

ПРО ТРИ ПРОЕКТОРИ

Самойленко Є. Є., асистент.

Миколаївський національний аграрний університет

У роботі досліджується проблема існування конфігурацій підпросторів гільбертового простору з фіксованими кутами між ними.

В работе исследуется проблема существования конфигураций подпросторів гільбертового пространства с фиксированными углами между ними.

Досліджено C^* -алгебру породжену сім'єю трійок проекторів таких, що кути між кожним з двох ортогональних між собою підпросторів, що відповідають цим проекторам та третім відповідним підпростором гільбертового простору рівні.

Нехай H – гільбертовий простір, а H_1, H_2, H_3 – такі підпростори цього простору, для яких задано сім'єю $\tilde{P}(A_3)$ трійок проекторів $(P_i = P_i^2 = P_i^*, i = \overline{1,3}) P_i: H \rightarrow H_i$, зі співвідношеннями:

$$\begin{aligned} P_k P_h P_k &= \tau^2 P_k, (k, h) \in I_0, \\ P_k P_h &= P_h P_k, (k, h) \in I \setminus I_0, \\ I_0 &= \{(k_0, k_0 + 1) | k_0 = 1, 2\} \cup \{(h_0 - 1, h_0) | h_0 = 2, 3\}, \\ I &= \{(k_1, h_1) | k_1, h_1 = 1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (1)$$

де $\tau \in \sigma \subseteq \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, підмножина σ – компакт. Позначимо $I: H \rightarrow H$ – тотожній оператор. Позначимо таку C^* -алгебру $C^*(\tilde{P}(A_3))$. Графом Динкіна A_3 називається зображений на рисисунку 1 граф. Вершини цього графа відповідають трьом проекторам.

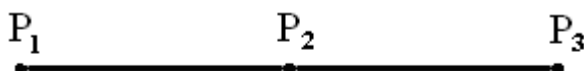


Рис. 1.

Наявність ребра між P_k та P_h означає виконання умов: $P_k P_h P_k = \tau^2 P_k$, $P_h P_k P_h = \tau^2 P_h$, де $\tau = \cos \varphi$, φ – кут між підпросторами H_k та H_h відповідно. Відсутність ребра між P_k та P_h означає виконання умови: $P_k P_h = P_h P_k = 0$ – ортогональність підпросторів H_k та H_h . В роботі [1] описано усі конфігурації двох підпросторів гільбертового простору. У роботах [2,3,6,7] досліджується проблема існування конфігурацій підпросторів гільбертового простору з фіксованими кутами між ними. В [6,7] сформульовано і доведено теореми існування та єдиності для зображень алгебр пов'язаних з різними графами, зокрема для графів-дерев.

Знайдено у явному вигляді сім'ю зображень для сім'ї трійок проекторів $\tilde{P}(A_3)$ зв'язаних графом A_3 та описана породжена цією сім'єю C^* -алгебра. Нехай

$$S_\sigma(P_1, P_2, P_3) = I + P_1 \left(P_3 + P_2 \left(I + \frac{1}{2} P_1 - P_3 \right) - I \right) + P_3 \left(P_1 + P_2 \left(I + \frac{1}{2} P_3 - P_1 \right) - I \right) + P_2 (P_1 + P_3 - I).$$

Теорема. C^* -алгебра породжена проекторами $P_i = P_i^2 = P_i^*$, $i = \overline{1,3}$ з додатковими умовами (1) ізометрично ізоморфна алгебрі неперервних матриць-функцій 3×3 заданих на множині $\Omega = \{ \sqrt{|\lambda|} | \lambda \in \sigma(S_\sigma(P_1, P_2, P_3)) \} \cap \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ з додатковими обмеженнями (крайовими умовами):

$$C^*(P_1, P_2, P_3 | (1)) \cong \tilde{C} := \{ f = (f_{ij}(t))_{i,j=1}^3 \in M_3(C(\Omega)) | f_{11}, f_{22}, f_{33} \in C_1 := C(\Omega),$$

$$f_{21}, f_{12} \in C_2 := \{ f | f \in C(\Omega), f(0) = 0 \},$$

$$f_{31}, f_{32}, f_{23}, f_{13} \in C_3 := \{ f | f \in C(\Omega), f(0) = 0, f(1/\sqrt{2}) = 0 \},$$

де $\sigma(S_\sigma(P_1, P_2, P_3))$ – спектр оператора $S_\sigma(P_1, P_2, P_3)$, а умови $f(0) = 0$, або $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ мають сенс, якщо $\{0\}$ або $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ містяться у Ω відповідно.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Halmos P.R.* Two subspaces // *Trans. of the Amer. Math. Soc.* – 1969. – **144**. – P. 381–389.
2. *Popova N.D., Samoilenko Yu. S.* On the existence of configurations of subspaces in a Hilbert space with fixed angles // *Sigma Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* – 2006. – **2**, № 055. – P. 1–5.
3. *Albeverio S., Ostrovskiy V., Samoilenko Y.* On functions on graphs and representations of a certain class of *-algebras // *J. Algebra.* – 2007. – **308**, № 2. – P. 567–582.
4. *Samoilenko Ye.Ye.*, On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators. // *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, – 2004. – **50**, №3. – P. 1192–1194.
5. *Москалёва Ю.П., Самойленко Ю.С.* Введение в спектральную теорию графов: Учебное пособие. – Киев: “Центр учебной литературы”, 2007.
6. *Власенко М.А., Попова Н.Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними. // *Укр. мат. журн.* – 2004. – **56**, №5. – С. 606–615.
7. *Самойленко Ю.С., Стрелец А.В.* О простых n -ках подпространств гильбертова пространства. // *Укр. мат. журн.* – 2009. – **61**, №12. – С. 1668–1706.

ABOUT THREE PROJECTORS

Samoilenko. E.E.

This paper studies the problem of existence of configurations of Hilbert space with fixed angles between them.