^2\sqrt{3 - x^2}\,dxdy$, де D – круг радіуса $\sqrt{3}$ з центром в початку координат.

Розв'язання:

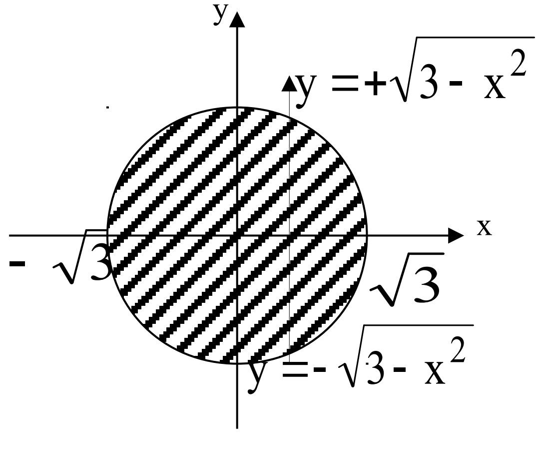


Рис. 7

Контур області D (рис.7) має рівняння $x^2 + y^2 = 3$, звідки $y = \pm\sqrt{3 - x^2}$. Очевидно, $y = \sqrt{3 - x^2}$ є рівняння верхнього півкола, а $y = -\sqrt{3 - x^2}$ - рівняння нижнього півкола. Таким чином, при сталому x із проміжку $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ змінна y

змінюється від $-\sqrt{3-x^2}$ до $\sqrt{3-x^2}$. Тобто, область D, матиме вид:

$$D=\left\{(x;y):-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3},-\sqrt{3-x^2}\le y\le\sqrt{3-x^2}\right\}.$$

За формулою (4), враховуючи парність по y підінтегральної функції, дістанемо:

$$I=\frac{1}{9}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}dx\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3+x^2}}y^2\sqrt{3-x^2}\,dy=\frac{2}{9}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{3-x^2}\,dx\int_{0}^{\sqrt{3-x^2}}y^2dy.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл:

$$\int_{0}^{\sqrt{3-x^2}}y^2dy=\frac{y^3}{3}\Bigg|_{0}^{\sqrt{3-x^2}}=\frac{\left(3-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Потім знову, враховуючи парність по x, дістанемо:

$$I=\frac{2}{27}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)^2dx=\frac{4}{27}\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)^2dx=\frac{4}{27}\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(9-6x^2+x^4\right)dx=$$

$$=\frac{4}{27}\left(9x-\frac{6x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}}=\frac{4}{27}\left(9\sqrt{3}-2\left(\sqrt{3}\right)^3+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{5}\right)=$$

$$=\frac{4\cdot 24\sqrt{3}}{27\cdot 5}=\frac{32\sqrt{3}}{45}\approx 1{,}2317.$$

Відповідь: *1,2317*.

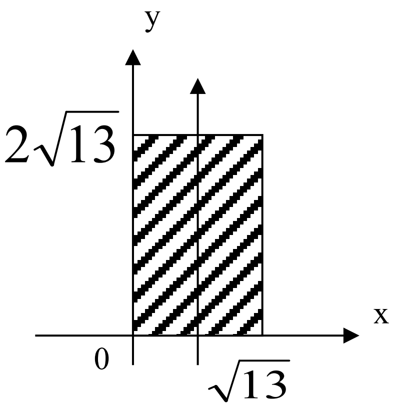


Рис. 8

2. Обчислити суму моментів інерції прямокутника відносно його основи і висоти, якщо основа прямокутника дорівнює $\sqrt{13}$ см, а висота - $2\sqrt{13}$ см.

Розв'язання:

Розмістимо осі декартової системи координат так, як це показано на рис. 8. Моменти інерції прямокутника відносно його основи і висоти є відповідно його моменти інерції відносно осі Ox та осOyі.

За формулами (13), враховуючи, що $\rho(x,y)=1$, а

$$D=\left\{(x;y):0\le x\le\sqrt{13},0\le y\le 2\sqrt{13}\right\},$$

маємо:

$$I_x=\iint_D y^2dxdy=\int_0^{\sqrt{13}}dx\int_0^{2\sqrt{13}}y^2dy=\int_0^{\sqrt{13}}\left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{2\sqrt{13}}\right)dx=\frac{104\sqrt{13}}{3}\int_0^{\sqrt{13}}dx=$$

$$=\frac{104\sqrt{13}}{3}\left.x\right|_0^{\sqrt{13}}=\frac{104\cdot 13}{13}=\frac{1352}{3}.$$

Аналогічно,

$$I_y=\iint_D x^2dxdy=\int_0^{\sqrt{13}}x^2dx\int_0^{2\sqrt{13}}dy=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\sqrt{13}}\cdot\left.y\right|_0^{2\sqrt{13}}$$

$$=\frac{13\cdot\sqrt{13}}{3}\cdot 2\sqrt{13}=\frac{26\cdot 13}{3}=\frac{338}{3}.$$

А сума моментів:

$$I_x+I_y=\frac{1352}{3}+\frac{338}{3}=\frac{1690}{3}\approx 563,333.$$

Відповідь: $563,333$.

3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=21$ та $x^2+y^2=21$.

Розв'язання:

Розглянемо восьму частину заданого тіла (рис.9). Згідно з формулою для об’єму тіла (7), де D має вид:

$$D = \left\{ (x;y) : 0 \le x \le \sqrt{21}, 0 \le y \le \sqrt{21 - x^2} \right\},$$

дістанемо:

$$\frac{1}{8}V = \iint\limits_D \sqrt{21 - x^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{21}} \sqrt{21 - x^2}\,dx \int\limits_0^{\sqrt{21 - x^2}} dy = \int\limits_0^{\sqrt{21}} (21 - x^2)dx =$$

$$= \left[21x - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^{\sqrt{21}} = 21\sqrt{21} - \frac{21\sqrt{21}}{3} = 14\sqrt{21}.$$

Отже, $V = 112\sqrt{21} \approx 513,2485.$
Відповідь: *513,2485*.

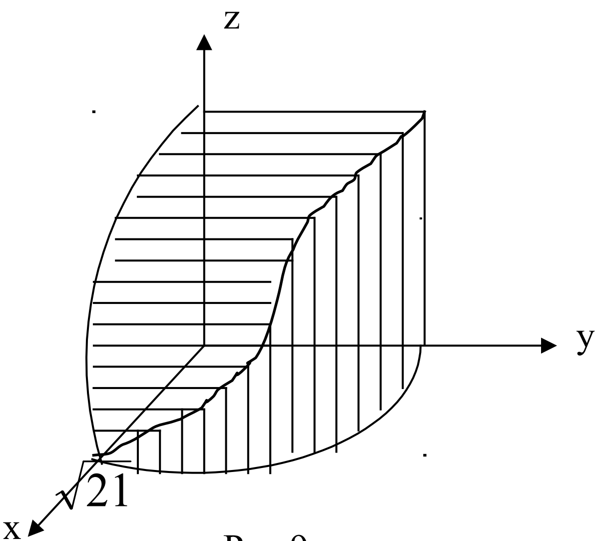
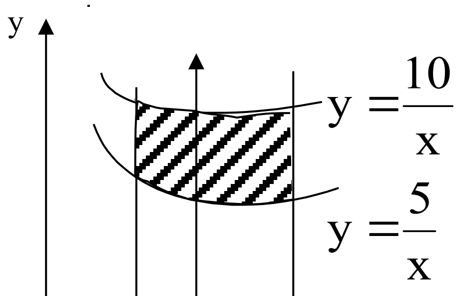


Рис.9



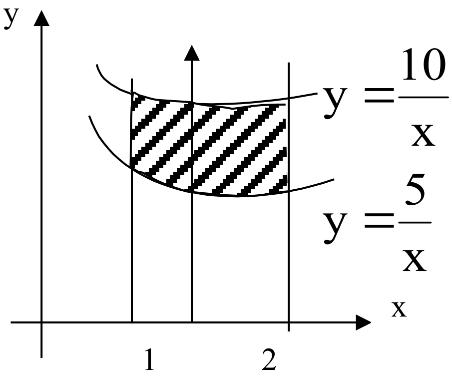


Рис. 10

4. Знайти площу, обмежену гіперболами $y = \frac{5}{x}$, $y = \frac{10}{x}$ та прямими $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання:

Плоска фігура, площу якої потрібно обчислити, зображена на рис. 10. Згідно з формулою для знаходження площі (6), де D має вид:

$D = \left\{ (x; y) : 1 \le x \le 2,\ \frac{5}{x} \le y \le \frac{10}{x} \right\}$, дістанемо:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{5}{x}}^{\frac{10}{x}} dy = \int_1^2 \left(\frac{10}{x} - \frac{5}{x} \right) dx = 5 \int_1^2 \frac{dx}{x} =$$

$$= 5 \ln|x| \Big|_1^2 = 5(\ln 2 - \ln 1) = 5 \ln 2 \approx 3,4658.$$

Відповідь: *3,4658*.

5. Знайти координати центра маси однорідної $(\rho(x, y) = 1)$ області, обмеженої верхньою частиною еліпса $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$, що опирається на велику піввісь.

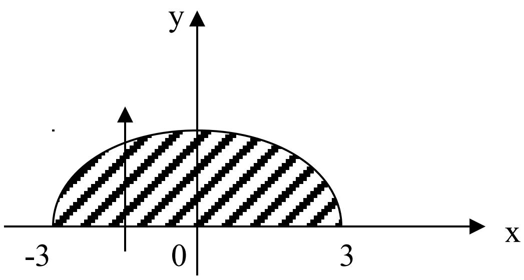


Рис.11

Розв'язання:

Оскільки верхня частина еліпса є фігура, симетрична відносно осі Oy, то центр маси знаходиться на осі Oy (рис.11), тобто $\overline{x}=0$. Знайдемо $\overline{y}$.

Згідно з формулою для координат центра маси однорідної пластини (11) потрібно спочатку знайти її статичний момент M_x і масу пластини M. Для еліпса, заданого канонічним рівнянням $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$, згідно з формулою (10), дістанемо $M_x=\iint\limits_D y\,dxdy$, де область D має вид

$$D=\left\{(x;y):\ -3\le x\le 3,\ 0\le y\le\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}.$$

Тоді,

$$M_x=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}}ydy=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{3}y^2\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}\int\limits_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{5\cdot 2}{18}\int\limits_{0}^{3}\left(9-x^2\right)dx=\frac{5}{9}\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{5}{9}\left(27-\frac{27}{3}\right)=10,$$

а згідно з формулою (9), маса області D

$$M=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}}dy=\int\limits_{-3}^{3}y\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{2\sqrt{5}}{3}\int\limits_{0}^{3}\sqrt{9-x^2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{lcc} x=3\sin t & \frac{x}{0} & \frac{t}{0} \\ dx=3\cos t dt & 3 & \frac{\pi}{2} \end{array}\right| =\frac{2\sqrt{5}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t dt=6\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=3\sqrt{5}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=3\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{3}{2}\sqrt{5}\pi.$$

Таким чином,

$$\overline{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{10\cdot 2}{3\cdot\sqrt{5}\pi}=\frac{20\sqrt{5}}{3\cdot 5\pi}\approx 0,949\,.$$

Відповідь: *0,949*.

Практична робота 2. Обчислення подвійного інтеграла повторним інтегруванням у полярних координатах

1. Основні поняття та теореми

Перетворення подвійного інтеграла від прямокутних координат x, y до *полярних координат*, які зв'язані з прямокутними координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \end{cases} \tag{1}$$

виконується за формулами:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\,dr\,d\phi \tag{2}$$

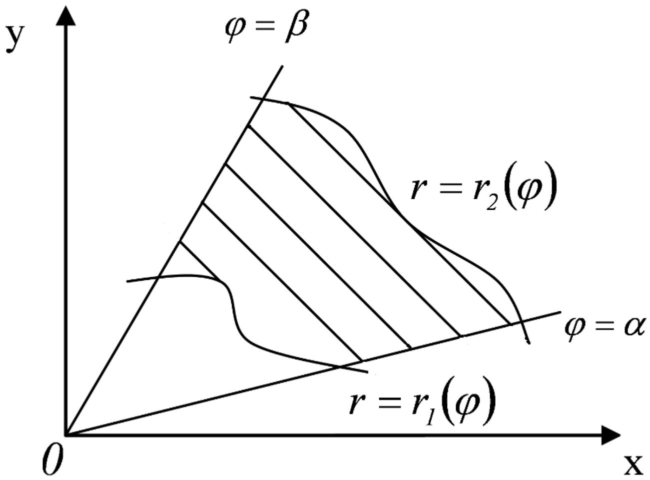


Рис 1

Якщо область інтегрування D обмежена двома променями (рис.1), які виходять із полюса: $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, і двома кривими $r = r_1(\phi)$ та $r = r_2(\phi)$, де $r_1(\phi)$ і $r_2(\phi)$ – однозначні функції при $\alpha \le \phi \le \beta$ і $r_1(\phi) \le r_2(\phi)$, то подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_D F(r,\phi)r\,dr\,d\phi = \int\limits_\alpha^\beta d\phi \int\limits_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} F(r,\phi)r\,dr, \tag{3}$$

де $F(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)$, причому спочатку обчислюється інтеграл

$$\int\limits_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} F(r,\phi)r\,dr,$$

в якому ϕ приймається сталим.

Площа плоскої фігури в полярних координатах обчислюється за формулою:

$$S = \iint_D r\,dr\,d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{f_1(\phi)}^{f_2(\phi)} r\,dr, \qquad (4)$$

$$\alpha \le \phi \le \beta,\ f_1(\phi) \le r \le f_2(\phi).$$

Об'єм циліндричного тіла визначається за формулою:

$$V = \iint_D f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\,dr\,d\phi.$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Оцінити інтеграл $\frac{\alpha^{-2}}{\pi} \iint_D (4r^2 - 3r^2\cos^2\phi + 9)d\sigma$, де D - круг $r \le \alpha$. Обчислити середнє арифметичне цих оцінок.

2. Знайти середнє значення функції $z = 3\sqrt{\alpha^2 - r^2}$ в крузі $r \le \alpha$.

3. Обчислити за допомогою переходу до полярних координат подвійний інтеграл $\frac{1}{\pi} \iint_D (2 - 3x - 3y)\,dx\,dy$, де D - круг $x^2 + y^2 \le \alpha^2$.

4. Знайти подвійним інтегруванням площу області, обмежену лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2\alpha^2(x^2 - y^2)$.

5. Знайти подвійним інтегруванням статичний момент однорідної плоскої фігури (щільність $\rho = 1$) - півкруга відносно діаметра 2α.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Оцінити інтеграл $\frac{1}{13\pi} \iint_D (4r^2 - 3r^2\cos^2\phi + 9)d\sigma$, де D -

круг $r \le \sqrt{13}$. Обчислити середнє арифметичне оцінок.

Розв'язання:

Використовуючи властивості подвійного інтеграла , дістанемо, що: $m \cdot S \le I \le M \cdot S$, де S - площа області D, а m і M - її найменше та найбільше значення. В даному випадку $m = \dfrac{9}{13\pi}$ при $r = 0$; $M = \dfrac{4 \cdot 13 + 9}{13\pi} = \dfrac{61}{13\pi}$ при $r = \sqrt{13}$ і $\phi = \dfrac{\pi}{2}$; $S = \pi r^2 = 13\pi$.

Тоді матимемо таку оцінку:

$$\frac{9}{13\pi} \cdot 13\pi \le I \le \frac{61}{13\pi} \cdot 13\pi;$$

$$9 \le I \le 61.$$

Отже, середнє арифметичне цих оцінок $\dfrac{9 + 61}{2} = 35$.

Відповідь: 35.

2. Знайти середнє значення функції $z = 3\sqrt{13 - r^2}$ у крузі $r \le \sqrt{13}$.

Розв'язання:

Використовуючи теорему про середнє значення функції , дістанемо:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$ де S - площа області D.

Для даного інтеграла область D у полярних координатах (1) має вид:

$$D = \{(r, \phi):\ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le \sqrt{13}\}.$$

Отже, використовуючи (2) і (3), маємо:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{13}} 3\sqrt{13 - r^2}\, r\, dr =$$

$$=-\frac{6\pi}{2}\int_0^{\sqrt{13}}\left(13-r^2\right)^{1/2}d(13-r^2)=-3\pi\frac{\left(13-r^2\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{13}}=$$

$$=-2\pi\left(13-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{13}}=2\pi\cdot 13^{\frac{3}{2}}=2\pi\left(\sqrt{13}\right)^3=26\pi\sqrt{13}.$$

Так як $S=\pi r^2=13\pi$, то

$$f(\bar{x},\bar{y})=\frac{26\pi\sqrt{13}}{13\pi}=2\sqrt{13}\approx 7,211.$$

Відповідь: $7,211$.

3. Обчислити за допомогою переходу до полярних координат подвійний інтеграл:

$$\frac{1}{\pi}\iint_D(2-2x-3y)\,dx\,dy,\ \text{де } D-\text{круг } x^2+y^2\le 20.$$

Розв'язання:

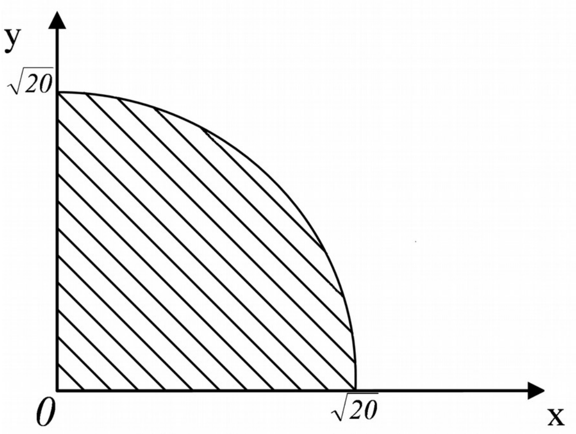


Рис 2

Використовуючи формули (2) і (3), де область D (рис.2) у полярних координатах прийме вид $D=\{(r,\phi):\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{20}\}$, дістанемо:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D}(2-2x-3y)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}d\phi\int\limits_{0}^{\sqrt{20}}(2-2r\cos\phi-3r\sin\phi)r\,dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(2\frac{r^2}{2}-2\frac{r^3}{3}\cos\phi-\frac{r^3}{3}\sin\phi\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{20}}d\phi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(20-\frac{2}{3}\left(\sqrt{20}\right)^3\cos\phi-\left(\sqrt{20}\right)^3\sin\phi\right)d\phi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(20\phi-\frac{2}{3}\left(\sqrt{20}\right)^3\sin\phi+\left(\sqrt{20}\right)^3\cos\phi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{1}{\pi}40\pi=40.$$

Відповідь: 40.

4. Знайти подвійним інтегруванням площу області, обмежену лінією $\left(x^2+y^2\right)^2=20\left(x^2-y^2\right)$.

Розв'язання:

В наслідок симетрії даної фігури (рис.3), досить обчислити площу заштрихованої області і результат помножити на 4.

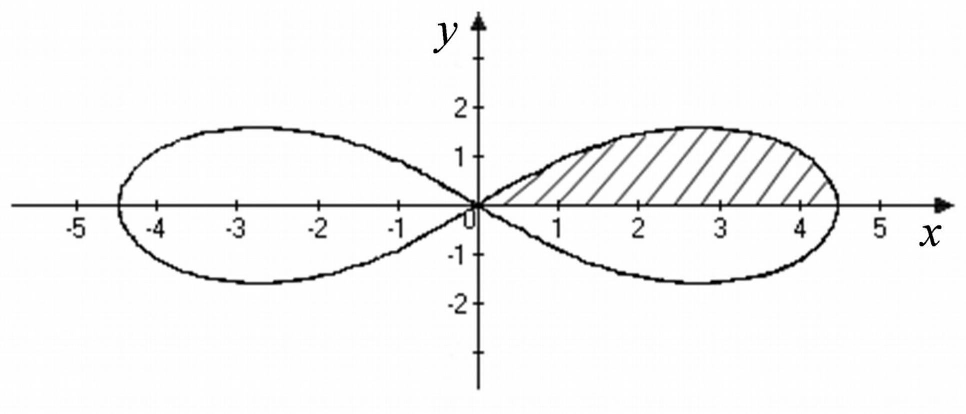


Рис.3

Для зручності перейдемо до полярних координат r і ϕ. Згідно з (1), дістанемо:

$$(r^2cos^2\phi \; + \; r^2sin^2\phi \,)^2 \;\; = 20(r^2cos^2\phi \; - \; r^2sin^2\phi \,);$$

$$r^2 \; =20cos2\phi.$$

Тоді область D заштрихованої частини в полярних координатах матиме вид:

$$D \; = \; \left\{ (\, r,\phi \,): \; 0 \; \leq \phi \leq \; \frac{\pi}{4}, \;\; 0 \leq r \; \leq \sqrt{20\,cos\,2\phi} \right\}.$$

Таким чином, площа області D згідно з (4) рівна:

$$S = \iint\limits_{D} rdrd\phi - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int\limits_{0}^{\sqrt{20\,cos\,2\phi}} rdr = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\left. \frac{r^2}{2} \right|_{0}^{\sqrt{20\,cos\,2\phi}} \right) d\phi =$$

$$= \frac{20}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos\,2\phi \; d\phi = 10 \left. \frac{sin2\phi}{2} \right|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 5(sin\frac{\pi}{2} - \; sin0\,) = 5.$$

Площа заданої фігури $S_{\hat{O}} \; = 4 \cdot 5 = 20$.

Відповідь: *20*.

5. Знайти подвійним інтегруванням статичний момент однорідної плоскої фігури $\left(\, \rho(x,y) \; \equiv \; 1 \right)$ - півкруга відносно діаметра $2\sqrt{17}$.

Розв'язання:

Для зручності перейдемо до полярних координат. Використовуючи (1), дістанемо рівняння півкола (рис.4) у полярних координатах:

$$x^2 + y^2 \;\; = \, 17 \, ,$$

$$r^2cos^2\phi + r^2sin^2\phi \;\; = \, 17 \, ,$$

$$r^2 \;\; = \, 17 \, .$$

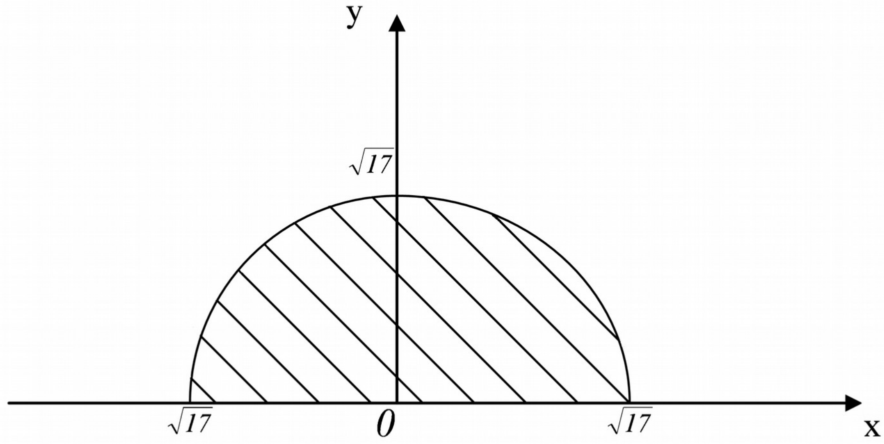


Рис 4

Для знаходження статичного моменту, за відповідними формулами (формули (2), (3)), дістанемо:

$$M_x = \iint\limits_D y\,dxdy = \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{17}} r\,sin\phi r\;dr = \int_0^{\pi} sin\phi \left(\left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{\sqrt{17}} \right) d\phi =$$

$$= \frac{17\sqrt{17}}{3}\int_0^{\pi} sin\phi\; d\phi = - \frac{17\sqrt{17}}{3} \left. cos\phi \right|_0^{\pi} = \frac{17\sqrt{17}}{3} \cdot 2 = \frac{34\sqrt{17}}{3} \approx 46{,}7285.$$

Відповідь: *46,7285*.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити за допомогою переходу до полярних координат подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де D - перша чверть круга радіуса α з центром у точці $O(0;0)$.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{\alpha^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ за допомогою переходу до полярних координат за умови, що область інтегрування є круг $x^2 + y^2 \le \alpha x$.

3. Знайти площу фігури, обмежену лінією $x^3 + y^3 = \alpha xy$.

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферичною поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = 4\alpha^2$ і циліндром $x^2 + y^2 - 2\alpha y = 0$.

5. Обчислити момент інерції фігури, обмеженої кардіоідою $r = \alpha(1 + cos\phi)$, відносно осі Ox.

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити за допомогою переходу до полярних координат подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де D – перша чверть круга радіуса $R = 150$ з центром у точці $O(0;0)$ (рис.5).

Розв'язання:

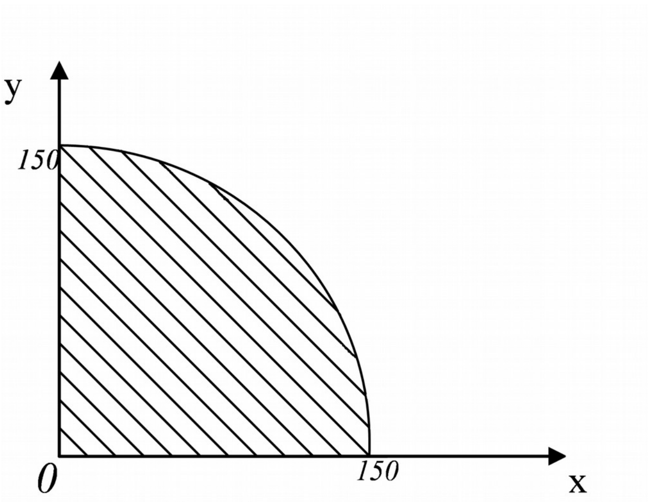


Рис 5

Використовуючи формули переходу від декартових до полярних координат (1), та формули (2), (3), де область D у полярних координатах має вид

$$D = \{(r,\phi): \ \ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \ \ 0 \le r \le 150\},$$

Дістанемо:

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint\limits_D \frac{rdrd\phi}{\sqrt{r^2 cos^2 \phi + r^2 sin^2 \phi}} = \iint\limits_D \frac{rdrd\phi}{r\sqrt{cos^2 \phi + sin^2 \phi}} =$$

$$= \iint\limits_D drd\phi = \int\limits_0^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^{150} dr = 150 \cdot \frac{\pi}{2} = 75\pi \approx 235,6194.$$

Відповідь: 235,6194.

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{7 - x^2 - y^2}\,dxdy$ за допомогою переходу до полярних координат за умови, що областю інтегрування є круг $x^2 + y^2 \le \sqrt{7}x$ (рис. 6).

Розв'язання:

Запишемо рівняння контуру (кола) в полярних координатах. Для цього в рівняння кола $x^2 + y^2 = \sqrt{7}x$ підставимо формули (1). Матимемо:

$$r^2 \cos^2\phi + r^2 \sin^2\phi = \sqrt{7} r \cos^2\phi;$$

$$r = \sqrt{7}\cos\phi.$$

Тоді область інтегрування буде:

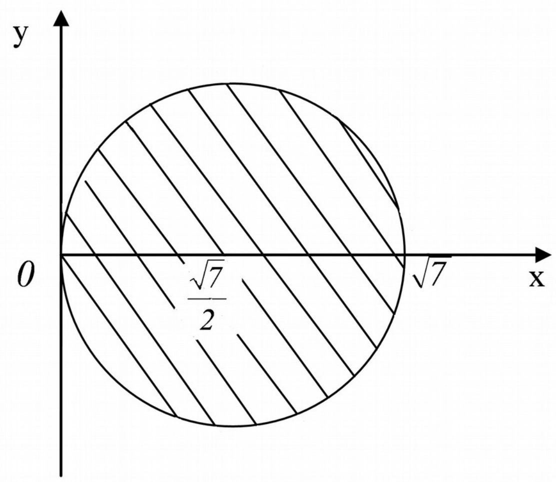


Рис 6

$$D = \{(r,\phi): \quad -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \le r \le \sqrt{7}\cos\phi\}.$$

Обчислимо інтеграл, використовуючи формули (2), (3),

$$\iint\limits_D \sqrt{7 - x^2 - y^2}\;dx\,dy = \iint\limits_D \sqrt{7 - r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi r}\;dr\,d\phi =$$

$$= \iint_D \sqrt{7 - r^2}\, r\, dr\, d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{\sqrt{7}\cos\phi} r\sqrt{7 - r^2}\, dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left[-\frac{1}{3}\sqrt{\left(7 - r^2\right)^3} \right] \Bigg|_0^{\sqrt{7}\cos\phi} \right) d\phi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\sqrt{\left(7 - 7\cos^2\phi\right)^3} - \sqrt{\left(7 - 0\right)^3} \right) d\phi =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{7}\right)^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^3\phi)\, d\phi = \frac{2\left(\sqrt{7}\right)^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - \cos^2\phi)\sin^2\phi)\, d\phi =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{7}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\phi)\, d(\cos\phi) \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{7}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2} + \left(\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{7}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2} + \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{7}\right)^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \approx 11{,}1631.$$

Відповідь: *11,1631.*

3. Знайти площу фігури, обмежену лінією $x^3 + y^3 = 200xy$ (площу петлі, рис.7).

Розв'язання:

Перетворимо дане рівняння до полярних координат за допомогою формул (1):

$$r^3(\cos^3\phi + \sin^3\phi) = 200 r^2 \sin\phi,$$

тобто

$$r = \frac{200 \sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin^3\phi + \cos^3\phi}.$$

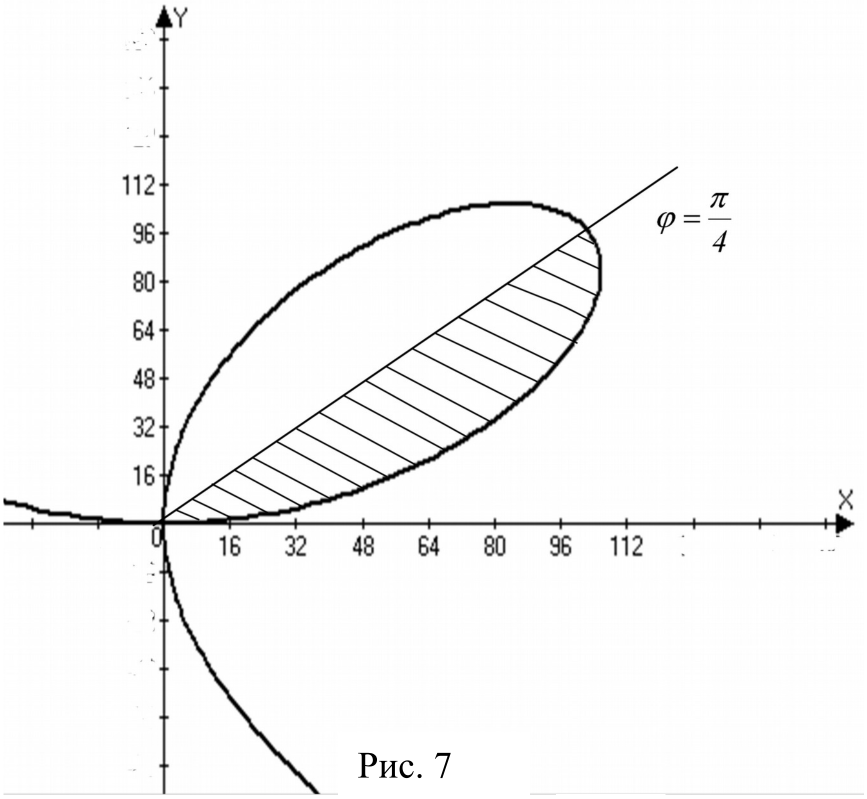


Рис. 7

Віссю симетрії петлі є промінь $\phi = \frac{\pi}{4}$, тому згідно з (4), дістанемо $S = 2\iint\limits_D r dr d\phi$, де область D у полярних координатах буде:

$$D = \{(r,\phi) : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \frac{200 \sin\phi \cdot \cos\phi}{\sin^3\phi + \cos^3\phi}\}$$

Отже,

$$S = 2\int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{\frac{200 \sin\phi \cos\phi}{\sin^3\phi + \cos^3\phi}} r dr = 200^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\phi \cdot \cos^2\phi}{\left(\sin^3\phi + \cos^3\phi\right)^2} d\phi =$$

$$= 200^2 \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{tg^2\phi \cdot \cos^4\phi}{\cos^6\phi(1 + tg^3\phi)^2} d\phi =$$

$$=\frac{40000}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3tg^2\phi}{\left(1+tg^3\phi\right)^2}d(tg\phi)=\frac{40000}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(1+3tg^3\phi)}{(1+tg^3\phi)^2}=$$

$$=-\frac{40000}{3}\cdot\frac{1}{1+tg^3\phi}\Bigg|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{40000}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{20000}{3}\approx 6666,6667.$$

Відповідь: *6666,6667.*

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферичною поверхнею $x^2+y^2+z^2=4$ і циліндром $x^2+y^2-2y=0$.

Розв'язання:

Для знаходження об'єму циліндричного тіла, спочатку обчислимо його $1/4$ частину, а саме ту, що розміщена в першому октанті. Для визначення області інтегрування розглянемо круг $x^2+y^2-2y=0$ (рис.8), який є основою циліндра. Запишемо його рівняння в полярних координатах

$$r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi=2r\sin\phi;$$
$$r=2\sin\phi.$$

Отже, в полярних координатах область інтегрування D має вид $D=\{(r,\phi):\ \ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2},\ \ 0\le r\le 2\sin\phi\}$.

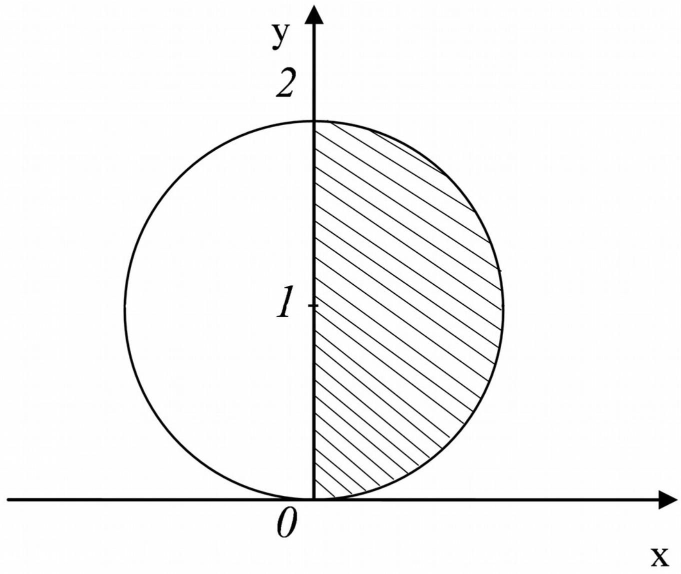


Рис.8

Тоді, згідно з (5) дістанемо:

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\sin\phi} \sqrt{4 - r^2 \cos^2\phi - r^2 \sin^2\phi}\, r\, dr =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\sin\phi} \sqrt{4 - r^2}\, d(4 - r^2) = -\frac{2}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\left. \frac{(4 - r^2)^{3/2}}{3} \right|_0^{2\sin\phi} \right) d\phi =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} ((4 - 4\sin^2\phi)^{3/2} - 4^{3/2})\, d\phi =$$

$$= \frac{\sqrt{64}}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\phi)\, d\phi == \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\phi\right) d\sin\phi \right) =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left. \left(\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3} \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9} (3\pi - 4).$$

Шуканий об'єм тіла дорівнює $V = \frac{16}{9}(3\pi - 4) \approx 9{,}644$.

Відповідь: *9,644*.

5. Обчислити момент інерції фігури, обмеженої кардіоїдою $r = \sqrt{2}(1 + cos\phi)$, відносно осі Ox (рис. 9)

Розв'язання:

Використовуючи формулу для моменту інерції $I_x = \iint\limits_D y^2\,dxdy$ і формули (2), (3), де область D в полярних координатах має вид:

$$D = \left\{ (r,\phi);\ \ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le \sqrt{2}(1 + cos\,\phi) \right\},$$

дістанемо:

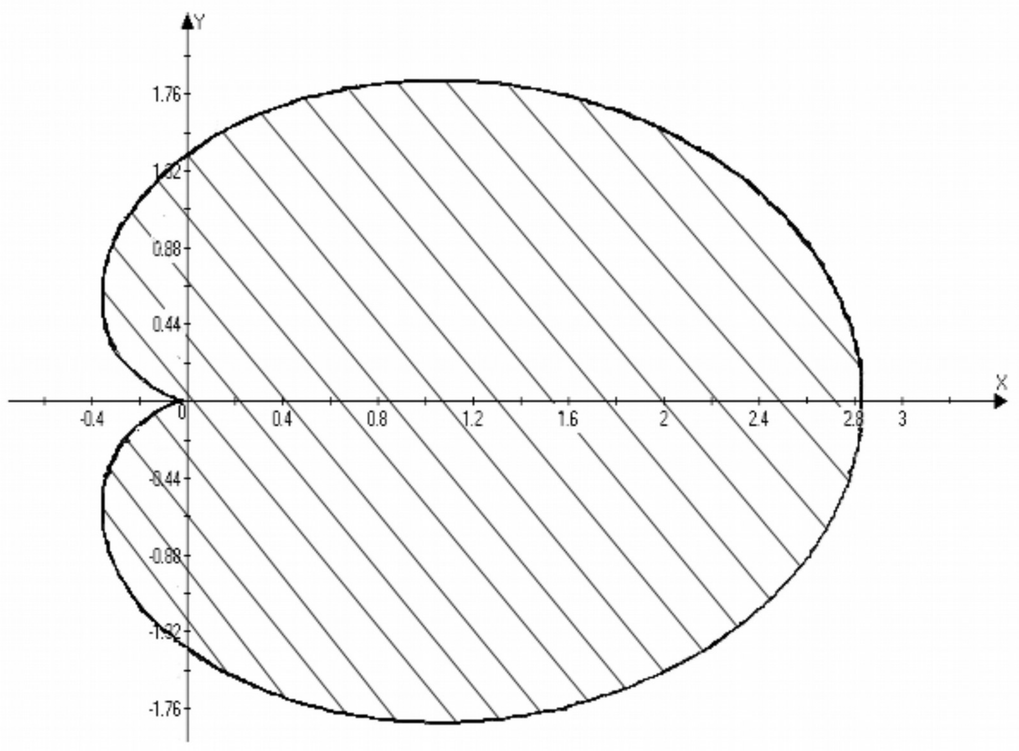


Рис. 9

$$I_x = \iint_D r^2 \sin^2\phi r\, dr\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi \int_0^{\sqrt{2}(1+\cos\phi)} r^3 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{\sqrt{2}(1+\cos\phi)} = \frac{1}{4}\cdot 4 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi (1+\cos\phi)^4\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \left(1 + 4\cos\phi + 6\cos^2\phi + 4\cos^3\phi + \cos^4\phi\right) d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi + 4\int_0^{2\pi} \cos\phi \sin^2\phi\, d\phi + 6\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \cos\phi d\phi +$$

$$+4\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \cos^3\phi d\phi + \int_0^{2\pi} \sin^2\phi \cos^4\phi d\phi.$$

Обчислимо окремо кожен із інтегралів

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\phi}{2} d\phi = \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi .$$

$$4\int_0^{2\pi} \cos\phi \sin^2\phi d\phi = 4\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\sin\phi = \frac{4}{3}\sin^3\phi \Big|_0^{2\phi} = 0.$$

$$6\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \cos^2\phi d\phi = \frac{6}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\phi d\phi = \frac{6}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\phi}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\phi - \frac{\sin 4\phi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$4\int_0^{2\pi} sin^2\phi\, cos^3\phi d\phi = 4\int_0^{2\pi} sin^2\phi\left(1 - sin^2\phi\right)cos\phi d\phi =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(sin^2\phi - sin^4\phi\right)d\, sin\phi = 4\left(\frac{sin^3\phi}{3} - \frac{sin^5\phi}{5}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} sin^2\phi\, cos^4\phi d\phi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} sin^2 2\phi\, cos^2\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1 - cos\,4\phi}{2}\cdot\frac{1 + cos\,2\phi}{2}d\phi =$$

$$\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(1 - cos\,2\phi - cos\,4\phi - cos\,4\phi\, cos2\phi\right)d\phi =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(1 - cos\,2\phi - cos\,4\phi - \frac{1}{2}\left(cos2\phi + cos\,2\phi\right)\right)d\phi =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\phi - \frac{sin\,2\phi}{2} - \frac{sin\,4\phi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{sin\,2\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{sin\,2\phi}{6}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{16}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{8}.$$

Таким чином, $I_x = \pi + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{21\pi}{8} \approx 2,625$.

Відповідь: 2,625.

Практична робота 3. Потрійний інтеграл. Обчислення потрійного інтеграла повторним інтегруванням у декатрових координатах

1. Основні поняття та теореми

1. Означення *потрійного інтеграла*.

Нехай функція трьох змінних $u = f(x,y,z)$ визначена і обмежена в кубованій просторовій області V. Розіб'ємо цю область довільним чином на n елементарних областей $V_1, V_2, ..., V_n$ з діаметрами $d_1, d_2, ... d_n$ і об'ємами $V_1, V_2, ..., V_n$. У кожній елементарній області V_k виберемо довільну точку $P_k(\varepsilon_k, \eta_k, \xi_k)$, обчислимо $f_k(\varepsilon_k, \eta_k, \xi_k)$, і помножимо на ΔV_k.

Інтегральною сумою для функції $f(x,y,z)$ по області V називається сума виду:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k, \eta_k, \xi_k)\,\Delta V_k \tag{1}$$

Потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області V називається границя інтегральної суми (1) за умови, що $\max d_k \to 0$:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dV = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x,y,z)\,\Delta V_k \tag{2}$$

Для інтегрування в області V функції дана границя існує і не залежить ні від способу розбиття області V на елементарні, ні від вибору точок P_k (теорема про існування потрійного інтеграла).

2. Правила обчислення потрійного інтеграла.

Нехай область інтегрування V визначається нерівностями:

$$x_1 \le x \le x_2,$$
$$y_1(x) \le y \le y_2(x),$$
$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ - неперервні функції . Тоді потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$ у заданій області V обчислюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}dx \int\limits_{y_{1(x)}}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \tag{3}$$

Крім формули (3) для обчислення потрійного інтеграла існує ряд інших формул. Наприклад,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2}dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)dydz, \tag{4}$$

де область D_x - переріз області V площиною, паралельною площині yOz і яка проходить через довільну точку інтервалу $(x_1;x_2)$.

Формула (4) утворюється із формули (3), якщо в ній два останні інтеграла замінити одним подвійним по області D_x.

<u>3. Застосування потрійного інтеграла.</u>

а) *Об'єм тіла*, яке займає область V**:**

$$V = \iiint\limits_V dxdydz \tag{5}$$

б) *Маса тіла*, яке займає область V**:**

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz, \tag{6}$$

де $\rho = \rho(x,y,z)$ – густина тіла.

в) *Координати центра маси* тіла:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz,$$

(7)

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz.$$

г) *Моменти інерції* відносно осей координат:

$$I_x = \iiint\limits_V \rho\left(y^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V \rho\left(x^2 + z^2\right)\, dx\, dy\, dz, \qquad (8)$$

$$I_z = \iiint\limits_V \rho\left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$

д) *Статичні моменти* тіла відносно координатних площин:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz,$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz, \qquad (9)$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz.$$

е) *Моменти інерції* тіла відносно координатних площин:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^2\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^2\, dx\, dy\, dz, \qquad (10)$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V \rho y^2\, dx\, dy\, dz.$$

ж) *Моменти інерції* відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint\limits_V \rho\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dx\, dy\, dz.$$

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\alpha} dx \int\limits_0^{2\alpha} dy \int\limits_0^{\alpha} dz$.

2. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$ та $z = x^2 + (\alpha + 1)\, y^2$ та площинами $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

3. Обчислити інтеграл $48 \int\limits_0^{\sqrt[3]{\alpha}} dx \int\limits_0^{x} dy \int\limits_0^{y} xyz\, dz$.

4. Обчислити інтеграл $180\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$, де область V обмежена гіперболічним параболоїдом $z = xy$ та площинами $x + y = \sqrt[3]{\alpha}$ та $z = 0$.

5. Знайти момент інерції однорідного тіла з масою $m = 1$, у вигляді паралелепіпеда з ребрами $a = \alpha$, $b = 2\alpha$, $c = \sqrt{2}\alpha$ відносно ребра α.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1.Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{25} dx \int\limits_0^{5} dy \int\limits_0^{25} dz$.

Розв'язання:

$$\int\limits_0^{25} dx \int\limits_0^{5} dy \int\limits_0^{25} dz = x\Big|_0^{25}\, y\Big|_0^{5}\, z\Big|_0^{25} = 25 \cdot 5 \cdot 25 = 3125.$$

Відповідь: 3125.

2. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$ та $z = x^2 + 120y^2$ та площинами $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.

Розв'язання:

Використовуючи формулу для знаходження об'єму просторового тіла (5), дістанемо:

$$V = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz,$$

де V є область інтегрування заданого тіла. Тоді за формулою (3) і використовуючи проекцію тіла на площину (рис.1), дістанемо:

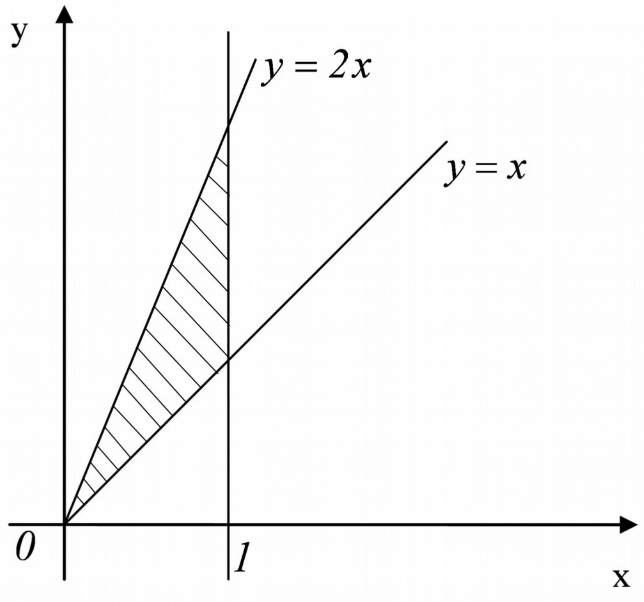


Рис.1

$$V = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+120y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + 120y^2 - x^2 - y^2)dy =$$

$$=119\int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{119}{3}\int_0^1 \left(y^3 \Big|_x^{2x} \right) dx = \frac{119}{3}\int_0^1 \left(8x^3 - x^3\right) dx =$$

$$= \frac{119}{3}\int_0^1 7x^3 dx = \frac{119 \cdot 7}{3} \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{119 \cdot 7}{3 \cdot 4} \approx 69{,}4167.$$

Відповідь: *69,4167*.

3. Обчислити інтеграл $48\int_0^5 dx \int_0^x dy \int_0^y xyz\, dz$.

Розв’язання:

$$I = 48\int_0^5 xdx \int_0^x ydy \int_0^y zdz = 48\int_0^5 xdx \int_0^x ydy \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^y = 24\int_0^5 xdx \int_0^x y^3 dy =$$

$$= \frac{24}{4}\int_0^5 xdx \cdot y^4 \Big|_0^x = 6\int_0^5 x^5 dx = \frac{6}{6} \cdot x^6 \Big|_0^5 = 5^6 = 15625.$$

Відповідь: 15625.

4. Обчислити інтеграл $180\iiint\limits_V xy\,dx\,dy\,dz$, де область V обмежена гіперболічним параболоїдом $z = x\cdot y$ та площинами $x + y = 5$ та $z = 0$.

Розв'язання:

Згідно формули (3) і використовуючи проекцію тіла на площину xOy (рис. 2), дістанемо

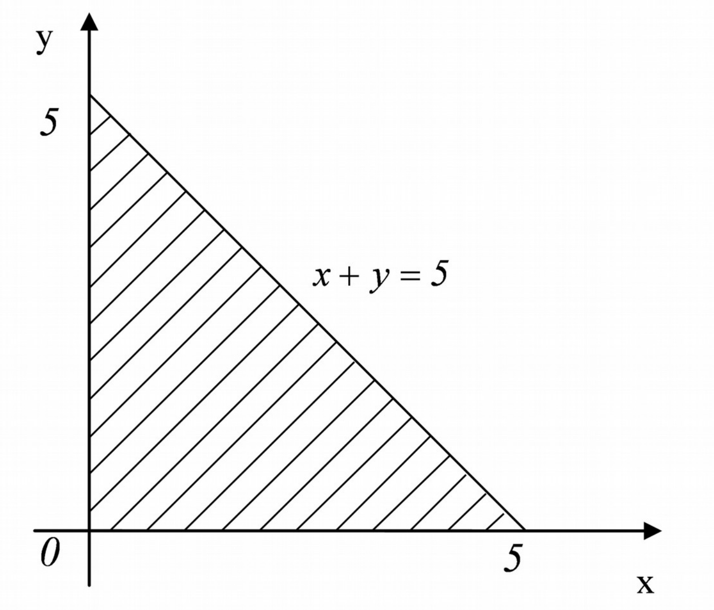


Рис.2

$$I = 180\iiint\limits_V xyzdxdydz = 180\int_0^5 xdx\int_0^{5-x} ydy\int_0^{xy} dz = 180\int_0^5 xdx\int_0^{5-x} xy^2dy =$$

$$= 180\int_0^5 x^2dx\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{5-x} = 60\int_0^5 x^2(5-x)^3\,dx = \left|\begin{array}{ll} 5 - x = t & x = 5 - t \\ x\to 0 \Rightarrow t\to 5 & dx = -dt \\ x\to 5\Rightarrow t\to 0 & \end{array}\right| =$$

$$= 60\int_0^5 (5-t)^2\,t^3\,dt = 60\int_0^5\left(25t^3 - 10t^4 + t^5\right)dt =$$

$$= 60\left(25\frac{t^4}{4} - 10\frac{t^5}{5} + \frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^5 = 60\left(25\frac{5^4}{4} - 2\cdot 5^5 + \frac{5^6}{6}\right) =$$

$$=60\cdot 5^4\left(\frac{25}{4}-10+\frac{25}{6}\right)=60\cdot 5^4\cdot\frac{75-120+50}{12}=5^5\cdot 5=5^6=15625.$$

Відповідь: *15625*.

5. Знайти момент інерції однорідного тіла з масою $m=1$ у вигляді паралелепіпеда з ребрами $a=120$, $b=240$, $c=\sqrt{2}\cdot 120$ відносно ребра a.

Розв'язання:

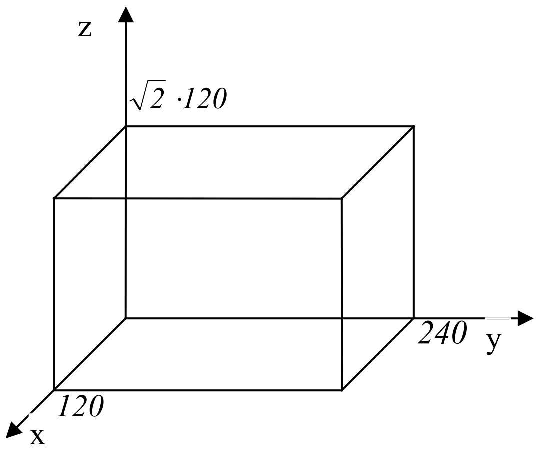


Рис. 3

Нехай ребро a паралелепіпеда співпадає з віссю Ox (рис.3), тоді згідно формул (8), (3), дістанемо:

$$I_x=\iiint\limits_V\left(y^2+z^2\right)dxdydz=\int_0^{120}dx\int_0^{240}dy\int_0^{\sqrt{2}\cdot 120}(y^2+z^2)dz=$$

$$=\int_0^{120}dx\left.\left(\sqrt{2}\cdot 120\frac{y^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2}\cdot 120\right)^3}{3}y\right)\right|_0^{240}=$$

$$=\int_0^{120}dx\int_0^{240}\left(y^2\sqrt{2}\cdot 120+\frac{\left(\sqrt{2}\cdot 120\right)^3}{3}\right)dy=$$

$$= \int_0^{120} \left(40\sqrt{2} \cdot 240^3 + \frac{\left(120\sqrt{2}\right)^3}{3} \cdot 240 \right) dx =$$

$$= 40\sqrt{2} \cdot 240^3 \cdot 120 + \left(\sqrt{2} \cdot 120\right)^3 \cdot 80 \cdot 120 =$$

$$= 40 \cdot \sqrt{2} \cdot 120^4 \cdot 2^2 (2+1) = 40 \cdot \sqrt{2} \cdot 120^4 \cdot 4 \cdot 3 = 4\sqrt{2} \cdot 120^5.$$

А, отже маємо $\dfrac{4\sqrt{2} \cdot 120^5}{120 \cdot 240 \cdot \sqrt{2} \cdot 120} = 2 \cdot 120^2 = 28800.$

Відповідь: 28800.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити потрійний інтеграл $\dfrac{1}{\alpha^5} \iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz.$, якщо область V обмежена поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2. Обчислити потрійний інтеграл $\dfrac{1}{\alpha^3} \iiint\limits_V (2x + 3y - z)\,dx\,dy\,dz$, якщо область V - тригранна призма, обмежена площинами $z = 0$, $z = 2\alpha$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = \alpha$.

3. Знайти масу куба $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \alpha$, $0 \le z \le \alpha$, якщо $\rho(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{\alpha^3}$.

4. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідної піраміди, обмеженої площинами $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ з густиною $\rho = \dfrac{\alpha}{100}$.

5. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$ і $z = \alpha x^2 + \alpha y^2$, циліндром $y = x^2$ і площиною $y = x$.

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, якщо область V обмежена поверхням $x^2+y^2+z^2=5$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Розв'язання:

Нехай задана область V, і вона проектується на площину xOy у область D яка зображена на рис.4, де D - чверть круга $x^2+y^2\le 5$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

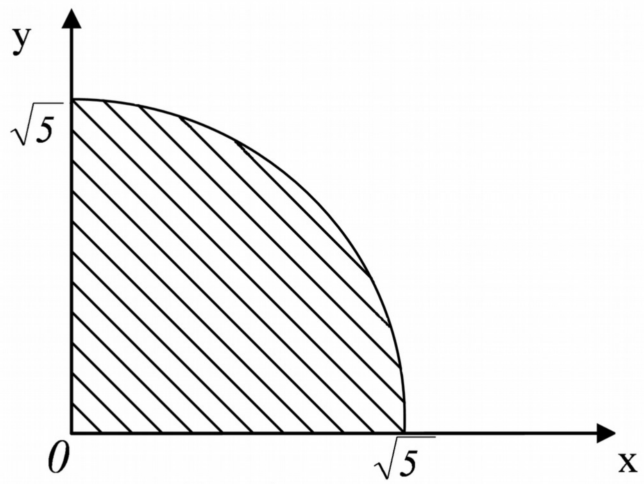


Рис 4

Тоді область V матиме вид:

$$V=\{(x,y,z):\ 0\le x\le\sqrt{5},\ 0\le y\le\sqrt{5-x^2},\ 0\le z\le\sqrt{5-x^2-y^2}\}.$$

Записавши потрійний інтеграл згідно (3), одержимо:

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz=\int\limits_0^{\sqrt{5}}xdx\int\limits_0^{\sqrt{5-x^2}}ydy\int\limits_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}}zdz=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{5}}xdx\int\limits_0^{\sqrt{5-x^2}}y(5-x^2-y^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{5}}x\left(5\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{5-x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{5}}(5x(5-x^2)-x^3(5-x^2)-\frac{x}{2}(5-x^2)^2)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{25}{2}x-5x^3-5x^3+x^5-\frac{25}{2}x+5x^3-\frac{x^5}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{25}{2}x-5x^3+\frac{x^5}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{25}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{5x^4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{25}{4}\cdot 5-\frac{5}{4}\cdot 25+\frac{1}{12}\cdot 125\right)=-\frac{125}{48}=-2,604167$$

Відповідь: $-2,604167$.

2. Обчислити потрійним інтегруванням інтеграл $\iiint\limits_V(2x+3y-z)xy\,dx\,dy\,dz$, якщо область V - тригранна призма, обмежена площинами $z=0,\ z=200,\ x=0,\ y=0,\ x+y=100$.

Розв'язання:

Нехай задана область V проектується на площину xOy в деяку область D (рис.5) і має вид: $D=\{(x;y):0\le x\le 100, 0\le y\le 100-x\}$, а сама область V в декартових координатах задана тоді так:
$V=\{(x;y;z):0\le x\le 100; 0\le y\le 100-x; 0\le z\le 200\}$.

Тоді, згідно з (3), матимемо:

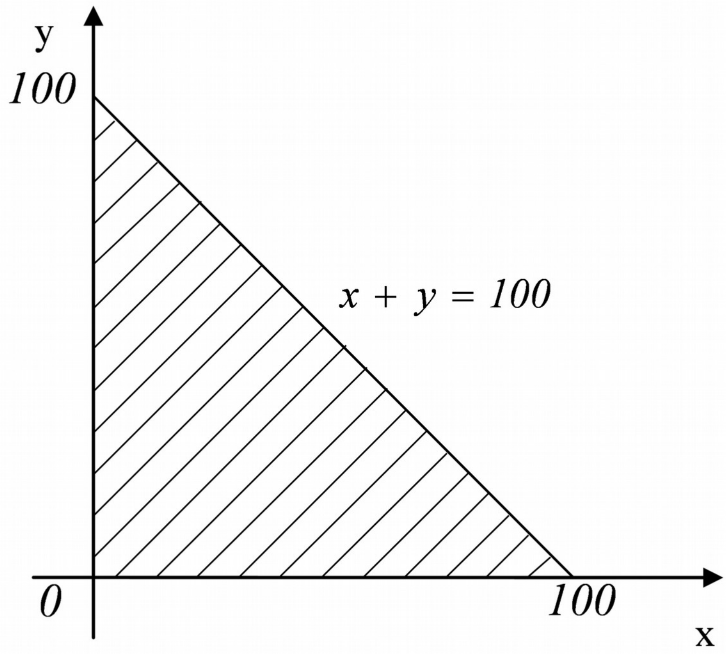


Рис.5

$$\iiint\limits_V (2x+3y-z)dxdydz = \int\limits_0^{100} dx \int\limits_0^{100-x} dy \int\limits_0^{200} (2x+3y-z)dz =$$

$$= \int\limits_0^{100} dx \int\limits_0^{100-x} \left(2xz + 3yz - \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{200} dy =$$

$$= \int\limits_0^{100} dx \int\limits_0^{100-x} \left(400x + 600y - \frac{200^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{100} \left(400xy + 600\frac{y^2}{2} - \frac{200^2}{2} y \right)\Bigg|_0^{100-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^{100} \left(400x(100-x) + 300(100-x)^2 - \frac{200^2}{2}(100-x) \right) dx =$$

$$=\int_0^{100}\left(40000x-400x^2+300(100-x)^2-\frac{200^2}{2}(100-x)\right)dx=$$

$$=\left(40000\frac{x^2}{2}-400\frac{x^3}{3}-300\cdot\frac{(100-x)^3}{3}+\frac{200^2}{2}\frac{(100-x)^2}{2}\right)\Bigg|_0^{100}=$$

$$=20000\cdot 100^2-\frac{400}{3}100^3+100\cdot 100^3-\frac{200^2}{4}100^2=$$

$$=2\cdot 100^4-\frac{4}{3}100^4+100^4-100^4=$$

$$=100^4\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{2\cdot 100^4}{3}\approx 66666666{,}67.$$

Відповідь: *66666666,67*.

3. Знайти масу куба $0\le x\le\sqrt{5},\ 0\le y\le\sqrt{5},\ 0\le z\le\sqrt{5}$, якщо $\rho(x,y,z)=\dfrac{x+y+z}{\left(\sqrt{5}\right)^3}$.

Розв'язання:

Згідно з формулою (6), одержимо $M=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz$.

де

$$v=\left\{(x,y,z):0\le y\le\sqrt{5},\ 0\le z\le\sqrt{5}\right\}.$$

Тоді, використовуючи (3), одержимо:

$$m=\frac{1}{(\sqrt{5})^3}\int_0^{\sqrt{5}}dx\int_0^{\sqrt{5}}dy\int_0^{\sqrt{5}}(x+y+z)dz=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{5})^3}\int_0^{\sqrt{5}}dx\int_0^{\sqrt{5}}(xz+yz+\frac{z^2}{2})\bigg|_0^{\sqrt{5}}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5^3}}\int_0^{\sqrt{5}}dx\int_0^{\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}x+\sqrt{5}y+\frac{5}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{5})^3}\int_0^{\sqrt{5}}(\sqrt{5}xy+\sqrt{5}\frac{y^2}{2}+\frac{5}{2}y)\bigg|_0^{\sqrt{5}}dx=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{5}\right)^3}\int_0^{\sqrt{5}}\left(\left(\sqrt{5}\right)^2x+\left(\sqrt{5}\right)^3\frac{1}{2}+\left(\sqrt{5}\right)^3\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^3}\int_0^{\sqrt{5}}\left(x+\sqrt{5}\quad\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{5}x\right)\bigg|_0^{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{5}{2}+5)\ =7\frac{15}{2\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{5}}{2\cdot 5}=$$

$$=\frac{3\sqrt{5}}{2}\approx 3,3541.$$

Відповідь: *3,3541*.

4. Обчислити момент інерції відносно осі Oz однорідної, піраміди, обмеженої площинами $x+2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ з густиною $\rho=0,25$.

Розв'язання:

За формулою (8) та рис.6, маємо:

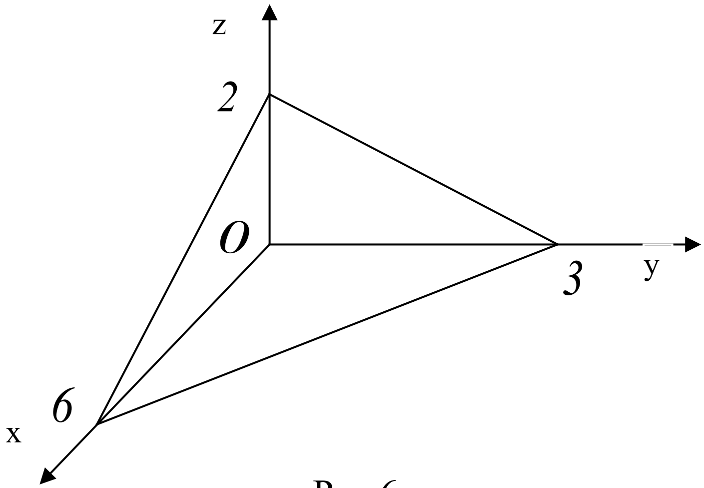


Рис.6

$$I_z = \rho \iiint_V \left(x^2+y^2\right) dxdydz = 0,25\int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(x^2+y^2\right) dy \int_0^{2-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}y} dz =$$

$$= 0,25\int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 y + 2y^2 - \frac{xy^2}{3} - \frac{2}{3}y^3\right) dy =$$

$$= 0,25\int_0^6 \left(2x^2 y - \frac{x^3 y}{3} - \frac{x^2 y^3}{3} + \frac{2y^3}{3} - \frac{xy^3}{9} - \frac{y^4}{6}\right)\Bigg|_0^{3-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= 0,25\int_0^6 \left(6x^2 - x^3 - x^3 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{3}\left(9 - 3x + \frac{x^2}{4}\right) + \right.$$

$$+ \frac{2}{3}\left(27 - \frac{27}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{x^3}{8}\right) - \frac{x}{9}\left(27 - \frac{27}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{x^3}{8}\right) -$$

$$\left. - \frac{1}{6}\left(9 - 3x + \frac{x^2}{4}\right)^2\right) dx =$$

$$=0,25\int_0^6\left(6x^2-2x^3+\frac{x^4}{6}-3x^2+x^3-\frac{x^4}{12}+18-\right.$$

$$-9x+\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{12}-3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{x^4}{12}-\frac{81}{6}+\frac{27}{6}x-\frac{9}{24}x^2+$$

$$\left.+\frac{27}{6}x-\frac{9}{24}x^2+\frac{3}{24}x^3-\frac{3}{24}x^2+\frac{3}{24}x^3-\frac{x^4}{96}\right)dx=$$

$$=0,25\int_0^6\left(\frac{25}{288}x^4-\frac{13}{12}x^3+\frac{15}{4}x^2-3x+\frac{9}{2}\right)dx=$$

$$=0,25\left(\frac{25}{288}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{13}{12}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{15}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{9}{2}x\right)\Bigg|_0^6=$$

$$=0,25\left(\frac{5}{288}6^5-\frac{13}{48}6^4+\frac{5}{4}6^3-\frac{3}{2}6^2+\frac{9}{2}6\right)=0,25\cdot 27=6,75.$$

Відповідь: *6,75*.

5. Обчислити потрійним інтегруванням об’єм тіла обмеженого параболоїдами $z=x^2+y^2$ і $z=200x^2+200y^2$, циліндром $y=x^2$ і площиною $y=x$.

Розв’язання:

Згідно з формулою (5) дістанемо, що $V=\iiint\limits_V dxdydz$, де V – область інтегрування.

Розглянувши проекцію циліндра $y=x^2$ і площини $y=x$, на площину xOy (рис.7), дістанемо:

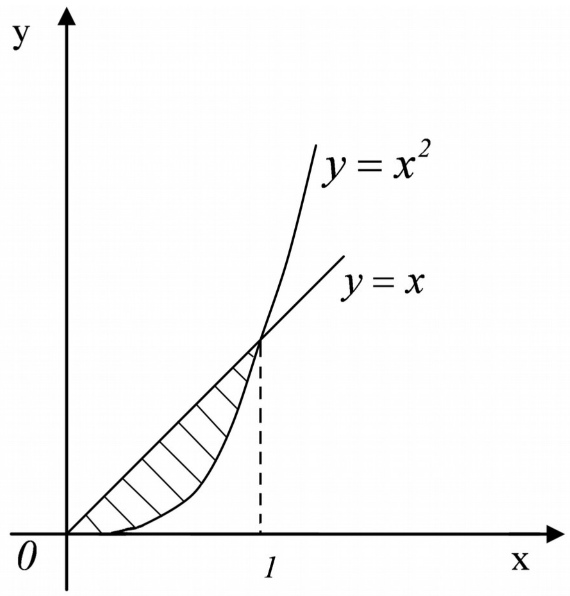


Рис. 7

Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій:

$$x^2 = x, \quad x(x-1) = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 1.$$

Відповідно до (3), одержимо

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{200x^2+200y^2} dz = 199\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= 199\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = 199\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= 199\left(\frac{4}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = 199\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \right) = \frac{199 \cdot 3}{35} \approx 17{,}057 .$$

Відповідь: 17,057.

Практична робота 3. Потрійний інтеграл. Обчислення потрійного інтеграла повторним інтегруванням у циліндричних та сферичних координатах

1. Основні поняття та теореми

1. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричних координатах

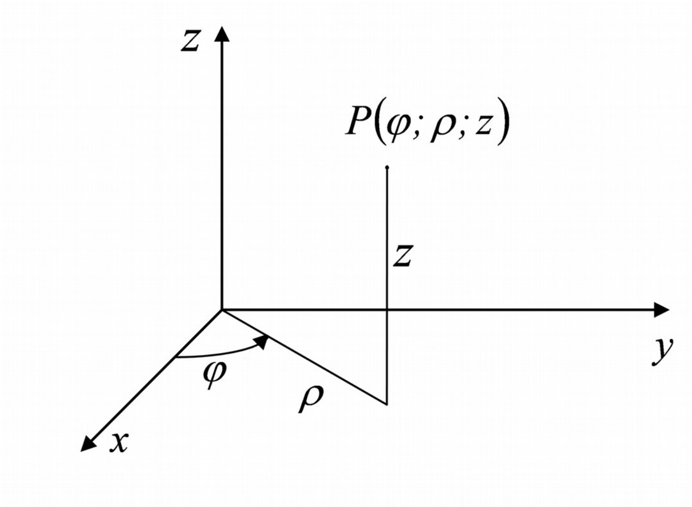


Рис.1

У циліндричних координатах положення точки M в просторі визначається так (рис.1). Точка M проектується на площину xOy і визначаються її полярні координати r і ϕ. Це і є перші дві циліндричні координати. Третьою циліндричною координатою є відстань точки M від площини xOy, тобто її апліката.

Отже, для декартових координат x, y, z та *циліндричних координат* r, ϕ, z справедливі співвідношення:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases} \tag{1}$$

де $0 \le r < +\infty,\ \ 0 \le \phi \le 2\pi,\ \ -\infty < z < +\infty$.

Таким чином, потрійний інтеграл набуде виду:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V f(r\cos\phi,\ r\sin\phi,\ z)\,r\,dr\,d\phi\,dz \tag{2}$$

оскільки елемент об'єму дорівнює

$$dV = r\,dr\,d\phi\,dz. \tag{3}$$

2. Обчислення потрійного інтеграла у сферичних координатах

У *сферичних координатах* положення точки M в просторі визначається так (рис. 2).

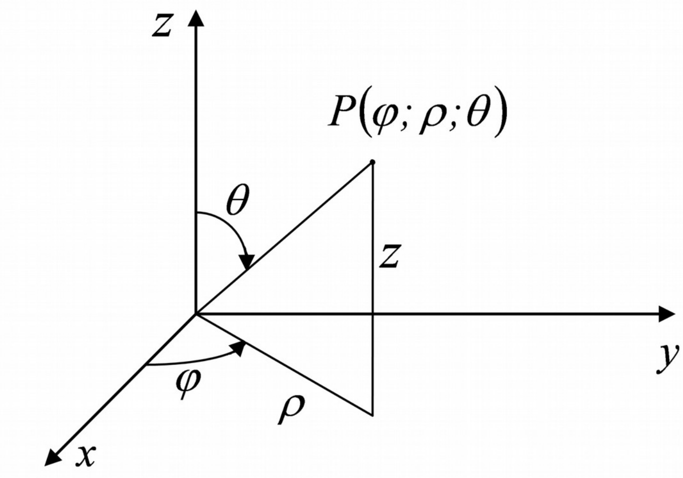


Рис.2

Визначається відстань точки $M(x;y;z)$ від початку координат (перша сферична координата) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, причому $r \ge 0$.

Точка M проектується на площину xOy в точку M_1. Кут ϕ між променем OM_1 і віссю Ox є другою сферичною координатою. Даний кут відраховується від осі Ox проти годинникової стрілки і може змінюватися від 0 до 2π.

Третьою сферичною координатою є кут θ між віссю Oz і відрізком OM. Даний кут відраховується від осі Oz в напрямі, вказаному на рис.2 стрілкою. Кут θ може змінюватися від 0 до π.

Отже, для декартових координат x, y, z та сферичних координат r,ϕ,θ справедливі співвідношення:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \tag{4}$$

де $0 \le r \le +\infty, 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi.$

Таким чином потрійний інтеграл прийме вид:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint_V f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr d\phi d\theta \tag{5}$$

Оскільки елемент об’єму дорівнює

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \tag{6}$$

3. Деякі застосування потрійного інтеграла у циліндричних та сферичних координатах

а) Об’єм тіла в сферичних координатах:

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \tag{7}$$

б) Об’єм тіла в циліндричних координатах:

$$V = \iiint\limits_V r dr d\phi dz \tag{8}$$

2. Завдання для допуску а до практичного заняття

1. Обчислити інтеграл за допомогою переходу до циліндричних координат $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\alpha} dz.$

2. Обчислити інтеграл за допомогою переходу до сферичних координат: $\frac{1}{\pi}\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,

якщо область V обмежена півсферою $x^2+y^2+z^2=\alpha,\ z\ge 0.$

3. Обчислити потрійний інтеграл: $\frac{1}{\pi}\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, де область V – циліндр, обмежений поверхнями $x^2+y^2=1$, $z=0$.

4. Обчислити $\frac{1}{\pi}$ частину об’єму тіла, обмеженого параболоїдом обертання $x^2+y^2-z=\alpha$ та площиною $z=\alpha$.

5. Обчислити $\frac{9}{\pi}$ частину об’єму тіла, що визначається нерівностями $x^2+y^2+z^2\le\alpha^2$, $0\le y\le\frac{x}{\sqrt{3}}$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного зняття

1. Обчислити інтеграл, за допомогою переходу до циліндричних координат

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\alpha} dz$$

Розв’язання:

Нехай потрійний інтеграл, заданий на області V. Тоді, проектуючи область V на площину xOy, одержимо деяку двомірну область D, що зображена на рис.3 і має вид

$$D = \left\{ (x;y) : 0 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\},$$

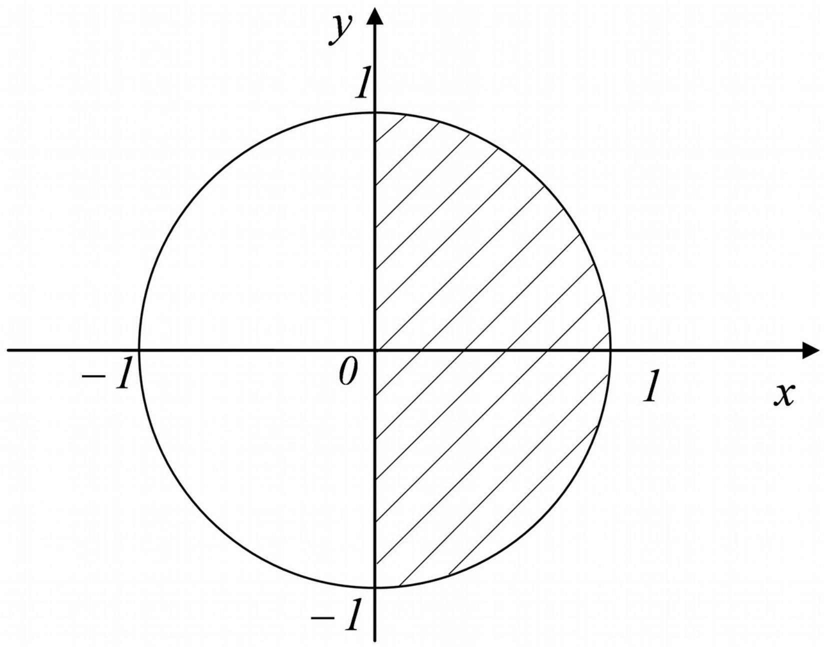


Рис. 3

а сама область V у декартових координатах задана так

$$V = \left\{ (x;y;z) : (x;y) \in D; 0 \le z \le 200 \right\}.$$

Тоді область V у циліндричних координатах (1) відобразиться таким чином:

$$V = \left\{ (\phi;r;z) : -\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 1; 0 \le z \le 200 \right\},$$

і згідно з формулою (2), одержимо:

$$I=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int\limits_{0}^{1}rdr\int\limits_{0}^{200}dz=\frac{1}{\pi}\phi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_{0}^{1}\cdot z\Big|_{0}^{200}=\frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 200=100.$$

Відповідь: *100.*

2. Обчислити інтеграл за допомогою переходу до сферичних координат

$$I=\frac{1}{\pi}\iiint\limits_{V}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

якщо область V обмежена півсферою $x^2+y^2+z^2=150$, $z\geq 0$.

Розв'язання:

Оскільки область V обмежена півсферою $x^2+y^2+z^2=150$ при $z\geq 0$, то у сферичних координат (4) вона буде мати вид:

$$V=\left\{(r,\phi,\theta):\ 0\leq\phi\leq 2\pi;\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2};\ 0\leq z\leq\sqrt{150}\right\}.$$

$$I=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}d\phi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_{0}^{\sqrt{150}}r\cdot r^2dr=$$

$$=\frac{1}{\pi}\phi\Big|_{0}^{2\pi}\cdot(-\cos\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_{0}^{\sqrt{150}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi\cdot 1\cdot\frac{\left(\sqrt{150}\right)^4}{4}=\frac{150^2}{4}=11250\cdot$$

Відповідь: *11250.*

3. Обчислити потрійний інтеграл $\frac{1}{\pi}\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, де область V – циліндр, обмежений поверхнями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=130$.

Розв’язання:

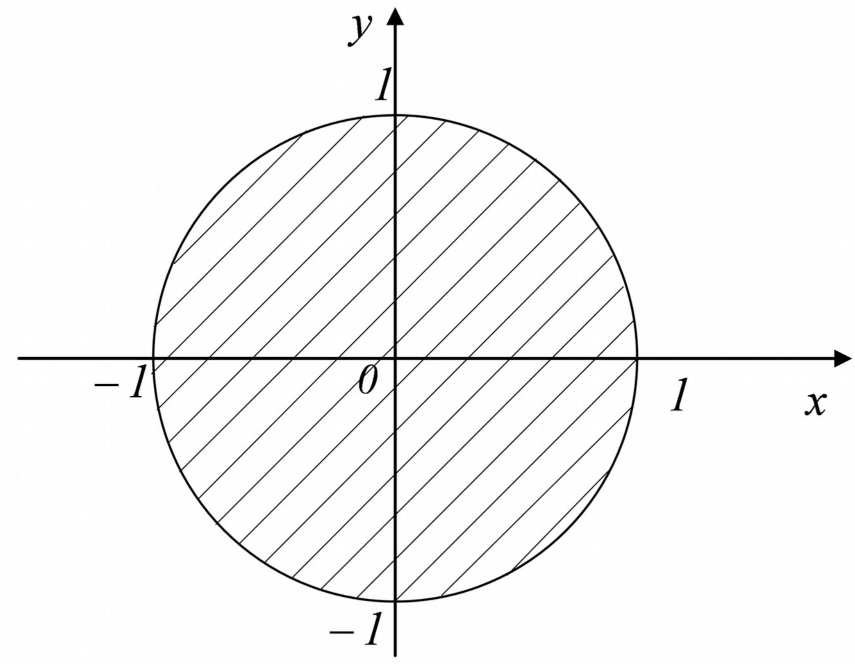


Рис. 4

Відповідно до умови завдання проекцією області V на площину xOy є круг радіуса 1 (рис.4), а сама область V у циліндричних координатах має вид

$$V=\{(\phi;r;z):0\le\phi\le2\pi;\,0\le r\le1;\,0\le z\le130\}.$$

Тоді згідно з формулою (2), одержимо:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^1 r\cdot r^2dr\int_0^{130}dz=\frac{1}{\pi}\phi\Big|_0^{2\pi}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 z\Big|_0^{130}=$$

$$=\frac{1}{\pi}2\pi\frac{1}{4}130=\frac{130}{2}=65.$$

Відповідь: *65*.

4. Обчислити $\frac{1}{\pi}$ частину об’єму тіла, обмеженого параболоїдом обертання $x^2+y^2-z=200$ та площиною $z=200$.

Розв'язання:

Застосувавши циліндричні координати (1), визначимо область інтегрування V. Маємо:

$$r^2 cos^2 \phi + r^2 sin^2 \phi - z = 200,$$

$$r^2 - z = 200,$$

$$z = r^2 - 200.$$

Так як $z = 200$, то $r^2 = 200 + z = 400$, а $r = \sqrt{400} = 20$.

Отже,

$$V = \left\{ (\phi; r; z) : 0 \le \phi \le 2\pi;\ \ 0 \le r \le 20;\ \ r^2 - 200 \le z \le 200 \right\},$$

а шуканий об'єм, згідно з (8) дорівнює:

$$V = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{20} r dr \int_{r^2-200}^{200} dz = \frac{1}{\pi} 2\pi \int_0^{20} \left(200 - r^2 + 200 \right) r dr =$$

$$= 2 \int_0^{20} \left(400r - r^3 \right) dr = 2 \left(400 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^{20} =$$

$$= 2 \left(200 \cdot 20^2 - \frac{20^4}{4} \right) = 80000.$$

Відповідь: *80000.*

5. Обчислити $\frac{9}{\pi}$ частину об'єму тіла, визначеного нерівностями $x^2 + y^2 + z^2 \le 40, \quad 0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання:

Нехай проекція шуканої частини тіла є заштрихованою на рис.5. Перейшовши до сферичних координат (4), визначимо границі області інтегрування V:

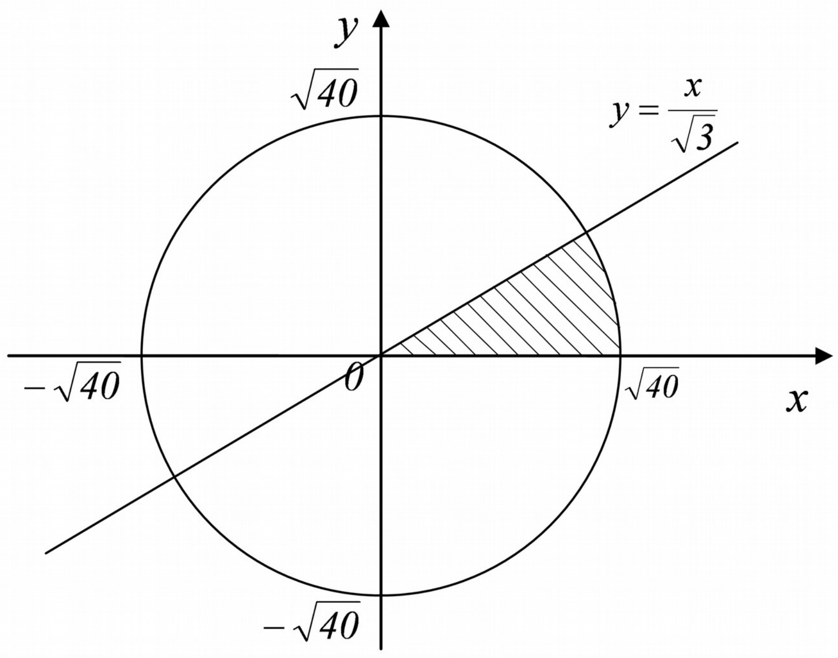


Рис. 5

$$0 \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}},$$

$$0 \le 2\sin\theta\sin\phi \le \frac{r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{3}},$$

$$0 \le tg\phi \le \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}.$$

Отже, в сферичних координатах маємо:

$$V = \left\{ (r;\phi;\theta):\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{6};\ 0 \le \theta \le \pi;\ 0 \le z \le \sqrt{40} \right\}$$

Тоді згідно з (7), дістанемо:

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{40}} r^2 dr =$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{40}}=\frac{\pi}{6}2\frac{\left(\sqrt{40}\right)^3}{3}=\frac{\pi\left(\sqrt{40}\right)^3}{9},$$

$$\frac{9}{\pi}V=\frac{9}{\pi}\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{40}\right)^3}{9}=\left(\sqrt{40}\right)^3\approx 252,9822.$$

Відповідь: *252,9822.*

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$**,** якщо область V обмежена циліндром $x^2+y^2=2x$ і площиною $y=0$, $z=0$, $z=\alpha$.

2. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об’єм кулі радіуса α.

3. Обчислити масу M однорідного тіла, $\rho(x,y,z)=1$, що вирізається з кулі $x^2+y^2+z^2\le\alpha^2$, циліндром $x^2+y^2\le\alpha y$.

4. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\alpha^3x$.

5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $\alpha z=x^2+y^2,\quad z=\alpha$.

5. Приклад розв’язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область V обмежена циліндром $x^2+y^2=2x$ і площиною $y=0$, $z=0$, $z=\sqrt{27}$.

Розв’язання:

Перейшовши до циліндричних координат (1), визначимо межі інтегрування області V.

Оскільки

$$x^2+y^2=2x,$$

$$r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi = 2r\cos\phi,$$
$$r^2 = 2r\cos\phi,$$
$$r = 2\cos\phi,$$

то область V має вид

$$V = \left\{ (\phi; r; z):\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le r \le 2\cos\phi;\ 0 \le z \le \sqrt{27} \right\},$$

а згідно з (2), потрійний інтеграл:

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_V z\cdot r\cdot r\cdot drd\phi dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_0^{2\cos\phi} r^2 dr \int\limits_0^{\sqrt{27}} zdz =$$

$$\frac{27}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int\limits_2^{2\cos\phi} r^2 dr = \frac{27}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left. \frac{r^3}{3} \right|_0^{2\cos\phi} \right) d\phi =$$

$$= \frac{27}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\cos^3\phi}{3} d\phi = 36\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2\phi\right) d(\sin\phi) =$$

$$= 36\left.\left(\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3} \right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 36\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24.$$

Відповідь: 24.

2. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об’єм кулі радіуса $\sqrt[3]{9}$.

Розв’язання:

Куля – це тіло, симетрично розміщене у восьми октантах. Згідно з формулою для об’єму тіла у сферичних координатах (7), дістанемо:

$$V = 8\iiint\limits_{V_1} r^2 \sin\theta drd\theta d\phi,$$

де V_1 - частина кулі, що міститься в першому октанті (рис.6) і

$$V_1 = \left\{ (\phi;\theta;r):\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le z \le \sqrt[3]{9} \right\}.$$

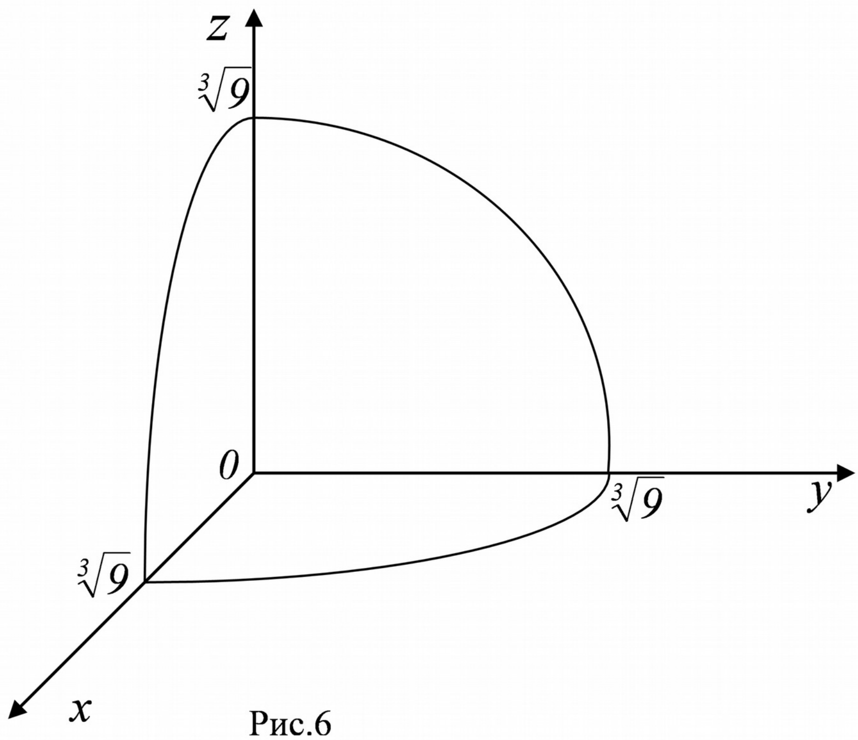


Рис.6

Тоді:

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\ d\theta \int_0^{\sqrt[3]{9}} r^2 dr$$

$$= 8\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{9}} = 8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{9}{3} = 12\pi \approx 37{,}6991.$$

Відповідь: *37,6991*.

3. Обчислити масу m однорідного тіла, $\rho(x,y,z) = 1$, що вирізається з кулі $x^2 + y^2 + z^2 \le 20$ поверхнею $x^2 + y^2 \le \sqrt{20}y$.

Розв'язання:

Як видно з рис.7, в першому октанті знаходиться $\frac{1}{4}$ тіла, масу якого треба знайти.

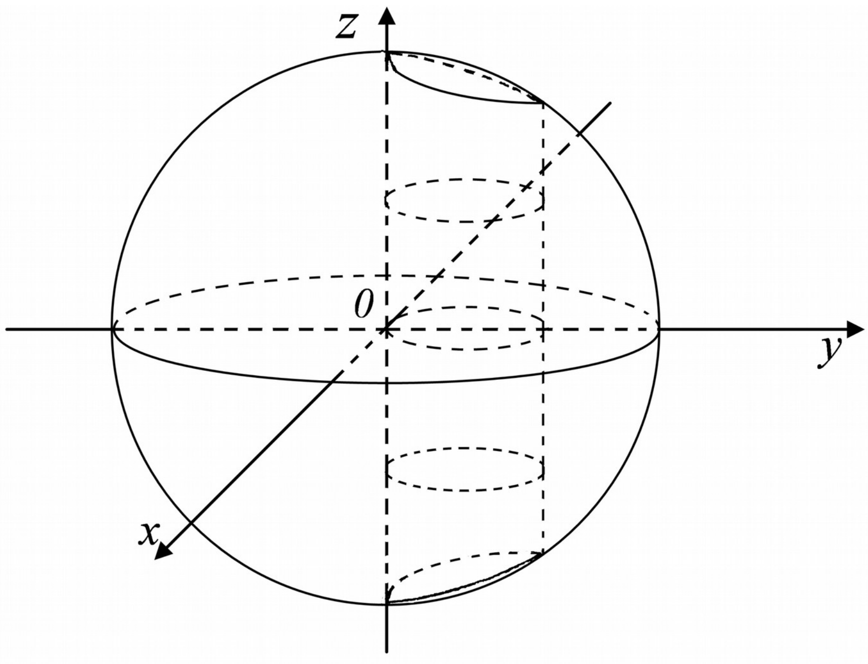


Рис.7

Тому вся маса дорівнює:

$$m = 4 \iiint\limits_{V} dxdydz .$$

Використовуючи циліндричні координати (4), відносно межі інтегрування області V_1 маємо:

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 20,$$

$$r^2 \cos^2\phi + r^2 \sin^2\phi + z^2 \le 20,$$

$$r^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + z^2 \le 20,$$

$$r^2 + z^2 \le 20,$$

$$z^2 \le 20 - r^2,$$

$$z \le \sqrt{20 - r^2},$$

$$x^2 + y^2 \le \sqrt{20}\, y,$$

$$r^2 \le \sqrt{20}\, r \sin\phi,$$

$$r \le \sqrt{20}\,sin\phi,$$

то область інтегрування має вид:

$$V = \left\{(\phi; r; z):\ 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le r \le \sqrt{20}\,sin\phi;\ 0 \le z \le \sqrt{20 - r^2}\right\}.$$

Таким чином,

$$m = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\sqrt{20}\,sin\phi} rdr \int_0^{\sqrt{20-r^2}} dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\sqrt{20}\,sin\phi} r\sqrt{20 - r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(20 - r^2\right)^3}\,\Bigg|_0^{\sqrt{20}\,sin\phi} = \frac{4\sqrt{20^3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - cos^3\phi\right) d\phi =$$

$$\frac{4\sqrt{20^3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3\phi d\phi\right) = \frac{4\sqrt{20^3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2\phi\right) d\,sin\phi\right) =$$

$$\frac{4\sqrt{20^3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(sin\phi - \frac{sin^3\phi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4\sqrt{20^3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{4\sqrt{20^3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{20^3}}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right) \approx 107{,}8238.$$

Відповідь: *107,8238.*

4. Знайти об’єм тіла обмеженого поверхнею $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = 200^3 x$.

Розв’язання:

Із заданого рівняння видно, що тіло симетрично розміщене в чотирьох октантах, де $x \ge 0$. Тоді об’єм дорівнює:

$$V = 4\iiint\limits_{V_1} dxdydz,$$

де V_1 - частина тіла, розміщена в першому октанті.

Запишемо рівняння сфери у сферичних координатах (4). Для цього у рівняння сфери підставимо з формули (4) значення $x, y, z.$

Тоді дістанемо:

$$\left(r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\cos^2\theta\right)^2 = 200^3 r\sin\theta\cos\phi;$$

$$\left(r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + r^2\cos^2\theta\right)^2 = 200^3 r\sin\theta\cos\phi;$$

$$r^4 = 200^3 r\sin\theta\cos\phi;$$

$$r = 200\sqrt[3]{\sin\theta\cos\phi}.$$

А область інтегрування матиме вид:

$$V = \left\{(r;\phi;\theta):\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le r \le 200\sqrt[3]{\sin\theta\cos\phi}\right\}.$$

Таким чином, згідно з (5) дістанемо:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{200\sqrt[3]{\sin\theta\cos\phi}} r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{3}200^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\phi d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}200^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$\frac{4}{3}200^3 \sin\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{4}{3}200^3(1-0)\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\pi}{2}200^3\approx 8377580{,}41.$$

Відповідь: $8377580{,}41$.

5. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $125z=x^2+y^2, z=125$.

Розв’язання:

Задане тіло обмежене знизу параболоїдом $z=\dfrac{x^2+y^2}{125}$, зверху площиною $z=125$ і проектується в круг $x^2+y^2=125^2$ площини xOy (рис.8).

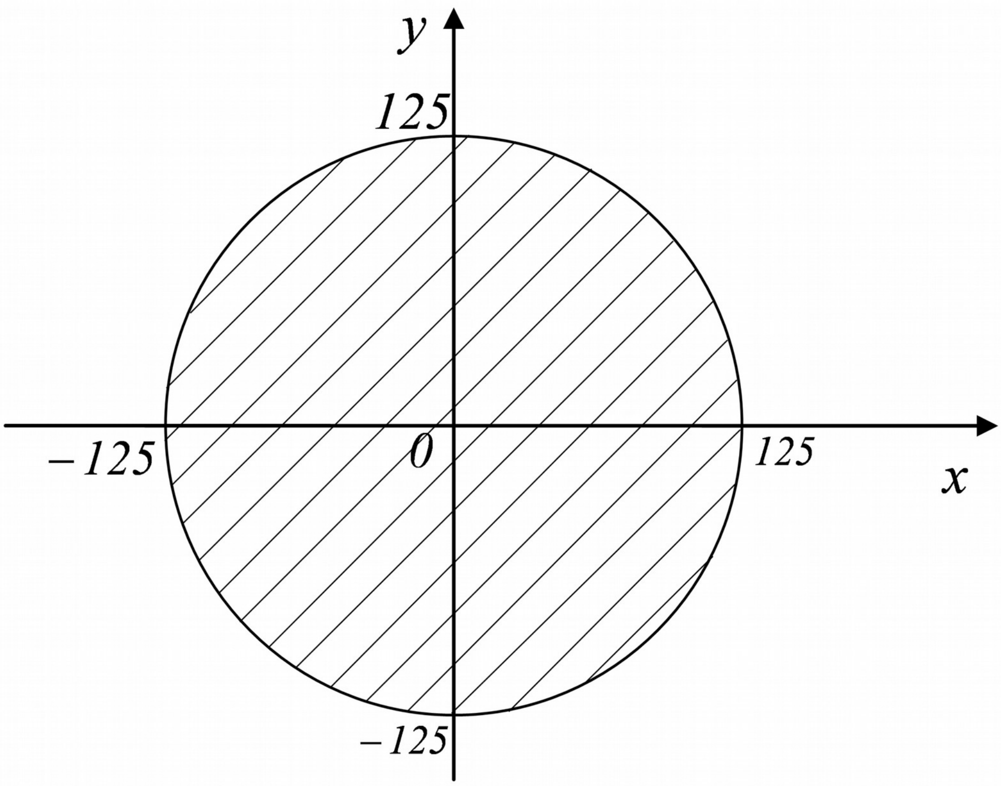


Рис. 8

Використовуючи циліндричні координати (1), в яких рівняння параболоїда набуде виду $z=\dfrac{r^2}{125}$, а рівняння круга – $r=125$, одержимо, що область інтегрування V матиме вид:

$$V=\left\{(\phi;r;z):\ 0\le\phi\le2\pi;\ 0\le r\le125;\ \frac{r^2}{125}\le z\le125\right\}.$$

Тоді, згідно з (8) об’єм заданого тіла дорівнює

$$V=\iiint\limits_V r\,dr\,d\phi\,dz=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{125}r\,dr\int_{\frac{r^2}{125}}^{125}dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{125}\left(125-\frac{r^2}{125}\right)r\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\left.125\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4\cdot125}\right)\right|_0^{125}d\phi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{125^3}{2}-\frac{125^3}{4}\right)d\phi=\frac{125^3}{4}\int_0^{2\pi}d\phi=\frac{\pi125^3}{2}\approx3067961{,}576\,.$$

Відповідь: 3067961,576.

Практична робота 5. Криволінійні інтеграли по довжині і по координатам, та їх обчислення

1. Основні поняття та теореми

1. Криволінійний інтеграл по довжині дуги (першого роду).

Нехай функція $f(x;y)$ визначена і неперервна в точках дуги AB гладкої кривої K, яка має рівняння $y=\phi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Розіб'ємо дугу AB довільним чином на n елементарних дуг точками $A=A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$. Нехай ΔS_K - довжина дуги $A_{K-1}A_K$. На кожній елементарній дузі виберемо довільну точку $M_K(\varepsilon_K;\eta_K)$ і помножимо значення функції $f(\varepsilon_K,\eta_K)$ в цій точці на довжину відповідної дуги ΔS_K.

Інтегральною сумою для функції $f(x,y)$ по довжині дуги AB називається:

$$\sum_{K=1}^{n} f(\varepsilon_K,\eta_K)\,\Delta S_K \tag{1}$$

Криволінійним інтегралом по довжині дуги AB від функції $f(x;y)$, або криволінійним інтегралом I роду називається границя інтегральної суми при умові, що max $\Delta S_K \to 0$:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \lim_{\max S_K \to 0} \sum_{K=1}^{n} f(\varepsilon_K,\eta_K)\,\Delta S_K\,, \tag{2}$$

де ds – диференціал дуги.

Криволінійний інтеграл I роду обчислюється за формулою:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,\phi(x))\sqrt{1+\phi^2(x)}\,dx \tag{3}$$

Якщо крива K задана параметричними рівняннями:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ (t_1 \le t \le t_2),$$

то $$\int_K f(x,y)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \tag{4}$$

Аналогічно визначається і обчислюється криволінійний інтеграл I роду від функції трьох змінних $f(x,y,z)$ по просторовій кривій.

Якщо просторова крива, задана рівнянням:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ (t_1 \le t \le t_2),$$

тоді криволінійний інтеграл прийме вид

$$\int_K f(x,y,z)\,ds =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\,dt \qquad (5)$$

Якщо $f(x,y) > 0$, то криволінійний інтеграл I роду дорівнює масі кривої K, що має змінну лінійну густину $(\rho(x,y))$ (фізичне застосування), тобто:

$$m = \int_K \rho(x,y)\,ds \qquad (6)$$

2. Основні властивості криволінійного інтеграла I роду.

а) Криволінійний інтеграл I роду не залежить від напряму інтегрування:

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_{BA} f(x,y)\,ds;$$

б) криволінійний інтеграл суми (різниці) дорівнює сумі криволінійних інтегралів

$$\int_K (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))\,ds = \int_K f_1(x,y)\,ds \pm \int_K f_2(x,y)\,ds;$$

в) сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла

$$\int_K cf(x,y)\,ds = c\int_K f(x,y)\,ds, \text{ де } c - const;$$

г) Якщо контур інтегрування K розбити на дві частини K_1 і K_2, то

$$\int_K f(x,y)\,ds = \int_{K_1} f(x,y)\,ds + \int_{K_2} f(x,y)\,ds.$$

2. Криволінійний інтеграл по координатам (ІІ роду).

Нехай функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні в точках дуги AB гладкої кривої K, яка задана рівнянням $y=\phi(x),\ (a \le x \le b)$.

Інтегральною сумою для функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ по координатам називається сума виду:

$$\sum_{K=1}^{n} \left(P(\varepsilon_K, \eta_K)\,\Delta x_K + Q(\varepsilon_K, \eta_K)\,\Delta y_K \right) \qquad (7)$$

де Δx_K і Δy_K - проекції елементарної дуги на осі Ox і Oy.

Криволінійним інтегралом по координатам, або криволінійним інтегралом ІІ роду від виразу $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ по направленій дузі AB називається границя інтегральної суми (7) при умові, що $max\,\Delta X_K \to 0$ і max $max\,\Delta y_K \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \lim_{\substack{max\,x\Delta x_K \to 0 \\ max\,x\Delta y_K \to 0}} \sum_{K=1}^{n} \left[P(\varepsilon_K, \eta_K)\,\Delta x_K + Q(\varepsilon_K, \eta_K)\,\Delta y_K \right] \qquad (8)$$

Криволінійний інтеграл ІІ роду обчислюється за формулою:

$$\int_K P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, \phi(x)) + \phi'(x) Q(x, \phi(x)) \right] dx \qquad (9)$$

Якщо крива K задана параметричними рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t)$, де $t_1 \le t \le t_2$, то маємо:

$$\int_K P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt \qquad (10)$$

Аналогічна формула має місце для обчислення криволінійного інтеграла ІІ роду по просторовій кривій K, якщо крива задана параметричними рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, де $t_1 \le t \le t_2$,

то $\int_K P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big] dt \qquad (11)$$

Криволінійний інтеграл ІІ роду є робота змінної сили

$$\vec{F} = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}$$

по переміщенню матеріальної точки $M(x; y)$ вздовж кривої $\breve{AB}$ від точки A до точки B (механічний зміст), тобто

$$A = \int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \qquad (12)$$

<u>Основні властивості криволінійного інтегралу ІІ роду.</u>

1. $\int_{BA} Pdx + Qdy = -\int_{AB} Pdx + Qdy$,

Тобто при зміні напряму шляху інтегрування на протилежний криволінійний інтеграл змінює знак.

2. $\int\limits_{BA} Pdx + Qdy = \int\limits_{BA} Pdx + \int\limits_{BA} Qdy$.

Інші властивості аналогічні властивостям інтеграла першого роду.

Площа плоскої фігури, обмеженої контуром L, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{L} xdy - ydx, \qquad (13)$$

де напрям обходу замкненого контуру L, вибираємо так, щоб область, обмежена ним, залишалася зліва.

2. Завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\frac{1}{\pi} \int\limits_{l} (x - y)\, ds$, де l – коло $x^2 + y^2 = \alpha x$. (Перейти до полярних координат).

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{l} x\, dy$, де l – відрізок прямої $x + y = \alpha$ від точки перетину її з віссю абсцис до точки перетину її з віссю ординат.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $3 \int\limits_{l} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$,

де l – півколо $x = \alpha \cos t,\ y = \alpha \sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

4. Знайти площу частини циліндричної поверхні, що міститься між площиною xOy та поверхнями $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $2\alpha z = xy$.

5. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла $\frac{1}{\pi}$ частину площі фігури, обмежену замкненою лінією – еліпсом $x = \alpha \cos t,\ y = 2\alpha \sin t$.

3. Приклад виконання завдання для допуску до практичного заняття

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\frac{1}{\pi}\int\limits_l (x-y)\,ds$,

де l – коло $x^2+y^2=200x$ (Перейти до полярних координат).

Розв'язання:

Нехай задана крива l зображена на рис.1.

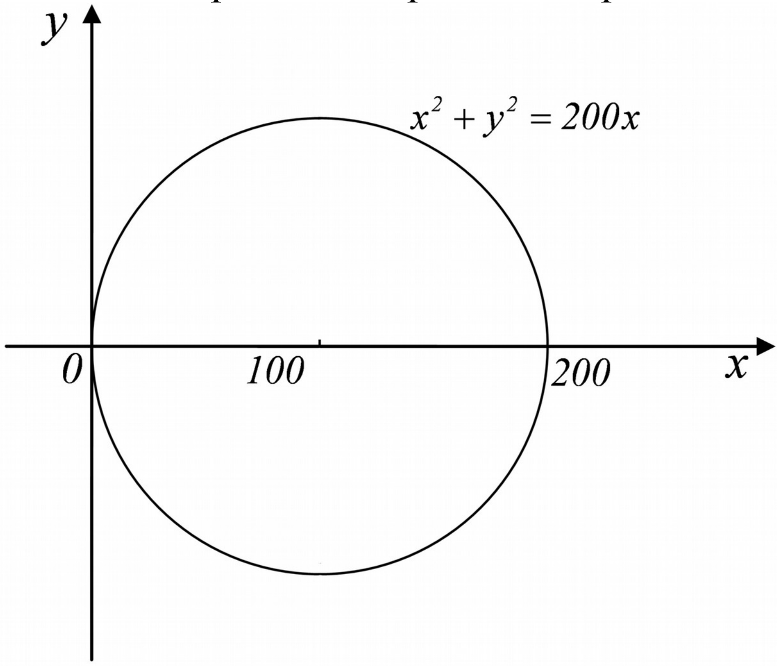


Рис.1

Тоді, перейшовши до полярних координат, дістанемо таке рівняння кола:

$$r^2\cos^2\phi+r^2\sin^2\phi=200r\cos\phi;$$

$$r^2\left(\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)=200r\cos\phi;$$

$$r=200\cos\phi.$$

Відповідно:

$$x=r\cos\phi=200\cos^2\phi;$$

$$y=r\sin\phi=200\cos\phi\sin\phi=100\sin 2\phi.$$

Обчислимо похідні x'_ϕ, y'_ϕ:

$$x'_\phi=200\cdot 2\cos\phi(-\sin\phi)=-200\sin 2\phi;$$

$$y'_\phi=200\cos 2\phi.$$

Тоді, згідно з (4), маємо:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_l (x-y)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(200\cos^2\phi-100\sin 2\phi\right)\sqrt{200^2\sin^2 2\phi+200^2\cos^2 2\phi d\phi}=$$

$$=\frac{200^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\phi-\frac{1}{2}\sin 2\phi\right)d\phi=$$

$$=\frac{200^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\phi}{2}-\frac{\sin 2\phi}{2}\right)d\phi=$$

$$=\frac{200^2}{2\pi}\left[\phi+\frac{\sin 2\phi}{2}+\frac{\cos 2\phi}{2}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{200^2}{2\pi}\left[\pi+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{200^2}{2}=20000.$$

Відповідь: *20000.*

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_l x\,dy$, де l – відрізок прямої $x+y=\sqrt{13}$ від точки перетину її з віссю абсцис до точки перетину її з віссю ординат.

Розв'язання:

Нехай заданий відрізок l зображений на рис.2.

Тоді, згідно (9), дістанемо:

$$\int\limits_l xdx=\int\limits_{\sqrt{13}}^{0}xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\sqrt{13}}^{0}=-\frac{13}{2}=-6,5.$$

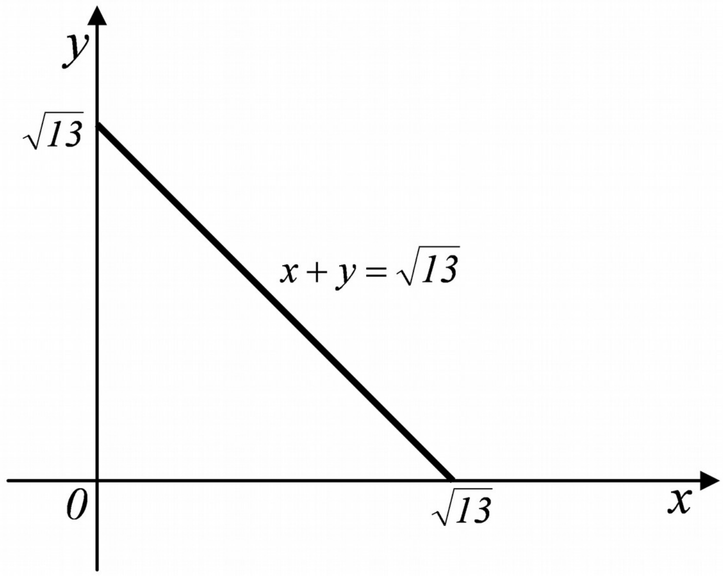


Рис.2

Відповідь: *-6,5*.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $3\int\limits_l \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$,

де l – півколо $x=200\cos t,\ y=200\sin t$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Розв'язання:

Використовуючи (10), дістанемо

$$3\int\limits_l \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2} =$$

$$=3\int\limits_0^\pi \frac{200^2\sin^2 t\cdot(-200\sin t) - 200^2\cos^2 t\cdot 200\cos t}{200^2\cos^2 t + 200^2\sin^2 t} =$$

$$=-3\cdot 200\int\limits_0^\pi\left[\left(1-\cos^2 t\right)\sin t + \left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right]dt =$$

$$=-600\left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]\Bigg|_0^\pi = -600\left(2-\frac{2}{3}\right) = -800.$$

Відповідь: *-800*.

4. Знайти площу частини циліндричної поверхні, що міститься між xOy та поверхнями $x^2 + y^2 = 150^2$, $300z = xy$.

Розв'язання:

Дане завдання зводиться до обчислення криволінійного інтегралу від функції $z = f(x, y) = \dfrac{xy}{300}$ по колу $x^2 + y^2 = 150^2$.

Оскільки задана поверхня симетрична відносно площин xOy та yOz, то можна обчислити спочатку інтеграл тільки по дузі $\dfrac{1}{4}$ частини кола, розміщений в І чверті площини xOy, а потім помножити на 4.

Перейшовши до полярних координат, одержимо:

$$x = 150\cos\phi, \;\; y = 150\sin\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

$$z = \frac{xy}{300} = \frac{150^2 \sin\phi\cos\phi}{300} = \frac{150\sin 2\phi}{4},$$

Згідно з (4) маємо:

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{150\sin 2\phi}{4}\sqrt{(-150\sin\phi)^2 + (150\cos\phi)^2}\,d\phi =$$

$$= 150^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\phi d\phi = 150^2\left(-\frac{\cos 2\phi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{150^2}{2}2 = 150^2 = 22500.$$

Відповідь: *22500*.

5. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла $\dfrac{1}{\pi}$ частину площі фігури, обмежену замкненою лінією – еліпсом $x = 150\cos t, \; y = 300\sin t$.

Розв'язання:

Для знаходження площі заданої фігури, обмеженої еліпсом, використаємо формулу (13).

Тоді,

$$S = \frac{1}{2}\oint_l xdy - ydx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left[150\cos t\cdot 300\cos t-300\sin t(-150\sin t)\right]dt=$$

$$=\frac{2\cdot 150^2}{2}\int_{0}^{2\pi}dt=150^2 2\pi,$$

Тоді $\frac{1}{\pi}S=2\cdot 150^2=45000$.

Відповідь: 45000.

4. Задачі та вправи для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\frac{15}{256}\int_{l}y^2ds$, де l – арка циклоїди: $x=\alpha(t-\sin t),\ y=(1-\cos t)\quad(0\le t\le 2\pi)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{l}(x+y)dx,$ де l – дуга кардіоїди $x=2\alpha\cos t-\alpha\cos 2t;\quad y=2\alpha\sin t-\alpha\sin 2t,\quad t\in[0;\pi]$ (рис.4).

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{l}y^2dx+x^2dy,$ де l- верхня половина еліпса $x=\alpha\cos t,\quad y=\frac{\alpha}{2}\sin t.$ Інтегрування виконати проти ходу годинникової стрілки (рис.5).

4. Обчислити площу бокової поверхні кругового циліндра $x^2+y^2=\alpha^2$, обмеженого знизу площиною xOy, а зверху – поверхнею $z=\alpha+\frac{x^2}{\alpha}$.

5. Обчислити площу, обмежену астроїдою $x=\alpha\cos^3 t$, $y=\alpha\sin^3 t$ (рис.6).

5. Приклад розв'язання задач та вправ для самостійної роботи на практичному занятті

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\frac{15}{256}\int\limits_{l} y^2 ds,$ де l- арка циклоїди $x=\sqrt[3]{5}(t-\sin t),\ y=\sqrt[3]{5}(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ (рис.3).

Розв'язання:

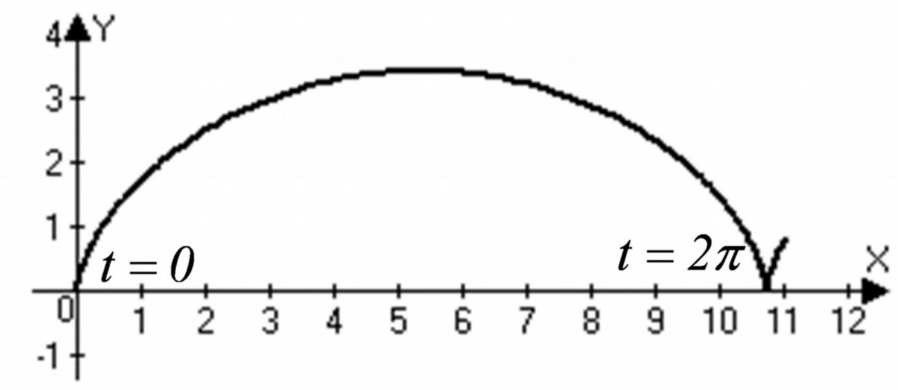


Рис.3

Використовуючи формулу (4), дістанемо:

$$\frac{15}{256}\int\limits_{l} y^2 ds =$$

$$=\frac{15}{256}\int\limits_{0}^{2\pi}(\sqrt[3]{5})^2(1-\cos t)^2\sqrt{(\sqrt[3]{5}(1-\cos t))^2+(\sqrt[3]{5}\sin t)^2}\,dt=$$

$$=\frac{15}{256}5\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-2\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=\frac{75}{256}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$=\frac{75\sqrt{2}}{256}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{75\sqrt{2}}{256}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}dt=$$

$$=\frac{75\sqrt{2}\,4\sqrt{2}}{256}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt=-\frac{75}{32}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-\frac{75}{32}2\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-\frac{75}{16}\left(\cos\frac{t}{2}-2\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}+\frac{\cos^5\frac{t}{2}}{5}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{75}{16}\left[(-1-1)-\frac{2}{3}(-1-1)+\frac{1}{5}(-1-1)\right]=\frac{75}{8}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=$$

$$=-\frac{75}{16}\cdot\frac{15-10+3}{15}=\frac{75}{8}\cdot\frac{8}{15}=5.$$

Відповідь: 5.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_l (x+y)dx$**,** де l – дуга кардіоїди $x=2\sqrt{10}\cos t-\sqrt{10}\cos 2t$, $y=2\sqrt{10}\sin t-\sqrt{10}\sin 2t$, $t\in[0;\pi]$ (рис.4).

Розв'язання:

Нехай кардіоїда зображена на рис.4.

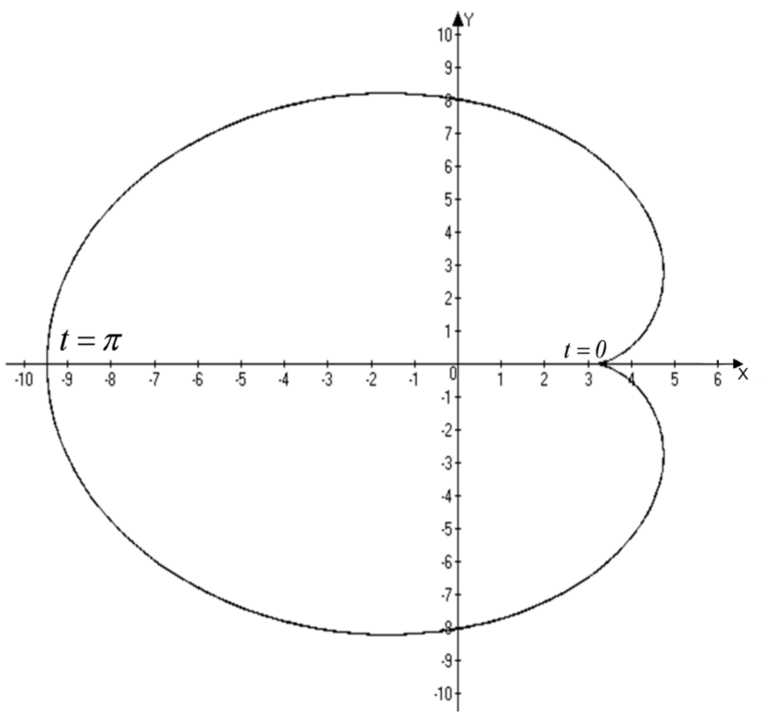


Рис.4

Тоді згідно формули (10) дістанемо:

$$\int\limits_l (x+y)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(2\sqrt{10}\cos t-\sqrt{10}\cos 2t+2\sqrt{10}\sin t-\sqrt{10}\sin 2t\right)\times$$

$$\times\left(-2\sqrt{10}\sin t+\sqrt{10}\sin 2t\right)\left(-2\sqrt{10}\sin t+2\sqrt{10}\sin 2t\right)dt=$$

$$=2\cdot 10\int_0^{\pi}\left(2\cos t-\cos 2t+2\sin t-\sin 2t\right)\left(\sin 2t-\sin t\right)dt=$$

$$=20\int_0^{\pi}\left(2\cos t\sin 2t-2\cos t\sin t-\sin 2t\cos 2t+\cos 2t\sin t+\right.$$

$$\left.+2\sin t\sin 2t-2\sin^2 t-\sin^2 2t+\sin 2t\sin t\right)dt=$$

$$=20\int_0^{\pi}\left(4\cos^2 t\sin t-\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t+\cos^2 t\sin t-\sin^3 t+\right.$$

$$\left.+6\sin^2 t\cos t-2\sin^2 t-\sin^2 2t\right)dt=$$

$$=20\int_0^{\pi}\left(5\cos^2 t\sin t-\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 4t-\right.$$

$$\left.-\left(1-\cos^2 t\right)\sin t+6\sin^2 t\cos t-2\frac{1-\cos 2t}{2}-\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt=$$

$$=20\left[\int_0^{\pi}(-5)\cos^2 t\cdot d\left(\cos t\right)-\int_0^{\pi}\sin 2tdt-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin tdt+\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right)+$$

$$+6\int_0^{\pi}\sin^2 t d\left(\sin t\right)-\int_0^{\pi}\left(1-\cos 2t\right)dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt\Bigg]=$$

$$=20\left[-\frac{5}{3}\cos^3 t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t+\right.$$

$$\left.+\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}+6\frac{\sin^3 t}{3}-t+\frac{\sin 2t}{2}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right]\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=20\left[-\frac{5}{3}(-1-1)+\frac{1}{2}(1-1)+\frac{1}{8}(1-1)+(-1-1)-\frac{1}{3}(-1-1)-\pi-\frac{\pi}{2}\right]=$$

$$=20\left(\frac{10}{3}-2+\frac{2}{3}-\pi-\frac{\pi}{2}\right)=20\frac{20-12+4-6\pi-3\pi}{6}=10\frac{12-9\pi}{3}=$$

$$=10\left(4-3\pi\right)\approx-54{,}2478.$$

Відповідь: -*54,2478*.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_l y^2dx+x^2dy$, де l – верхня половина еліпса $x=200\cos t,\ y=100\sin t$. Інтегрування виконувати проти ходу годинникової стрілки (рис.5.)

Розв'язання:

Так як початку дуги l (рис.5) – точці $A\left(200;0\right)$ – відповідає значення $t=0$, а закінченню – точці $B\left(-200;0\right)$ – значення $t=\pi$, то границями по t будуть 0 і π.

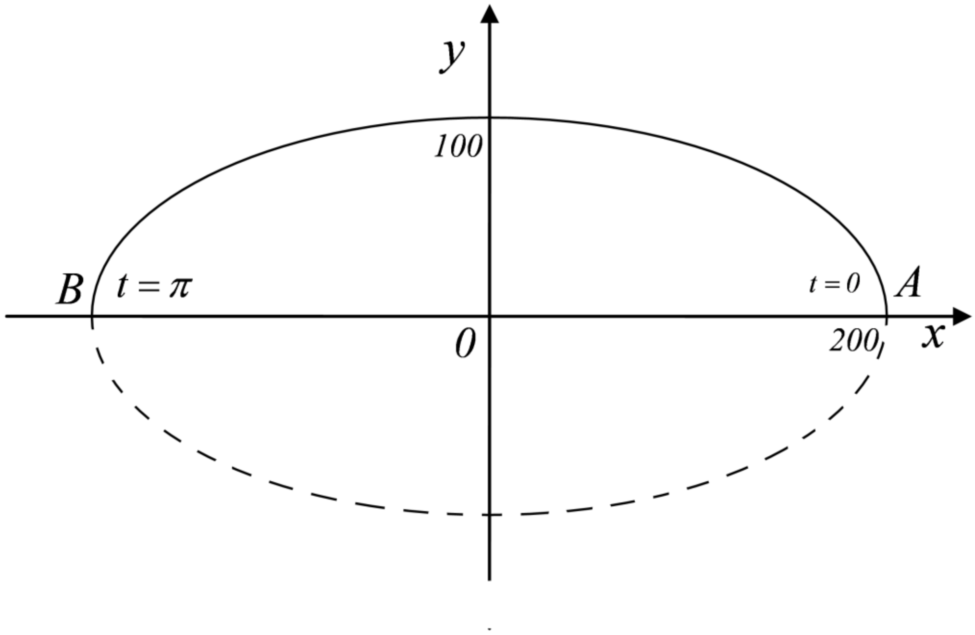


Рис.5

Використовуючи (10), одержимо

$$\int_{1} y^2dx + x^2dy =$$

$$=\int_0^{\pi}\left(100^2 \sin^2 t(-200\sin t)+200^2\cos^2 t\cdot 100\cos t\right)dt =$$

$$=100^2\cdot 200\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)d\cos t+200^2\cdot 100\int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t) =$$

$$=100^2\cdot 200(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{\pi}+200^2\cdot 100(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{\pi} =$$

$$=100^2\cdot 200((-1-1)-\frac{1}{3}(-1-1) =$$

$$=100^2\cdot 200(-2+\frac{2}{3})=100^2\cdot 200\cdot\frac{-4}{3}=-\frac{200^3}{3}\approx -2666666{,}667.$$

Відповідь: -*2666666,667.*

4. Обчислити площу частин бокової поверхні кругового циліндра $x^2 + y^2 = 100^2$, обмеженого знизу площиною xOy, а зверху поверхнею $z = 100 + \dfrac{x^2}{100}$.

Розв'язання:

Дане завдання зводиться до обчислення криволінійного інтегралу від функції $z = 100 + \dfrac{x^2}{100}$ по колу $x^2 + y^2 = 150^2$.

Оскільки задана поверхня симетрична відносно площин xOz та yOz, то можна обмежитися обчисленням інтеграла тільки по дузі $\dfrac{1}{4}$ частини кола, розміщеної в I четверті площини xOy. Використовуючи полярні координати і формулу (4), одержимо $x = 100\cos t$, $y = 100\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$,

$$z = 100 + \frac{100^2\cos^2 t}{100} = 100 + 100\cos t = 100(1 + \cos^2 t).$$

$$S = \int_l f\left(x,y\right)ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 100\left(1+\cos^2 t\right)\sqrt{\left(-100\right)^2\sin t + \left(100\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$= 4\cdot 100^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt = 4\cdot 100^2\left(t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\cdot 100^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 4\cdot 100^2\cdot\frac{3\pi}{4} = 3\pi\cdot 100^2 \approx 94247{,}7796.$$

Відповідь: *94247,7796*.

5. Обчислити площу, обмежену астроїдою $x = \sqrt{20}\cos^3 t$, $y = \sqrt{20}\sin^3 t$.

Розв'язання:

Нехай задана астроїда зображена на рис.6.

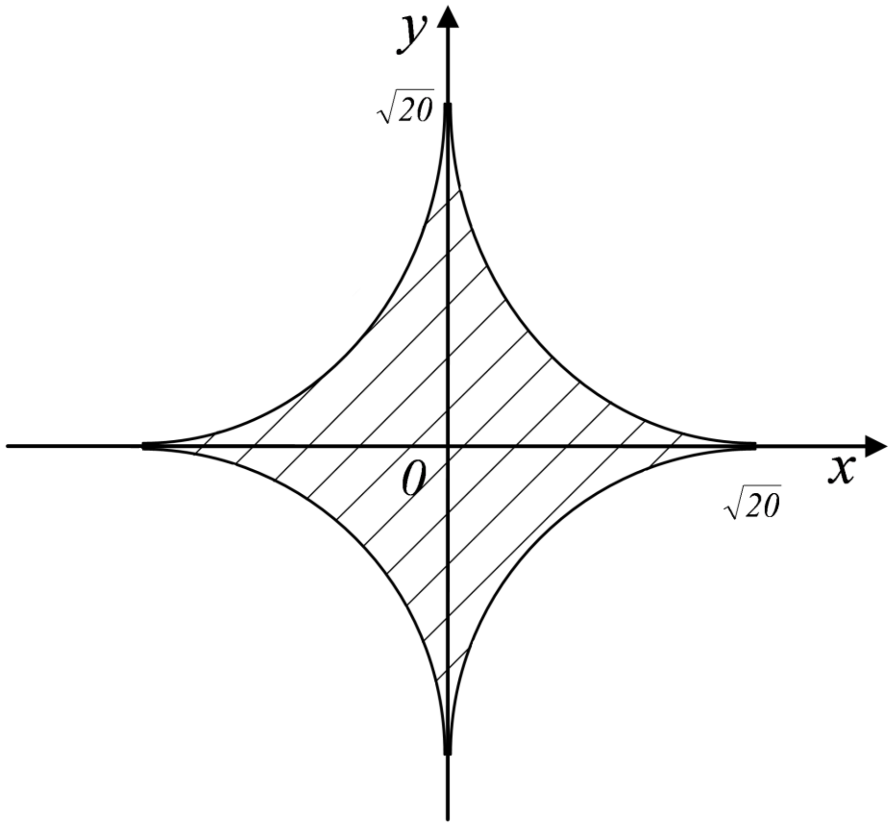


Рис.6

Тоді, згідно з формулою (13), одержимо:

$$S=\frac{1}{2}\oint_{l} x\,dy-y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(\sqrt{20}\cos^{3}t\cdot 3\sqrt{20}\sin^{2}t\cos t+\sqrt{20}\sin^{3}t\cdot 3\sqrt{20}\cos^{2}t)dy=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 20\int_{0}^{2\pi}\sin^{2}t\cdot\cos^{2}t(\cos^{2}t+\sin^{2}t)dt=\frac{30}{4}\int_{0}^{2\pi}\sin^{2}2t\,dt=$$

$$=\frac{30}{4}\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{15}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=$$

$$=\frac{15}{4}\cdot 2\pi=\frac{15}{4}\pi=7{,}5\pi\approx 23{,}5619.$$

Відповідь: *23,5619*.

ДОВІДНИКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Таблиця похідних елементарних функцій.

№	Похідна	№	Похідна
1	C' = 0, (C = const)	9	$(\sin x)' = \cos x$
2	$\left(\tilde{o}^{\alpha}\right)' = \alpha \tilde{o}^{\alpha-1}$	10	$(\cos x)' = -\sin x$
3	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4	$\left(\sqrt{\tilde{o}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{o}}}$	12	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5	$\left(e^{\tilde{o}}\right)' = e^{x}$	13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	$\left(\grave{a}^{\tilde{o}}\right)' = \grave{a}^{\tilde{o}} \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1)$	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e, \quad (a > 0, a \neq 1)$	16	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання.

1. Похідна постійної величини С дорівнює нулю: $\tilde{N}' = 0$.
2. Постійний множник С можна виносити за знак похідної:

$$\left(\tilde{N} f(x)\right)' = \tilde{N} f'(x).$$

3. Якщо кожна із функцій має похідну в деякій точці х, то їх алгебраїчна сума також має похідну в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:

$$\left[U(x) + V(x) - W(x)\right]' = U'(x) + V'(x) - W'(x).$$

4. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і першої функції на похідну другої функції:

$$\left[U(x)V(x)\right]' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x).$$

5. Похідна частки двох диференційованих функцій дорівнює дробу, знаменником якого є квадрат знаменника даного дробу, а чисельником – різниця між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком чисельника на похідну знаменника:

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}.$$

Рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці x_0.

Назва рівняння	Аналітичний запис
1	2
Рівняння дотичної	$y - f(x_0) = f'(x_0)(\tilde{o} - \tilde{o}_0)$
Рівняння нормалі	$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(\tilde{o} - \tilde{o}_0)$

Похідна складеної функції.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційована в точці x, а функція $y = f(u)$ має при відповідному значенні u похідну $y'_u = f'(u)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ в даній точці x також диференційована, причому похідна складеної функції дорівнює добутку похідної функції $y = f(u)$ за проміжним аргументом u на похідну проміжного аргументу за x:

$$\acute{o}'_{\tilde{o}} = \acute{o}'_{\grave{e}} \cdot u_x.$$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію y = f(x) задано параметрично:

$$\begin{cases} \tilde{o} = \phi(t) \\ \acute{o} = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Якщо функція $\tilde{o} = \phi(t)$ має обернену функцію і функції $\phi(t)$ та $\psi(t)$ диференційовані на відрізку $[\alpha; \beta]$, то функція $y = f(x)$ також диференційована на цьому відрізку. Похідну її можна знайти, користуючись формулою:

$$\acute{o}'_{\tilde{o}} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Похідна другого порядку від параметрично заданої функції обчислюється наступним чином:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{\phi'(t)}.$$

Логарифмічне диференціювання

Для знаходження похідної першого порядку функції вигляду: $y=\left(u\left(x\right)\right)^{v\left(x\right)}$ використовують метод логарифмічного диференціювання.

Спочатку прологарифмуємо функцію:

$$lny=v\left(x\right)\ln u\left(x\right).$$

Шляхом диференціювання цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y}y'=v'\left(x\right)\ln u\left(x\right)+v\left(x\right)\frac{1}{u\left(x\right)}u'\left(x\right).$$

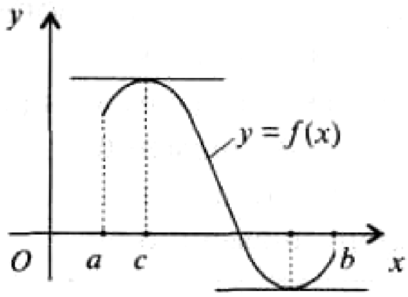
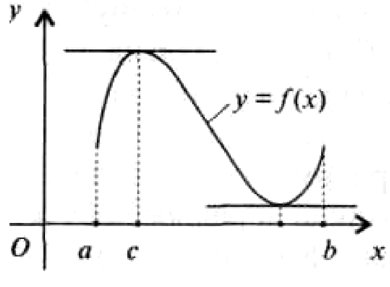
Розв’язуючи цю рівність відносно y', маємо:

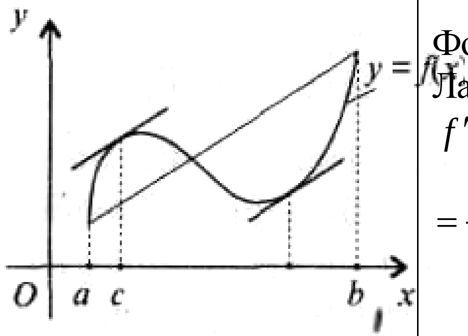
$$y'=y\left[v'\left(x\right)\ln u\left(x\right)+v\left(x\right)\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}\right].$$

Підставивши в праву частину замість y показниково-степеневу функцію, остаточно отримаємо:

$$y'=\left(u\left(x\right)\right)^{v\left(x\right)}\left[v'\left(x\right)\ln u\left(x\right)+v\left(x\right)\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}\right].$$

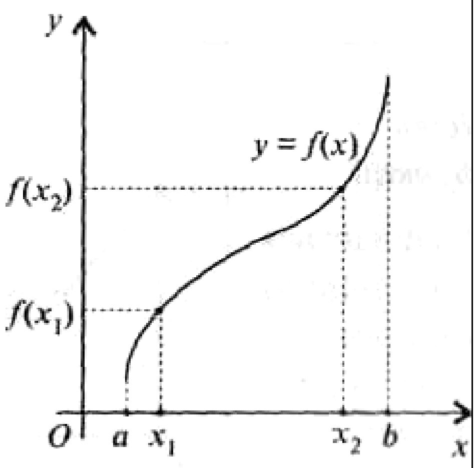
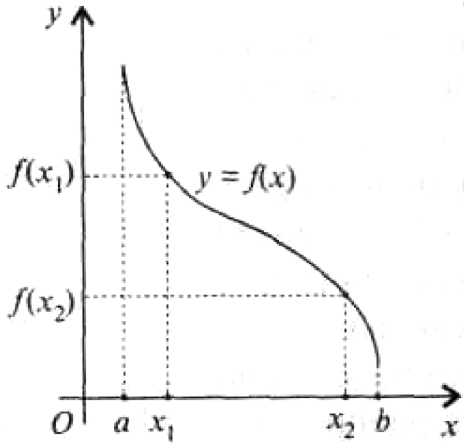
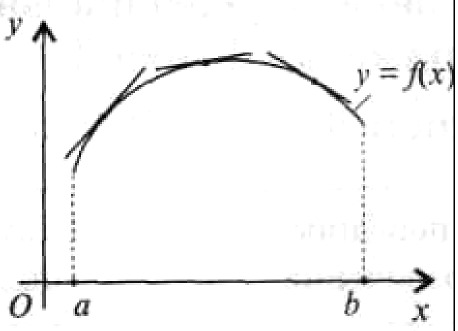
ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

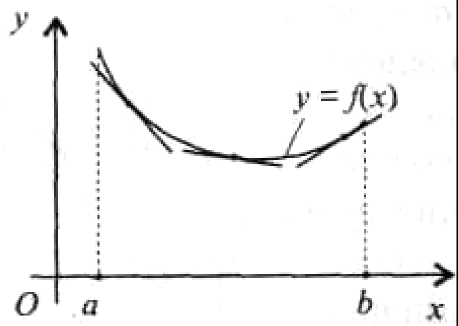
Формулювання	Геометрична ілюстрація	Аналітичний запис
1	2	3
Теорема Ферма Якщо диференційована функція $f\left(x\right)$ у деякій точці c інтервалу $\left(a;b\right)$ набуває свого найбільшого або найменшого значення, то в цій точці похідна дорівнює нулю: $f'\left(c\right)=0$		Точка $c\in\left(a;b\right)$– точка *max* або *min* ф-ції то $f'\left(c\right)=0$
Теорема Ролля Якщо функція $f\left(x\right)$: 1) неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$; 2) диференційована в інтервалі $\left(a;b\right)$; 3) на кінцях відрізка $\left[a;b\right]$ набуває однакових значень, тобто $f\left(a\right)=f\left(b\right)$, то знайдеться хоча б одна точка $c\in\left(a;b\right)$, в якій похідна функції дорівнює нулю: $f'\left(c\right)=0$		Якщо $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ та $c\in\left(a;b\right)$ то $f'\left(c\right)=0$

Теорема Лагранжа Якщо функція $f(x)$: 1) неперервна на відрізку $[a;b]$; 2) диференційована в інтервалі $(a;b)$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій має місце рівність: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$		Формула Лагранжа: $f'(x)=$ $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Теорема Коші Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$: 1) неперервні на відрізку $[a;b]$; 2) диференційовані в інтервалі $(a;b)$; 3) похідна $\varphi'(x)\neq 0$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій виконується умова: $\dfrac{f(b)-f(c)}{\varphi(b)-\varphi(c)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.		Формула Коші: $\dfrac{f(b)-f(c)}{\varphi(b)-\varphi(c)}=$ $=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.
Правило Лопіталя Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в деякому околі точки а і в цьому околі $\varphi'(x)\neq 0$. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ є одночасно або нескінченно малими, або нескінченно великими функціями при $x \to a$, тобто мають місце невизначеності типів $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, то границя відношення цих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо останні існують.		$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=$ $=\left[\dfrac{0}{0}\text{àáî}\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$ $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ($\varphi'(x)\neq 0$).

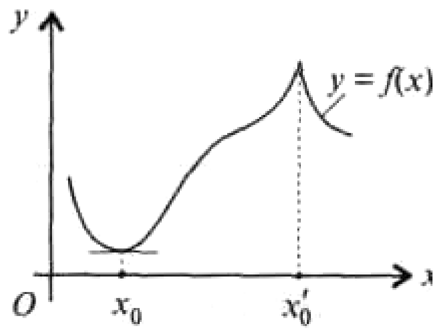
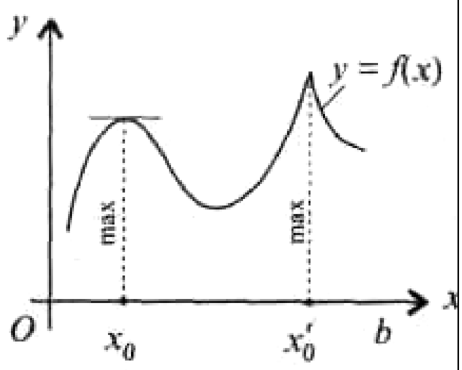
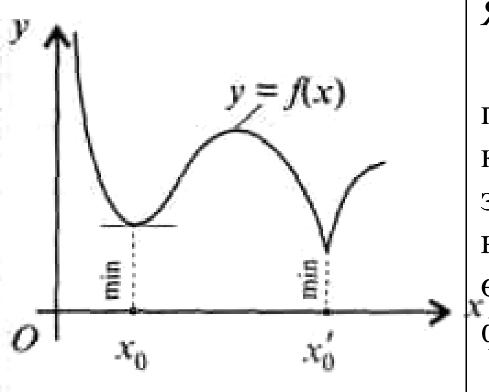
ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

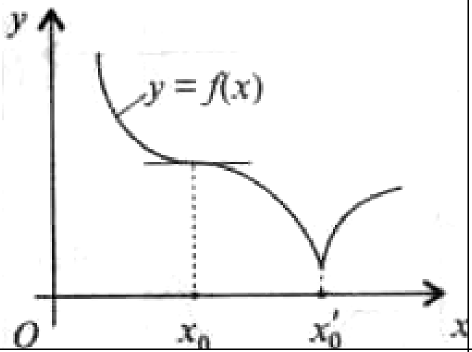
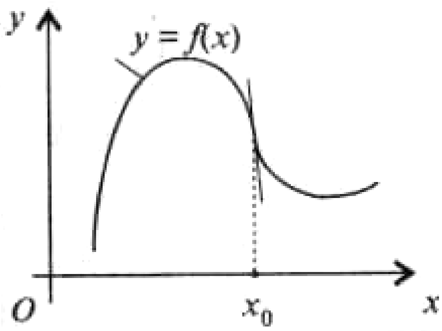
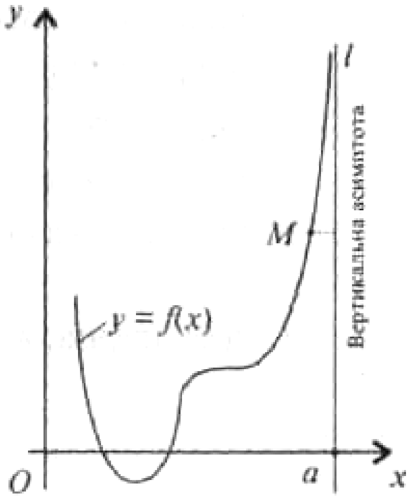
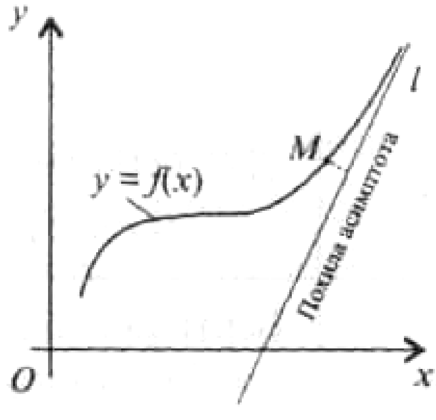
Монотонність функції. Опуклість і угнутість кривих.

Характер поведінки функції, означення	Геометрична ілюстрація	Знак похідної
Зростання функції Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на інтервалі $(a;b)$, якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає більше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$, випливає нерівність: $f(x_2) > f(x_1)$		$f'(x) \geq 0$, $x \in (a;b)$
Спадання функції Функція $y = f(x)$ називається спадною на інтервалі $(a;b)$, якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає менше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність: $f(x_2) < f(x_1)$.		$f'(x) \leq 0$, $x \in (a;b)$
Опуклість графіка функції Крива $y = f(x)$ називається опуклою на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.		$f''(x) < 0$, $x \in (a;b)$

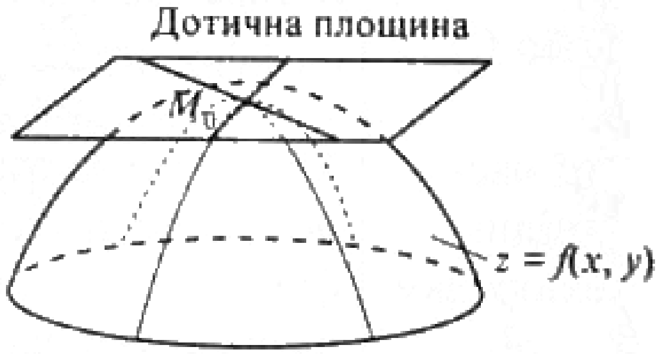
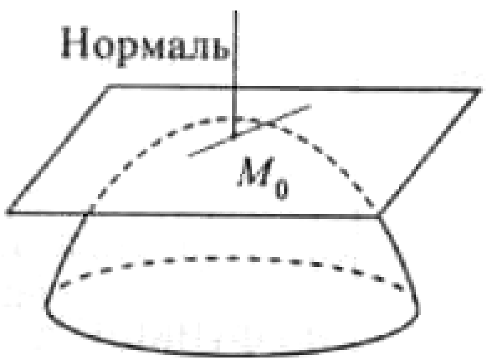
Угнутість графіка функції Крива $y = f(x)$ називається угнутою на інтервалі $(a;b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.		$f''(x) > 0$, $x \in (a;b)$

Характерні точки і прямі кривої

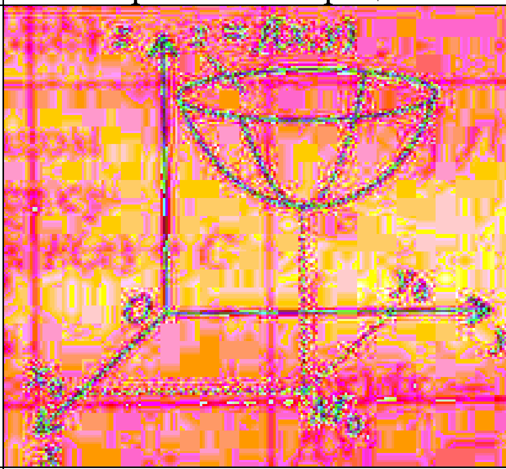
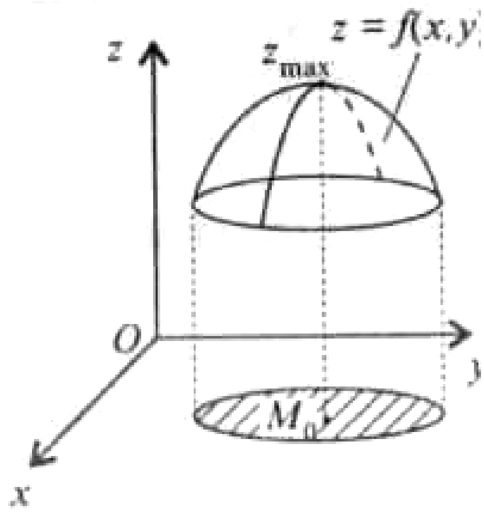
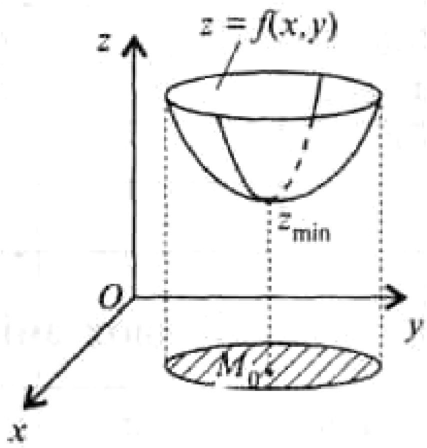
Назва точки або прямої, означення	Геометрична ілюстрація	Аналітична умова
Точка x_0 називається критичною точкою (або критичною точкою першого роду) функції $y = f(x)$, якщо похідна $f'(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує		$f'(x_0) = 0$ $f'(x_0)$ не існує
Точка x_0 називається точкою локального максимуму функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, Для всіх точок x якого виконується нерівність: $f(x) < f(x_0)$		Якщо похідна $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з „+" на „–", то ця точка є точкою максимуму функції $y = f(x)$
Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність: $f(x) > f(x_0)$		Якщо похідна $f'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з „–" на „+", то ця точка є точкою мінімуму функції $y = f(x)$
Точками локального екстремуму, або просто екстремуму, називаються		

точки локального максимуму і мінімуму		
Точка x_0 називається критичною точкою другого роду функції $y = f(x)$, якщо друга похідна $y = f''(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує		$f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує
Точка кривої $y = f(x)$ називається точкою її перегину, якщо вона відділяє її опуклу частину від угнутої		Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через критичну точку другого роду змінює знак, то ця точка є точкою перегину кривої $y = f(x)$
Пряма l називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність		Якщо в точці x = a функція $y = f(x)$ має нескінченний розрив другого роду, то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції
		Похила асимптота кривої $y = f(x)$ має рівняння $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$

ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Поняття	Вид рівняння або формула для обчислення
Дотична площина до поверхні в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	 а) поверхню задано неявно $F(x;y;z)=0$: $F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0$ б) поверхню задано явно $z=f(x;y)$: $f_x'(\tilde{o}_0,\acute{o}_0)(x-x_0)+f_y'(\tilde{o}_0,\acute{o}_0)(y-y_0)=z-z_0$
Нормаль до поверхні в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$	 а) поверхню задано неявно $F(x;y;z)=0$: $\frac{\tilde{o}-\tilde{o}_0}{F_x'(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(M_0)};$ б) поверхню задано явно $z=f(x;y)$: $\frac{\tilde{o}-\tilde{o}_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{1}$

Локальні екстремуми функції багатьох змінних

Назва точки, означення	Геометрична ілюстрація	Аналітична умова
Точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ називається критичною точкою функції $z=f(x;y)$, якщо частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю (або не існують).		$\begin{cases} \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z(M_0)}{\partial y}=0 \end{cases}$
Якщо функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f(M)<f(M_0)$, то точка M_0 називається точкою локального максимуму, або просто максимуму функції $z=f(x;y)$		Якщо в точці M_0 частинні похідні функції $z=f(x;y)$ дорівнюють нулю і в деякому околі точки M_0 функція $z=f(x;y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому $f''_{\tilde{o}x}(\grave{I}_0)f''_{\acute{o}\acute{o}}(\grave{I}_0)$- $-\left(f''_{\tilde{o}\acute{o}}(\grave{I}_0)\right)^2>0$, $f''_{\tilde{o}x}(\grave{I}_0)<0$, то точка M_0 є точкою максимуму функції $z=f(x;y)$
Якщо функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f(M)>f(M_0)$, то точка M_0 називається точкою локального мінімуму		Якщо в точці M_0 частинні похідні функції $z=f(x;y)$ дорівнюють нулю і в деякому околі точки M_0 функція $f(x;y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому

функції, або просто точкою мінімуму функції $z=f\left(x;y\right)$		$f''_{\text{õx}}(\text{Ì}_0)f''_{\text{óó}}(\text{Ì}_0)$- -$\left(f''_{\text{õó}}(\text{Ì}_0)\right)^2>0$, $f''_{\text{õx}}(\text{Ì}_0)>0$, то точка M_0 є точкою мінімуму функції $z=f\left(x;y\right)$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

№	Інтеграл	№	Інтеграл
1	$\int dx=x+C$	10	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
2	$\int \text{õ}^{\text{ï}}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq-1$	11	$\int tgxdx=-\ln\left\|\cos x\right\|+C$
3	$\int\frac{dx}{x}=\ln\left\|x\right\|+C$	12	$\int ctgxdx=\ln\left\|\sin x\right\|+C$
4	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$	13	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$
5	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	14	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right\|+C$
6	$\int e^x dx=e^x+C$	15	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
7	$\int\sin xdx=-\cos x+C$	16	$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
8	$\int\cos xdx=\sin x+C$	17	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$
9	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$	18	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$

Основні методи інтегрування.

1. Метод безпосереднього інтегрування.

Базується на основних властивостях невизначених інтегралів, таблиці інтегралів, а також на рівностях:

$$dx=d(x+b);\quad dx=\frac{1}{k}d(kx+b),\quad \text{де}\quad k,\ b\ -\ const.$$

2. Метод заміни змінної.

$$\int f(x)dx=\left|\text{õ}=\phi(t)\right|=\int f\left(\phi(t)\right)\cdot\phi'(t)\,dt.$$

Остання рівність існує за наступних умов:

- $f\left(x\right)$ має первісну на інтервалі $\left(a;b\right)$;

- $\phi(t)$ визначена і диференційована на інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\phi(\alpha)=a$; $\phi(\beta)=b$.

З методу заміни змінної випливає наступна рівність:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

3. Метод інтегрування частинами.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(функції u=f(u) та v=f(v) мають на деякому проміжку неперервні похідні).

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами:

1) Якщо $\int P(x)\cdot\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx,\ \grave{o}\,\hat{\imath}\ u = P(x);\ dv = \begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx.$

2) Якщо $\int P(x)\cdot\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix}dx,\ \grave{o}\,\hat{\imath}\ u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix};\ dv = P(x)dx,$

де $P(x)$ – многочлен.

Інтегрування раціональних дробів

Раціональні дроби	Інтеграли
Найпростіші раціональні дроби	
Типу I: $\frac{\grave{A}}{\tilde{o}-\grave{a}}$	$\int \frac{\grave{A}}{\tilde{o}-\grave{a}}dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
Типу II: $\frac{\grave{A}}{(\tilde{o}-\grave{a})^{ї}}$, п ≥ 2	$\int \frac{\grave{A}}{(\tilde{o}-\grave{a})^{ї}}dx = \frac{A}{(1-n)(\tilde{o}-\grave{a})^{ї-1}} + C$
Типу III: $\frac{\grave{I}\ \tilde{o}+N}{\tilde{o}^2+px+q}$, де $\frac{p^2}{4}-q<0$	$\int \frac{\grave{I}\ \tilde{o}+N}{\tilde{o}^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$
Типу IV: $\frac{\grave{I}\ \tilde{o}+N}{\left(\tilde{o}^2+px+q\right)^n}$,	$\int \frac{\grave{I}\ \tilde{o}+N}{\left(\tilde{o}^2+px+q\right)^n}dx$ шляхом повторного інтегрування частинами зводиться до інтегралу від найпростішого

де $\frac{p^2}{4}-q<0$, $n>2$	дробу типу III.
Правильний раціональний дріб $\frac{Ð_ò(õ)}{Q_n(x)}$, $äå\ m<n$	$\int \frac{Ð_ò(õ)}{Q_n(x)}dx$ зводиться до суми інтегралів від найпростіших дробів типів I – IV. <u>Зауваження:</u> 1. Дійсному простому кореню знаменника $x=a$ відповідає дріб типу I: $$\frac{À}{õ-à}$$ 2. Дійсному простому кореню знаменника $x=b$ кратності k відповідає сума дробів типів I і II: $$\frac{À_1}{x-b}+\frac{À_2}{(x-b)^2}+...+\frac{A_k}{(x-b)^k}$$ 3. Парі комплексно-спряжених коренів знаменника або квадратному тричлену $õ^2+px+q$ з $\frac{p^2}{4}-q<0$ відповідає дріб типу III: $$\frac{Ì\ õ+N}{õ^2+px+q}$$
Неправильний раціональний дріб $\frac{Ð_ò(õ)}{Q_n(x)}$, $äå\ m\geq n$	$\int \frac{Ð_ò(õ)}{Q_n(x)}dx=\int Ò_{ò-ï}(õ)dx+\int \frac{R_p(õ)}{Q_n(x)}dx$, де $Ò_{ò-ï}(õ)$ –ціла частина дробу; $\frac{R_p(õ)}{Q_n(x)}$–правильний раціональний дріб ($p<n$)

<u>Інтегрування ірраціональних функцій</u>

Інтеграл	Підстановка
1	2
$\int R(x,\sqrt[n]{x})dx$	$\sqrt[n]{x}=t$
$\int R(x,\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x},...)dx$	$\sqrt[n]{x}=t$, де n – найменше спільне кратне чисел n_1 , n_2 , ...
$\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$	$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$
$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\cdot tgt$ або $x=a\cdot ctgt$

$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\dfrac{a}{cost}$ або $x=\dfrac{a}{sint}$
$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\sin t$ або $x=a\cos t$

Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграл	Підстановка	Вираз для інтегрування
$\int R(\sin x)\cos xdx$	$t=\sin \tilde{o} \Rightarrow dt=\cos xdx$	$\int R(t)dt$
$\int R(\cos x)\sin xdx$	$t=\cos \tilde{o} \Rightarrow dt=-\sin xdx$	$-\int R(t)dt$
$\int \sin^2 xdx$	$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\dfrac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\ dx$
$\int \cos^2 xdx$	$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$	$\dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\ dx$
$\int \sin^m x\cos^n xdx$, m та n – цілі парні додатні числа: $m=2p$, $n=2q$	$\sin^{2ð} x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^{ð}$ $\cos^{2q} x=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^{q}$	$\int \sin^{2p} x\cos^{2q} x\ dx=$ $=\int(\sin^2 x)^p(\cos^2 x)^q dx=$ $=\int\left(\dfrac{1-\cos\ 2x}{2}\right)^p\left(\dfrac{1+\cos\ 2x}{2}\right)^q dx$
$\int \sin^m x\cos^n xdx$, n чи m – непарне ціле додатне число.		
Можливі випадки: 1) якщо $n=2p+1$	$t=\sin \tilde{o} \Rightarrow dt=\cos xdx$	$\int \sin^m x\cos^{2p+1} x\ dx\ =$ $=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^p\cos x\ dx\ =$ $=\int t^m(1-t^2)^p dt$
2) якщо $m=2k+1$	$t=\cos \tilde{o} \Rightarrow dt=-\sin xdx$	$\int \sin^{2k+1} x\cos^n x\ dx\ =$ $=\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin x\ dx\ =$ $=-\int(1-t^2)^k t^n dt$
$\int R(\sin x,\cos x)dx$	Універсальна тригонометрична підстановка	$\int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2dt}{1+t^2}$

	$t = tg\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$	
$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$	$\sin\alpha\tilde{o}\cos\beta\tilde{o} =$ $= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)\tilde{o} +\right.$ $\left.+\sin(\alpha+\beta)\tilde{o}\right)$	$\frac{1}{2}\int\left(\sin(\alpha-\beta)\tilde{o} - \sin(\alpha+\beta)\tilde{o}\right)dx$
$\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$	$\sin\alpha\tilde{o}\sin\beta\tilde{o} =$ $= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)\tilde{o} -\right.$ $\left.-\cos(\alpha+\beta)\tilde{o}\right)$	$\frac{1}{2}\int\left(\cos(\alpha-\beta)\tilde{o} - \cos(\alpha+\beta)\tilde{o}\right)dx$
1	2	3
$\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$	$\cos\alpha x\cos\beta x =$ $= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)$	$\frac{1}{2}\int\left(\cos(\alpha-\beta)\tilde{o} + \cos(\alpha+\beta)\tilde{o}\right)dx$

<u>Інтегрування диференціального бінома</u>

Диференціальним біномом називається вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^{\eth}dx$,
де a, b – const $(\grave{a} \neq 0,\ b \neq 0)$; m, n, p – дійсні числа.

Інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^{\eth}dx$ виражається через елементарні функції в наступних випадках:

Умова	Підстановка
1. Якщо p – ціле число	$x = t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n
2. Якщо p – дріб $\left(p = \frac{r}{s}\right)$, але $\frac{m+1}{n}$ – ціле число	$a + bx^n = y^s$, де s – знаменник дробу p.

3. Якщо обидва числа $p = \frac{r}{s}$ та $\frac{m+1}{n}$ – дроби, але їх сума $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число	$a + bx^n = y^s x^n$ або $ax^{-n} + b = y^s$, де s – знаменник дробу p.

Інтегрування функцій типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$

Інтегрування цього типу функцій відбувається за допомогою однієї з підстановок Ейлера.

Назва	Умова	Підстановка
Перша підстановка Ейлера	$\grave{a} > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$
Друга підстановка Ейлера	$c > 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$
Третя підстановка Ейлера	Трьохчлен $ax^2 + bx + c$ має дійсні корені x_1, x_2	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\tilde{o} - \tilde{o}_1\right)t$ або $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\tilde{o} - \tilde{o}_2\right)t$

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x)dx = F(x) + C.$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

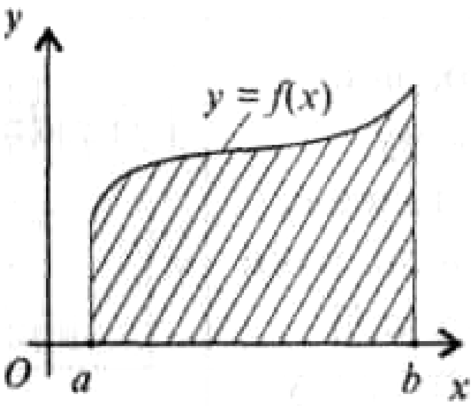
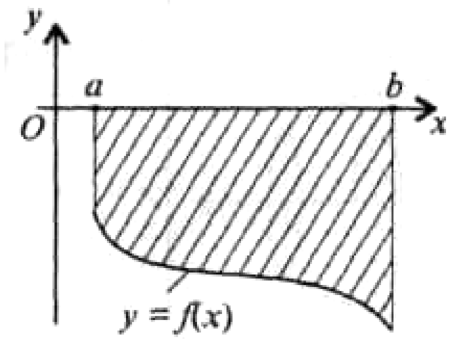
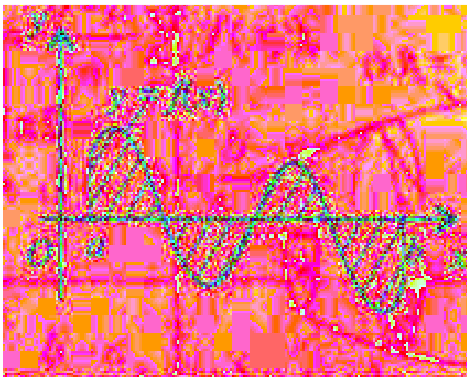
$$\int \tilde{N} f(x)dx = C\int f(x)dx.$$

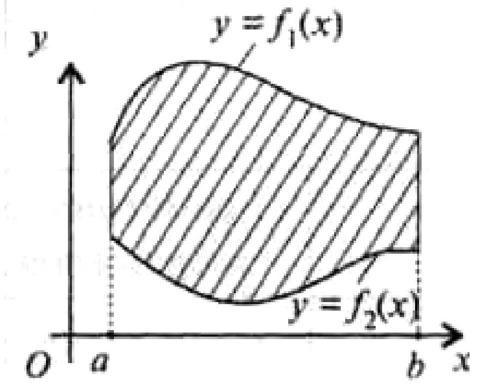
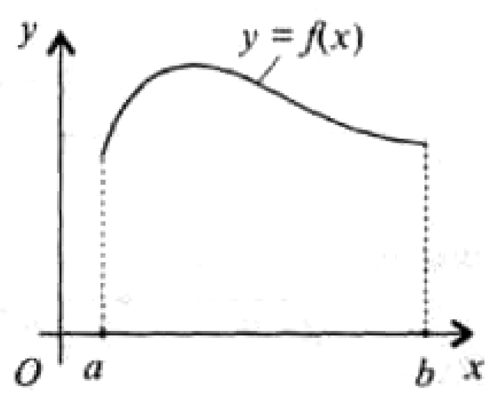
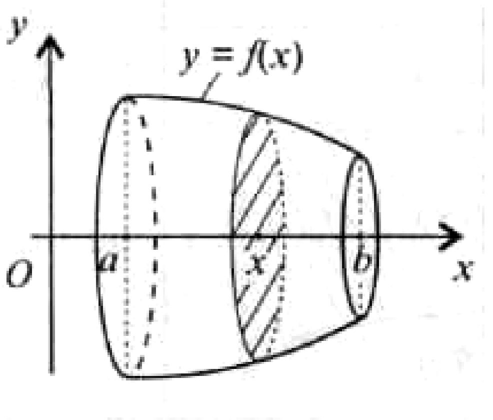
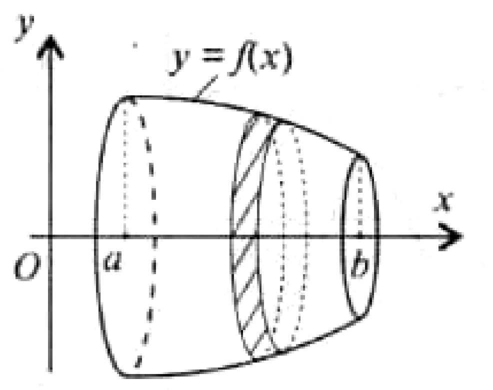
5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій $f(x)$ та $g(x)$ дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій за умови, що $f(x)$ та $g(x)$ мають первісні:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

<u>Застосування визначеного інтеграла</u>

Геометричні задачі

Назва поняття	Геометрична ілюстрація	Формули для обчислення
1	2	3
<u>Площа плоскої фігури:</u> а) площа криволінійної трапеції, якщо $f(x) > 0$		а) криву задано явно: $S = \int_a^b f(x)dx$; б) криву задано параметрично: $\begin{cases} \tilde{o} = \tilde{o}(t) \\ \acute{o} = \acute{o}(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$ $S = \int_\alpha^\beta \acute{o}(t)x'(t)dt$
б) площа криволінійної трапеції, якщо $f(x) < 0$		$S = -\int_a^b f(x)dx$
в) площа фігури, зображеної на рисунку		$S = \int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$
1	2	3

г) площа фігури, обмеженої кривими $ó = f_1(x)$, $ó = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$		$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$, $\left(f_1(x) \geq f_2(x)\right)$
Довжина дуги кривої		а) криву задано явно: $ó = f\,(x)$, $õ \in [à;\, b]$; $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$; б) криву задано параметрично: $\begin{cases} õ = õ(t) \\ ó = ó(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$; $l = \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt$
Об'єм тіла обертання		$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$
Площа поверхні обертання		$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$

Узагальнені поняття та формули з теми «Диференціальні рівняння»

1	Диференціальні рівняння n-го порядку $F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$	
2	Диференціальні рівняння 1-го порядку $F(x; y; y') = 0$, або $y' = f(x; y)$	
3	Д.Р. з відокремленими змінними $M(x)dx + N(y)dy = 0$	$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, C = const$
4	Д.Р. з відокремлюваними змінними $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$
5	Однорідні Д.Р. $y' = f(x; y)$, де $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$	$y = ux,\ y' = u'x + u$
6	Лінійні неоднорідні Д.Р. 1-го порядку $y' + p(x)y = q(x)$	$y = uv$ $y' = u'v + uv'$ $\quad \begin{cases} v' + p(x) \cdot v = 0 \\ u' \cdot v = q(x) \end{cases}$
7	Д.Р. Бернуллі $y' + p(x)y = q(x) \cdot y^n$	$y = u(x)v(x)$, або $z = y^{-n+1}$
8	Диференціальні рівняння 2-го порядку $F(x; y; y'; y'') = 0$, $y'' = f(x; y; y')$	
	Диференціальні рівняння 2-го порядку, що допускають їх пониження	
9	$y'' = f(x)$	$y' = \int f(x)dx + C_1$, $y = \int \left(f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2$
10	$F(x; y'; y'') = 0$	$y' = p(x), y'' = p'(x) \to$ $p' = f(x; p)$
11	$F(y; y'; y'') = 0$	$y' = p(y), y'' = p(y)p'(y) \to$ $p \cdot p' = f(y; p)$
12	Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку $y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$	$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$, де y_1 з y_2-лінійно-незалежні частинні розв'язки
13	ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами: $y'' + py' + qy = 0$, характеристичне рівняння $k^2 + pk + q = 0$	
	$D > 0, \quad k_1 \neq k_2$	$\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
	$D = 0,\ k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2x)$
	$D < 0,\ k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{ax} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
14	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку $y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$	$y = \bar{y} + y^*$, де $\bar{y}$ - заг. розв'язок ЛОДР, y^* - част. розв'язок ЛНДР
15	Частинний розв'язок ЛНДР 2-го пор. при спеціальній правій частині $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x\right)$	$y^* = x^r e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos \beta x + N_l(x)\sin \beta x\right)$ $l = \max(n; m), \quad r = \alpha + i\beta$ - число кратності коренів характ. рівняння

16	Метод варіації довільних сталих $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ $y^* = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$	$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$

Узагальнені поняття та формули з теми
«Числові та функціональні ряди»

1	Числовий ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$
2	$n-$ю частинна сума ряду	$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
3	Збіжність ряду	Якщо існує сума ряду $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то ряд збіжний, якщо $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, або не існує, то розбіжний.
4	$n-$й залишок ряду	$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$
5	Необхідна ознака збіжності ряду	Якщо ряд збігається, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
6	Достатня ознака розбіжності	Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ або не існує, то ряд розбігається.
7	Ряд геометричної прогресії	$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$ $\lvert q \rvert < 1$- збіжний $S = \frac{a}{1-q}$; $\lvert q \rvert > 1$-розб.
8	Гармонійний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$-розбіжн.
9	Узагальнений гармонійний ряд (ряд Діріхле)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ $p > 1$- збіжний, $0 < ð \leq 1$- розбіжний.
10	Ознака порівняння для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2)	Якщо $u_n \leq v_n$,то із збіжності р.(2) $\Rightarrow$ збіжність р.(1); із розбіжності р(1) $\Rightarrow$ розбіжність (2).
11	Гранична ознака порівняння	Якщо існує $\lim \frac{u_n}{v_n} = k \left(0 < k < \infty\right)$, то ряди одночасно збіжні, чи розбіжні.
12	Ознака Даламбера	$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 \to çá³æ\ í\ èé \\ l > 1 \to ðî\ çá³æ\ í\ èé \\ l = 1 \to ? \end{cases}$
13	Радикальна ознака Коші	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$
14	Інтегральна ознака Коші	Якщо $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$і$u_n = f\left(n\right)$-

	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$	не зростаюча неперервна, то $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і ряд одночасно збіжні чи розбіжні.
15	Знакопочережний ряд	$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_n > 0)$.
16	Ознака Лейбніца збіжності знакопочережного ряду	Якщо $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \ldots > u_n > \ldots$ і $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається.
17	Ззнакозмінний ряд	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$, де u_n- довільні числа.
18	Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду	Якщо $\lvert u_1\rvert + \lvert u_2\rvert + \ldots + \lvert u_n\rvert + \ldots$-збіжний, то і $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$- збіжний.
19	Абсолютно збіжний ряд	Якщо $\lvert u_1\rvert + \lvert u_2\rvert + \ldots + \lvert u_n\rvert + \ldots$-збіжний
20	Умовно збіжний ряд	Якщо знакозмінний ряд розбіжний, а ряд $\lvert u_1\rvert + \lvert u_2\rvert + \ldots + \lvert u_n\rvert + \ldots$- збіжний.
21	Функціональний ряд	$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$
22	Сума функціонального ряду	$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$.
23	Залишок функціонального ряду	$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$.
24	Степеневий ряд	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$
25	Степеневий ряд за степенями $(x - x_0)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.
26	Теорема Абеля	Якщо степеневий ряд збіжний при $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$, то він абсолютно збіжний при $\lvert x\rvert < \lvert x_1\rvert$; якщо розбіжний при $x = x_2$, то розбіжний при $\lvert x\rvert > \lvert x_2\rvert$
27	Радіус збіжності ряду R	Якщо при $\lvert x\rvert < R$ ряд збіжний абсолютно і $\lvert x\rvert > R$- ряд розбіжний $R = \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_n}{a_{n+1}} \right\rvert \quad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$.
28	Інтервалом збіжності ряду	$(-R;R)$
29	Ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$
30	Ряд Маклорена в інтервалі $(-R;R)$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Функція $f(x)$	Розклад функцій в ряд Маклорена	Інтервал збіжно-

		сті
e^u	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots$	$(-\infty;\infty)$
$\sin u$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!}=u-\frac{u^3}{3!}-\frac{u^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}u^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$	$(-\infty;\infty)$
$\cos u$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{u^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	$(-\infty;\infty)$
$(1+u)^\alpha$	$1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n=$ $=1+\frac{\alpha}{1!}u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\ldots$ $\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+\ldots$	$\begin{cases}[-1;1], & \alpha\ge 0,\\ (-1;1], & -1<\alpha<0,\\ (-1;1), & \alpha\le -1\end{cases}$
$\frac{1}{1-u}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u^n=1+u+u^2+u^3+\ldots+u^n+\ldots$	$(-1;1)$
$\frac{1}{1+u}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n=1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)^n u^n+\ldots$	$(-1;1)$
$\ln(1+u)$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}+\ldots$	$(-1;1]$
$arctgu$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{u^{2n+1}}{2n+1}=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$[-1;1]$
$\arcsin u$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\cdot\frac{u^{2n+1}}{2n+1}=$ $=u+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{u^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{u^7}{7}+\ldots$ $\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\cdot\frac{u^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$[-1;1]$

Кратні інтеграли

а) Площа плоскої фігури, обмеженої областю D, знаходиться за формулою

$$S=\iint\limits_D dxdy;$$

б) Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z=f(x,y)$, знизу площиною $z=0$ і з боків прямою циліндричною поверхнею, що відтинає на площині xOy область D, обчислюється за формулою

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy;$$

в) Якщо гладку однозначну поверхню задано рівнянням $z=f\left(x;y\right)$, то площа поверхні визначається за формулою

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy,$$

де D - проекція заданої поверхні на площину xOy;

г) Якщо пластинка займає область D площини xOy і має змінну поверхневу густину $\rho=\rho(x,y)$, то маса M пластинки обчислюється за формулою

$$M=\iint_D \rho(x,y)dxdy;$$

д) Статичні моменти M_x і M_y пластинки відносно осі Ox та осі Oy рівні:

$$M_x=\iint_D y\cdot\rho(x,y)dxdy,$$

$$My=\iint_D x\cdot\rho(x,y)dxdy.$$

Якщо пластинка однорідна, то $\rho=const$.

е) Координати центра маси пластинки $\overline{x},\ \overline{y}$ визначають за формулами:

$$\overline{x}=\frac{M_y}{M},\ \overline{y}=\frac{M_x}{M},$$

де M - маса пластинки і M_x, M_y - її статичні моменти відносно осей координат.

Якщо пластинка однорідна, ці формули набувають виду:

$$\overline{x}=\frac{\iint_D xdxdy}{S},\qquad \overline{y}=\frac{\iint_D ydxdy}{S};$$

є) Моменти інерції пластинки відносно осі Ox та осі Oy відповідно рівні:

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy.$$

ж) Момент інерції пластинки відносно початку координат дорівнює:

$$I_0=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy=I_x+I_y.$$

3. Застосування потрійного інтеграла.

а) Об'єм тіла, яке займає область V:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz;$$

б) Маса тіла, яке займає область V:

$$m = \iiint\limits_V \rho\left(x, y, z\right) dxdydz,$$

де $\rho = \rho\left(x; y; z\right)$ – густина тіла.

в) Координати центра маси тіла:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz,$$

$$\overline{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz;$$

г) Моменти інерції відносно осей координат:

$$I_x = \iiint\limits_V \rho\left(y^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V \rho\left(x^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \rho\,\left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz;$$

д) Статичні моменти тіла відносно координатних площин:

$$S_{xy} = \iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz,$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz,$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz;$$

е) Моменти інерції тіла відносно координатних площин:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^2 dx\, dy\, dz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V \rho y^2 dx\, dy\, dz;$$

ж) Моменти інерції відносно початку координат:

$$I_0 = \iiint\limits_V \rho\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dx\, dy\, dz.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ

1. Дайте означення похідної даної функції, її механічний, геометричний та економічний зміст.
2. Як записуються рівняння дотичної та нормалі до кривої?
3. Сформулюйте арифметичні властивості похідних.
4. Напишіть формули диференціювання основних елементарних функцій.
5. Що називається похідною другого порядку, третього порядку, n-ного порядку?
6. Що називається диференціалом функції, який його геометричний зміст.
7. Розкриття невизначенностей за допомогою правила Лопіталя.
8. Згадайте схему повного дослідження функції методами диференціального числення.
9. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення.
10. Як визначається границя та неперервність функції двох змінних?
11. Що називається повним, частинним приростом функии кількох змінних?
12. Сформулюйте означення частинної похідної. Який її геометричний зміст?
13. Що називається повним диференціалом функції багатьох змінних?
14. Як визначаються частинні похідні вищих порядків?
15. Яка функція називається первісною?
16. Дайте означення невизначеного інтеграла.
17. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
18. У чому полягає метод інтегрування частинами та метод заміни змінної?
19. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
20. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
21. Які ви знаєте основні властивості визначеного інтеграла?
22. Що можна сказати про застосування визначеного інтеграла?
23. Що називається невластивим інтегралом з нескінченними межами існування?
24. Дайте означення диференціального рівняння.
25. Що називається порядком диференціального рівнянням?
26. Що називається розв’язком диференціального рівнянням?
27. Що називається інтегруванням диференціального рівнянням?
28. Що називається інтегральною кривою диференціального рівняння?
29. Як задаються початкові умови?
30. Що називається загальним розв’язком диференціального рівняння?
31. Що називається загальним інтегралом диференціального рівняння?
32. Що називається частинним розв’язком диференціального рівняння?
33. Який розв’язок диференціального рівняння називається особливим?
34. Сформулюйте задачу Коші.
35. Сформулюйте теорему існування та єдності розв’язку задачі Коші.
36. Яке рівняння називається рівнянням з відокремленими змінними?
37. Яке рівняння називається рівнянням з відокремлюваними змінними?
38. Яка функція називається однорідною?

39. Як розв'язується диференціальне рівняння першого порядку від однорідної функції?

40. Який вигляд має однорідне рівняння в диференціальній формі?

41. Сформулюйте метод розв'язання рівняння виду $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

42. Яке рівняння називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку?

43. Сформулюйте метод Бернуллі розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку.

44. Сформулюйте метод Лагранжа розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку.

45. Який вид має диференціальне рівняння Бернуллі?

46. Як розв'язується диференціальне рівняння Бернуллі?

47. Які види рівнянь другого порядку, що допускають пониження порядку ви знаєте?

48. Яким методом розв'язується рівняння виду $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$?

49. Яким методом розв'язується рівняння виду $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x;\dfrac{dy}{dx}\right)$?

50. Яким методом розв'язується рівняння виду $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(y;\dfrac{dy}{dx}\right)$?

51. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) другого порядку?

52. Сформулюйте теореми про розв'язки ЛОДР?

53. Які функції називаються лінійно-незалежними (залежними)?

54. Що називається визначником Веронського?

55. Що називається фундаментальною системою розв'язків диференціального рівняння?

56. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку?

57. Що називається ЛОДР зі сталими коефіцієнтами?

58. Сформулюйте алгоритм пошуку загального розв'язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами?

59. Що називається ЛНДР другого порядку.?

60. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) другого порядку?

61. В чому полягає суть метода варіації довільних сталих для ЛНДР другого порядку?

62. Що називається ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

63. Сформулюйте алгоритм знаходження частинного розв'язку ЛНДР методом невизначених коефіцієнтів.

64. Що називається числовим рядом?

65. Що називається n-ю частинною сумою ряду?

66. Який ряд називається збіжним (розбіжним)?
67. Сформулювати властивості рядів.
68. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду.
69. Сформулювати достатню ознаку розбіжності ряду.
70. Що називається гармонійним рядом?
71. Сформулюйте ознаку порівняння рядів.
72. Сформулюйте граничну ознаку порівняння рядів.
73. Які ряди називаються еталонними? Навести приклади.
74. Що називається рядом геометричної прогресії?
75. Який ряд називається рядом Діріхле (узагальненим гармонійним рядом)?
76. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності рядів.
77. Сформулюйте ознаку Даламбера.
78. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.
79. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.
80. Який ряд називається знакопочережним?
81. Сформулюйте ознаку Лейбніца збіжності знакопочережних рядів.
82. Який ряд називається знакозмінним?
83. Сформулювати достатню ознаку знакозмінного ряду.
84. Які ряди називаються абсолютно (умовно) збіжними?
85. Сформулюйте теорему Діріхле.
86. Який ряд називається функціональним?
87. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
88. Що називається залишком функціонального ряду?
89. Які ряди називаються мажорованими?
90. Які існують різновиди збіжності функціональних рядів?
91. Дайте означення степеневого ряду?
92. Сформулюйте теорему Абеля.
93. Що називається радіусом та інтервалом збіжності?
94. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
95. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
96. Сформулюйте означення рядів Тейлора та Маклорена.
97. Сформулюйте алгоритм розкладу функції в ряд Маклорена.
98. Запишіть розклад функції e^x в ряд Маклорена.
99. Запишіть розклад функції $\sin x$ в ряд Маклорена.
100. Запишіть розклад функції $\cos x$ в ряд Маклорена.
101. Запишіть розклад функції $\frac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена.
102. Запишіть розклад функції $\ln(1-x)$ в ряд Маклорена.
103. Запишіть розклад функції $(1-x)^m$ в ряд Маклорена.

Список використаної літератури

1. Барковський В. В. Основи елементарної математики / В. В. Барковський, Н. В. Барковська – К. : НАУ, 1999. – 236 с.
2. Барковський В.В. Математика для економістів. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська : в 2-х ч. – ч. 1,2 – К. : Національна академія управління, 1999. – 399 с.
3. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник / М. К. Бугір – К. : Академія, 2003. – 520 с.
4. Бугір М. К. Математика для економістів : підруч. / М. К. Бугір. - Тернопіль, 1998.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 1985.-416 с.
6. Валєєв К.Г. Вища математика: навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова: в 2-х ч. – ч. 1,2 – К. : КНЕУ, 2001. – 546с.
7. Вища математика / М. І. Шкіль М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова: в 3-х ч. – ч. 2,3 – К. : Либідь, 1994. – 351 с
8. Вища математика для економістів. / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, Н. М. Тришин, М.Н.Фридман, — М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
9. Высшая математика. Общий курс. / А.В.Кузнецов, Л.Ф.Янчук, С. А. Мызгаева [и др.] — Минск: Высшая школа, 1993.
10. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик – К. : Вища школа, 1993. – 647 с.
11. Запорожець Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. / Г. И. Запорожець — М. : Высшая школа, 1966.
12. Каплан И. А. Практические занятия но высшей математике. / И. А. Каплан. — Х. : Харьковский университет, 1972.
13. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М. : Наука, 1975.
14. Сборник задач по курсу высшей математики. / под ред. Г. И. Кручковича — М. : Высшая школа, 1978.
15. Соколенко О. І. Вища математика / О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.
16. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс: збірник задач та вправ / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. — Х. : Рубікон, 1999.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Шебанін В'ячеслав Сергійович
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ.
Комп'ютерна система
для дистанційного навчання.
Частина II

Навчальний посібник

Технічний редактор: І. П. Атаманюк
Комп'ютерна верстка: О. В. Шептилевський
Дизайн обкладинки: В. Ю. Іванов

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 24
Тираж 300 прим. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе , 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р