

**МІЦНІСТЬ БІСТАЛЕВИХ СТЕРЖНІВ ПРИ ЗГИНІ З ПОЗДОВЖНЬОЮ СИЛОЮ З ВРАХУВАННЯМ ДЕФОРМОВАНОЇ СХЕМИ В ОБЛАСТІ ОБМЕЖЕНИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ.**

*В.С.ШЕБАНІН, І.І.ХИЛЬКО*

Розрахунок міцності по деформаційному критерію в виді обмеження інтенсивності пластичних деформацій у випадку стиску (розтягу) з поперечним згином приводить до необхідності врахування впливу прогину на величину ексцентриситету поздовжнього зусилля, яке збільшує значення згинальних моментів. В якості граничного стану стержня по непридатності до експлуатації приймається досягання в найбільш напруженому перерізі граничної пластичної деформації при визначенні зусиль по деформованій схемі.

При розрахунку міцності бісталевих конструкцій використовується наступний критерій міцності - обмеження пластичної складової інтенсивності деформації [1] величиною  $\varepsilon_{ip,lim}$ . Даний критерій значно розширює область конструкцій, які розраховуються при роботі матеріалу за межами пружності.

В роботі пропонується слідуючий підхід до вирішення задачі розрахунку міцності стиснуто (розтягнуто) - зігнутих бісталевих стержнів. Виходячи із геометричних розмірів стержня і діючих сил, була побудована математична модель стержня. Потім на ПЕОМ з заданою наперед точністю проводився розрахунок цієї моделі з послідуною зміною стріли прогину стержня, доки він не займав рівновісного положення в залежності від розмірів і діючих навантажень.

В результаті розрахунків з врахуванням деформованої схеми одержується еюра згинальних моментів, коректуючи коефіцієнти  $\nu$  і величини прогинів по всій довжині стержня. Коефіцієнти  $\nu$  використовуються в доповнення до формули перевірки міцності з врахуванням деформованої схеми [2]

$$\frac{N}{A_F + A_2 \cdot \frac{R_W}{R_F}} \pm \frac{M_X \nu}{C_{NX} \cdot I_X} \leq R_F \cdot \gamma_C \quad (1)$$

Для одержання коректуючих коефіцієнтів  $\nu$  у формулі (1) необхідно використовувати точну криву взаємодії згинальних моментів і поздовжніх зусиль.

Для стержня з відомими геометричними розмірами, заданою поздовжньою силою, діаграмою роботи матеріалу і схемою навантаження, потрібно розрахувати з врахуванням деформованої схеми максимальну величину поперечного навантаження, при якому в найбільш напруженому перерізі досягаються граничні пластичні деформації. Для чисельного визначення в найбільш напруженому перерізі максимальної величини поперечного навантаження вихідна недеформована вісь стержня розбивається на деяке число відрізків.

Для побудови пружньо-пластичної епюри нормальних напруг і знаходження величини згинального моменту в кожному перерізі по краям вказаних відрізків, приймаються наступні основні припущення розрахунку бісталевих конструкцій в області обмежених пластичних деформацій:

- деформаційна теорія пластичності;
- енергетична умова текучості;
- ідеалізована діаграма Прандтля;
- гіпотеза плоских перерізів;
- зберігання при роботі перерізу за межами пружності розподілу дотичних напруг, одержаних із розрахунку в межах пружності;
- нехтування товщинами поллок.

З врахуванням указаних припущень, а також при заданих розмірах стержня, величині поздовжньої сили і схеми навантаження розроблено алгоритм розрахунку міцності стиснуто (розтягнуто) - зігнутих моно- та бісталевих стержнів симетричного та асиметричного перерізу з врахуванням деформованої схеми по критерію обмежених пластичних деформацій.

Розглянемо алгоритм розрахунку бісталевих стержнів асиметричного перерізу:

1. У вихідних даних необхідно задати:

- довжину стержня  $l$ ;
- висоту перерізу стержня  $H$ ;
- число  $m = 2n$  розбиттів вісі стержня на відрізки для дискретного розрахунку;
- площі поллок  $A_1$ ,  $A_3$  і площу стінки  $A_2$  перерізу;
- розрахункові опори матеріалу стінки  $R_W$  та поллок  $R_F$ ;
- граничну величину пластичної деформації  $\varepsilon_{ip,lim}$ ;
- величину поздовжньої сили  $N$ ;
- схему навантаження стержня з вказівкою величини навантаження;

- умову закріплення стержня на кінцях.

Розрахунок виконується ітераційним методом.

2. Для побудови вихідної епюри згинальних моментів, із пружньо-пластичного розрахунку перерізу стержня при заданій силі  $N$ , визначається максимальний згинальний момент  $M_{lim}$  в найбільш навантаженому перерізі бісталевого стержня, в якому величина пластичних деформацій приймає граничне значення  $\varepsilon_{ip,lim}$ . Для визначення максимального згинального моменту  $M_{lim}$  скористаємось характерними випадками пружньо-пластичного розрахунку перерізу стержня для оберненої задачі. На першому кроці ітераційного процесу шукана епюра згинальних моментів по деформованій схемі  $M_{di}$  покладається рівною граничній епюрі моментів  $M$ , визначеній за недеформованою схемою, при умові, що  $M^{max} = M_{lim}$ .

3. Визначаються перерізи, в яких величина згинального моменту  $M_{di}$  перевищує значення найбільшого моменту  $M_{SN}$ , обчисленого в межах пружності при дії сили  $N$

$$M_{SN} < M_{di} < M_{lim}, \quad (2)$$

де  $i$  - номер перерізу стержня при роботі матеріалу в області обмежених пластичних деформацій. Потім в кожному такому перерізі ітераційними методами, викладеними в [2], будується епюра нормальних напруг  $\sigma_i$ , з врахуванням усіх можливих при рішенні прямої задачі характерних випадків, яка задовольняє з необхідною точністю умовам рівноваги з заданою поздовжньою силою  $N$  і згинальним моментом  $M_{di}$  у відповідному  $i$ -м перерізі в якому має місце текучість матеріалу.

Для побудови вказаних епюр нормальних напруг:

вибирається відповідна гранична епюра нормальних напруг;

на першому кроці ітераційного процесу покладається, що величина  $\varepsilon_{ip}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{ip,lim}}{2}$  є відомою і розв'язується обернена задача, по ній знаходиться згинальний момент  $M_{ip}$ , який на кожному кроці послідовних наближень порівнюється з відповідним значенням дійсного моменту  $M_{di}$ . У випадку, коли  $M_{di} > M_{ip}$  величина пластичних деформацій  $\varepsilon_{ip}^{(i)}$  в наступній ітерації змінюється в сторону збільшення, якщо ж  $M_{di} < M_{ip}$  - то в сторону зменшення. Ітераційний процес ділення відрізка пополам закінчується при досяганні необхідної точності.

4. Використовуючи епюри нормальних напруг в кожному  $i$ -тому перерізі, затронутому текучістю матеріалу, визначаються повні кривизни

$$\chi_i = \frac{\varepsilon_{Hi} - \varepsilon_{Bi}}{H}, \quad (3)$$

де  $\varepsilon_{Hi}$  і  $\varepsilon_{Bi}$  - крайові відносні деформації, відповідно знизу і зверху перерізу, взяті зі своїми знаками. При роботі матеріалу стержня в межах пружності (тобто при  $M_{di} \leq M_{SN}$ ) повна кривизна перерізу визначається за формулою

$$\chi_i = \frac{M_{di}}{E \cdot I}, \quad (4)$$

де  $E$  - модуль пружності;  $I$  - момент інерції.

5. Обчислюються по Мору величини повних прогинів  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) [3]

$$y_i = \int_0^l \bar{M}_i \chi dl \quad (5)$$

де  $\bar{M}_i$  - епюра згинального моменту від одиничного навантаження, прикладена в розглядуваному  $i$ -тому перерізі стержня по напрямку шуканого прогину. Можливість застосування методу Мора забезпечується збереженням гіпотези плоских перерізів і визначенням кривизни виходячи з пружного ядра. Вказаний в (5) інтеграл обчислюється наближено за допомогою формули Сімпсона, яка з урахуванням того, що  $\bar{M}_{i,0} = \bar{M}_{i,m} = 0$  дає наступний вираз для обчислення повних прогинів [4].

$$y_i = \frac{2\Delta l}{3} \left( \sum_{k=1}^{n-1} \bar{M}_{i,2k} \cdot \chi_{2k} + 2 \sum_{k=1}^n \bar{M}_{i,2k-1} \cdot \chi_{2k-1} \right), \quad (6)$$

$$\Delta l = \frac{l}{m} \quad (m = 2n); \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \quad (y_0 = y_m = 0).$$

6. Вносяться зміни в вид попередньої епюри згинальних моментів  $M_{d(k-1)}$  ( $k$ -номер ітерації) з використанням ефективного методу послідовних наближень - поновлення граничної величини пластичних деформацій [5] на кожному кроці ітераційного процесу, який зводиться до вимоги, щоб в найбільш навантаженому перерізі стержня згинальний момент  $M_{d(k)}^{\max}$ , визначений з врахуванням деформованої схеми дорівнював би граничному моменту  $M_{lim}$ .

Відповідні епюри згинальних моментів для різних випадків приведені в [2]. Основною перевагою метода поновлення граничної величини  $\varepsilon_{ip,lim}$  є забезпечення

збіжності процесу розрахунку за межами пружності при значному зменшенні кількості необхідних ітерацій (в розглянутих прикладах збіжність обчислювального процесу забезпечувалась при виконанні 3-4 циклів), за рахунок того, що на кожному кроці послідовних наближень створюється стан стержня близький до остаточного.

При заданих розмірах стержня поновлення величини  $\varepsilon_{ip,lim}$  здійснюється за рахунок зміни значення шуканого граничного навантаження при визначенні зусиль за деформованою схемою, а це викликає за собою зміну епюри згинальних моментів  $M_{pi}$  від поперечної сили. Максимальний згинальний момент від поперечної сили  $M_p^{max}$  в найбільш навантаженому перерізі стержня знаходиться таким чином

$$M_p^{max} = M_d^{max} + N \cdot y^* \quad (7)$$

При цьому  $y^*$  - прогин в найбільш навантаженому перерізі (якщо посередині стержня, то  $y^* = y^{max}$ ) і  $y^*$  приймається додатнім, якщо стержень згинається вправо (тобто по напрямку дії поперечних навантажень), інакше прогин  $y^*$  - від'ємний. У формулі (7) і далі значення поздовжньої сили  $N$  береться зі своїм знаком, тобто значення стискувочої поздовжньої сили береться зі знаком "мінус", а розтягучої - зі знаком "плюс".

По знайденому значенні  $M_p^{max}$  будується вся епюра  $M_{pi}$  від поперечних навантажень, звідки і одержується епюра згинальних моментів  $M_{di}$ , визначена з врахуванням деформованої схеми

$$M_{di} = M_{pi} - M_{ni}, \quad (8)$$

тобто результуюча епюра згинальних моментів  $M_{di}$  з врахуванням діючих навантажень є сумою епюр згинальних моментів від зосереджених навантажень  $M_{pi}$  і моментів

$M_{ni} = N \cdot y_i$ , які виникають від поздовжньої сили внаслідок геометричної нелінійності навантаженого стержня.

7. Виконується порівняння з заданою точністю  $\delta$  відносної різниці двох наближень максимальних прогинів, і розрахунок повторюється, починаючи з п.3 тих пір, поки не буде виконуватись нерівність

$$\left| \frac{Y_{(k)}^{max} - Y_{(k-1)}^{max}}{Y_{(k)}^{max}} \right| < \delta, \quad (9)$$

де  $k, k-1$  - номери відповідно останньої та передостанньої ітерації.

8. Після завершення ітераційного процесу обчислюються коефіцієнти  $\nu$  як відношення найбільшого згинального моменту  $M_d^{\max}$ , визначеного з врахуванням деформованої схеми при обмежених пластичних деформаціях до відповідного згинального моменту  $M^{\max}$  від аналогічного навантаження по недеформованій схемі

$$\nu = \frac{M_d^{\max}}{M^{\max}}. \quad (10)$$

Так як  $M_d^{\max} = M_{\text{lim}}$  і  $M^{\max} = M_d^{\max} + N \cdot y^*$  ( $y^*$  – величина прогину в найбільш навантаженому перерізі), то з формули (10) випливає, що коректуючи коефіцієнти  $\nu > 1$  при стиску (в цьому випадку  $M^{\max} < M_d^{\max}$ ) і  $\nu < 1$  при розтягу ( $M^{\max} > M_d^{\max}$ ).

9. Виконується друк отриманих результатів. Запропонований алгоритм дозволяє розраховувати не тільки бі-сталеві стержні асиметричного перерізу. При необхідності розрахунку бісталевих симетричного перерізу у вхідних даних площі полук задаються однаковими, тобто  $A_1 = A_3$ . Для розрахунку моносталевого стержня асиметричного перерізу вводять розрахункові опори  $R_F = R_W$ . При виконанні розрахунку моносталевих стержнів симетричного перерізу приймають  $A_1 = A_3$  та  $R_F = R_W$ .

Даний алгоритм реалізований на алгоритмічній мові СІ на ПЕОМ. В результаті розрахунку складені таблиці коректуючих коефіцієнтів  $\nu$  до формул пружньо-пластичного розрахунку міцності по критерію обмежених граничних деформацій, отриманих раніше без врахування деформованої схеми.

За запропонованим алгоритмом розраховувались моно- та бісталеві стержні симетричного та асиметричного перерізу довжиною  $l = 12$  м з різними схемами навантаження при величині граничних деформацій  $\varepsilon_{ip, \text{lim}} = 0,002$ .

Результати проведеного розрахунку систематизовані в таблиці 1, в якій використовуються наступні позначення:

- значення стискуючої поздовжньої сили  $N$  позначено знаком "-", розтягуючої сили  $N$  – знаком "+";
- моносталеві стержні позначено буквою "М", бісталеві – буквою "Б";
- вид перерізу стержня (симетричний чи асиметричний)

задається відношеннями  $\frac{A_2}{A_1}$  і  $\frac{A_3}{A_1}$ ;

- величина поздовжньої сили  $N$  вказана співвідношенням

$$\frac{N}{N_{lim}}, \text{ де } N_{lim} = (A_1 + A_3) \cdot R_F + A_2 \cdot R_W.$$

Таблиця 1

**Коректуючи коефіцієнти  $\nu$  для моно- та бісталевих стержнів симетричного та асиметричного перерізу**

Схема навантаження	N	М / Б	$\frac{A_2}{A_1}$	$\frac{A_3}{A_1}$	$N/N_{lim}$					
					0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1 сила	-	М	1	1	1,010	1,016	1,026	1,035	1,045	1,057
	-	М	1	0,5	1,009	1,017	1,028	1,038	1,050	1,074
	-	Б	1	1	1,010	1,021	1,032	1,044	1,056	1,070
	-	Б	1	0,5	1,012	1,024	1,035	1,048	1,062	1,083
	+	М	1	1	0,992	0,984	0,977	0,968	0,960	0,951
	+	М	1	0,5	0,991	0,981	0,973	0,962	0,952	0,943
	+	Б	1	1	0,990	0,979	0,970	0,961	0,951	0,941
	+	Б	1	0,5	0,989	0,978	0,966	0,955	0,944	0,932
2 сили	-	М	1	1	1,015	1,030	1,048	1,070	1,095	1,127
	-	М	1	0,5	1,017	1,041	1,055	1,072	1,099	1,130
	-	Б	1	1	1,016	1,034	1,053	1,074	1,098	1,125
	-	Б	1	0,5	1,018	1,038	1,055	1,078	1,101	1,119
	+	М	1	1	0,984	0,971	0,954	0,935	0,912	0,879
	+	М	1	0,5	0,984	0,966	0,947	0,924	0,898	0,865
	+	Б	1	1	0,984	0,966	0,951	0,931	0,907	0,870
	+	Б	1	0,5	0,981	0,962	0,943	0,918	0,885	0,855
Рівно- мірне наванта- ження	-	М	1	1	1,012	1,027	1,040	1,056	1,075	1,100
	-	М	1	0,5	1,013	1,029	1,042	1,062	1,082	1,104
	-	Б	1	1	1,014	1,029	1,045	1,063	1,081	1,101
	-	Б	1	0,5	1,016	1,032	1,048	1,067	1,087	1,114
	+	М	1	1	0,999	0,976	0,962	0,949	0,933	0,914
	+	М	1	0,5	0,986	0,972	0,957	0,941	0,922	0,899
	+	Б	1	1	0,986	0,973	0,959	0,944	0,929	0,901
	+	Б	1	1	0,984	0,968	0,952	0,935	0,918	0,898

Із приведеної таблиці коефіцієнтів  $\nu$ , обчислених для граничної величини пластичних деформацій  $\varepsilon_{ip,lim} = 0,002$  видно, що врахування деформованої схеми суттєво впливає на величину згинальних моментів, порівняно з розрахунками, виконаними по недеформованій схемі.

Таким чином, при стиску врахування деформованої схеми дозволяє обґрунтовано збільшити надійність і

рівноміцність конструкцій; при розтягу врахування деформованої схеми дозволяє отримати економію сталі. Тому вплив деформованої схеми повинен бути врахований при проектуванні конструкцій.

#### Література

1. Рекомендации по расчету элементов стальных конструкций на прочность по критерию предельных пластических деформаций. - М.: ЦНИИпроектстальконструкция, 1980, с.3-13.

2. Шибанин В.С. Прочность изгибаемых стальных стержневых конструкций при учете физической и геометрической нелинейности в области ограниченных пластических деформаций. Докторская диссертация, Одесса - 1993.

3. Щербина Н.И. Определение прогибов в стальных балках при подвижных нагрузках в области малых пластических деформаций. - Известие вузов. Строительство и архитектура, 1978, N 4, с.14-19.

4. Веремеенко Н.А. Прочность сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стальных стержней при ограниченных пластических деформациях. Кандидатская диссертация, Одесса - 1987.

5. Чернов Н.Л. Расчет стальных изгибаемых конструкций способом последовательного возобновления ограниченных пластических деформаций. - Известия вузов. Строительство и архитектура, 1985, N 9, с.17-21.