МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи студентів денної форми
навчання напряму підготовки 6.090101 Агрономія

Миколаїв
2015

УДК 51.517
ББК 22.1
В 55
Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 22. 10. 2015р., протокол № 2

Укладачі:
В. С. Шебанін – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
В. Г. Богза – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;
І. П. Атаманюк – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Цепуріт – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;
І. І. Хилько – ст. викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання; Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шептилевський – асистент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;
С. В. Євстрат'єв – асистент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензент:
В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор, професор кафедри математики та методики її викладання, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського.

ВСТУП

Для активізації самостійної роботи студентів програмою з вищої математики для вищих аграрних закладів освіти III-IV рівнів акредитації, з урахуванням кредитно модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань студентів, запропоновано виконання розрахункових робіт. Розрахункові роботи вміщують теоретичні питання (загальні для всіх) та задачі (для кожного студента кожної групи індивідуальні за рахунок параметра β-номера групи: β = 1,2,3 і так далі). Теоретичні питання вивчаються на лекціях та детально розглядаються на практичних і лабораторних заняттях. Після цього, в міру того як продовжується вивчення курсу, студенти самостійно розв'язують задачі, а викладач частинами їх перевіряє. Кінцевим етапом є захист робіт, на який студент подає всі перевірені та зараховані задачі, оформлені на аркушах формату А4. Під час захисту студент повинен знати та правильно відповідати на теоретичні питання, вміти розв'язувати задачі аналогічного типу та давати до них необхідні пояснення.

Завдання до самостійної роботи над розрахунковими роботами охоплюють розділи: “Елементи лінійної алгебри”, “Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії в просторі”, “Похідна та диференціал функції” , “Невизначний та визначний інтеграл”, “Теорія ймовірностей”, “Елементи лінійного програмування”, “Елементи математичної статистики” передбачені програмою з вищої математики для студентів спеціальності 6.130200 “Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва” та для студентів спеціальності 6.051401 “Біотехнологія”

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Матрицею розміром $m \times n$ називають прямокутну таблицю елементів $a_{ij}\left(i=1...m, j=1...n\right)$ деякої множини, що містить m рядків та n стовбців.

Матриці позначаються на письмі великими літерами латинського алфавіту, наприклад, A,B,C …, а їх елементи – маленькими літерами, з подвійною індексацією: a_{ij}, де i - номер рядка, j - номер стовпця.

Розмір матриці позначають справа як нижній індекс, наприклад:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

або в скороченому вигляді :

$$A = \left(a_{ij}\right); i = 1...m, j = 1...n. \qquad \textbf{(2)}$$

Матриці бувають кількох видів:

1. Матриця – рядок, якщо вона складається з одного рядка

$$A = \left(a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

2. Матриця – стовпець, якщо вона складається з одного рядка

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}; \qquad \textbf{(4)}$$

3. Квадратна матриця n- го порядку, якщо кількість рядків у ній відповідає кількості стовпців і дорівнює n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

4. Одинична матриця n - го порядку – це матриця в якій по головній діагоналі розташовані одиниці, а всі інші елементи нулі. Одинична матриця позначається через E

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

5. Трикутна матриця – це квадратна матриця, у якості якої під (над) головною діагоналлю усі елементи дорівнюють нулю :

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Транспонуванням матриці A називають такий перехід до матриці A^T, якщо рядки та стовпці міняють місцями зі збереженням порядку. Матрицю A^T називають транспонованою щодо матриці A:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{n\times m} \end{pmatrix}$$

Квадратну матрицю називають невродженою (неособливою), якщо $|A| \neq 0$, у протилежному разі $\left(|A| = 0\right)$ вона буде виродженою.

Приєднаною (союзною) до A матрицею називають матрицю, що складається з алгебраїчних доповнень транспонованої до A матриці. Її позначають як A.

Матрицю A^{-1} називають оберненою щодо матриці A, якщо за множення цієї матриці на A як зліва, так і справа одержують одиничну матрицю $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ **(9)**

Обернену матрицю знаходять за формулою $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A$ **(10)**

<u>Алгоритм знаходження оберненої матриці</u>

Крок 1. Знайти визначник заданої матриці. Якщо $|A| = 0$, то матриця Aвироджена і оберненої матриці A^{-1} не існує. Якщо $|A| \neq 0$, то навпаки – матриця A невироджена й обернена існує.

Крок 2. Знайти матрицю A^T, транспоновану до A.

Крок 3. Знайти алгебраїчні доповнення елементів транспонованої матриці $A^T_{ij} = A_{ij}\left(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\right)$ та скласти з них приєднану (союзну) матрицю A.

Крок 4. Знайти обернену матрицю за формулою **(10).**

Крок 5. Перевірити, чи правильно обчислена обернена матриця A^{-1}, згідно з означенням $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Матричне розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (11)$$

Розглянемо систему, у якої $m = n$, та запишемо систему лінійних рівнянь у матричній формі. Для цього введемо позначення:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \ldots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \ldots & \mathbf{a_{2n}} \\ . & . & . & . \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \ldots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix};\ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \ldots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix};\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1} \\ \mathbf{b_2} \\ \ldots \\ \mathbf{b_n} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Систему (11) за допомогою матриць можна записати так:

$$A_{n\times m}X_{n\times 1} = B_{n\times 1}.$$

Використовуючи правила множення матриць, знайдемо матричний розв'язок цього рівняння; помножимо обидві частини рівняння зліва на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$
$$A^{-1}A = E,$$
$$EX = A^{-1}B,$$

де E - одинична матриця n- го порядку. Враховуючи те, що за множення матриці на одиничну матрицю отримують ту саму матрицю, матричний розв'язок має вигляд:

$$X_{n\times 1} = A^{-1}_{n\times n}B_{n\times 1}.$$

Алгоритм розв'язування системи n лінійних рівнянь з n невідомими матричним методом.

Крок 1. Скласти матрицю з коефіцієнтів біля невідомих A, матрицю – стовбець невідомих X, матрицю-стовбець відомих членів B.

Крок 2. Обчислити визначник A. Якщо $|A| = 0$, то оберненої матриці не існує. Отже, систему цим методом розв'язувати не можна. Якщо $|A| \neq 0$, перейти до наступного кроку.

Крок 3. Знайти A^{-1}.

Крок 4. Знайти добуток матриць $A^{-1}B$.

Крок 5. Знайти відповідь за формулою $X = A^{-1}B$.

Алгоритм розв'язання системи n лінійних рівнянь з n невідомими за допомогою визначників (методом Крамера).

Крок 1. Скласти матрицю з коефіцієнтів біля невідомих A.

Крок 2. Обчислити визначник Δ за допомогою матриці A, якщо $\Delta \neq 0$. Перейти до наступного кроку. Якщо $\Delta = 0$, записати відповідь: систему методом Крамера розв'язати не можна.

Крок 3. Скласти та обчислити Δ_j, замінюючи у визначнику Δ стовбцем вільних членів j-й стовпець.

Крок 4. Знайти невідомі системи за формулою $x_j = \frac{\Delta j}{\Delta}$, де $j = 1, 2, .., n$.

Метод Гаусса – це метод послідовного виключення невідомих. Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходять усі інші невідомі.

Розглянемо у загальному випадку розв'язання за допомогою цього методу:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Крок 1. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$(якщо це не так, то досягнемо цього перестановкою рівнянь).

Крок 2. Помножуючи перше рівняння послідовно на відповідні числа $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, ..., -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, ..., -\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ та додаючи послідовно до другого, третього, …, i -го, m- го рівняння, виключаємо змінну x_1 з цих рівнянь. Отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_3, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ...a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Крок 3. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$ (якщо це не так, досягнемо цього перестановкою рівнянь).

Крок 4. Помножуючи друге рівняння послідовно на $-\frac{a_{32}}{a_{22}}, -\frac{a_{42}}{a_{22}}, ..., -\frac{a_{i2}}{a_{22}}, ..., \frac{a_{m2}}{a_{22}}$ та додаючи одержані рівняння відповідно до третього, четвертого, …, останнього, виключаємо x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього.

Продовжуючи послідовне виключення невідомих, після деякого кроку отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + ... + a_{3i}x_i + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{ii}x_i + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{mn}x_n = b_m \quad . \end{cases}$$

Система трикутного вигляду вказує на те , що початкова система має єдиний розв’язок.

Перехід від заданої системи до однієї з останніх, рівносильних їй систем називають прямим ходом методу Гаусса, а знаходження невідомих з останньої системи – оберненим ходом.

ЗАДАЧА 1

У задачах 1.1-1.31 дослідити систему лінійних рівнянь, наведених у матричному вигляді:

$$A \cdot X = B_1 \ .$$

Якщо система рівнянь сумісна та означена (тобто має єдиний розв’язок) знайти її розв’язок трьома способами:

а) за допомогою визначників (за формулами Крамера);

б) за допомогою оберненої матриці;

в) за методом виключення невідомих (способом Гаусса).

Нижче наводимо тридцять один варіант систем лінійних алгебраїчних рівнянь. При цьому $\boldsymbol{\beta}$ є номер академічної групи: $\boldsymbol{\beta}$ =**1, 2, 3, 4, 5.**

1.1 $\begin{cases}(2+\beta)x_1-(3+\beta)x_2-(5+\beta)x_3=1+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

1.2 $\begin{cases}(1+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

1.3 $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-4-\beta\\(3+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

1.4 $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=3+\beta\\(3+\beta)x_1-(2+\beta)x_2-(3+\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

1.5 $\begin{cases}(5+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=6+\beta\\(1+\beta)x_1-(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=-5+\beta\end{cases}$

1.6 $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2-(3+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

1.7 $\begin{cases}(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=8+\beta\\(4+\beta)x_1-(3+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

1.8 $\begin{cases}(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(3+\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

1.9 $\begin{cases}(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

1.10 $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(3+\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-4-\beta\end{cases}$

1.11 $\begin{cases}(1+\beta)x_1-(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-7-\beta\\(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

1.12 $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

1.13 $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1-(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=6+\beta\end{cases}$

1.14 $\begin{cases}(3+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta\\(5+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

$$1.15\ \begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=7+\beta\\(1+\beta)x_1-(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\end{cases}$$

$$1.16\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-7-\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$$

$$1.17\ \begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(2+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$$

$$1.18\ \begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=\beta\end{cases}$$

$$1.19\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=4+\beta\\(3+\beta)x_1-(2+\beta)x_2-(6+\beta)x_3=\beta\end{cases}$$

$$1.20\ \begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2-(4+\beta)x_3=\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(3+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$$

$$1.21\begin{cases}(4+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta\\(8+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(10+2\beta)x_3=4+\beta\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+\beta x_3=\beta\end{cases}$$

$$1.22\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(5+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+\beta x_2-(2+\beta)x_3=1+\beta\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2-(6+2\beta x_3)=6+2\beta\end{cases}$$

$$1.23\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+\beta x_2-\beta x_3=-1-\beta\\(4+2\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=6+2\beta\end{cases}$$

$$1.24\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+\beta x_2+\beta x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=2+2\beta\end{cases}$$

$$1.25\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1-\beta x_2+\beta x_3=4+\beta\\(4+2\beta)x_1-\beta x_2-\beta x_3=6+2\beta\end{cases}$$

$$1.26\ \begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2-(1+\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(6+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-6-\beta\end{cases}$$

$$1.27\begin{cases}(2+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(2+\beta)x_3=-2-\beta\\(4+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=21+\beta\end{cases}$$

$$1.28\ \begin{cases}(3+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2-(3+\beta)x_3=-12-\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$$

$$1.29\ \begin{cases}(2+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(4+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=8+\beta\\(3+\beta)x_1-(5+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$$

$$1.30\ \begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2-(7+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1-(2+\beta)x_2+(5+\beta)x_3=6+\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$$

$$1.31\ \begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta\\(4+\beta)x_1-(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\\(8+\beta)x_1-(3+\beta)x_2+(6+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$$

<u>Приклад виконання задачі 1.31.</u>

Візьмемо $\boldsymbol{\beta = 4}$, тоді система рівнянь буде такою:

$$\begin{cases} \mathbf{6\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 = 11} \\ \mathbf{8\,x_1 - 5\,x_2 + 7x_3 = 5} \\ \mathbf{12\,x_1 - 7\,x_2 + 10\,x_3 = -6} \end{cases}$$

Далі, згідно з умовою задачі, запишемо дві матриці:

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{6} & 5 & -5 \\ \mathbf{8} & -5 & 7 \\ \mathbf{12} & -7 & 10 \end{vmatrix}; \qquad \text{В}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-6} \end{vmatrix}$$

Для знаходження значення визначників квадратної матриці $\boldsymbol{A}$ будемо використовувати властивості визначників та правило трикутників:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{12} & \mathbf{-7} & \mathbf{10} \end{vmatrix} = \mathbf{-300 - 280 + 420 + 300 - 400 + 294 = 34}$$

Таким чином, система рівнянь буде:

$$\boldsymbol{A \cdot X = B_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{12} & \mathbf{-7} & \mathbf{10} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{6\boldsymbol{x_1} + 5\boldsymbol{x_2} + 5\boldsymbol{x_3} = 11} \\ \mathbf{8\boldsymbol{x_1} - 5\boldsymbol{x_2} + 7\boldsymbol{x_3} = 5} \\ \mathbf{12\boldsymbol{x_1} - 7\boldsymbol{x_2} + 10\boldsymbol{x_3} = -6} \end{cases} \qquad (1)$$

яка має визначник $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{\Delta = 34 \neq 0}$ сумісна та визначена.

а) Знайдемо її розв'язок за формулами Крамера

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}}, \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}}, \qquad \boldsymbol{x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}},$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & -5 & 7 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -550 - 175 - 210 - 150 - 250 + 539 = -796;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 12 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 300 - 240 + 924 - 300 - 880 + 252 = 56;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 5 \\ 12 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 180 - 616 + 300 + 660 + 240 + 210 = 974.$$

Тут кожний визначник Δ_i, = **1, 2, 3,** складено з основного визначника Δ шляхом заміни елементів його i-го стовпця B_1 (тобто вільних членів системи).

Таким чином, можна знайти

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-796}{34} = -\frac{398}{17} = -23{,}412;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{34} = \frac{28}{17} = 1{,}647;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{974}{34} = \frac{478}{17} = 28{,}647.$$

Підставляючи знайдений розв’язок :

$$x_1 = -\frac{398}{17},\ x_2 = \frac{28}{17},\ x_3 = \frac{487}{17}$$

в систему рівнянь, переконуємося, що його знайдено правильно:

$$6\cdot\left(-\frac{398}{17}\right) + 5\cdot\ \frac{28}{17} + 5\cdot\ \frac{487}{17} = 11; \qquad \frac{-2388 + 140 + 2435}{17} = 11; \quad \frac{187}{17} \equiv 11; \qquad 11 = 11$$

$$8\cdot\ \left(-\frac{398}{17}\right) - 5\cdot\ \frac{28}{17} + 7\cdot\ \frac{487}{17} = 5; \quad \frac{-3184 - 140 + 3409}{17} = 5; \qquad \frac{85}{17} \equiv 5; \quad 5 = 5$$

$$\mathbf{12}\cdot\left(-\frac{398}{17}\right)-\mathbf{7}\cdot\ \frac{28}{17}+\mathbf{10}\cdot\ \frac{487}{17}=-\mathbf{6};\quad \frac{-4776-196+4870}{17}=-\mathbf{6};\quad \frac{102}{17}\equiv-\mathbf{6}\qquad -\mathbf{6}=\mathbf{6}$$

б) Знайдемо розв'язок цієї ж системи рівнянь (1) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}_1$ матричним способом, тобто скориставшись формулою $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}_1$. Тому, що матриця $\boldsymbol{A}$ не особлива $|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{\Delta}=\mathbf{34}\neq\mathbf{0}$, то обернена матриця $\boldsymbol{A}^{-1}$ існує і дорівнює:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}}=\frac{\tilde{\boldsymbol{A}}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\ \tilde{\mathrm{A}}=\frac{1}{\boldsymbol{\Delta}}\cdot\ \left\|\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}\right\|^{\boldsymbol{T}}\qquad \tilde{\mathrm{A}}=\left\|\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}\right\|^{\boldsymbol{T}} \tag{*}$$

Алгебраїчні доповнення $\boldsymbol{A}_{ij}$ визначаємо через мінори за формулою:

$$\boldsymbol{A}_{ij}=(\mathbf{-1})^{i+j}\,\boldsymbol{M}_{ij}$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=(\mathbf{-1})^{\mathbf{1+1}}\boldsymbol{M}_{11}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{5} & 7\\ \mathbf{-7} & 10\end{vmatrix}=-\mathbf{5}\cdot\ 10\text{-}7(\text{-}7)=\text{-}50+49=\text{-}1;$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=(\mathbf{-1})^{\mathbf{1+2}}\boldsymbol{M}_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{8} & 7\\ \mathbf{12} & 10\end{vmatrix}=-(\mathbf{8}\cdot\ 10\text{-}7\cdot\ 12)=\text{-}(80\text{-}84)=4;$$

$$\boldsymbol{A}_{13}=(\mathbf{-1})^{\mathbf{1+3}}\boldsymbol{M}_{13}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{8} & -5\\ \mathbf{12} & -7\end{vmatrix}=\mathbf{8}\cdot\ (\text{-}7)\text{-}5\cdot\ 12=\text{-}56+60=4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{5} & 5\\ \mathbf{-7} & 10\end{vmatrix}=-(\mathbf{5}\cdot 10-5\cdot(-7))=-(50+35)=-85;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5\\ \mathbf{12} & 10\end{vmatrix}=\mathbf{6}\cdot 10-5\cdot 12=60-60=0;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5\\ \mathbf{12} & -7\end{vmatrix}=-(\mathbf{6}\cdot(-7)-5\cdot 12)=-(-42-60)=102;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}\mathbf{6} & 5 & 5\\ \mathbf{8} & -5 & 7\\ \mathbf{12} & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{5} & 5\\ \mathbf{-5} & 7\end{vmatrix}=\mathbf{5}\cdot 7-5\cdot(-5)=35+25=60;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix}=-(6\cdot 7-8\cdot 5)=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 8 & -5\end{vmatrix}=6\cdot(-5)-5\cdot 8=-30-40=-70;$$

Тому матриця, що складена з алгебраїчних доповнень A_{ij} , має такий вигляд:

$$\|A_{ij}\|=\begin{Vmatrix}\mathbf{-1} & 4 & 4\\ \mathbf{-85} & 0 & 102\\ \mathbf{60} & -2 & -70\end{Vmatrix},\quad \text{звідки}\quad \tilde{A}=\|A_{ij}\|^{T}=\begin{Vmatrix}\mathbf{-1} & -85 & 60\\ \mathbf{4} & 0 & -2\\ \mathbf{4} & 102 & -70\end{Vmatrix}$$

Таким чином, згідно з формулою (*) маємо:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{Vmatrix}$$

Через те, що для двох взаємно обернених матриць A та A^{-1} справедливі рівності $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – це одинична матриця, то виконаємо перевірку:

$$A^{-1} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{34} \begin{Vmatrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} (-1)\cdot 6 + (-85)\cdot 8 + 60\cdot 12 & (-1)\cdot 6 + (-85)\cdot(-5) + 60\cdot(-7) & (-1)\cdot 5 + (-85)\cdot 7 + 60\cdot 10 \\ 4\cdot 6 + 0\cdot 8 + (-2)\cdot 12 & 4\cdot 5 + 0\cdot(-5) + (-2)\cdot(-7) & 4\cdot 5 + 0\cdot 7 + (-2)\cdot 10 \\ 4\cdot 6 + 102\cdot 8 + (-70)\cdot 12 & 4\cdot 5 + 102\cdot(-5) + (-70)\cdot(-7) & 4\cdot 5 + 102\cdot 7 + (-70)\cdot 10 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -6-680+720 & -5+425-420 & -5-595+600 \\ 24+0-24 & 20+0+14 & 20+0-20 \\ 24+816-840 & 20-510+490 & 20+714-700 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} 34 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 34 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Тепер, використовуючи одержану обернену матрицю A^{-1} , знаходимо розв'язок системи рівнянь за допомогою оберненої матриці

$$x = A^{-1} \cdot \mathbf{B}_1 \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} (-1)\cdot 11 + (-85)\cdot 5 + 60\cdot(-6) \\ 4\cdot 11 + 0\cdot 5 + (-2)\cdot(-6) \\ 4\cdot 11 + 102\cdot 5 + (-70)\cdot(-6) \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -11 & -425 & -360 \\ 44 & 0 & 12 \\ 44 & 510 & 420 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -796 \\ 56 \\ 974 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -398/17 \\ 28/17 \\ 487/17 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -398/17 \\ 28/17 \\ 487/17 \end{Vmatrix}$$

звідки розв'язок системи рівнянь буде:

$$x_1 = -\frac{398}{17}, x_2 = \frac{28}{17}, x_3 = \frac{478}{17}.$$

в) Отримаємо розв’язок системи рівнянь (1) способом виключення невідомих (способом Гаусса). Для цього складемо розширену матрицю системи, яку еквівалентними перетвореннями зводимо до ступінчастої матриці:

$$\begin{array}{c} \left\|\begin{matrix} \mathbf{6} & 5 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 & 5 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} x(-2) \\ \\ + \end{matrix} \end{array} \infty \left\|\begin{matrix} \mathbf{6} & 5 & 5 & 11 \\ \mathbf{8} & -5 & 7 & 5 \\ \mathbf{0} & -17 & 0 & 28 \end{matrix}\right\| \begin{matrix} \text{x}(-2) \\ \text{x}3+ \\ \text{x}(-1) \end{matrix} \infty \left\|\begin{matrix} \mathbf{6} & 5 & 5 & 11 \\ \mathbf{0} & -35 & 1 & -29 \\ \mathbf{0} & 17 & 0 & 28 \end{matrix}\right\|$$

Тут спочатку перший рядок помножили на (-2) і додали до третього рядка. Потім елементи першого рядка помножили на (-4) і результати додали до відповідних елементів другого рядка, які попередньо помножили на 3. Крім того, елементи третього рядка помножили на (-1). Згідно з одержаною останньою матрицею система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} \mathbf{6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11} \\ \mathbf{-35x_2 + x_3 = -29} \\ \mathbf{17x_2 = 28} \end{cases} \qquad \mathbf{(2)}$$

Систему рівнянь **(2)** можна записати і так:

$$\begin{cases} \mathbf{6x_1 + 5x_3 + 5x_2 = 11} \\ \mathbf{x_3 - 35x_2 = -29} \\ \mathbf{17x_2 = 28} \end{cases} \qquad \mathbf{(3)}$$

А її розширена матриця буде мати вигляд:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-35} & \mathbf{-29} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{17} & \mathbf{28} \end{array}\right\|$$ - таку матрицю називають ступінчастою.

Тобто це така квадратна матриця (без четвертого стовпця вільних членів), у якої всі елементи, що розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Система рівнянь (3), (2) та (1) – еквівалентні (тобто мають однаковий розв'язок), але, на відміну від системи (1), системи рівнянь (2) чи (3) легко досліджуються та розв'язуються.

Так, наприклад, з системи (2) або(3) знаходимо:

$$17x_2 = 28; \qquad x_2 = \frac{28}{17}; \qquad x_3 - 35x_2 = -29;$$

$$x_3 = -29 + 35x_2; \qquad x_3 = -29 + 35 \cdot \frac{28}{17};$$

$$x_3 = \frac{-493 + 980}{17}; \qquad x_3 = \frac{487}{17};$$

$$6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11; \quad 6x_1 = 11 - 5x_2 - 5x_3$$

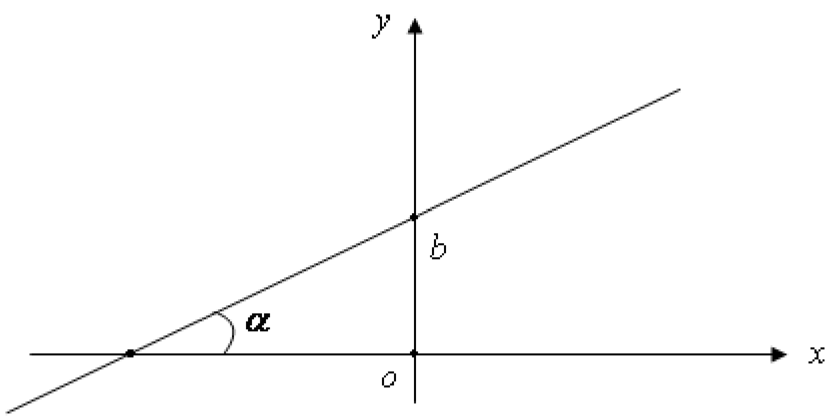
$$x_1 = \frac{11 - 5x_2 - 5x_3}{6} = \frac{11 - 5\cdot\frac{28}{17}\cdot\frac{487}{17}}{6} = \frac{\frac{187 - 140 - 2435}{17}}{6} = \frac{2388}{6\cdot 17} = -\frac{398}{17}$$

Таким чином маємо:

$$x_1 = -\frac{398}{17}; \qquad x_2 = \frac{28}{17}; \qquad x_3 = \frac{487}{17}.$$

2. Аналітична геометрія на площині

В декартових координатах кожна пряма визначається рівнянням першого ступеня. Рівняння виду: $Ax + By + C = 0$ (1) називається загальним рівнянням прямої. Кут α визначається так, як показано на рисунку, і називається кутом нахилу прямої до осі Ox.



Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої; його звичайно позначають літерою k :

$$k = tg\alpha \qquad \textbf{(2)}$$

Рівняння $y = kx + b$ називається рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; k - кутовий коефіцієнт, b - величина відрізка, який відсікає пряма на осі Oy, відраховуючи від початку координат.

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою

$$k = -\frac{A}{B} \qquad \textbf{(3)}$$

Рівняння $y - y_0 = k(x - x_0)$ **(4)** є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ та має кутовий коефіцієнт k .

Якщо пряма проходить через точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{(5)}$$

Рівняння $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad \textbf{(6)}$$

є рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$.

Якщо відомі кутові коефіцієнти двох прямих k_1 та k_2, то один із кутів φ між цими прямими визначається за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad \textbf{(7)}$$

Ознакою паралельності двох прямих є рівність їх кутових коефіцієнтів

$$k_1 = k_2 \qquad \textbf{(8)}$$

Ознакою перпендикулярності двох прямих є співвідношення між кутовими коефіцієнтами прямих:

$$\boldsymbol{k_1 k_2 = -1} \text{ або } \boldsymbol{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \qquad \textbf{(9)}$$

Інакше кажучи, кутові коефіцієнти перпендикулярних прямих обернені за абсолютною величиною та протилежні за знаком.

ЗАДАЧА 2

У задачах 2.1–2.31 задано координати вершин трикутника АВС. Знайти:

1) довжини сторін **АВ**, **ВС**, та **АС**;
2) рівняння сторін **АВ**, **АС**, **ВС**, та їх кутові коефіцієнти;
3) величину кута **В** у радіанах з точністю до двох знаків;
4) рівняння висоти **CD** та її довжину;
5) рівняння медіани **АЕ** та координати точки **Р** перетину цієї медіани з висотою **CD**;
6) рівняння прямої **PL**, що проходить через точку **Р** паралельно до сторони **АВ**;
7) рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) **BN**, який проведено з вершини **В** на медіану **АЕ**;
8) координати точки **М**, розташованої симетрично до точки **А** відносно прямої **CD**;
9) побудувати на міліметровому папері (формат А4) трикутник **АВС** та знайдені його елементи в системі координат $\boldsymbol{xOy}$, взявши за одиницю масштабу 1 см.

2.1 А (-6; 3), В (6 + β; -6 – β), С (4; 8).

2.2	**A (-7; -2),**	**B (5 + β; -11 –β),**	**C (9; 11).**
2.3	**A (-2; 1),**	**B (10 +β; -8-β),**	**C (14; 14).**
2.4	**A (-6; 8),**	**B (6 + β; -1 –β),**	**C (10; 21).**
2.5	**A (-1; -2),**	**B (11 + β; -11 – β),**	**C (15; 11).**
2.6	**A (-10; 5),**	**B (2 +β; -4 – β),**	**C (6; 18).**
2.7	**A (-1; 1),**	**B (11 + β; -8 – β),**	**C (15; 14).**
2.8	**A (-10; 4),**	**B (2 + β; -5 – β),**	**C (6; 17).**
2.9	**A (-8; 4),**	**B (4 + β; -5 –β),**	**C (8; 17).**
2.10	**A (-6; -1),**	**B (6 + β; -10 – β),**	**C (10; 12).**
2.11	**A (-7; 7),**	**B (5 + β; -2 – β),**	**C (3; 12).**
2.12	**A (-2; 1),**	**B (10 + β; -8 – β),**	**C (8; 6).**
2.13	**A (-6; 5),**	**B (6 + β; -4 – β),**	**C (4; 10).**
2.14	**A (2; -1),**	**B (14 + β; -10 – β),**	**C (12; 4).**
2.15	**A (-5; 8),**	**B (7 + β; -1 – β),**	**C (5; 13).**
2.16	**A (-9; 7),**	**B (3 + β; -2 – β),**	**C (1; 12).**
2.17	**A (-9; 6),**	**B (3 + β; -3 – β),**	**C (1; 11).**
2.18	**A (-1; 2),**	**B (11 + β; -7 –β),**	**C (9; 7).**
2.19	**A (-9; 5),**	**B (3 + β; -4 – β),**	**C (1; 10).**
2.20	**A (-5; 4),**	**B (7 + β; -5 – β),**	**C (5; 9).**
2.21	**A (-4; 1),**	**B (8 + β; -8 – β),**	**C (12; 14).**
2.22	**A (-3; 0),**	**B (9 + β; -9 – β),**	**C (13; 13).**
2.23	**A (-4; 5),**	**B (8 + β; -4 –β),**	**C (12; 14).**
2.24	**A (-4; 0),**	**B (8 + β; -9 – β),**	**C (12; 13).**
2.25	**A (-9; 3),**	**B (3 + β; -6 – β),**	**C (7; 16).**
2.26	**A (-3; 2),**	**B (9 + β; -7 – β),**	**C (13; 15).**
2.27	**A (-9; 10)**	**B (3 + β; 1 + β),**	**C (7; 23).**
2.28	**A (-11; 0),**	**B (1+ β; -9 – β),**	**C (5; 13).**
2.29	**A (-4; 8),**	**B (8 + β; -1 – β),**	**C (12; 21).**

2.30	**A (-3; 10),**	**B (9 + β; 1 + β),**	**C (7; 15).**
2.31	**A (-7; 7),**	**B (5 + β; -4 –β),**	**C (9; 18).**

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 2.31</u> Нехай $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{3}$, тоді координати вершин трикутника **ABC** будуть такі: $\boldsymbol{A}\left(-7;7\right),\boldsymbol{B}\left(8;-7\right),\boldsymbol{C}\left(9;18\right)$.

1. Відстань між точками $\boldsymbol{A}\left(x_1;y_1\right)$та $\boldsymbol{B}\left(x_2;y_2\right)$ визначається за формулою:

$$\boldsymbol{d}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Використовуючи (1), знаходимо довжину сторони AB:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{AB}}=\left|\boldsymbol{AB}\right|=\sqrt{(\mathbf{8}-(-\mathbf{7}))^2+((-\mathbf{7})-\mathbf{7})^2}=\sqrt{\mathbf{15}^2-\left(-\mathbf{14}\right)^2}=\sqrt{\mathbf{225}+\mathbf{196}}=\sqrt{\mathbf{421}}=\mathbf{20.52}(\boldsymbol{см}).$$

Таким чином $\left|\boldsymbol{AB}\right|\approx\mathbf{20,5}(\boldsymbol{см})$

Аналогічно знаходимо довжини сторін **BC** та **AC** :

$$\mathbf{d}_{\mathbf{BC}}=\left|\boldsymbol{BC}\right|=\sqrt{(\mathbf{9}-\mathbf{8})^2+(\mathbf{18}+\mathbf{7})^2}=\sqrt{\mathbf{1}+\mathbf{625}}=\sqrt{\mathbf{626}}=\mathbf{25.02}(\hat{\tilde{n}}\ ).$$

$$\mathbf{d}_{\mathbf{AC}}=\left|\boldsymbol{AC}\right|=\sqrt{(\mathbf{9}+\mathbf{7})^2+(\mathbf{18}-\mathbf{7})^2}=\sqrt{\mathbf{256}+\mathbf{121}}=\sqrt{\mathbf{337}}=\mathbf{19.46}(\boldsymbol{см}).$$

тобто наближено **|BC | ≈ 25,0 (см); |AC| ≈ 19,5 (см).**

2. Рівняння прямої (сторони), яка проходить через точки $\boldsymbol{A}\left(x_1;y_1\right)$та $\boldsymbol{B}\left(x_2;y_2\right)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Підставляючи в (2) координати точок **A** та **B**, одержимо рівняння сторони **AB**:

$$\frac{x-(-7)}{8-(-7)}=\frac{y-7}{-7-7}; \qquad \frac{x+7}{15}=\frac{y-7}{-14};$$

$$-14(x+7)=15(y-7); \quad -14x-98=15y-105; \quad 14x+15y-7=0(AB) .$$

Перевірка:

т. А: 14(-7) + 15 · 7 – 7 = 0; -98 + 105 – 7 = 0; -98 + 98 = 0; 0 = 0;

т. В: 14 · 8 + 15 · (-7) – 7 = 0; 122 – 105 –7 = 0; 7 – 7 = 0; 0 = 0.

Підставляючи в (2) координати точок **А** та **С**, дістанемо рівняння сторони **АС**:

$$\frac{x+7}{9+7}=\frac{y-7}{18-7}; \qquad \frac{x+7}{16}=\frac{y-7}{11};$$

$$11(x+7)=16(y-7); \quad 11x+77=16y-112; \quad 11x-16y+189=0$$

(АС).

Перевірка:

т. А: 11(-7) –16 · 7 + 189 = 0; -77 – 112 + 189 = 0; -189 + 189 = 0; 0 = 0;

т. С: 11 · 9 – 16 · 18 + 189 = 0; 99 – 288 + 189 = 0; 99 – 99 = 0; 0 = 0.

Аналогічно знаходимо рівняння сторони **ВС**:

$$\frac{x-8}{9-8}=\frac{y+7}{18+8}; \qquad \frac{x-8}{1}=\frac{y+7}{25};$$

$$25(x-8)=(y+7)1; \quad 25x-200=y+7; \quad 25x-y-207=0 \text{ (BC).}$$

Перевірка:

т. В: **25 · 8 –(-7) – 207 = 0; 200 + 7 – 207 = 0; 200 – 200 = 0; 0 = 0;**

т. С: **25 · 9 – 18 – 207 = 0; 225 – 18 – 207 = 0; 207 – 207 = 0; 0 = 0.**

Розв’язавши кожне з рівнянь сторін $(AB),(AC),(BC)$ відносно y, знаходимо їх рівняння у вигляді рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом:

$$(AB)\,15y=-14x+7;\quad y=-\frac{14}{15}x+\frac{7}{15},\quad \text{çâ³äêè}\quad k_{AB}=-\frac{14}{15}$$
$$(AC)\,16y=11x+189;\quad y=\frac{11}{16}x+\frac{189}{16},\quad \text{çâ³äêè}\quad k_{AC}=\frac{11}{16}$$
$$(BC)\,25x-y-207=0;\quad y=25x-207,\quad \text{çâ³äêè}\quad k_{BC}=25$$

3. Відомо, що тангенс кута φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 та k_2 , обчислюється за формулою

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \qquad (3)$$

Відшукуваний кут B, утворений прямими AB та BC, кутові коефіцієнти яких знайдені: $k_1=k_{BC}=25;\quad k_2=k_{AB}=-\frac{14}{15}$.

Використовуючи формулу (3), дістанемо:

$$tgB=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{BC}\,k_{AC}}=\frac{-\frac{14}{15}-25}{1+25\cdot(-\frac{14}{15})}=\frac{-14-25\cdot15}{15+25(-14)}=\frac{-14-375}{15-350}=\frac{-389}{-335}=1{,}1612,$$

звідки $B\approx 49^\circ16'$ або $B\approx 0{,}86$ радіана .

4. Рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ в заданому напрямку k, має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad \textbf{(5)}$$

Висота CD перпендикулярна до сторони AB. Для того, щоб знайти кутовий коефіцієнт висоти CD, будемо використовувати умову перпендикулярності прямих

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = -1, \text{ або } \mathbf{k}_2 = -\frac{1}{\mathbf{k}_1}. \qquad \textbf{(6)}$$

Через те, що $\mathbf{k}_{AB} = -\frac{14}{15}$, $\mathbf{k}_{CD} = -\frac{1}{\mathbf{k}_{AB}} = \frac{15}{14}$. Підставляючи в **(5)** замість x_0 і y_0 координати точки $C: x_c = 9,\ \ y_c = 18$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $\mathbf{k}_{CD} = \frac{15}{14}$, дістанемо:

$$y - 18 = \frac{15}{14}(x - 9); \qquad 14(y - 18) = 15(x - 9);$$
$$14y - 252 = 15x - 135; \quad 15x - 14 + 177 = 0.(CD).$$

Для того, щоб знайти довжину висоти **CD**, визначимо спочатку координати точки **D** – точки перетину прямих **AB** та **CD.** Розв'язавши сумісно систему рівнянь

$$\begin{cases} (AB)14x + 15y - 7 = 0 \\ (CD)15x - 14y + 117 = 0 \end{cases}\left|\begin{matrix} \cdot 14 \\ \cdot 15 \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} 196x + 210y - 98 = 0 \\ 225x - 210y + 1755 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 421x + 1657 = 0; 421x = -1657; x = \frac{-1657}{421} = -3,936;$$

$$x_D \approx -3,94; \qquad 14 \cdot (-3,94) + 15y - 7 = 0,$$

необхідно зробити перевірку правильності знайденого розв'язку $x_D \approx -3,94$ та $y_D = 4,14$, підставляючи його замість x та y в обидва рівняння записаної системи.

Таким чином отримали $D(-3,94;4,14)$. Для побудови на рисунку візьмемо $x_D \approx -3,94$, $y_D = 4,14$. За формулою **(1)** знаходимо довжину висоти CD:

$$\mathbf{d_{CD}} = |\mathbf{CD}| = \sqrt{(-3,94-9)^2 + (4,14-18)^2} = \sqrt{(-12,94)^2 + (-13,86)^2} =$$
$$= \sqrt{167,4436 + 192,0996} = \sqrt{359,5432} = 18,96(\text{см}).$$

Отже **|CD| ≈ 19 см.**

5. Для того, щоб знайти рівняння медіани AE, визначимо спочатку координати точки E, середини сторони BC. Для цього використовуємо формули ділення відрізка на дві рівні частини (дивись **(4)**, де $\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

$$x_E = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8,5; \qquad y_E = \frac{-7+18}{2} = \frac{11}{2} = 5,5; \qquad E(8,5;5,5)$$

Підставляючи в **(2)** координати точок A та E, знаходимо рівняння медіани:

$$\frac{x+7}{8,5+7} = \frac{y-7}{5,5-7}; \qquad \frac{x+7}{15,5} = \frac{y-7}{-1,5};$$

$$-1,5(x+7) = 15,5(y-7) \,|\, x(-2);$$

$$3(x+7) = -31(y-7); \qquad 3x + 21 = -31y + 217; \qquad 3x + 31y - 196 = 0 (AE)$$

Виконати перевірку, підставляючи в рівняння AE замість x та y координати точок A та E.

Для того, щоб знайти координати точки P перетину висоти CD та медіани AE, розв'яжемо сумісно систему рівнянь:

$$\begin{cases} (AE)\,3x+31y-196=0 \\ (CD)\,15x-14y+117=0 \end{cases}\Bigg|\cdot(-5) \Rightarrow \begin{cases} -15x+155y+980=0 \\ 15x-14y+117=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -169y+1097=0;\quad 169y=1097;\qquad y=\frac{1097}{169}=6{,}49$$

$$3x+31\cdot 6{,}49-169=0;\quad 3x=169-201{,}19;\quad 3x=-5{,}19;\quad x=\frac{-5{,}19}{3}=-1{,}73$$

$$x_P\approx -1{,}7;\qquad y_P\approx 6{,}5\qquad P(-1{,}7;6{,}5)$$

6. Тому, що відшукувана пряма PL паралельна до сторони AB, то її кутовий коефіцієнт k_{PL} буде дорівнювати кутовому коефіцієнту k_{AB} прямої AB. Підставляючи в **(5)** замість x_0 і y_0 координати знайденої точки P, та кутовий коефіцієнт $\mathbf{k}=\mathbf{k}_{PL}=\mathbf{k}_{AB}=-\frac{14}{15}$, дістанемо:

$$y-6{,}5=-\frac{14}{15}(x+1{,}7)\Big|\cdot 10;\; 10y-65=-\frac{14}{15}(10x+17)\Big|\cdot 15;$$

$$15(10y-65)=-14(10x+17);\; 150y-975=140x-238;$$

$$140x+150y-637=0\quad (PL)\ \text{де}\ PL\parallel AB$$

Перевірка:

140 · (-1,7) + 150 · 6,5 – 637 = 0 ;

-238 + 975 – 637 = 0 ; -238 + 238 = 0; 0 = 0 .

7. Пряма (висота) BN перпендикулярна до медіани (прямої) AE. Враховуючи умову перпендикулярності **(6)**, знаходимо кутовий коефіцієнт BN:

$$(AE)\qquad 3x+31y-196=0;\qquad 31y=-3x+196;$$

$$\text{ó}=-\frac{3}{31}x+\frac{196}{31},\qquad\qquad \mathbf{k}_{AE}=-\frac{3}{31};$$

$$\acute{o}=-\frac{3}{31}x+\frac{196}{31},\qquad\qquad \mathbf{k}_{AE}=-\frac{3}{31}\ ;$$

$$\mathbf{k}_{BN} = -\frac{1}{\mathbf{k}_{AE}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{31}\right)} = \frac{31}{3}$$

Підставляючи в **(5)** замість x_0 і y_0 координати $B(8;-7)$ та знайдений кутовий коефіцієнт $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{BN} = \frac{31}{3}$, дістанемо

$y + 7 = \frac{31}{3}(x-8)\big|\cdot 3;$

$$3(y+7) = 31(x-8); \quad 3y + 21 = 31x - 248; \quad 31x - 3y - 269 = 0(BN)$$

Довжину перпендикуляра (висоти) можна знаходити як відстань від точки $M^*\left(x^*;y^*\right)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ за формулою

$$\mathbf{d}_{BN} = |BN| = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

Враховуючи, що потрібно обчислити довжину перпендикуляра BN, який дорівнює відстані від точки B до прямої $AE: 3x + 31y - 196 = 0$,

звідки A = 3; B = 31. Підставляємо в **(8)** замість x^* і y^* координати x_B = 8 , y_B = -7 та коефіцієнти A = 3; B = 31, дістанемо

$$d_{BN} = |BN| = \frac{|3\cdot 8 + 31\cdot (-7) - 196|}{3^2 + 31^2} = \frac{389}{31{,}145} = 12{,}49(см)$$

Отже **|BN|** $\approx$ **12,49 см.**

8. Тому, що пряма AB перпендикулярна до прямої CD, то відшукувана точка M, яка розташована симетрично до точки A, відносно прямої CD, знаходиться на прямій AB. Крім того, точка D є середина відрізка AM. Застосовуючи формули **(7),** знаходимо координати відшукованої точки M:

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \qquad -3,94 = \frac{-7 + x_M}{2};$$

$$x_M = 2(-3,94) + 7; \quad x_M = -7,88 + 7 = -0,88; \quad x_M \approx -0,9;$$

$$y_D = \frac{y_A + y_M}{2}; \qquad 4,14 = \frac{7 + y_M}{2};$$

$$y_M = 2 \cdot 4,14 - 7; \quad y_M = 8,28 - 7 = 1,28; \quad y_M \approx 1,3$$

Отже: $M(-0,9;1,3)$

10. Трикутник ABC, висота CD, медіана AE, пряма PL, перпендикуляр та точка M побудовані в системі координат xOy на рис. 1.

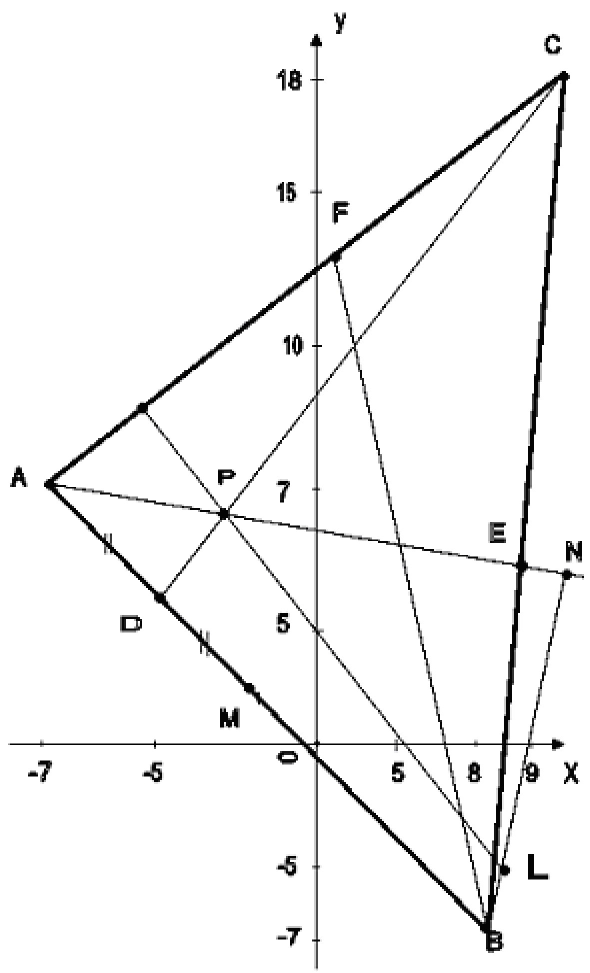


Рис. 1.

Аналітична геометрія в просторі

Трійка векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ називається координатним базисом, якщо ці вектори задовольняють такі умови:

1. вектор $\bar{i}$ лежить на осі Ox, вектор $\bar{j}$ - на осі Oy, вектор $\bar{k}$ на осі Oz;
2. кожен з векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ спрямовано на своїй осі в додатну сторону;
3. вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - одиничні, тобто $|\bar{i}| = 1, |\bar{j}| = 1$, $|\bar{k}| = 1$. Яким би не був вектор $\bar{a}$, він завжди може бути розкладений за базисом $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, тобто може бути представлений у вигляді:

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} \qquad \textbf{(8)}$$

Скалярним добутком двох векторів називається число, що дорівнює добуткові модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi \qquad \textbf{(9)}$$

Якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ задані своїми координатами: $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}, \bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то їх скалярний добуток може бути підрахований за формулою:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \qquad \textbf{(10)}$$

Якщо дано дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, які є початком і кінцем вектора $\bar{a}$, то його координати X, Y, Z визначаються за формулами

$$X = x_2 - x_1, Y = y_2 - y_1, Z = z_2 - z_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Таким чином координати вектора записуються:

$$\bar{a} = \{X; Y; Z\}; \qquad \textbf{(2)}$$

$$\bar{a} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \textbf{(3)}$$

що дозволяє за координатами вектора визначити його модуль.

Якщо маємо два вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, що задані координатами:

$$\bar{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}, \bar{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$$

то суму векторів знаходимо за формулою:

$$\bar{a}+\bar{b}=\left\{X_1+X_2;Y_1+Y_2;Z_1+Z_2\right\} \tag{4}$$

різницю векторів знаходимо за формулою:

$$\bar{a}-\bar{b}=\left\{X_1-X_2;Y_1-Y_2;Z_1-Z_2\right\} \tag{5}$$

Якщо $\bar{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$, то для будь-якого числа α:

$$\alpha\bar{a}=\left\{\alpha x;\alpha y;\alpha z\right\} \tag{6}$$

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються колінеарними. Ознакою колінеарності двох векторів $\bar{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$ та $\bar{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$ є пропорційність їх координат:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \tag{7}$$

Кут φ між векторами $\bar{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$ та $\bar{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$ знаходять за формулою $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$ або в координатах: **(11)**

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{12}$$

Скалярний добуток можна виразити також формулами:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b}\;; \tag{13}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|\,np_{\bar{b}}\bar{a} \tag{14}$$

Якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ задано координатами: $\bar{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$ та $\bar{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$, то векторний добуток вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ визначається за формулою:

$$\left\{\bar{a}\times\bar{b}\right\}=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\} \qquad (15)$$

або

$$\left\{\bar{a}\times\bar{b}\right\}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad (16)$$

Змішаний добуток трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}$ та $\bar{c}$ визначається за формулою:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Модуль векторного добутку $\left|\left\{\bar{a}\times\bar{b}\right\}\right|$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$. Змішаний добуток $\bar{a}, \bar{b}$ $\bar{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ $\bar{c}$, взятого зі знаком плюс, якщо трійка $\bar{a}, \bar{b}$ $\bar{c}$ права, і зі знаком мінус, якщо ця трійка ліва.

ЗАДАЧА 3

У задачах **3.1-3.31** задано координати вершин піраміди **ABCD.**

Потрібно:

1) записати вектори $\overline{AB}$**,** $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ у системі ОРТ і знайти модулі (довжини) цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overline{AD}$ та $\overline{AC}$ у радіанах з точністю до двох знаків;

3) знайти проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

4) знайти площу грані ABC;

5) знайти об'єм піраміди $ABCD$.

3.1. A(-5 –β; β; 1+β), B(-4; -2; 3), C(6; 2; 11), D(3; 4; 9).

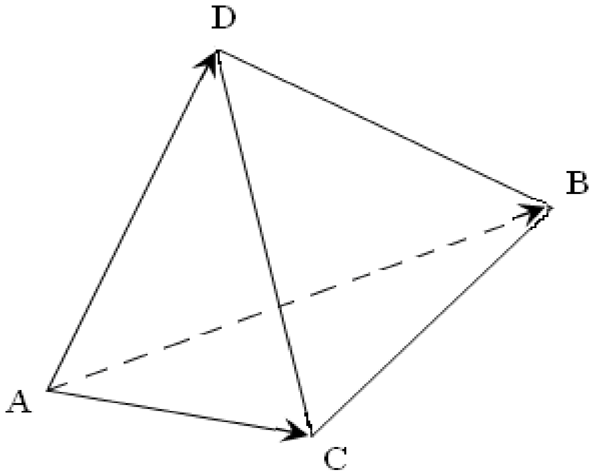
3.2. A(1 +β; -4 –β; β), B(2; -6; 2), C(12; -2; 10), D(9; 0; 8).

3.3.	**A(-1 –β; -2 –β; -8 –β),**	**B(0; -4; -6),**	**C(10; 0; 2),**	**D(7; 2; 0).**
3.4.	**A(β; 2+β; -10 –β),**	**B(1; 0; -8),**	**C(14; 3;8),**	**D(11; 5; 6).**
3.5.	**A(3+β; 1+β; -2 –β),**	**B(4; -1; 0),**	**C(14; 3; 8),**	**D(11; 5; 6).**
3.6.	**A(-8-β; 3+β; -1 -β),**	**B(-7; 1; 1),**	**C(3; 5; 9),**	**D(0; 7; 7).**
3.7.	**A(2+β; -1 –β; -4 –β),**	**B(3; -3; -2),**	**C(13; 1; 6),**	**D(10; 3; 4).**
3.8.	**A(-4-β; 5+β; -5 –β),**	**B(-3; 3; -3),**	**C(7; 7; 5),**	**D(4; 9; 3).**
3.9.	**A(-2-β; -3 –β; 2+β),**	**B(-1; -5; 4),**	**C(9; -1; 12),**	**D(6; 1; 10).**
3.10.	**A(-3 –β; 4+β; -3-β),**	**B(-2; 2; -1),**	**C(8; 6; 7),**	**D(5; 8; 5).**
3.11.	**A(2+β; -3 –β; 1+β),**	**B(6; 1; -1),**	**C(4; 8; -9),**	**D(2; -1; 2).**
3.12.	**A(5+β;-1 –β; -4 –β),**	**B(9; 3; -6),**	**C(7; 10; -14),**	**D(5; 1; -3).**
3.13.	**A(1+β; -4 –β; β),**	**B(5; 0; -2),**	**C(3; 7; -10),**	**D(1; -2; 1).**
3.14.	**A(-3 –β; -6 –β; 2+β),**	**B(1; -2; 0),**	**C(-1; 5; -8),**	**D(-3; -4; 3).**
3.15.	**A(-1 –β; 1+β; -5 –β),**	**B(3; 5; -7),**	**C(1; 12; -15),**	**D(-1; 3; -4).**
3.16.	**A(-4 –β; 2+β; -1 –β),**	**B(0; 6; -3),**	**C(-2; 13; -11),**	**D(-4; 4; 0).**
3.17.	**A(β; 4+β; 3+β),**	**B(4; 8; 1),**	**C(2; 15; -7),**	**D(0; 6; 4).**
3.18	**A(-2 –β; β; -2-β),**	**B(2; 4; -4),**	**C(0; 11; -12),**	**D(-2; 2; -1).**
3.19.	**A(3+β; 3+β; -3 –β),**	**B(7; 7; -5),**	**C(5; 14; -13),**	**D(3; 5; -2).**
3.20.	**A(4+β; -2 –β; 5+β),**	**B(8; 2; 3),**	**C(6; 9; -5),**	**D(4; 0; 6).**
3.21.	**A(-4 –β;1+β; 2+β),**	**B(-3; 1; 4),**	**C(7; 3; 12),**	**D(4; 5;10).**
3.22.	**A(2+β; -3 –β; 1+β),**	**B(3;-5; 3),**	**C(13; -1; 11),**	**D(10; 1; 9).**
3.23.	**A(β; -1 –β; -7 –β),**	**B(1; -3; -5),**	**C(11; 1; 3),**	**D(8; 3; 1).**
3.24.	**A(1+β; 3+β; -9 –β),**	**B(2; 1; -7),**	**C(12; 5; 1),**	**D(9; 7; -1).**
3.25.	**A(4+β; 2+β; -1 –β),**	**B(5; 0; 1),**	**C(15; 4; 9),**	**D(12; 6; 7).**
3.26.	**A(-7 –β; 4+β; β),**	**B(-6; 2; 2),**	**C(4; 6; 10),**	**D(1; 8; 8).**
3.27.	**A(3+β; β; -3 –β),**	**B(4;-2; -1),**	**C(14; 2; 7),**	**D(11; 4; 5).**
3.28.	**A(-3 –β; 6+β; -4 –β),**	**B(-2; 4; -2),**	**C(8; 8; 6),**	**D(5; 10; 4).**
3.29.	**A(-1 –β; -2 –β; 3+β),**	**B(0; -4; 5),**	**C(10; 0; 13),**	**D(7; 2; 11).**
3.30.	**A(-2 –β; 5+β; -2 –β),**	**B(-1; 3; 0),**	**C(9; 7; 8),**	**D(6; 9; 6).**

3.31. A(2+β; 2+β;1+β), B(2; -2; 3), C(12; 1; 9), D(1; 2; 6).

<u>**Приклад виконання задачі 3.31.**</u> Візьмемо $\boldsymbol{\beta}$ **=4**, тоді координати вершин піраміди $\boldsymbol{ABCD}$ будуть такі: $\boldsymbol{A}$**(6; 6;5),** $\boldsymbol{B}$ **(2; -2; 3),** $\boldsymbol{C}$ **(12; 1; 9),** $\boldsymbol{D}$ **(1; 2; 6).**

Побудуємо схематичний рисунок піраміди $\boldsymbol{ABCD}$, не прив'язуючись до системи координат $\boldsymbol{Oxyz}$.



1. Довільний вектор $\overline{\boldsymbol{a}}$ можна записати в системі $\overline{\boldsymbol{i}},\overline{\boldsymbol{j}},\overline{\boldsymbol{k}}$ за такою формулою: $\overline{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{X}\overline{\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{Y}\overline{\boldsymbol{j}}+\boldsymbol{Z}\overline{\boldsymbol{k}}$ **(8),** де $\boldsymbol{X,Y,Z}$ - проекції вектора на координатні осі $\boldsymbol{Ox,Oy,Oz}$;

$\overline{\boldsymbol{i}},\overline{\boldsymbol{j}},\overline{\boldsymbol{k}}$ − одиничні вектори, що спрямовані так, як осі $\boldsymbol{Ox,Oy,Oz}$. Якщо задані точки та проекції вектора $\overline{\boldsymbol{a}}=\overline{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}$ на координатні осі, знаходять за формулами: $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1,\quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_2-\boldsymbol{Y}_2,\quad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_2-\boldsymbol{Z}_1$, **(1)**

тоді: $\overline{\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2}=\left(x_2-x_1\right)\overline{\boldsymbol{i}}+\left(y_2-y_1\right)\overline{\boldsymbol{j}}+\left(z_2-z_1\right)\overline{\boldsymbol{k}}$ **(3)**

Підставляючи в **(3)** координати точок **A** та **B**, одержимо вектор $\overline{\boldsymbol{AB}}$**:**

$$\overline{\boldsymbol{AB}}=(2-6)\overline{\boldsymbol{i}}+\left(-2-6\right)\overline{\boldsymbol{j}}+\left(3-5\right)\overline{\boldsymbol{k}}=-4\overline{\boldsymbol{i}}-8\overline{\boldsymbol{j}}-2\overline{\boldsymbol{k}}$$

Аналогічно, підставляючи в **(3)** координати точок **A** та **C**, знаходимо вектор $\overline{\boldsymbol{AC}}$:

$$\overline{AC} = (12-6)\bar{i} + (1-6)\bar{j} + (9-5)\bar{k} = 6\bar{i} - 5\bar{j} + 4\bar{k}$$

Підставляючи в **(3)** координати точок **A** та **D**, знаходимо вектор $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = (1-6)\bar{i} + (2-6)\bar{j} + (6-5)\bar{k} = -5\bar{i} - 4\bar{j} + 1\bar{k}$$

Отже знайдені вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ мають такі координати :

$$\overline{AB} = \{-4;\ -8;\ -2\}; \qquad \overline{AC} = \{6;\ -5;\ 4\}; \qquad \overline{AD} = \{-5;\ -4;\ 1\}$$

Якщо вектор $\bar{a}$ задано формулою **(1)**, то його модуль (довжина) обчисляється за формулою:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}. \qquad \textbf{(3)}$$

Застосовуючи формулу **(5),** обчислюємо модулі знайдених векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+64+4} = \sqrt{84} = 9{,}17;$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{36+25+16} = \sqrt{77} = 8{,}77;$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(-5)^1 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{25+14+1} = \sqrt{42} = 6{,}48;$$

Отже $|\overline{AB}| \approx 9{,}17$ лінійних одиниць $|\overline{AC}| \approx 8{,}77$ лін. од.; $|\overline{AD}| \approx 6{,}48$ лін. од.

2. Тому, що скалярний добуток двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними, тобто

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}| = \cos\varphi, \qquad \textbf{(9)}$$

то косинус кута φ між двома векторами $\bar{a}$ та $\bar{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad \textbf{(11)}$$

Якщо координати векторів-співмножників відомі $\bar{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$ та $\bar{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то їх скалярний добуток можна знайти за формулою:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 \qquad (10)$$

Знаходимо скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ за формулою **(10)**: $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=(-4)\cdot 6+(-8)\cdot(-5)+(-2)\cdot 4=-24+40-8=8$

Модулі цих векторів уже знайдено:

$$|AB|=\sqrt{84},\quad |AC|=\sqrt{77}.$$

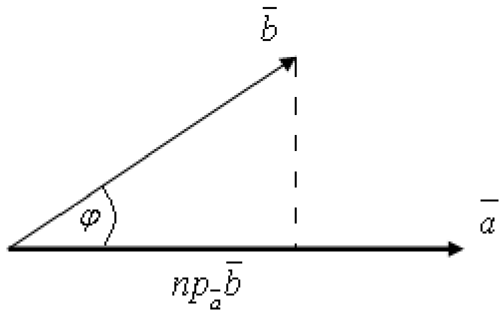
Отже за формулою (11) дістанемо:

$$\cos\varphi=\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{84}\cdot\sqrt{77}}=\frac{8}{80{,}42388}=0{,}0995.$$

Тому, що $\cos\alpha\approx 0{,}0995$, то $a\approx 84^\circ 17$, або $a\approx 1{,}4771$ радіана.

3. Проекцію вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ знаходимо за формулою **(13):**

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\,np_{\overline{a}}\overline{b}$$



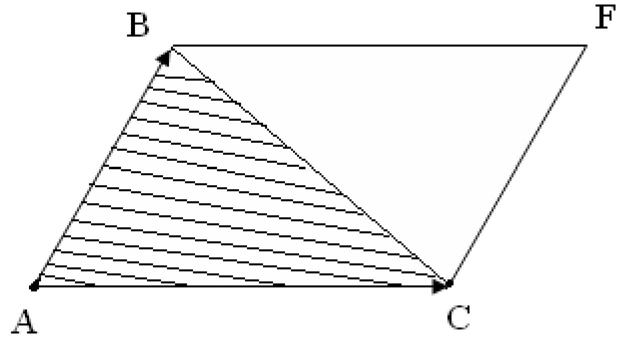
Звідки: $np_{\overline{a}}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}$

Отже проекція вектора $\overline{AD}$ на $\overline{AB}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\overline{AB}$:

$$np_{\overline{AB}}\overline{AD}=\frac{(-4)\cdot(-5)+(-8)\cdot(-4)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{84}}=\frac{20+32-2}{\sqrt{84}}=\frac{40}{9{,}165}=4{,}36$$

4. Площа грані $\overline{ABC}$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$ через вектор $\overline{AM}$:

$$\overline{AM}=\overline{AB}\times\overline{AC}$$



Тоді, виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\overline{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, а площа грані ABC буде дорівнювати половині модуля вектора $\overline{AM}$:

$$S_{ABFC}=\left|\overline{AM}\right|,\qquad S_{ABFC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AM}\right|$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$

Використаємо формулу **(16):**

$$\left\{\bar{a}\times\bar{b}\right\}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$

$$\overline{AM}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix}=-32\bar{i}+20\bar{k}-12\bar{j}+48\bar{k}+16\bar{j}-10\bar{i}=-42\bar{i}+4\bar{j}+68\bar{k}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6404}=\frac{1}{2}\cdot\ 80{,}02=40{,}01.$$

5. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на трьох не компланарних векторах, чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку:

$$V = |(\overline{AB} \times \overline{AC})\overline{AD}|,$$

а об’єм піраміди дорівнює шостій частині від об’єму паралелепіпеда

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6} \cdot \left|(\overline{AB} \cdot \ \overline{AC}) \cdot \ \overline{AD}\right|,$$

Обчислимо мішаний добуток $\left(\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{AC}\right)\overline{AD}$, використавши правило трикутників,

$$(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 48 + 160 + 50 + 48 - 64 = 262$$

Отже, об’єм V паралелепіпеда дорівнює V = 262 куб. од., а об’єм піраміди $ABCD$ −

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \ 262 = 43{,}67 \text{ кубічних одиниць.}$$

ЗАДАЧА 4

У задачах **4.1 – 4.31** задано координати точок A, B, C.

Потрібно:

1) записати канонічні рівняння прямої AB;

2) записати рівняння площини Q, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB, та знайти точку M – точку перетину цієї площини з прямою AB;

3) знайти точку N, що симетрична для точки C відносно прямої AB;

4) знайти відстань від точки C до прямої AB.

4.1.	**A(5+β; 1+β; 7+β)**	**B(9; 3+β; 3)**	**C(6+β; β ;3+β)**
4.2.	**A(1+β; 4+β; 5+β)**	**B(5; 6+β; 1)**	**C(2+β; 3+β; 1+β)**
4.3.	**A(4+β; -1+β; 9+β)**	**B(8; 1+β; 5)**	**C(5+β; -2–β; 5+β)**
4.4.	**A(2+β; β; 8+β)**	**B(6; 2+β; 4)**	**C(3+β; -1-β; 4+β)**
4.5.	**A(-2–β; 2+β; 3+β)**	**B(2; 4+β; -1)**	**C(-1–β; 1+β; -1-β**
4.6.	**A(-1–β; 4+β; 2+β)**	**B(3; 6+β; -2)**	**C(β; 3+β; -2–β)**
4.7.	**A(-2–β; 2+β; 10+β)**	**B(2; 4+β; 6)**	**C(-1–β; 1+β; 6+β)**
4.8.	**A(3+β; 6+β; 2+β)**	**B(7; 8+β; -2)**	**C(4+β; 5+β; -2–β)**
4.9.	**A(6+β; -2–β; 11+β)**	**B(10; β; 7)**	**C(7+β; -3–β; 7+β)**
4.10.	**A(3+β; 3+β ; 2+β)**	**B(7; 5+β; -2)**	**C(4+β; 2+β; -2–β)**
4.11.	**A(3+β; -1–β; 5+β)**	**B(7; 1+β; 1)**	**C(4+β; -2–β; 1+β)**
4.12.	**A(-1–β; 2+β; 3+β)**	**B(3; 4+β; -1)**	**C(β; 1+β; -1–β)**
4.13.	**A(2+β; -3–β; 7+β)**	**B(6; -1–β; 3)**	**C(3+β; -4–β; 3+β)**
4.14.	**A(β; -2–β; 6+β)**	**B(4; β; 2)**	**C(1+β; -3–β; 2+β)**
4.15.	**A(-3–β; 1+β; 2+β)**	**B(1; 3+β; -2)**	**C(-2–β; β; -2–β)**
4.16.	**A(-2–β; 3+β; 1+β)**	**B(2; 5+β; -3)**	**C(-1–β; 2+β; -3–β)**
4.17.	**A(-4–β; β; 8+β)**	**B(0; 2+β; 4)**	**C(-3–β; -1–β; 4+β)**
4.18.	**A(1+β; 4+β; β)**	**B(5; 6+β; -4)**	**C(2+β; 3+β; -4–β)**
4.19	**A(4+β; -4–β; 9+β)**	**B(8; -2–β; 5)**	**C(5+β; -5–β; 5+β)**
4.20.	**A(5+β; 5+β; 4+β)**	**B(9; 7+β; 0)**	**C(6+β; 4+β; β)**
4.21.	**A(1+β; -1–β; 3+β)**	**B(5; -1–β; -1)**	**C(2+β; -4–β; -1–β)**
4.22.	**A(-3–β; β; 1+β)**	**B(1; 2+β; -3)**	**C(-2–β; -1–β; -3–β)**
4.23.	**A(1+β; -2–β; 6+β)**	**B(5; -2–β; 2)**	**C(2+β; -5–β; 2+β)**
4.24.	**A(1+β; -1–β; 7+β)**	**B(5; 1+β; 3)**	**C(2+β; -2–β; 3+β)**
4.25	**A(-5–β; -1–β; β)**	**B(-1; 1+β; -4)**	**C(-4–β; -2–β; -4–β)**
4.26.	**A(-3–β; 2+β; β)**	**B(1; 4+β; -4)**	**C(-2–β; 1+β; -4–β)**
4.27.	**A(-3 –β; 1+β; 9+β)**	**B(1; 3+β; 5)**	**C(-2–β; β; 5+β)**
4.28.	**A(-1–β; 2+β; -2–β)**	**B(3; 4+β; -6)**	**C(β; 1+β; -6–β)**

4.29. **A(2+β; -6–β; 7+β)** **B(6; -4–β; 3)** **C(3+β; -7–β; 7+β)**

4.30. **A(3+β; 3+β; 2+β)** **B(7; 5+β; -2)** **C(4+β; 2+β; -2–β)**

4.31. **A(4+β; 4+β; 3+β)** **B(10; 2+β; 0)** **C(7+β; 4+β; 2+β)**

Приклад виконання задачі 4.31. Візьмемо β = **5**, тоді координати точок A,B,C будуть такі:

A (9; 9; 8), B (10; 7; 0), C (12; 9; 7).

1. Канонічні рівняння прямої в просторі, що проходить через точки $A(x_1;y_1;z_1)$ та $B(x_2;y_2;z_2)$, мають вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \textbf{(1)}$$

Підставляючи в (1) координати точок A та B, дістанемо

$$\frac{x-9}{10-9}=\frac{ó-9}{7-9}=\frac{z-8}{0-8}; \qquad \frac{x-9}{1}=\frac{ó-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}\,. \qquad (AB)$$

Тут $\overline{a_1}=\{1;-2;-8\}$– спрямовуючий вектор прямої AB.

2. Запишемо рівняння площини Q у загальному вигляді

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то її рівняння можна записати так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad \textbf{(2)}$$

де $\overline{n}=\{A,B,C\}$– нормальний вектор площини, що перпендикулярний до площини.

Через те, що шукана площина Q перпендикулярна до прямої AB, то нормальний вектор n такої площини буде колінеарним спрямовуючому вектору $\overline{a_1}$ прямої AB, а тому можна взяти взагалі $\overline{n}=\overline{a_1}=\{1;-2;-8\}$. Замінимо коефіцієнти A,B,C у рівнянні **(2)** числами 1,

-2 та -8 і підставимо замість $(x_0;y_0;z_0)$ координати точки C (12; 9; 7), дістанемо:

$$\mathbf{1(x-12)+(-2)(y-9)+(-8)(z-7)=0;}$$
$$\mathbf{x-12-2y+18-8z+56=0;}$$
$$\mathbf{x-2y-8z+62=0.} \qquad \mathbf{(3)}$$

Отримали рівняння площини Q, що проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB

Перевірка: т.C $12-2\cdot 9-8\cdot 7+62=0$ $12-18-56+62=0$ $12-18+6=0;0\equiv 0$ **(3)**

Отже, точка $C\in Q$.

Визначимо координати точки M перетину площини Q з прямою AB. Для цього спочатку запишемо параметричні рівняння прямої AB.

Нехай

$$\mathbf{\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}=t,}$$

де t – деякий параметр, звідки

$$\mathbf{\frac{x-9}{1}=t;\quad \frac{y-9}{-2}=t;\quad \frac{z-8}{-8}=t,}$$

тобто $\mathbf{x=t+9;}\quad \mathbf{y=-2t+9;}\quad \mathbf{z=-8t+8.}$ **(4)**

Підставляючи **(4)** в **(3)** знаходимо значення параметра t, за якого точка прямої AB буде належати і площині **Q**:

$$\mathbf{t+9-2(-2t+9)-8(-8t+8)+62=0}$$
$$\mathbf{t+9+4t-18+64t-64+62=0}$$

$$\mathbf{69t-11=0;\quad 69t=11;\quad t=\frac{11}{69}}$$

Підставляючи в **(4)** $t=\frac{11}{69}$, знаходимо координати точки M перетину прямої AB з площиною Q:

$$x_M = \frac{11}{69} + 9 = \frac{11 + 621}{69} = \frac{632}{69} = 9{,}16;$$

$$y_M = -\frac{22}{69} + 9 = \frac{-22 + 621}{69} = \frac{599}{69} = 8{,}68;$$

$$z_M = -\frac{88}{69} + 8 = \frac{-88 + 552}{69} = \frac{464}{69} = 6{,}72.$$

Виконати перевірку, підставивши значення $\frac{632}{69}$ $\frac{599}{69}$ $\frac{464}{69}$ замість x, y, z в канонічні рівняння прямої AB та в рівняння **(3)** площини Q, і отримати відповідні рівності (тотожності).

Отже, $M\left(\frac{632}{69}, \frac{599}{69}, \frac{464}{69}\right)$ або $M(9{,}16; 8{,}68; 6{,}72)$.

3. Тому, що пряма AB перпендикулярна до площини Q, то будь-яка пряма, що розташована в цій площині, буде перпендикулярна до прямої AB. Отже, пряма CM перпендикулярна до прямої AB (мал.2), а тому відшукувана точка N, що розташована симетрично до точки C, відносно прямої AB, знаходиться на прямій CM. Пряма CM (або CN) розташована в площині Q, крім того, точка M є серединою відрізка CN. Застосовуючи формули для знаходження координат точки, що ділить відрізок на дві рівні частини (в просторі)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad ó = \frac{ó_1 + ó_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad \textbf{(7)}$$

знаходимо координати відшукуваної точки N:

$$x_M = \frac{x_C + x_N}{2}; \quad x_N = 2x_M - x_C; \quad x_N = 2 \cdot \frac{632}{69} - 12;$$

$$x_N = \frac{1264 - 828}{69}; \quad \mathrm{x_N} = \frac{436}{69} = 6{,}32;$$

$$y_M=\frac{y_C+y_N}{2};\quad y_N=2y_M-y_C;\quad y_N=2\cdot\frac{599}{69}-9;$$

$$y_N=\frac{1198-621}{2};\quad y_N=\frac{577}{69}=8,36;$$

$$z_M=\frac{z_C+z_N}{2};\quad z_N=2z_M-z_C;\quad z_N=2\cdot\frac{464}{69}-7;$$

$$z_N=\frac{928-483}{69};\qquad z_N=\frac{445}{69}=6,44.$$

Підставляючи знайдені координати x_N, y_N, z_N замість x, y, z в рівняння площини **(3),** зробимо перевірку, чи належить точка N площині Q:

$$\frac{436-1154-3560}{69}+62=0;\quad \frac{-4278}{69}+62=0;\quad -62+62=0;\ \ 0=0;$$

Отже, знайдена точка $N\in Q$, і має координати:

$$N\left(\frac{436}{69};\frac{576}{69};\frac{445}{69}\right)\text{або } N(6,32;8,32;6,44)$$

4. Для того, щоб знайти відстань від точки C до прямої AB, достатньо обчислити відстань від точки C (12, 9, 7) до точки перетину $M\left(\frac{632}{69},\frac{599}{69},\frac{464}{69}\right)$. Дійсно, тому що пряма AB перпендикулярна до площини Q, то відшукувана відстань дорівнює довжині перпендикуляра $CM(CM\perp AB)$.

Отже, маємо:

$$|CM|=\sqrt{\left(\frac{632}{69}-12\right)^2+\left(\frac{599}{69}-9\right)^2+\left(\frac{464}{69}-7\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{38416+484+361}{69^2}}=\sqrt{\frac{39261}{69^2}}=\frac{198,1439}{69}=2,87\quad \text{лін.од.}$$

Пряма AB, площина Q , точки M та N, пряма BD, площини π_1 та π_2, які її визначають, побудовані на рис.2.

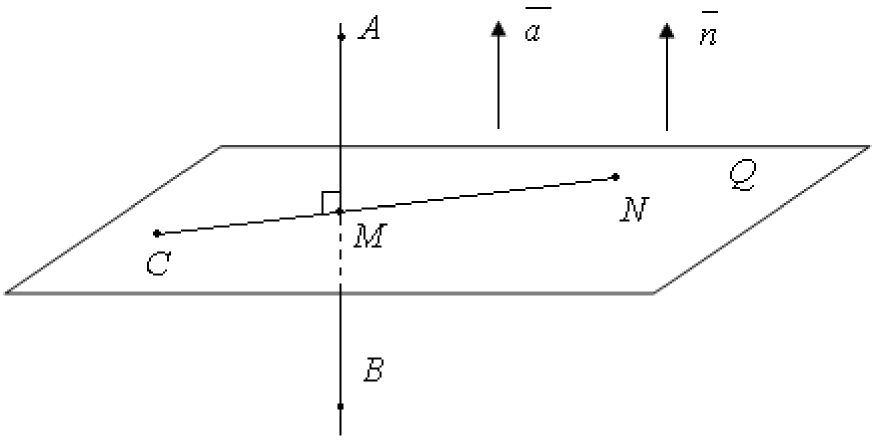


Рис. 2.

ЗАДАЧА 5

У задачах **5.1 – 5.31** задано координати точок $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{M}$.

Потрібно знайти:

1) рівняння площини $\boldsymbol{Q}$, що проходить через три точки $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$;

2) канонічні рівняння прямої $\boldsymbol{MP}$, що проходить через точку $\boldsymbol{M}$, перпендикулярно до площини $\boldsymbol{Q}$, та координати точки $\boldsymbol{N}$, перетину прямої $\boldsymbol{MP}$ і площини $\boldsymbol{Q}$.

3) Відстань від точки $\boldsymbol{M}$ до площини $\boldsymbol{Q}$ та координати точки $\boldsymbol{P}$, що симетрична до точки $\boldsymbol{M}$ відносно площини $\boldsymbol{Q}$;

5.1. **A(β; -2+β; -1+β) B(2+β; 4+β; -2+β) C(3+β; 2+β; β) M(-11+β;8+β; 10+β),**

5.2. **A(-1+β;β; -2+β) B(-2+β; 4+β; -5+β) C(7+β; 2+β; 5+β) M(-6+β; 7+β; 8+β).**

5.3. **A(4+β; β; 3+β) B(-1+β; 2+β; -3+β) C(2+β; β; 1+β) M(-12+β; 1+β; 2+β).**

5.4. **A(8+β; 7+β; 4+β) B(2+β; 1+β; 1+β) C(6+β; 1+β; 5+β) M(-10+β; 8+β; 8+β).**

5.5. **A(5+β; 8+β; β) B(2+β; 4+β; -1+β) C(3+β; β; 2+β) M(-7+β;11+β; 11+β).**

5.6. **A(3+β; -2+β; 3+β) B(6+β; 6+β; 2+β) C(1+β; 4+β; -2+β) M(-12+β; 4+β; 5+β).**

5.7. **A(6+β; 8+β; 1+β) B(9+β; 4+β; 6+β) C(β; 2+β; -2+β) M(-4+β;14+β; 14+β).**

5.8. **A(2+β; 8+β; -3+β) B(10+β; 4+β; 7+β) C(4+β; 8+β; -1+β) M(-8+β;11+β; 13+β).**

5.9.	**A(β; 6+β; -4+β)**	**B(2+β; -4+β; 3+β)**	**C(6+β; 4+β; 3+β)**	**M(-9+β; 4+β; 5+β).**
5.10.	**A(-2+β; β; -3+β)**	**B(3+β; 10+β; -3+β)**	**C(2+β; 6+β; -2+β)**	**M(-5+β;14+β; 16+β).**
5.11.	**A(5+β; 6+β; 1+β)**	**B(4+β; -2+β; 4+β)**	**C(7+β; 8+β; 2+β)**	**M(-6+β;10+β; 11+β).**
5.12.	**A(-3+β; -2+β; 4+β)**	**B(-4+β; 2+β; -7+β)**	**C(5+β; β; 3+β)**	**M(-9+β; 7+β; 8+β).**
5.13.	**A(2+β; -2+β; 1+β)**	**B(-3+β; β; -5+β)**	**C(β; -2+β; -1+β)**	**M(-12+β; 7+β; 8+β).**
5.14	**A(5+β; 4+β; 1+β)**	**B(-1+β; -2+β; -2+β)**	**C(3+β; -2+β; -1+β)**	**M(-9+β; 8+β; 9+β).**
5.15.	**A(3+β; 6+β; -2+β;**	**B(β; 2+β; -3+β)**	**C(1+β; -2+β; β)**	**M(-12+β;13+β;14+β)**
5.16.	**A(1+β; -4+β; 1+β)**	**B(4+β; 4+β; β)**	**C(-1+β; 2+β; -4+β)**	**M(-3+β;13+β; 14+β).**
5.17.	**A(4+β; 6+β; -1+β)**	**B(7+β; 2+β; 4+β)**	**C(-2+β; β; -4+β)**	**M(-5+β;10+β; 12+β).**
5.18.	**A(β; 6+β; -5+β)**	**B(8+β; 2+β; 5+β)**	**C(2+β 6+β; -3+β)**	**M(-8+β; 7+β; 12+β).**
5.19.	**A(-2+β; 4+β; -6+β)**	**B(β; -6+β; 1+β)**	**C(4+β; 2+β; 1+β)**	**M(-2+β;13+β; 12+β).**
5.20.	**A(-4+β; -2+β; -5+β)**	**B(1+β; 8+β; -5+β)**	**C(β; 4+β; -4+β)**	**M(-8+β;12+β; 11+β).**
5.21.	**A(3+β; 4+β; -1+β)**	**B(2+β; -4+β; 2+β)**	**C(5+β; 6+β; β)**	**M(-5+β;15+β; 14+β).**
5.22.	**A(β; 1+β; -1+β)**	**B(-1+β; 5+β; -4+β)**	**C(8+β; 3+β; 6+β)**	**M(-2+β;13+β; 18+β).**
5.23.	**A(5+β; 1+β; 4+β)**	**B(β; 3+β; -2+β)**	**C(3+β; 1+β; 2+β)**	**M(-7+β; 9+β; 15+β).**
5.24.	**A(6+β; 9+β; 1+β)**	**B(3+β; 5+β; β)**	**C(4+β; 1+β; 3+β)**	**M(-4+β;12+β; 15+β).**
5.25.	**A(4+β; -1+β; 4+β)**	**B(7+β; 7+β; 3+β)**	**C(2+β; 5+β; -1+β)**	**M(-9+β;16+β; 14+β).**
5.26.	**A(7+β; 9+β; 2+β)**	**B(10+β; 5+β; 7+β)**	**C(1+β; 3+β; -1+β)**	**M(-10+β;9+β; 12+β).**
5.27.	**A(3+β; 9+β; -2+β)**	**B(11+β; 5+β; 8+β)**	**C(5+β; 9+β; β)**	**M(-7+β;12+β; 12+β).**
5.28.	**A(1+β; 7+β;-3+β)**	**B(3+β; -3+β; 4+β)**	**C(7+β; 5+β; 4+β)**	**M(-6+β;14+β; 18+β).**
5.29.	**A(-1+β; 1+β; -2+β)**	**B(4+β; 11+β; -2+β)**	**C(3+β; 7+β; -1+β)**	**M(-12+β;9+β; 10+β).**
5.30.	**A(6+β; 7+β; 2+β)**	**B(5+β; -1+β; 5+β)**	**C(8+β;9+β; 3+β)**	**M(-11+β;11+β;19+β)**
5.31.	**A(-3+β; -6+β; -5+β)**	**B(-1+β; β; -5+β)**	**C(-1+β; -2+β; -3+β)**	**M(-15+β;4+β; 6+β).**

Приклад виконання задачі 5.31. Нехай $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{4}$, тоді координати точок $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{D}$ будуть такі:

$\boldsymbol{A}$ (1; -2; -1) $\boldsymbol{B}$ (3; 4; -2) $\boldsymbol{C}$ (3; 2; 1) $\boldsymbol{M}$ (-11; 8; 10).

1. Рівняння площини, що проходить через три точки: $\boldsymbol{A}(x_1;y_1;z_1)$, $\boldsymbol{B}(x_2;y_2;z_2)$, $\boldsymbol{C}(x_3;y_3;z_3)$ має вигляд

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (1)$$

Підставивши в **(1)** координати точок A,B,C, дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 3-1 & 4+2 & -2+1 \\ 3-1 & 2+2 & 1+1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0$$

Враховуючи, що всі числа третього рядка кратні числу 2, його можна винести за знак визначника. Розділивши (скоротивши)ліву та праву частини останнього рівняння на таке кратне число (на 2), дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Скористаємося правилом трикутників:

$$\mathbf{6(x-1)+4(z+1)-(y+2)-6(z+1)-2(y+2)+2(x-1)=0;}$$

$$\mathbf{6x-6+4z+4-y-y-6z-6-2y-4+2x-2=0;}$$

$$\mathbf{8x-3y-2z-16=0;}$$

$$(Q) \qquad \mathbf{8x-3y-2z-16=0,} \qquad \mathbf{(2)}$$

де $\bar{n}=\{8;-3;2\}$ – нормальний вектор площини Q.

Перевірка:

т. А : $8\cdot1-3\cdot(-2)-2\cdot(-1)-16=0;\ \ 8+6+2-16=0;\ \ 16-16=0;\ \ 0\equiv0$

точка $A\in Q$;

т. В: $8\cdot3-3\cdot4-2\cdot(-2)-16=0;\ \ 24-12+4-16=0;\ \ 12-12=0;\ 0\equiv0$

точка $B\in Q$;

т. С: $8\cdot3-3\cdot2-2\cdot1-16=0;\ 24-6-2-16=0;\ \ 16-16=0;\ \ 0\equiv0$

точка $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{Q}$;

Отже, загальне рівняння **(2)** площини $\boldsymbol{Q}$ знайдено вірно.

2. Канонічні рівняння прямої в просторі мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad \textbf{(3)}$$

де x_0, y_0, z_0 – координати точки, через яку проходить пряма **(3)**; m, l, p – координати спрямовуючого вектора $\bar{a}$ цієї прямої: $\bar{a} = \{m, l, p\}$. За умовою пряма проходить через точку $M(11;8;10)$та перпендикулярна до площини Q (мал. 3). Отже, підставляючи в **(3)** замість x_0, y_0, z_0 координати точки M, та взявши $\bar{a} = \bar{n} = \{8;-3;-2\}$ $\bar{a} \parallel \bar{n}$, тобто замість m, l, p у **(3)** підставляємо числа 8; -3; -2 (коефіцієнти загального рівняння **(2)** площини Q), дістанемо рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до площини Q:

$$\frac{x + 11}{8} = \frac{y - 8}{-3} = \frac{z - 10}{-2} \qquad \textbf{(4)}$$

3. Складемо систему:

$$\begin{cases} 8x - 3y - 2z - 16 = 0 \\ \dfrac{x + 11}{8} = \dfrac{y - 8}{-3} = \dfrac{z - 10}{-2} \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Запишемо канонічне рівняння прямої в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} 8x - 3y - 2z - 16 = 0 \\ x = 8t - 11, y = -3t + 8, z = -2t + 10 \end{cases} \qquad \textbf{(6)}$$

Підставивши параметричні рівняння в рівняння площини Q, маємо:

$$8(8t-11)-3(-3t+8)-2(-2t+10)-16=0;$$
$$64t-88+9t-24+4t-20-16=0;$$
$$77t-148=0;$$
$$77t=148;$$
$$t=\frac{148}{77}.$$

Підставивши значення параметра t в параметричні рівняння **(6),** маємо координати точки N, точки перетину прямої і площини Q:

$$x=8\cdot\frac{148}{77}-11=\frac{1184}{77}-11=\frac{1184-847}{77}=\frac{337}{77};$$
$$y=-3\cdot\frac{148}{77}+8=-\frac{444}{77}+8=\frac{-444+616}{77}=\frac{172}{77};$$
$$z=-2\cdot\frac{148}{77}+10=-\frac{296}{77}+10=\frac{-296+770}{77}=\frac{474}{77};$$

Отже, точка N має координати $N\left(\frac{337}{77};\frac{172}{77};\frac{474}{77}\right)$.

Відстань від точки до площини є найкоротшою, тобто дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини.

Тому що точка M розташована на прямій **(4)**, яка перпендикулярна до площини Q і перетинається з площиною Q в точці N, то для знаходження відстані від точки M до площини Q достатньо знайти відстань між двома точками M та N:

$$|MN|=\sqrt{\left(\frac{337}{77}+11\right)^2+\left(\frac{172}{77}-8\right)^2+\left(\frac{474}{77}-10\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{(337+847)^2}{77^2}+\frac{(172-616)^2}{77^2}+\frac{(474-770)^2}{77^2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{1401856+197136+87616}{77^2}}=\frac{1298,695}{77}=18,866$$ ë³í .î ä.

Отже, $|MN|\approx 16,87$ лінійних одиниць.

Знайдемо точку N - точку перетину прямої **(4)** та площини Q.

Тому, що пряма $MN\,(4)$ перпендикулярна до площини Q, то потрібна точка P, яка розташована симетрично до точки M, відносно площини Q, знаходиться на прямій MN (рис.3). Крім того, точка N є серединою відрізка MP. Використовуючи формули для знаходження координат точки, що ділить відрізок (у просторі) на дві рівні частини, знаходимо координати потрібної точки P:

а) $x_N = \dfrac{x_M + x_P}{2}$; $x_P = 2x_N - x_M$;

$$x_P = 2\cdot \frac{337}{77} + 11 = \frac{674+847}{77} = \frac{1521}{77} = 19,753;$$

$$y_N = \frac{y_M + y_P}{2}; \quad y_P = 2y_N - y_M;$$

$$y_P = 2\cdot\frac{172}{77} - 8 = \frac{344-616}{77} = -\frac{272}{77} = 3,532;$$

$$z_N = \frac{z_M + z_P}{2}; \quad z_P = 2z_N - z_M;$$

$$z_P = 2\cdot\frac{474}{77} - 10 = \frac{948-770}{77} = \frac{178}{77} = 2,312;$$

Перевірка :

$$\frac{\frac{1521}{77}+11}{8} = \frac{-\frac{272}{77}-8}{-3} = \frac{\frac{178}{77}-10}{-2};$$

$$\frac{1521+847}{8\cdot 77} = \frac{-272-616}{(-3)\cdot 77} = \frac{178-770}{(-2)\cdot 77};$$

$$\frac{2368}{8\cdot 77} = \frac{-888}{(-3)}\cdot 77 = \frac{-592}{(-2)\cdot 77} = \frac{296}{77} = t; \qquad \frac{296}{77} = \frac{296}{77} = \frac{296}{77};$$

Точка $P \in MN$.

Отже, координати точки P такі: $P\left(\dfrac{1521}{77}; \dfrac{-272}{77}; \dfrac{178}{77}\right)$ або $P(19,75; -3,53; 2,31)$.

Площина **Q**, пряма **MN**, точки **P** та **N** показані на рис.3.

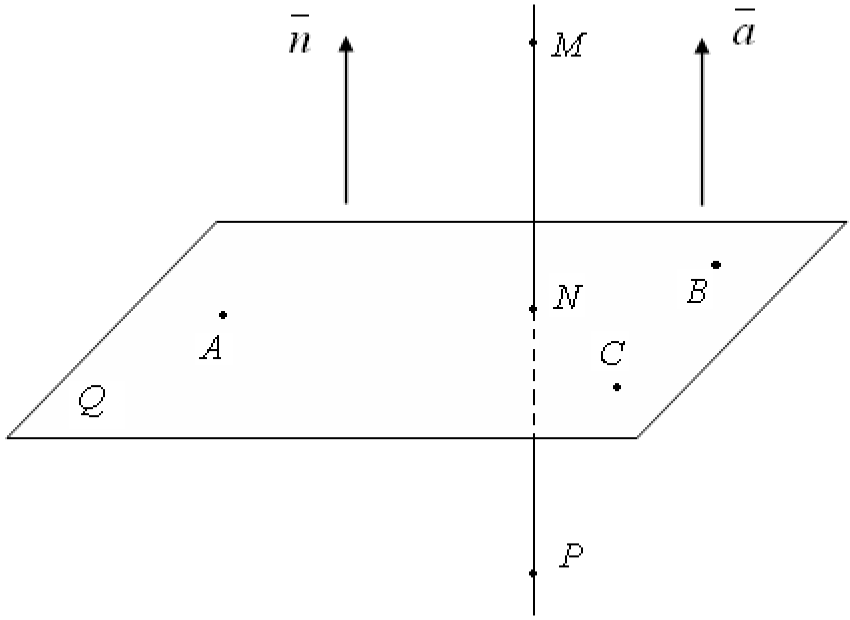


рис. № 3

Похідна та диференціал функції

<u>Похідні основних елементарних функцій</u>

$y = x$	$y' = 1$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y=\ln x \qquad y'=\frac{1}{x} \qquad\qquad y=\arccos x \quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\log_a x \qquad y'=\frac{1}{x\ln a} \qquad\qquad y=arctgx \quad y'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$y=\frac{1}{x} \qquad y'=-\frac{1}{x^2} \qquad\qquad y=arcctgx \quad y'=-\frac{1}{1+x^2}$$

Правила диференціювання

Нехай задано диференційовані функції $u=u(x)$ та $v=v(x)$.

Є такі правила:

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій:

$$(u\pm v)=u'\pm v' \tag{1}$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$(uv)'=u'v+uv' \tag{2}$$

Наслідок 1. Постійний множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)'=cu' \tag{3}$$

Наслідок 2. $(uv\omega)'=u'v\omega+uv'\omega+uv\omega'$ **(4)**

3. Похідна частки: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, v\neq 0$ **(5)**

Наслідок 1. $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$ **(6)**

Наслідок 2. $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2}$ **(7)**

Похідна складеної та наявної функції

Нехай змінна y є функцією від змінної u: $y = f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної $x: u = \varphi(x)$. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ - диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складеної функції існує та дорівнює похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну самого проміжного аргументу за незалежною змінною x, тобто:

$$y' = f'(u)u' = f'(\varphi(x))\varphi'(x) \qquad \textbf{(8)}$$

Розглянемо диференціювання наявної функції, що задана рівнянням $F(x;y) = 0$. Для знаходження похідної функції y, заданої наявно, треба продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, а потім з отриманого рівняння знайти похідну y'.

Логарифмічне диференціювання функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$

Розглянемо визначення похідної функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Для цього виконаємо такі кроки:

Крок 1: Прологарифмуємо спочатку дві частини рівності:

$$\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)}; \qquad \textbf{(9)}$$

Крок 2. За властивістю логарифма: $\ln y = \varphi(x)\ln f(x)$; **(10)**

Крок 3. Диференціюючи обидві частини, отримаємо:

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)(\ln f(x))' = \varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)} \qquad \textbf{(11)}$$

Крок 4. Помножимо ліву і праву частину останньої рівності на y:

$$y = y\left(\varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

Крок 5. Замінимо в правій частині рівності y на $f(x)^{\varphi(x)}$:

$$y = f(x)^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x) f'(x)}{f(x)}\right) \qquad \textbf{(13)}$$

або: $y = \varphi(x) f'(x) f(x)^{\varphi(x)-1} + f(x)^{\varphi(x)} \ln f(x)\varphi'(x)$

Покажемо спосіб відшукування похідної функції, що задана параметрично. Нехай y як функція x задана параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ **(14)**

Похідну функцію що задана параметрично, знаходимо: $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ **(15)**

ЗАДАЧА 6.

У задачах **6.1 – 6.31** знайти похідні функцій: у прикладах **1), 2), 3)** – користуючись властивостями похідної та формулою похідної складеної функції;

у прикладі **4)** – використовуючи метод знаходження похідної функції, заданої неявно $f(x;y) = 0$;

у прикладі **5)** – використовуючи метод логарифмічного диференціювання;

у прикладі **6)** – використовуючи формулу знаходження похідної функції, заданої параметрично.

6.1

1) $y = \dfrac{3\beta x - 4}{\sqrt{x^{3\beta} + 3\beta x - 2}}$ **2)** $y = \left(3^{\sin 2\beta x} - \cos^2 2\beta x\right)^{3\beta}$

4) $x^{2\beta}+y^{2\beta}-2\beta y=0$

3) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-\beta x^2}$

5) $y=(2\beta x+3)^{tg\beta x}$

6) $\begin{cases} x=\beta t-\ln\beta t \\ y=3\beta t^2-2\beta t^3 \end{cases}$

6.2.

1) $y=\dfrac{\beta x+3}{\sqrt{x^{3\beta}-6\beta x-9}}$

2) $y=\ln tgx^{3\beta}$

3) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3\beta x^2+2}{x^{3\beta}+2x}}$

4) $\sin\beta x-arctg\beta y=0$

5) $y=(1+\cos\beta x)^{x^2}$

6) $\begin{cases} x=\arcsin\beta t \\ y=3\beta t-t^{3\beta} \end{cases}$

6.3.

1) $y=\dfrac{2\beta x}{\sqrt{x^{3\beta}-5x^{2\beta}+3}}$

2) $\left(3^{\cos 3\beta x}+\sin 3\beta x\right)^{3\beta}$

4) $e^{\beta x}-\beta x-y^{3\beta}=0$

3) $y=arctg\dfrac{2\beta x+1}{2\beta x-1}$

5) $y=\left(x^{3\beta}+2\right)^{\sin\beta x}$

6) $\begin{cases} x=t-\sin\beta t \\ y=\sin^3\beta t \end{cases}$

6.4.

1) $y=\dfrac{3\beta x}{\sqrt{x^{3\beta}-4x^2+1}}$

2) $y=\left(2^{\arcsin\beta x}+\arccos\beta x\right)^{4\beta}$

4) $x+\ln\beta x+\sqrt{3+2\beta y}=0$

3) $y=\ln arctg\sqrt{\beta x-1}$

5) $y=\left(x^{2\beta}+1\right)^{arctg\beta x}$

6) $\begin{cases} x=a(t-\sin\beta t) \\ y=a(1-\cos\beta t) \end{cases}$

6.5.

1) $y=\dfrac{4\beta x}{\sqrt{x^{3\beta}+5\beta x^2-2}}$

2) $y=\left(5^{tg2\beta x}-x^{2\beta}\right)^{3\beta}$

3) $y=\arcsin\sqrt{1-4\beta x^2}$

4) $ctg\beta x+\ln\sqrt{4\beta y+1}=0$

5) $y=\left(\arcsin\beta x\right)^{\sqrt{1-\beta x^{2}}}$

6) $\begin{cases} x=a\cos^{2}\beta t \\ y=b\sin^{3}\beta t \end{cases}$

6.6.

1) $y=e^{arctg\sqrt{2\beta x-1}}$

2) $y=\left(4\beta^{tg\sqrt{\beta x}}+\sqrt{\beta x}\right)^{3\beta}$

3) $y=\dfrac{4\beta x+1}{\sqrt{x^{2\beta}-4\beta x-2}}$

4) $e^{\beta x}-x^{2\beta}-e^{\beta y}=0$

5) $y=\left(x+\sin\beta x\right)^{x^{3\beta}}$

6) $\begin{cases} x=t^{2\beta}+\ln t \\ y=2\beta t^{3\beta}+\beta t \end{cases}$

6.7.

1) $y=\dfrac{2\beta x-3}{\sqrt{x^{2\beta}+4\beta x-3}}$

2) $y=\left(3^{arctg\,2\beta x}-\ln\left(1+4\beta x^{2}\right)\right)^{4\beta}$

4) $2\beta x-\sin 2\beta x-y^{2\beta}=0$

3) $y=\dfrac{2\beta x}{\sqrt{x^{3\beta}-5x^{2\beta}+3}}$

5) $y=\left(tg2\beta x\right)^{tg2\beta x}$

6) $\begin{cases} x=a\left(\sin\beta t-t\cos\beta t\right) \\ y=a\left(\cos\beta t+t\sin\beta t\right) \end{cases}$

6.8.

1) $y=\dfrac{3\beta x-8}{\sqrt{x^{2\beta}+3\beta x-4}}$

2) $y=\left(2^{\cos^{2}\beta x}+\sin^{2}\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=e^{\arcsin\sqrt{1-\beta x}}$

4) $arctg\beta x-\ln\sqrt{2\beta y+3}=0$

5) $y=\left(\beta x+1\right)^{arctg\sqrt{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=arctg3\beta t \\ y=\ln\left(1+9\beta t^{2}\right) \end{cases}$

6.9.

1) $y=\ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{\beta x}}$

2) $y=\left(4^{\arccos 2\beta x}-\sqrt{1-4\beta x^{2}}\right)^{3\beta}$

3) $y=\dfrac{2\beta x^{3}+5}{\sqrt{x^{4\beta}+2\beta x}}$

4) $tg\beta x-\sqrt{4\beta y+5}+2=0$

5) $y=\left(ctg\beta x\right)^{\cos\beta x}$

6) $\begin{cases} x=2\beta t-\sin 2\beta t \\ y=8\sin^3\beta t \end{cases}$

6.10.

1) $y=\dfrac{x^{3\beta}-10}{\sqrt{x^{4\beta}-3\beta x}}$

2) $x\ln\beta x-e^{\beta y}+1=0$

3) $y=\ln tg\dfrac{1}{\sqrt{\beta x}}$

4) $y=\left(6^{arcctg 3\beta x}+arcctg 3\beta x\right)^{4\beta}$

5) $y=\left(x+\ln\beta x\right)^{\frac{1}{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=arctg\beta x \\ y=\dfrac{b}{\cos\beta t} \end{cases}$

6.11

1) $y=\dfrac{3\beta x+2}{\sqrt{x^{2\beta}+3\beta x+1}}$

2) $y=\left(2^{tg\beta x}-\cos 3\beta x\right)^{5\beta}$

3) $y=arctg\dfrac{2\sqrt{\beta x}}{1-\beta x}$

4) $x^{2\beta}+\ln\beta x+\sqrt{5+\beta y}=0$

5) $y=\left(\sqrt{\beta x}+\dfrac{1}{\sqrt{\beta x}}\right)^{x}$

6) $\begin{cases} x=\arccos\beta t \\ y=\beta t-t^{3\beta} \end{cases}$

6.12.

1) $y=e^{arctg\sqrt{\beta x-1}}$

2) $y=\left(3^{\cos 2\beta x}+\cos^2\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=\left(\arcsin\sqrt{\beta x}\right)^{2\sqrt{\beta x}}$

4) $e^{2\beta x}-x^{3\beta}-e^{2\beta y}=0$

5) $y=\left(1+\dfrac{1}{\beta x}\right)^{x^{2\beta}}$

6) $\begin{cases} x=t^{2\beta}-2\beta t \\ y=t^{2\beta}+2\beta t \end{cases}$

6.13.

1) $y=\dfrac{2\beta x-7}{\sqrt{x^{2\beta}+2\beta x-14}}$

2) $y=\left(5^{ctg 2\beta x}+\cos 2\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\beta x}$

4) $tg\beta x+\ln\sqrt{3\beta y+2}=0$

5) $y=\left(tg2\beta x\right)^{\cos 2\beta x}$

6) $\begin{cases} x=a\cos\beta\varphi \\ y=b\sin\beta\varphi \end{cases}$

6.14.

1) $y=\dfrac{3\beta x-4}{\sqrt{x^{2\beta}+9\beta x-6}}$

2) $y=\left(5^{\sin\beta x}-\cos 2\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=\ln\cos e^{-\beta x}$

4) $e^{2\beta x}-2\beta x-y^{4\beta}=0$

5) $y=\left(1-x^{2\beta}\right)^{\arcsin\beta x}$

6) $\begin{cases} x=a\cos^3\beta\varphi \\ y=b\sin^3\beta\varphi \end{cases}$

6.15.

1) $y=\dfrac{5\beta x+4}{\sqrt{x^{2\beta}-5\beta x-2}}$

2) $y=\left(2^{\arcsin\beta x}-\sqrt{1-x^2}\right)^{5\beta}$

3) $y=e^{arctg\sqrt{\beta x^2-1}}$

4) $x^{3\beta}+y^{3\beta}-3\beta y=0$

5) $y=\left(ctg4\beta x\right)^{\sin 4\beta x}$

6) $\begin{cases} x=a\left(\varphi-\sin\beta\varphi\right) \\ y=a\left(1-\cos\beta\varphi\right) \end{cases}$

6.16.

1) $y=\dfrac{3\beta x-1}{\sqrt{x^{2\beta}+9\beta x-1}}$

2) $y=\left(3^{arctg2\beta x}+\ln\left(1+\beta x^2\right)\right)^{4\beta}$

3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2\beta x}}$

4) $2\beta x-\sin 3\beta x-y^{2\beta}=0$

5) $y=\left(\sin 2\beta x\right)^{tg2\beta x}$

6) $\begin{cases} x=1-t^{2\beta} \\ y=t-t^{3\beta} \end{cases}$

6.17.

1) $y=\dfrac{2\beta x-3}{\sqrt[3]{x^{3\beta}-8\beta x+4}}$

2) $y=\left(4^{tg2\beta x}-tg2\beta x\right)^{5\beta}$

3) $y=\ln arcctg\dfrac{1}{\beta x}$

4) $x\ln\beta x-e^{2\beta y}+7=0$

5) $y=\left(x^{4\beta}+1\right)^{\frac{1}{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=\dfrac{\beta t+1}{t} \\ y=\dfrac{\beta t-1}{t} \end{cases}$

6.18.

1) $y=\dfrac{2\beta x+1}{\sqrt[3]{x^{3\beta}+6\beta x+1}}$

2) $y=\left(5^{tg^2\beta x}+\cos^2\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=e^{\arccos\sqrt{1-\beta x^2}}$

4) $\dfrac{(\beta x)^2}{a^2}+\dfrac{(\beta y)^2}{b^2}=1$

5) $y=(\cos 2\beta x)^{tg 2\beta x}$

6) $\begin{cases} x=\ln\left(1+\beta t^2\right) \\ y=t-arctg\beta t \end{cases}$

6.19.

1) $y=\dfrac{4\beta x+3}{\sqrt[3]{x^{3\beta}-4\beta-1}}$

2) $y=\left(2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\right)^{4\beta}$

3) $y=\ln tge^{\sqrt{\beta x}}$

4) $\dfrac{(\beta x)^2}{a^2}-\dfrac{(\beta y)^2}{b^2}=1$

5) $y=(ctg\beta x)^{\sin\beta x}$

6) $\begin{cases} x=\varphi(1-\sin\beta\varphi) \\ y=\varphi\cos\beta\varphi \end{cases}$

6.20.

1) $y=\dfrac{5\beta x-6}{\sqrt[3]{x^{3\beta}+5\beta x-2}}$

2) $y=\left(3^{ctg\beta x}+\ln\sin\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=e^{arctg\sqrt{4\beta x-1}}$

4) $2\sin\beta x-\arccos 2\beta y=0$

5) $y=\left(\sqrt{\beta x}+\dfrac{1}{\sqrt{\beta x}}\right)^{x}$

6) $\begin{cases} x=e^{2\beta t}\sin\beta t \\ y=e^{2\beta t}\cos\beta t \end{cases}$

6.21.

1) $y=\dfrac{2\beta x^{\beta}}{\sqrt{x^{3\beta}-\beta x+5}}$

2) $y=\left(7^{\sin 2\beta x}-\cos^2 3\beta x\right)^{2\beta}$

3) $y=5^{x\sqrt{\beta x}}$

4) $e^{4\beta x}-x^{3\beta}-e^{4\beta y}=0$

5) $y=\sin\beta x^{\cos\beta x}$

6) $\begin{cases} x=t-t^{4\beta} \\ y=t^2-t^{3\beta} \end{cases}$

6.22.

1) $y=\dfrac{3\beta x^2-7}{\sqrt{x^{3\beta}+5\beta x^2-2}}$

2) $y=\left(2^{\arcsin\beta x}+arctg2\beta x\right)^{4\beta}$

3) $y=e^{\sin^2 3\beta x}$

4) $x^{2\beta}\ln\beta x-e^{3\beta y}+5=0$

5) $y=x^{\ln\beta x}$

6) $\begin{cases} x=3\cos\beta t \\ y=4\sin\beta t \end{cases}$

6.23.

1) $y=\dfrac{5\beta x-2}{\sqrt{x^{2\beta}-3\beta x+4}}$

2) $y=\left(2\beta^{\arcsin 2\beta x}-\sqrt{1-3x^2}\right)^{3\beta}$

3) $y=\ln\arcsin\dfrac{1}{\beta x}$

4) $x^{5\beta}+y^{5\beta}-2\beta y=0$

5) $y=\left(\cos 2\beta x\right)^{\sin 2\beta x}$

6) $\begin{cases} x=t^{3\beta}+1 \\ y=t^{2\beta}+t+1 \end{cases}$

6.24.

1) $y=\dfrac{\beta x^3+8}{\sqrt{x^{2\beta}+3x}}$

2) $y=\left(3\beta^{arctg 2\beta x}-\ln\left(1+x\right)\right)^{2\beta}$

3) $y=\ln ctg\dfrac{1}{\beta x}$

4) $e^{4\beta x}-4\beta x-y^{4\beta}=0$

5) $y=\left(x+\cos\beta x\right)^{x^{2\beta}}$

6) $\begin{cases} x=3\beta t^2 \\ y=6\beta t-t^2 \end{cases}$

6.25.

1) $y=\dfrac{2\beta x-3}{\sqrt{x^{2\beta}+4\beta x-3}}$

2) $y=\left(4\beta^{tg\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^{2\beta}$

3) $y=e^{arctg 2\beta x}$

4) $5\beta x-\sin 5\beta x-y^{5\beta}=0$

5) $y=\left(x^{3\beta}+2\right)^{\frac{1}{\sqrt{\beta x}}}\sqrt{a^2+b^2}$

6) $\begin{cases} x=\varphi-\sin\beta\varphi \\ 1-\cos\beta\varphi \end{cases}$

6.26.

1) $y=\dfrac{3\beta x+1}{\sqrt[3]{x^{3\beta}+9\beta x+7}}$

2) $y=\left(3\beta^{\arcsin\sqrt{\beta x}}-\sqrt{1-x}\right)^{3\beta}$

3) $y=2\beta^{x\ln\beta x}$

4) $y^{2\beta}-2\beta xy+b^{2\beta}=0$

5) $y=(\sin 3\beta x)^{ctg 3\beta x}$

6) $\begin{cases} x=t^{3\beta}+1 \\ y=t^{2\beta} \end{cases}$

6.27.

1) $y=\ln\sin 2\beta^{x}$

2) $y=\left(3\beta^{ctg\beta x}-\sqrt{1-x^2}\right)^{4\beta}$

3) $y=\dfrac{5\beta x-8}{\sqrt[3]{x^{3\beta}-5\beta x+2}}$

4) $x^{3\beta}+y^{3\beta}-3\beta axy=0$

5) $y=(x+1)^{\arcsin\sqrt{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=t^{2\beta}-2\beta t \\ y=t^{2\beta}+2\beta t \end{cases}$

6.28.

1) $y=\dfrac{2\beta x^3-4}{\sqrt{x^4+2\beta x}}$

2) $y=\left(6^{arctg 2\beta x}+arctg 3\beta x\right)^{4\beta}$

3) $y=\arccos\sqrt{1-4\beta x^2}$

4) $y=\cos\beta(x+y)$

5) $y=(x+\ln\beta x)^{\frac{1}{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=\cos\beta t \\ y=t+2\sin\beta t \end{cases}$

6.29.

1) $y=\dfrac{3\beta x-1}{\sqrt{x^{2\beta}-3\beta x-2}}$

2) $y=\left(3^{\sin\beta x}-\sin^3\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=3\beta^{\arcsin\sqrt{1-x}}$

4) $y=1+\beta xe^{\beta y}$

5) $y=(tg\beta x)^{\sin\beta x}$

6) $\begin{cases} x=t^{3\beta}-3\beta t \\ y=t^{3\beta}+3\beta t \end{cases}$

6.30

1) $y=\dfrac{5\beta x+2}{\sqrt{x^{2\beta}+5\beta x-1}}$

2) $y=\left(3^{\cos 2\beta x}+\cos^3 2\beta x\right)^{3\beta}$

3) $y=e^{arctg\sqrt{1-\beta x}}$

4) $2\beta^x+2\beta^y=2\beta^{x+y}$

5) $y=\left(\arcsin\sqrt{\beta x}\right)^{\sqrt{\beta x}}$

6) $\begin{cases} x=2\beta e^t \\ y=e^{-\beta t} \end{cases}$

6.31

1) $y=\dfrac{\beta x+1}{\sqrt{x^3+5\beta x\;-2}}$

2) $y=\left(2\beta^{\arcsin}+\sin^{\beta} 3\beta x\right)^{3\beta}$

4) $x-y=\arcsin\beta x-\arcsin\beta y$

3) $y=\ln tge^{\sin\beta x}$

5) $y=\left(1-\sin 2\beta x\right)^{x^{3\beta}}$

6) $\begin{cases} x=\dfrac{3\beta at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3\beta at^2}{1+t^3} \end{cases}$

<u>**Приклад виконання ЗАДАЧІ 6.31**</u> Нехай $\beta=4$, тоді функція **(1)** запишеться: $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Оскільки функція y являє собою частку від ділення функції чисельника $u=x+1$ на функцію знаменника $v=\sqrt{x^3+5x^2-2}$, то похідну функцію y' запишемо за формулою похідної частки:

$$y'=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}\right)'=\frac{(x+1)'\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)-\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)'}{\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^3+5x^2-2}-(x+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}\left(x^3+5x^2-2\right)'}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^3+5x-2}-\dfrac{(x+1)\left(3x^2+10x\right)}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\left(x^3+5x^2-2\right)-\left(3x^3+10x^2+3x^2+10x\right)}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{2\left(x^3+5x^2-2\right)-3x^3-13x^2-10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=\frac{2x^3+10x^2-4-3x^3-13x^2-10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=$$

$$=\frac{-x^3-3x^2-10x-4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=-\frac{x^3+3x^2+10x+4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x-2}}$$

Нехай $\beta=2$,тоді функцію **2)** запишемо: $y=\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6$

Функція y - складена. Зовнішня функція її – степенева, а внутрішня функція основи – це сума двох у свою чергу складених функцій. Зовнішня функція першої з них – показникова, а внутрішня – обернено тригонометрична.

Зовнішня функція другої – степенева, а внутрішня функція – тригонометрична.

За правилом взяття похідної від складеної функції матимемо:

$$y=f\left(g(x)\right)$$

$$y'=f'\left(g(x)\right)g'(x)$$

Беремо похідну від зовнішньої функції, а далі від внутрішньої:

$$y'=\left(\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6\right)'=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)'=$$

$$6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\left(4^{\arcsin x}\right)'+\left(\sin^2 6x\right)'\right)=$$

$$=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(4^{\arcsin x}\ln 4\left(\arcsin x\right)'+2\sin 6x\left(\sin 6x\right)'\right)=$$

$$6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}}+12\sin 6x\cos 6x\right)$$

Нехай $\beta = 3$ тоді функція **(3)** запишеться: $y=\ln tge^{\sin 3x}$

Функція y являє собою складену з п'яти елементарних функцій. За правилом взяття похідної від складеної функції беремо похідну від зовнішньої функції, а потім від внутрішньої.

$$y'=\left(\ln tge^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\left(tge^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}\left(e^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}e^{\sin 3x}\left(\sin 3x\right)'=$$

$$=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}e^{\sin 3x}\cos 3x\left(3x\right)'=\frac{3e^{\sin 3x}\cos 3x}{\sin e^{3x}\cos e^{3x}}$$

Нехай $\beta = 4$ тоді функцію **4)** запишемо $x-y=\arcsin 4x-\arcsin 4y$

Подамо функцію y у вигляді $f\left(x;y\right)=0$: $x-y-\arcsin 4x+\arcsin 4y=0$. Якщо незалежна змінна x та функція y зв'язані рівнянням виду $F\left(x;y\right)=0$, що не розв'язане відносно y, то y називається неявною функцією x. Незважаючи на те, що рівняння $f\left(x;y\right)=0$ не розв'язне відносно y , є можливість знайти похідну від y за x. Метод знаходження похідної полягає в тому, що обидві частини рівняння $f\left(x;y\right)=0$ диференціюються за x з урахуванням того, що y є функцією x, і з отриманого рівняння визначається y'.

Диференціюємо за x обидві частини рівності та враховуємо те, що обидві обернено тригонометричні функції є складеними:

$$\left(x\right)'-\left(y\right)'-\left(\arcsin 4x\right)'+\left(\arcsin 4y\right)'=0$$

$$1-y'-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+\frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}}=0$$

$$1-y'-\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}(4x)'+\frac{1}{\sqrt{1-(4y)^2}}(4y)'=0$$

$$\frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}}-y'=\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}-1$$

Перенесемо складові, що не містять y', у праву частину рівності:

$$y'\left(\frac{4-\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16y^2}}\right)=\frac{4-\sqrt{1-16x^2}}{\sqrt{1-16x^2}}$$

Винесемо y' у лівій частині рівняння та зведемо до спільного знаменника в обох частинах рівняння.

Розв'яжемо це рівняння відносно y'

$$y'\left(\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}}-1\right)=\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}-1$$

$$y'=\frac{\dfrac{4-\sqrt{1-16x^2}}{\sqrt{1-16x^2}}}{\dfrac{4-\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16y^2}}}=\frac{\left(4-\sqrt{1-16x^2}\right)\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16x^2}\left(4-\sqrt{1-16y^2}\right)}$$

Нехай $\beta = 5$, тоді функція **5)** запишеться: $y=(1-\sin 10x)^{x^{15}}$

Якщо треба продиференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого містить добутки, часто є вигідним обидві частини даного виразу спочатку прологарифмувати за основою e, а потім уже приступити до диференціювання. Цей метод дістав назву логарифмічного диференціювання. До цього методу завжди звертаються, коли треба продиференціювати функцію виду

$$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

тобто коли і основа степеня $f(x)$ і його показник $\varphi(x)$ є функціями від x. Саме такого виду маємо функцію, похідну якої треба знайти. В загальному вигляді задача диференціювання цієї функції розв'язується так:

$$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$$

Прологарифмуємо за основою **e** обидві частини рівності й отримаємо

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$$

Тепер, вважаючи $\ln y$ складеною функцією змінної x, знайдемо похідну обох частин рівності, продиференціювавши праву частину як добуток.

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на y і, враховуючи, що

$$y=(f(x))^{\varphi(x)},\quad \text{отримаємо}\quad y'=(f(x))^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Скориставшись кроками загального розв`язку для нашої функції, маємо:

$$y=\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}$$

$$\ln y=\ln\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}$$

$$\ln y=x^{15}\ln\left(1-\sin 10x\right)$$

$$y'=\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}\left(15x^{14}\ln\left(1-\sin 10x\right)-\frac{10x^{15}\cos 10x}{1-\sin 10x}\right)$$

$$\frac{1}{y}y'=15x^{14}\ln\left(1-\sin 10x\right)+x^{15}\frac{1}{1-\sin 10x}\left(1-\sin 10x\right)'$$

Нехай $\beta = 6$, тоді функцію **6)** запишемо: $\begin{cases} x = \dfrac{18at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{18at^2}{1+t^3} \end{cases}$

Похідну функції, заданої параметрично, знаходимо за формулою:

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Знайдемо y', продиференціювавши функцію y за змінною t.

$$y = \frac{18at^2}{1+t^3}$$

$$y' = \left(\frac{18at^2}{1+t^3}\right)' = 18a\left(\frac{t^2}{1+t^3}\right)' = \frac{18a\left(\left(t^2\right)'\left(1+t^3\right) - t^2\left(1+t^3\right)'\right)}{\left(1+t^3\right)^2} =$$

$$= \frac{18a\left(2t\left(1+t^3\right) - 3t^4\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{18at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

Знайдемо x', продиференціювавши x за змінною t.

$$x' = \left(\frac{18at}{1+t^3}\right)' = \frac{18a\left(t'\left(1+t^3\right) - t\left(1+t^3\right)'\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

$$= \frac{18a\left(\left(1+t^3\right) - 3t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{18a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

Скористуємося формулою для знаходження похідної функції, заданої параметрично. Маємо:

$$y'_x = \frac{\dfrac{18at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}}{\dfrac{18a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}} = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$$

Невизначений та визначений інтеграл

Основним завданням диференціального числення є знаходження похідної або диференціала заданої функції.

Інтегральне числення розв’язує обернену задачу – знаходження функції за її похідною або диференціалом. Тобто для заданої функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$. Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на деякому проміжку називають невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ та позначають $\int f(x)dx$, де $\int$ - знак інтеграла; $f(x)$ - підінтегральна функція; $f(x)dx$ - підінтегральний вираз. Процес відшукання первісних функцій $F(x)$ тобто знаходження невизначеного інтеграла від деякої функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї частини функції.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \tag{1}$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів.

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx \tag{2}$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx \tag{3}$$

4. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції: $$\int dF(x) = F(x) + C \quad \textbf{(4)}$$

5. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \quad \textbf{(5)}$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \textit{крім} \;\; x = 0$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \;\; a > 0, a \neq 1$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування здійснюється у тих випадках, якщо заданий інтеграл близький до табличного або отримується у вигляді, близькому до табличного за допомогою незначних перетворень (використання властивостей степеня, зведення подібних додатків, внесення постійного множника за знак інтеграла).

Розглянемо приклади:

$$\int \sqrt[3]{x}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Інтегрування за допомогою розкладання

Інтегрування, що здійснюється тільки за допомогою властивостей:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

та $$\int \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx,$$

що дає змогу звести заданий інтеграл до табличного вигляду, називають інтегруванням за допомогою розкладання. Якщо відбувається інтегрування окремих додатків, то не обов'язково записувати для кожного з них постійну C, звичайно у кінці розв'язку записують одну загальну постійну C.

Інтегрування методом підстановки (заміни змінної)

Метод інтегрування, який називають методом підстановки (заміни змінної), полягає у використанні формули:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad \textbf{(6)}$$

Формула **(6)** означає, що знаходження $\int f(x)dx$ зводиться до знаходження іншого інтеграла , в якому підінтегральний вираз залежить від змінної t. Його отримують за формулою $x=\varphi(t)$. Однак загального правила щодо вибору функції $\varphi(t)$ немає. Завдяки правильному вибору цієї функції новий інтеграл може бути простішим або навіть табличним. В останньому випадку виконують інтегрування та знаходять первісну як функцію змінної t. Після заміни цієї змінної її виразом через x отримують шуканий інтеграл.

Наприклад:

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \begin{bmatrix} 1-2x=t & dx=-\frac{1}{2}dt \\ -2x=t-1 & \\ 2x=1-t & \\ x=\frac{1-t}{2} & \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{t}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$$

$$\int xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} -x^2=t \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int e^t\left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t+C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

Інтегрування частинами

Нехай $u=u(x)$ та $v=v(x)$ - диференційовані функції від x. Згідно з властивістю диференціала добутку двох функцій маємо:

$d(uv)=vdu+udv$,

звідки: $udv=d(uv)-vdu$.

Інтегруючи праву та ліву частину останньої рівності та враховуючи, що $\int d(uv)=uv$, маємо інтегрування частинами:

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad \textbf{(7)}$$

Для використання формули інтегрування частинами підінтегральний вираз потрібно розбити на два співмножники. Один з них позначають через u, а останню частину відносять до іншого співмножника; її позначають через dv. Потім за допомогою диференціювання знаходять du та інтегруванням – функцію v: $du=u'dx$ та $v=\int dv+C$. За u слід брати таку частину підінтегрального виразу, що диференціюванням спрощується, а за dv - таку, що легко інтегрується.

За інтегрування dv для v отримують нескінчену множину первісних, зазвичай вибирають ту, в якій довільна постійна $C=0$, тобто її не вводять у розв’язок узагалі. Інколи метод інтегрування частинами слід використовувати послідовно кілька разів.

Наприклад:

1. $$\int xe^{-2x}dx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-2xdx} & v=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}dx\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

2. $\int x\ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\int xdx =$

$= \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

<u>Формула Ньютона-Лейбніца</u>

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та $F(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a;b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(8)}$$

Слід зазначити, що знаходження визначених інтегралів з використанням формули Ньютона-Лейбніца **(8)** здійснюється за два кроки: спочатку, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегрального виразу $f(x)$. Потім використовують власне формулу Ньютона-Лейбніца – знаходять приріст первісної, що дорівнює шуканому інтегралу.

Тому введемо позначення приросту первісної, яке зручно використовувати:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(9)}$$

Для використання формули Ньютона-Лейбніца можна використовувати будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад ту, що має найпростіший вигляд при $C = 0$. Звичайно так і здійснюють обчислення визначеного інтеграла.

Наприклад:

$$\int_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 2^{3x-4}dx = \left(\frac{1}{3\ln 2}2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(2^{3x-4}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2} \approx 1{,}6831$$

ЗАДАЧА 7.

У задачах **7.1 – 7.31** знайти невизначені та визначені інтеграли:

у прикладі **1)** - користуючись властивостями інтегралів та таблицею основних інтегралів,

у прикладі **2)** – використовуючи метод заміни змінної у невизначеному інтегралі,

у прикладі **3)** – використовуючи формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі,

у прикладі **4)** – використовуючи формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

у прикладах **1),2),3)** виконати перевірку диференціюванням.

7.1 1) $\int(\beta x^3 - \sqrt[2\beta]{x} + \frac{\beta}{x^{2\beta}})dx$ 2) $\int\frac{dx}{1-2\beta x}$

3) $\int \ln\beta x dx$ 4) $\int_\beta^{2\beta}\ln(3x-2)\,dx$

7.2 1) $\int\left(\cos\beta x - \beta e^{\beta x}\right)\,dx$ 2) $\int\frac{\cos 2\beta x}{\sin\beta x\cos\beta x}\,dx$

3) $\int x\cos\beta\, dx$ 4) $\int_2^5\ln(\beta x-5)\,dx$

7.3 1) $\int\left(x^{3\beta} + \frac{\beta}{x^3} - \sqrt[2\beta]{x^{5\beta}}\right)dx$ 2) $\int\frac{2x-\beta}{x^2-\beta x+7}\,dx$

3) $\int x\cos\beta x\, dx$ 4) $\int_3^6\ln(\beta x-8)\,dx$

7.4 1) $\int\left(2\beta+\frac{\beta}{x^3}-\frac{2\beta}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{\sin x}{1+\beta\cos x}\,dx$

3) $\int x2\beta^x dx$ 4) $\int_4^7 \ln(\beta x-11)\,dx$

7.5 1) $\int\left(\beta x^{3\beta}+\frac{2\beta}{x}-\sqrt[\beta]{x}\right)dx$ 2) $\int\cos^{2\beta}x\sin x\,dx$

3) $\int x\ln\beta x\,dx$ 4) $\int_5^8 \ln(\beta x-14)dx$

7.6 1) $\int\left(2\beta x^{4\beta}+\frac{1}{x^\beta}-\frac{\beta}{\sqrt[5]{x^\beta}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x^{2\beta-1}}{x^{2\beta}+1}dx$

3) $\int x\cdot e^{-\beta x}dx$ 4) $\int_0^3 \ln(\beta x+1)dx$

7.7 1) $\int\left(3\beta x^{4\beta}-\frac{10}{x^\beta}+9\sqrt[\beta]{x^2}\right)dx$ 2) $\int\sin^{2\beta}x\cos x dx$

3) $\int x\sin\beta x dx$ 4) $\int_{-1}^2 \ln(\beta x+4)dx$

7.8 1) $\int\left(3\beta x-\frac{4}{x^{4\beta}}+\frac{\beta}{\sqrt[3\beta]{x}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x^{2\beta-1}-1}{x^{2\beta}-2\beta x+5}dx$

3) $\int\sin(1-\beta x)dx$ 4) $\int_{-2}^1 \ln(\beta x+7)dx$

7.9 1) $\int\sqrt[4]{\beta x+5}dx$ 2) $\int(2\beta)^{(2x+3)}dx$

3) $\int x\cos 5\beta x dx$ 4) $\int_{-1}^0 \ln(\beta x+10)dx$

7.10 1) $\int ar\cos\beta x dx$ 2) $\int\frac{e^{\beta x}}{e^{\beta x}+8}dx$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{\beta-4x^2}}$ 4) $\int_{-2\beta}^{-\beta} \ln(3x+13)dx$

7.11 1) $\int\frac{dx}{\sin^2(\beta x+5)}$ 2) $\int\frac{\beta x^{2\beta-1}}{x^{2\beta}+10}dx$

3) $\int x\sin\beta^2 x dx$ 4) $\int_0^2 \ln\left(x^2+2\beta\right)dx$

7.12 1) $\int \sqrt[3]{2\beta x+7}dx$ 2) $\int \frac{x^{2\beta-1}}{2\beta x^{2\beta}+\beta}dx$

3) $\int \beta x \beta^x dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 4\beta x dx$

7.13 1) $\int\left(x^{2\beta}-\frac{\beta}{x^\beta}-7\sqrt[2\beta]{x^2}\right)dx$ 2) $\int \frac{x^2}{\beta^3x^3+5}dx$

3) $\int x\cos 4\beta\ x dx$ 4) $\int_{-1}^{2} x\ln\left(\beta x+2\right)dx$

7.14 1) $\int\left(2\beta\ -\frac{4}{x^{2\beta}}+\frac{\beta}{\sqrt[2\beta]{x}}\right)dx$ 2) $\int \cos^4 3\beta x\sin\beta x dx$

3) $\int xe^{5\beta\ x}dx$ 4) $\int_0^1 \ln\left(\beta x+1\right)dx$

7.15 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(\beta x+2\right)^2}}$ 2) $\int \sin^5 2\beta x\cos\beta x dx$

3) $\int x\cdot e^{5\beta x}dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 7\beta x dx$

7.16 1) $\int(6\beta x^{2\beta}+\frac{2}{x^\beta}-\frac{6}{\sqrt[2\beta]{x}})dx$ 2) $\int e^{\beta x+5}dx$

3) $\int x\sin\beta x dx$ 4) $\int_1^4 \ln(\beta x-4)dx$

7.17 1) $\int(\beta+\frac{7}{x^\beta}-\frac{12}{\sqrt[4\beta]{x}})dx$ 2) $\int \frac{\sin x}{5+\beta^2\cos x}dx$

3) $\int xe^{5\beta x}dx$ 4) $\int_2^3 \ln(\beta x+4)dx$

7.18 1) $\int(\beta x^\beta+\frac{x^\beta}{\beta}+\beta^3\sqrt[\beta]{x})dx$ 2) $\int \frac{dx}{2-\beta x}$

3) $\int tg\beta x\ln(\cos\beta x)dx$ 4) $\int_{-1}^{3} \ln(\beta x+5)dx$

7.19 1) $\int(6\beta x^{3\beta}-\frac{7}{x^{2\beta}}+\beta^2\sqrt[\beta]{x^3})dx$ 2) $\int \frac{dx}{\cos^2(\beta x+5)}$

3) $\int \sin^6 \beta x \cdot \cos \beta x dx$ 4) $\int_1^4 \ln(\beta x - 13)dx$

7.20 1) $\int (5\beta x^{4\beta} - \frac{10}{x^\beta} + 2\beta^{2\beta}\sqrt{x^2})dx$ 2) $\int 5^{3\beta x+1}dx$

3) $\int x\cos 3\beta x dx$ 4) $\int_0^1 \ln(x^2 + 2\beta)dx$

7.21 1) $\int (x^\beta + \frac{2\beta}{\sqrt[2\beta]{x^5}} + \frac{1}{3x^{2\beta}})dx$ 2) $\int \frac{x^2}{5\beta x^3 + 8}dx$

3) $\int \cos(3-\beta x)dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3\beta x dx$

7.22 1) $\int (8x^\beta + \frac{1}{2x^\beta} - \frac{\beta}{\sqrt[2]{x^3}})dx$ 2) $\int \frac{2\beta e^{2\beta x}}{e^{2\beta x} + 10}dx$

3) $\int \frac{\left(\beta + \sqrt{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$ 4) $\int_0^1 \ln(\beta x + 8)dx$

7.23 1) $\int (7\beta x^\beta - \frac{7}{x^\beta} - \beta^{2\beta}\sqrt{x^3})dx$ 2) $\int \frac{\sin\beta x - \cos\beta x}{\left(\cos\beta x + \sin\beta x\right)}dx$

3) $\int \frac{dx}{16x^2 + \beta^2}$ 4) $\int_0^2 \ln(x^2 + \beta)dx$

7.24 1) $\int (2\beta x \; - \frac{\beta^2}{x^\beta} - \frac{4}{\sqrt[\beta]{x}})dx$ 2) $\int \frac{dx}{7\beta x + 4}$

3) $\int \frac{\sin 4\beta x}{\cos^5 4\beta x}dx$ 4) $\int_0^1 x \cdot 2\beta^{\beta x}dx$

7.25 1) $\frac{x^{3\beta-1} + 1}{\left(x^{3\beta} + 3\beta x + 1\right)^5}dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{7\beta x + 3}}$

3) $\int \frac{2x}{9x^2 - \beta^2}dx$ 4) $\int_0^2 x \cdot 9\beta^{3\beta x}dx$

7.26 1) $\int (x^{2\beta} - \frac{1}{x^{2\beta}} - \beta^{2\beta}\sqrt{x^3})dx$ 2) $\int \frac{\beta - \cos x}{\left(\beta x - \sin x\right)^2}dx$

3) $\int \left(\sin\beta x + 2\beta^x\right)dx$ 4) $\int_0^1 e^{-3\beta x}\left(2 - 9\beta x\right)dx$

7.27 1) $\int (\beta x^{4\beta} + \frac{\sqrt[3\beta]{x^2}}{10} - 3\beta^{2\beta}\sqrt{x^3})dx$ 2) $\int \frac{dx}{6\beta x - 7}dx$

3) $\int \frac{x^{2\beta-1}}{\left(x^{2\beta}+1\right)}dx$ 4) $\int_0^1 (\beta x+4)e^{\beta x}dx$

7.28 1) $\int (x^{3\beta} - \frac{1}{x^{3\beta}} + 2\beta^{2\beta}\sqrt{x^4})dx$ 2) $\int \frac{dx}{6\beta x-7}dx$

3) $\int \frac{x^3}{3\beta x^4+1}dx$ 4) $\int_0^{\pi} (\beta x-2)\cos\beta x dx$

$\int (2\beta + \frac{4}{x^{3\beta}} - \frac{3\beta}{\sqrt[3\beta]{x}})dx$ 7.29 1) 2) $\int \frac{tg(x+\beta)}{\cos^2(x+\beta)}dx$

3) $\int (7\beta x-10)\sin 5\beta x dx$ 4) $\int_{-1}^{2} \beta x \ln(\beta x+2)dx$

7.30 1) $\int (x^{4\beta} + \frac{1}{x^{4\beta}} - 3\beta^{3\beta}\sqrt{x^5})dx$ 2) $\int \frac{\sin\beta x + \beta x\cos\beta x}{(x\sin\beta x)^3}dx$

3) $\int (2\beta x-5)\cos 4\beta x dx$ 4) $\int_0^1 \ln\left(x^2+\beta\right)dx$

7.31 1) $\int (\frac{7}{\sqrt[4\beta]{x^3}} + \frac{1}{x^{3\beta}} - x^{5\beta})dx$ 2) $\int \frac{x^{2\beta-1}+\cos x}{x^{2\beta}+2\beta\sin x}dx$

3) $\int (\beta x+5)\sin 3\beta x dx$ 4) $\int_0^1 \ln\left(4x^2+2\beta\right)dx$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 7.31</u> Нехай β =**4**, тоді інтеграл 1) запишемо:

$$\int\left(\frac{7}{\sqrt[16]{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20}\right)dx$$

Інтегрування, що основане на використанні таблиці основних інтегралів, основних властивостей, а також простіших тотожних перетворень підінтегральної функції, називають безпосереднім інтегруванням.

Скористаємося властивістю інтегралів про те, що інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій, що мають первісну, дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих від цих функцій і запишемо:

$$=7\int\frac{dx}{\sqrt[16]{x^3}}+\int\frac{dx}{x^{12}}-\int x^{20}dx=$$

Останній інтеграл – табличний, а в перших двох виконаємо простіші алгебраїчні перетворення:

$$=7\int x^{-\frac{3}{16}}dx+\int x^{-12}dx-\int x^{20}dx=$$

Скориставшись табличним інтегралом від степеневої функції отримаємо:

$$=7\cdot\frac{x^{-\frac{3}{16}+1}}{-\frac{3}{16}+1}+\frac{x^{-12+1}}{-12+1}-\frac{x^{20+1}}{20+1}+c=\frac{112}{13}x^{\frac{13}{16}}-\frac{x^{-11}}{11}-\frac{x^{21}}{21}+c=\frac{112}{13}\sqrt[16]{x^{13}}-\frac{1}{11x^{11}}-\frac{x^{21}}{21}+c$$

Виконаємо перевірку, що основана на понятті первісної функції F(x), похідна якої дорівнює заданій функції:

$$F'(x)=f(x),$$

тобто у прикладах **1);2);3);** маючи результат інтегрування - функцію $F(x)$, і знайшовши похідну $F'(x)$, за умови якщо помилок не допущено, повинні отримати підінтегральну функцію $f(x)$ вихідного інтеграла;

$$F'(x)=\left(\frac{112}{13}\sqrt[16]{x^{13}}-\frac{1}{11x^{11}}-\frac{x^{21}}{21}+c\right)'=\frac{112}{13}\left(x^{\frac{13}{16}}\right)'-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{x^{11}}\right)'-\frac{1}{21}\left(x^{21}\right)'=$$

$$=\frac{112}{13}\cdot\frac{13}{16}x^{\frac{13}{16}-1}--\frac{1}{11}\left(-\frac{1}{\left(x^{11}\right)^2}\right)\cdot 11x^{10}-\frac{1}{21}\cdot 21x^{20}=7\cdot x^{-\frac{3}{16}}+\frac{1}{x^{12}}-x^{20}=$$

$$=\frac{7}{\sqrt[16]{x^3}}+\frac{1}{x^{12}}-x^{20}=f(x)$$

Нехай β =**2**, тоді інтеграл 2) запишемо:

$$\int \frac{x^3+\cos x}{x^4+4\sin x}dx =$$

Скористаємося методом заміни змінної (підстановки). Замінимо знаменник
підінтегральної функції $x^4+4\sin x$ на t, тоді визначимо диференціал функції знаменника:

$$\left(4x^3+4\cos x\right)dx = dt$$
$$4\left(x^3+\cos x\right)dx = dt$$
$$\left(x^3+\cos x\right)dx = \frac{dt}{4}$$

Підставивши інтеграл, маємо:

$$\int \frac{\frac{dt}{4}}{t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + c = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+4\sin x\right| + c$$

Виконаємо перевірку.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4\sin x\right| + c\right)' = \frac{1}{4}\left(\ln\left|x^4+4\sin x\right|\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4\sin x}\left(x^4+4\sin x\right)' =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4\sin x}\times\left(4x^3+4\cos x\right) = \frac{x^3+\cos}{x^4+4\sin x} = f(x).$$

Нехай $\beta = 1$, тоді приклад 3) запишемо:

$$\int (x+5)\sin 3x dx =$$

Скористаємося формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Нехай $u = x+5,\ dv = \sin 3x dx,\ \textit{тоді}\ du = dx,\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

Підставивши у формулу інтегрування частинами, маємо:

$$=-\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$$

Виконаємо перевірку

$$F'(x)=\left(-\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c\right)'=\frac{1}{3}\left((x+5)\cos 3x\right)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'$$

$$=\frac{1}{3}\left((x+5)\right)'\cos 3x+(x+5)(\cos 3x)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'=-\frac{1}{3}(\cos 3x-3(x+5)\sin 3x)+$$

$$+\frac{1}{9}\cdot 3\cos 3x=-\frac{1}{3}\cos 3x+(x+5)\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x=(x+5)\sin 3x=f(x)$$

Нехай $\beta=3$, тоді інтеграл 4) запишемо:

$$\int_0^1 \ln\left(4x^2+6\right)dx=$$

Скористаємося формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b u dv$$

Нехай $u=\ln(4x^2+6), dv=dx,$ тоді

$$du=\frac{8x}{4x^2+6}dx;\quad v=u$$

Підставивши у формулу, маємо:

$$=x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{8x^2}{4x^2+6}dx=$$

Розділимо чисельник підінтегральної функції на знаменник за правилом ділення многочлена на многочлен і представимо неправильний дріб $\frac{8x^2}{4x^2+6}$ у вигляді суми цілої частини і правильного дробу.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 8x^2 \\ \underline{8x^2 + \quad 12} \\ -12 \end{array} & \dfrac{4x^2+6}{2}
\end{array}
$$

$$
= x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(2 - \frac{12}{4x^2+6}\right)dx = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 dx + 12\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+6} = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 -
$$

$$
-2\int_0^1 dx + 3\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}} = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 - \frac{3\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \ln 10 - 2 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}
$$

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ

ЗАДАЧА 1. В задачах 1.1 – 1.32 задані ймовірності появи кожної з трьох незалежних подій $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$ при проведенні випробування, які відповідно дорівнюють $\boldsymbol{p_1, p_2,}$ òà $\boldsymbol{p_3}$. Знайти ймовірності наступних подій:

1) наступить тільки одна з трьох подій $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$;

2) наступлять тільки дві події з трьох $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$;

3) наступлять всі три події $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$;

4) наступить хоча б одна з трьох подій $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$;

5) жодна з вказаних трьох подій $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3}$ не наступить;

Значення ймовірностей $\boldsymbol{p_1, p_2,}$ òà $\boldsymbol{p_3}$ приведені нижче в **табл. 1**, при цьому $\boldsymbol{\beta} =$ **1, 2, 3, 4, 5** є номер академічної групи. Всі обчислення необхідно виконувати з чотирма значущими цифрами після коми.

Таблиця 1

Номер задачі	**p1**	**p2**	**p3**	**Номер задачі**	**p1**	**p2**	**p3**
1.1	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,9	**1.17**	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,9
1.2	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,9	**1.18**	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,8
1.3	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,8	**1.19**	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,8
1.4	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,7	**1.20**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,9
1.5	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,9	**1.21**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,9
1.6	0,55+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,8	**1.22**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,7
1.7	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,9	**1.23**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,8
1.8	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,9	**1.24**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,9
1.9	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,8	**1.25**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,8
1.10	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,7	**1.26**	0,6+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,8
1.11	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,9	**1.27**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,9
1.12	0,7+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,8	**1.28**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,9
1.13	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,8	0,9	**1.29**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,8
1.14	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,9	**1.30**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,9
1.15	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,7	**1.31**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,8
1.16	0,65+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,7	0,8	**1.32**	0,75+0,02$\boldsymbol{\beta}$	0,6	0,7

Методичні рекомендації

Згідно з класичним означенням **ймовірність події А** дорівнює відношенню числа елементарних результатів випробування (m_A), сприятливих появі цієї події A до числа всіх єдино можливих та рівно можливих елементарних результатів випробування (n_A), в яких подія A може наступити чи не наступити, тобто:

$$\text{Đ}(\grave{A}) = \frac{m_A}{n_A} \tag{1.1}$$

Відносна частота події А визначається рівністю:

$$W(A) = \frac{m_A}{n_A}, \tag{1.2}$$

де m_A – **число випробувань**, в яких подія A з'явилась;

n_A – **загальне число** всіх проведених випробувань.

При статистичному означенні за ймовірність події А беруть відносну частоту цієї події, або число близьке до неї, при умові, що число випробувань достатньо велике, тобто:

$$P(A) \approx W(A) = \frac{m_A}{n_A}. \tag{1.3}$$

При розв'язуванні задач з використанням класичного означення ймовірності інколи буває потрібно застосувати деякі поняття з комбінаторики.

Розміщення з n елементів по m елементів (позначається $\grave{A}_n^m$), при цьому порядок елементів відіграє суттєву роль:

$$\grave{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.4}$$

Перестановки з n елементів (позначається P_n):

$$P_n = n! \qquad 1.5)$$

Комбінації з n елементів по m елементів (позначається C_n^m), при цьому порядок елементів суттєвої ролі не відіграє:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (1.6)$$

де

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n; m! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot m;\ (n-m)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ (n-m-1)\cdot(n-m).$

При цьому $\mathbf{0! = 1}$ ***ò à*** $\mathbf{1! = 1.}$

Дві події називаються **незалежними**, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбувалась чи не відбувалась інша подія. В протилежному випадку такі події називаються **залежними**. Декілька подій (3 і більше) називаються **незалежними в сукупності**, якщо кожна з цих подій та будь-яка комбінація інших (або всі, що залишилися, чи частина з них) є події незалежні. Очевидно, що події, незалежні в сукупності, будуть і попарно незалежними. Навпаки ж це твердження буде неправильним.

Події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої події в одному й тому ж випробуванні.

Сумою $\grave{A}+\hat{A}$ подій $\grave{A}$ òà $\hat{A}$ називається подія, яка полягає в появі події A, або події B, або двох цих подій A та B разом. **Добутком** $A\cdot B$ двох подій A та B називається подія, яка полягає в сумісній появі (поєднанні) цих двох подій A та B разом. **Протилежними** називаються дві єдино можливі події A та B, які утворюють повну групу подій. Якщо подія B протилежна для події A, то її позначають $\bar{A}$, тобто $\hat{A} = \bar{A}$, або навпаки, $A = \bar{B}$, тобто подія A протилежна для події B.

Теорема (про додавання несумісних подій).

Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\ (A+B) = P\ (A) + P\ (B) \quad (1.7)$$

При цьому:

$$P\left(A_1+A_2+\ldots+A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right) \qquad (1.8)$$

де $A_1, A_2, \ldots A_n$ – попарно несумісні події.

Теорема (про додавання сумісних подій).

Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій (або події A, або події B, або подій A та B разом) дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи (разом):

$$P\left(A+B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right) \qquad (1.9)$$

Теорема (про множення ймовірностей незалежних подій).

Ймовірність сумісної появи (разом) двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(B\right). \qquad (1.10)$$

При цьому $P\left(A_1A_2,\ldots A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)\ldots P\left(A_n\right)$ (1.11)

де події $A_1, A_2, \ldots A_n$ – незалежні в сукупності.

Теорема (про множення ймовірностей залежних подій).

Ймовірність сумісної появи (разом) двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої події:

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)P\left(B/A\right) = P\left(B\right)P\left(A/B\right). \qquad (1.12)$$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 1.</u>

Студент розшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8. Знайти ймовірність того, що формула є:

1) тільки в одному довіднику;

2) тільки у двох довідниках;

3) у всіх трьох довідниках;

4) хоча б в одному довіднику;

5) ні в одному довіднику.

<u>Розв’язання.</u>

Введемо позначення подій:

À_1 – формула знайдена в першому довіднику;

À_2 – формула знайдена в другому довіднику;

À_3 – формула знайдена в третьому довіднику.

Тоді згідно з умовою задачі:

$P(A_1) = 0,6 = p_1$ – ймовірність знайти формулу в першому довіднику.

$\text{Ð}\left(\text{À}_2\right) = 0,7 = \text{ð}_2$ – ймовірність знайти формулу в другому довіднику.

$\text{Ð}\left(\text{À}_3\right) = 0,8 = \text{ð}_3$ – ймовірність знайти формулу в третьому довіднику

Використовуючи властивість ймовірності протилежних подій (сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці) можна записати:

$$\text{Ð}\left(\text{À}_1\right) + \text{Ð}\left(\bar{A}_1\right) = 1 \text{, звідки}$$

$$\text{Ð}\left(\bar{A}_1\right) = 1 - \text{Ð}\left(\text{À}_1\right) = 1 - 0,6 = 0,4 = q_1;$$

$$\text{Ð}\left(\text{À}_2\right) + \text{Ð}\left(\bar{A}_2\right) = 1 \text{, звідки}$$

$$\text{Ð}\left(\bar{A}_2\right) = 1 - \text{Ð}\left(\text{À}_2\right) = 1 - 0,7 = 0,3 = q_2;$$

$$P(A_3) + P(\bar{A}_3) = 1 \text{, звідки:}$$

$$\text{Ð}\,(\bar{A}_3) = 1 - \text{Ð}\left(\text{À}_2\right) = 1 - 0,8 = 0,2 = q_3.$$

Таким чином маємо :

$\text{Ð}\,(\bar{A}_1) = 0,4 = q_1$ – ймовірність не знайти формулу в першому довіднику.

$\boldsymbol{P\ (\overline{A}_2) = 0{,}3 = q_2}$ – ймовірність не знайти формулу в другому довіднику.

$\boldsymbol{P\ (\overline{A}_3) = 0{,}2 = q}$ – ймовірність не знайти формулу в третьому довіднику.

1) Розглянемо подію $\boldsymbol{D_1}$– студент знайшов формулу тільки в одному довіднику. Тоді подія $\hat{\boldsymbol{A}}_1$– студент знайшов формулу тільки в одному довіднику, а саме в першому з них через раніше введені події запишеться:

$$\hat{\boldsymbol{A}}_1 = \grave{\boldsymbol{A}}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_2 \cdot \overline{\boldsymbol{A}}_3.$$

Тобто три довідники розглядаємо як три незалежних події. Коли відбувається перша з подій (студент знайшов формулу в першому довіднику $-\grave{\boldsymbol{A}}_1$), при цьому одночасно відбуваються дві інші події (студент не знайшов формулу в другому довіднику – $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ та студент не знайшов формулу в третьому довіднику - $\overline{\boldsymbol{A}}_3$).

Подія $\hat{\boldsymbol{A}}_2$– студент знайшов формулу тільки в одному довіднику, а саме в другому з них через раніше введені події запишеться:

$$\hat{\boldsymbol{A}}_2 = \overline{\boldsymbol{A}}_1 \grave{\boldsymbol{A}}_2 \overline{\boldsymbol{A}}_3$$

Тобто одночасно відбуваються такі незалежні події : студент не знайшов потрібну йому формулу в першому довіднику – $\overline{\grave{\boldsymbol{A}}}_1$, знайшов формулу в другому довіднику $-\grave{\boldsymbol{A}}_2$, не знайшов формулу в третьому довіднику – $\overline{\grave{\boldsymbol{A}}}_3$.

Подія $\hat{\boldsymbol{A}}_3$– студент знайшов потрібну йому формулу тільки в одному довіднику, а саме в третьому з них через раніше введені події запишеться:

$$\hat{\boldsymbol{A}}_3 = \overline{\grave{\boldsymbol{A}}}_1 \overline{\grave{\boldsymbol{A}}}_2 \grave{\boldsymbol{A}}_{3.}\ .$$

Тобто одночасно відбуваються такі незалежні події: студент не знайшов формулу в першому довіднику – $\overline{\grave{A}}_1$, студент не знайшов формулу в другому довіднику – $\overline{\grave{A}}_2$, знайшов формулу в третьому довіднику $\grave{A}_3$.

Так як події $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ несумісні, то у відповідності з поняттям суми трьох подій можна записати, що:

$$D_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3,$$

тобто студент знайшов формулу тільки в одному довіднику (байдуже в якому, або в першому, або в другому, або в третьому). Таким чином за формулами (1.7) та (1.10)маємо:

$$\text{Ð}(D_1) = \text{Ð}\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) = \text{Ð}\left(\hat{A}_1\right) + \text{Ð}\left(\hat{A}_2\right) + \text{Ð}\left(\hat{A}_3\right) = \text{Ð}(\grave{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) +$$

$$+P\left(\overline{A}_1\grave{A}_2\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{\grave{A}}_1\overline{\grave{A}}_2\grave{A}_3\right) = P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{\grave{A}}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) +$$

$$+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{\grave{A}}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{\grave{A}}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right) =$$

$$= \eth_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0,6\cdot 0,3\cdot 0,2 + 0,4\cdot 0,7\cdot 0,2 + 0,4\cdot 0,3\cdot 0,8 = 0,188.$$

2) Розглянемо подію D_2– студент знайшов потрібну йому формулу тільки у двох довідниках. Тоді подія $\hat{A}_1$– студент знайшов формулу тільки у двох довідниках, а саме в першому і другому з них, через раніше введені події запишеться:

$$\hat{A}_1 = \grave{A}_1\grave{A}_2\overline{A}_3$$

Одночасно відбуваються такі незалежні події: студент знайшов потрібну йому формулу в другому довіднику $-\grave{A}_1$, знайшов формулу в другому довіднику $-\grave{A}_2$ і не знайшов формулу в третьому довіднику – $\overline{\grave{A}}_3$.

Подія $\hat{A}_2$– студент знайшов потрібну йому формулу тільки у двох довідниках, а саме в другому і третьому з них – запишеться:

$$\hat{A}_2 = \overline{A}_1\grave{A}_2 A_3$$

Одночасно відбуваються такі незалежні події: студент знайшов потрібну йому формулу в другому довіднику $-\grave{A}_2$, знайшов формулу в третьому довіднику $-\grave{A}_3$ та не знайшов формулу в першому довіднику – $\overline{\grave{A}}_1$

Подія $\hat{A}_3$– студент знайшов потрібну йому формулу тільки в двох довідниках, а саме в першому та третьому з них запишеться:

$$\hat{A}_3 = \overline{\grave{A}}_1 A_2 \grave{A}_3.$$

Одночасно відбуваються такі події: студент знайшов потрібну йому формулу в першому $-\grave{A}_1$, та третьому $-\grave{A}_3$ довідниках, та не знайшов в другому довіднику – $\overline{\grave{A}}_2$.

Події $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ òà $\hat{A}_3$ несумісні разом, тому у відповідності з поняттям суми двох подій можна записати, що:

$$D_2 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3,$$

тобто студент знайшов потрібну йому формулу тільки у двох довідниках (байдуже в яких двох з трьох: в першому і другому, або в другому і третьому, або в першому і третьому). За формулами (1.7) та (1.10) маємо:

$$Ð(D_2) = Ð\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3\right) = Ð\left(\hat{A}_1\right) + Ð\left(\hat{A}_2\right) + Ð\left(\hat{A}_3\right) = Ð\ (\grave{A}_1 A_2 \overline{A}_3)$$

$$+P\left(\overline{A}_1 \grave{A}_2 A_3\right) + P\left(A_1 \overline{\grave{A}}_2 \grave{A}_3\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) P\left(\overline{A}_3\right) +$$

$$+P\left(\overline{A}_1\right) P\left(A_2\right) P\left(A_3\right) + P\left(A_1\right) P\left(\overline{\grave{A}}_2\right) P\left(A_3\right) =$$

$$ð_1 ð_2 q_3 + q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 = \ 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2\ +\ 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8\ +$$
$$+0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8\ =\ 0,452.$$

3) Розглянемо подію D_3– студент знайшов потрібну йому формулу у всіх трьох довідниках. Тобто одночасно відбуваються три незалежних між собою події: формула знайдена в першому довіднику $-\grave{A}_1$, формула знайдена в другому довіднику $-\grave{A}_2$ та формула знайдена в третьому довіднику $-\grave{A}_3$.

$$D_3 = \grave{A}_1 \cdot \grave{A}_2 \cdot \grave{A}_3.$$

Оскільки події незалежні, у відповідності з поняттям добутку подій (1.10) можна записати:

$$P\left(D_3\right) = P\left(A_1A_2A_3\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right) = p_1p_2p_3 = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

4) Розглянемо подію D_4 – студент не знайшов формулу в жодному довіднику. Одночасно відбуваються три незалежні події: формула не знай дена в першому довіднику – $\bar{A}_1$, формула не знайдена в другому довіднику – $\bar{\grave{A}}_2$, формула не знайдена в третьому довіднику – $\bar{\grave{A}}_3$.

$$D_4 = \bar{A}_1\bar{\grave{A}}_2\bar{A}_3$$

Оскільки події незалежні між собою, у відповідності з поняттям добутку подій (1.10) можна записати:

$$Đ(D_4) = P\left(\bar{A}_1\bar{\grave{A}}_2\bar{A}_3\right) = P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right) =$$
$$= q_1q_2q_3 = 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,024.$$

5) Розглянемо подію D_5 – студент знайшов потрібну йому формулу хоча б в одному довіднику. Події D_5 – "студент знайшов потрібну йому формулу хоча б в одному довіднику" і D_4 – "студент не знайшов потрібну йому формулу в жодному довіднику" – протилежні події. Сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці:

$$Đ(D_5) + P(D_4) = 1.$$

Звідси:

$$Đ(D_5) = 1 - Đ(D_4),$$

$$Đ(D_5) = 1 - 0,024 = 0,976.$$

ЗАДАЧА 2. В задачах 2.1 – 2.32 відомо, що з даної кількості насіння деякої сільськогосподарської культури проростає тільки p відсотків.

1) Знайти ймовірність того, що з відібраних навмання n насінин проросте:

а) менше $(\boldsymbol{m} - 1)$ насінин;

б) рівно $\boldsymbol{m}$ насінин;

в) не менше $\boldsymbol{m}$ насінин.

2) Написати біномний закон розподілу дискретної випадкової величини $\boldsymbol{X}$– числа проростань серед відібраних $\boldsymbol{n}$ насінин. Побудувати багатокутник розподілу та обчислити числові характеристики: математичне сподівання $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$, дисперсію $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(\tilde{O})$.

Значення ***n, m, p*** для кожного варіанта наведені нижче в **таблиці 2.**

Таблиця 2

Номер задачі	**n**	**m**	**p%**	**Номер задачі**	**n**	**m**	**p%**
2.1	10	8	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.17**	9	4	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.2	9	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.18**	8	6	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.3	8	6	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.19**	7	4	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.4	7	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.20**	6	3	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.5	6	3	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.21**	10	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.6	10	7	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.22**	9	5	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.7	9	5	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.23**	10	7	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.8	8	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.24**	7	5	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.9	7	5	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.25**	6	4	85 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.10	6	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.26**	10	5	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.11	10	5	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.27**	9	7	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.12	9	7	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.28**	8	5	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.13	8	4	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.29**	7	4	85 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.14	8	5	95 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.30**	6	3	85 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.15	6	4	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.31**	9	7	85 - 5$\boldsymbol{\beta}$
2.16	10	8	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$	**2.32**	10	4	90 - 5$\boldsymbol{\beta}$

ЗАДАЧА 3. В задачах 3.1 – 3.31 відома ймовірність ***ð*** появи події ***À*** в кожному з $\boldsymbol{n}$ незалежних випробувань. Знайти ймовірність того, що вказана подія ***À*** в цих випробуваннях з'явиться:

1) рівно $\boldsymbol{k}$ разів;

2) не менше, як $\boldsymbol{k_1}$ раз, та не більше як $\boldsymbol{k_2}$ рази;

3) не менше, як $\boldsymbol{k_1}$ раз;

4) не більше, як $\boldsymbol{k_2}$ рази.

Значення $\boldsymbol{n, p, k, k_1}$ та $\boldsymbol{k_2}$ наведені нижче в **таблиці 3.**

Таблиця 3

Номер задачі	n	p	k	k_1	k_2	Номер задачі	n	p	k	k_1	k_2
3.1	1600	0,9	1420+3β	1421+3β	1494	**3.17**	400	0,9	350+2β	351+2β	387
3.2	1350	0,4	511+2β	512+2β	621	**3.18**	1225	0,8	960+3β	961+3β	1036
3.3	625	0,5	291+3β	292+3β	355	**3.19**	1350	0,6	782+3β	783+3β	891
3.4	2100	0,7	1440+4β	1441+4β	1533	**3.20**	225	0,5	100+2β	101+2β	141
3.5	225	0,8	170+2β	171+2β	207	**3.21**	625	0,64	378+2β	379+2β	448
3.6	2700	0,75	1988+5β	1989+5β	2097	**3.22**	900	0,8	700+3β	701+3β	758
3.7	2400	0,6	1402+5β	1403+5β	1536	**3.23**	300	0,75	208+2β	209+2β	252
3.8	625	0,8	480+3β	481+3β	538	**3.24**	600	0,4	220+2β	221+2β	294
3.9	2500	0,36	860+4β	861+4β	1008	**3.25**	2500	0,64	1560+5β	1561+5β	1708
3.10	400	0,5	184+2β	185+2β	238	**3.26**	400	0,8	304+3β	305+3β	356
3.11	18900	0,7	13130+15β	13131+15β	13482	**3.27**	8400	0,7	5810+12β	5811+12β	6048
3.12	600	0,6	341+3β	342+3β	408	**3.28**	900	0,9	800+3β	801+3β	837
3.13	900	0,5	425+4β	426+4β	504	**3.29**	2400	0,4	923+5β	924+5β	1068
3.14	1200	0,75	878+3β	879+3β	951	**3.30**	100	0,5	40+2β	41+2β	70

3.15	625	0,36	198+3β	199+3β	273	**3.31**	100	0,8	70+2β	71+2β	96
3.16	1225	0,5	586+5β	587+5β	679	**3.32**	625	0,5	291+3β	292+3β	355

ЗАДАЧА 4. В задачах 4.1 – 4.32 відома ймовірність ***ð*** появи події ***À*** в кожному з ***n*** незалежних випробовувань. Знайти ймовірність того, що названа подія ***À*** в цих випробуваннях наступить:

1) рівно ***m*** разів;

2) менше ***m*** разів;

3) більше ***m*** разів;

4) жодного разу;

5) хоча б один раз.

Значення ***n, m, p*** наведено нижче, в **таблиці 4.**

Таблиця 4

Номер задачі	n	p	m	Номер задачі	n	p	m
4.1	2000	(4+0,1β)/2000	3	**4.17**	1000	(8+0,1β)/1000	3
4.2	3000	(3+0,1β)/3000	4	**4.18**	1500	(7+0,1β)/1500	4
4.3	2500	(2+0,1β)/2500	5	**4.19**	2500	(5+0,1β)2000	5
4.4	4000	(1+0,1β)/4000	3	**4.20**	1000	(6+0,1β)/1000	3
4.5	1000	(5+0,1β)/1000	3	**4.21**	2000	(7+0,1β)/2000	3
4.6	1500	(4+0,1β)/1500	4	**4.22**	1500	(8+0,1β)/1500	4
4.7	2000	(3+0,1β)/2000	5	**4.23**	1000	(7+0,1β)/1000	5
4.8	3500	(2+0,1β)/3500	4	**4.24**	2500	(4+0,1β)/2500	4
4.9	3000	(6+0,1β)/3000	3	**4.25**	1500	(3+0,1β)/1500	3
4.10	1500	(5+0,1β)1500	4	**4.26**	1000	(2+0,1β)/1000	4
4.11	1000	(4+0,1β)/1000	5	**4.27**	3500	(1+0,1β)/3500	5
4.12	2500	(3+0,1β)/2500	3	**4.28**	2500	(7+0,1β)2500	3
4.13	2000	(2+0,1β)/2000	3	**4.29**	3000	(1+0,1β)/3000	3
4.14	1500	(6+0,1β)/2500	4	**4.30**	1500	(2+0,1β)/1500	4
4.15	2000	(6+0,1β)/1500	5	**4.31**	2000	(8+0,1β)2000	5
4.16	2000	(5+0,1β)/2000	4	**4.32**	3000	(2+0,1β)/3500	4

Методичні рекомендації

Якщо виконується декілька випробувань, то при цьому ймовірність появи події ***А*** в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються **незалежними відносно події *А***.

Нехай на деякій земельній ділянці проводиться сівба кукурудзи. При цьому в ґрунт потрапляє велика кількість зернин кукурудзи, що можуть прорости, або не прорости. Сівбу кукурудзи можна розглядати як проведення повторних випробовувань зерна кукурудзи. Позначимо через ***А*** подію, що нас цікавить, а саме проростання однієї зернини кукурудзи. Проростання кожної окремої зернини можна розглядати як незалежні події, а ймовірності проростання можуть бути різними або однаковими. Припустимо, що розглядаються незалежні випробовування, в кожному з яких ймовірність появи події однакова.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в **n** незалежних випробовуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює $\text{ð}\left(0<\text{ð}<1\right)$**,** така подія настане рівно ***m*** разів ***(t = m),*** байдуже в якій послідовності, а, отже, не настане ***(n - m)*** разів, дорівнює:

$$\text{Đ}_n\left(m\right)=\text{Đ}_n\left(t=m\right)\approx C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2.1)$$

або

$$\text{Đ}_n\left(m\right)=\text{Đ}_n\left(t=m\right)\approx\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}p^m q^{n-m}, \qquad (2.2)$$

де $q=1-p$

Ймовірності того, що в **n** незалежних випробовуваннях подія **А** наступить:

а) менше ***m*** разів $\left(t<m\right)$;

б) більше ***m*** разів$\left(t>m\right)$;

в) не менше $\boldsymbol{m}$ разів $(\boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{m})$;

г) не більше $\boldsymbol{m}$ раз $(\boldsymbol{t} \leq \boldsymbol{m})$ – знаходяться відповідно за формулами:

а) $\boldsymbol{\text{Ð}_n(t < m) = P_n P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m-1)}$; (2.3)

б) $\boldsymbol{P_n(t \ > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)}$; (2.4)

в) $\boldsymbol{P_n(t \ \geq \ m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots \ + P_n(n)}$; (2.5)

г) $\boldsymbol{P_n(t \ \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m).}$ (2.6)

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 2.</u>

Проростання насіння кукурудзи дорівнює 90%. Знайти ймовірність того, що з 8 посіяних насінин проросте:

1) менше п’яти;

2) рівно шість;

3) не менше шести.

<u>Розв’язання.</u>

1) Шукана подія $\boldsymbol{A}$ – з 8 насінин проросте менше п’яти полягає в тому, що для 8 посіяних насінин можливі такі результати: "жодне не проросте", або "проросте два", або "проросте три", або "проросте чотири". Так як вказані чотири події несумісні, то за теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність (5.3) дорівнює:

(1) $\boldsymbol{\text{Ð}_8 = (t < 5) = \ P_8(t=0) + P_8(t=1) + P_8(t=2) + P_8(t=3) + P_8(t=4)}$

Згідно з умовою задачі, схожість насіння кукурудзи становить 90%, тобто ймовірність того, що кожна окрема насінина проросте $\boldsymbol{p = \frac{90\%}{100\%} = \ 0{,}9}$, тоді ймовірність того, що насінина кукурудзи не проросте: $\boldsymbol{q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1}$. Крім того $\boldsymbol{n \ = \ 8, \ t_1 = \ 0, \ \ t_2 = \ 1, \ t_3 = 2,}$ $\boldsymbol{t_4 = \ 3, \ t_5 = 4.}$

Підставляючи послідовно ці величини у формулу (2.1) , знаходимо:

$$\text{Đ}_n\left(t=m\right)=C_n^m p^m q^{n-m} \quad ;$$

$$\text{Đ}_n\left(t=m\right)=\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}p^m q^{n-m}$$

$$P_8\left(t=0\right)=\frac{8!}{0!8!}\cdot 0{,}9^0\cdot 0{,}1^8=1\cdot 1\cdot 0{,}1^8=0{,}00000001;$$

$$P_8\left(t=1\right)=\frac{8!}{1!7!}\cdot 0{,}9^1\cdot 0{,}1^7=8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}000001=0{,}00000072;$$

$$P_8\left(t=2\right)=\frac{8!}{2!8!}\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^6=28\cdot 0{,}81\cdot 0{,}000001=0{,}00002268;$$

$$P_8\left(t=3\right)=\frac{8!}{3!5!}\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^5=56\cdot 0{,}729\cdot 0{,}00001=0{,}00040824;$$

$$P_8\left(t\ =\ 4\right)=\frac{8!}{4!4!}0{,}9^4\cdot 0{,}1^4=70\cdot 0{,}6561\cdot 0{,}001=0{,}0045927.$$

Підставивши в формулу (3.3) маємо:

$$\text{Đ}_8\left(t<5\right)=0{,}00000001+0{,}00000072+0{,}00002268+0{,}00040824+0{,}0045927=$$
$$=0{,}00502435.$$

2) Ймовірність того, що з 8 посіяних насінин кукурудзи проросте рівно шість, знайдемо за формулою Бернуллі (3.1)

$$\text{Đ}_n\left(t=m\right)=C_n^m p^m q^{n-m};$$

$$P_8\left(t\ =6\right)=C_8^6 0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=28\cdot 0{,}5314\cdot 0{,}01=0{,}1488.$$

3) Шукана подія **А** – з 8 посіяних насінин кукурудзи проросте не менше шести, тобто більше шести полягає в тому, що для 8 посіяних насінин можливі такі результати: "проросте шість насінин", або "проросте сім насінин ", або "проросте вісім насінин". Так як названі три події несумісні, то за теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність (3.5) дорівнює:

(2) $\quad \text{Đ}_8\left(t>6\right)=P_8\left(t=6\right)+P_8\left(t=7\right)+P_8\left(t=8\right)$

Кожна з ймовірностей в правій частині формули знаходиться за формулою Бернуллі (3.1):

$$Đ_n\left(t=m\right)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

Ймовірність проростання однієї насінини кукурудзи дорівнює 0,9 , ймовірність непроростання – **0,1**, крім того $n = 8$, а $m_6 = 6$, $m_7 = 7$, $m_8 = 8$.

$$P_8\left(t=6\right)=C_8^6 0,9^6\cdot 0,1^2=\frac{8!}{6!2!}\cdot 0,9^6\cdot 0,1^2=28\cdot 0,5314\cdot 0,01=0,1488$$

$$P_8\left(t\ =\ 7\right)=C_8^7\cdot 0,9^7\cdot 0,1^1=0,9^7\cdot 0,1^1=8\cdot 0,4783\cdot 0,1=0,3827$$

$$P_8\left(t=8\right)=C_8^8\cdot 0,9^8\cdot 0,1^0=0,9^8\cdot 0,1^0=1\cdot 0,9^8\cdot 1=0,4305$$

Підставивши результати в формулу (2), маємо:

$$Đ_8\left(t\geq 6\right)=0,1488+0,3827+0,4305=0,9620$$

Ймовірність того, що з восьми посіяних насінин кукурудзи проросте не менше шести насінин $Đ_8\left(t\geq 6\right)=0,9620.$

Якщо число випробовувань n досить велике$\left(n>10\right)$, то знаходження ймовірності $Đ_n\left(t=m\right)$ за формулою Бернуллі приводить до громіздких обчислень і застосування цієї формули стає практично неможливим. В таких випадках використовують наближену формулу, що виражає **локальну теорему Муавра – Лапласа** : якщо в кожному окремому випробовуванні ймовірність появи події дорівнює $p\left(0<ð<1\right),$ то ймовірність того, що в n незалежних випробовуваннях така подія дорівнює m разів (байдуже в якій послідовності), наближено дорівнює:

$$P_n\left(t=m\right)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(x\right), \qquad (2.7)$$

де $\quad õ=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}};\quad q=1-p;\qquad \varphi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Формулу (2.7) ще називають асимптотичною формулою для біномного розподілу ймовірностей. Функція $\varphi\left(õ\right)$ – функція Лапласа. Ця функція є парною, а її графік називається кривою розподілу випадкової величини. Для значень функції $\varphi\left(\tilde{o}\right)$ складені детальні таблиці для різних значень аргументу x (дивись додатки **таблиця 1**). Тому що функція Лапласа $\varphi\left(\tilde{o}\right)$ парна, то для всіх $\tilde{o} < 0 : \varphi\left(-\tilde{o}\right) = \varphi\left(\tilde{o}\right)$. Для значень x таких, що $\left|\tilde{o}\right| \geq 4$ беремо значення $\varphi\left(\tilde{o}\right) \approx 0$.

Приклад виконання ЗАДАЧІ 3.

У деякому ставку коропи становлять 80% від усієї кількості риби, що там є. Знайти ймовірність того, що з 1000 виловлених у цьому ставку рибин буде 890 коропів.

Розв'язання.

У відповідності з умовою задачі маємо:

$$n = 1000,\ m = 890,\ p = \frac{80\%}{100\%} = 0{,}8;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Так як число випробувань $n = 1000$ – досить велике число, то для знаходження ймовірностей того, що з 1000 виловлених рибин буде 890 коропів, будемо використовувати наближену формулу (2.7) локальної теореми Муавра-Лапласа. Для цього знаходимо спочатку значення аргументу x :

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{890 - 1000 \cdot 0{,}8}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{-10}{12{,}6491} \approx -0{,}79.$$

У таблиці значень функції Лапласа $\varphi\left(\tilde{o}\right)$ (дивись **табл. 1** додатка), враховуючи при цьому, що $\tilde{o} = -0{,}79 < 0$, та те, що $\varphi(x)$ парна, знаходимо значення $\varphi\left(-0{,}79\right) = \varphi\left(0{,}79\right) \approx 0{,}292$. Підставляючи це значення в формулу (2.7), обчислюємо відшукувану ймовірність:

$$\text{Đ}_{1000}\left(890\right) = \text{Đ}_{1000}\left(t = 890\right) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \varphi\left(-0.79\right) \approx \frac{0{,}292}{12{,}6491} \approx 0{,}02308$$

або остаточно $\text{Đ}_{1000}\left(890\right) \approx 0{,}0231.$

Застосування асимптотичної формули (2.7) в тих випадках, коли маємо справу з масовими, але мало ймовірними подіями, тобто тоді, коли число подій $\boldsymbol{n}$ дуже велике, а $\boldsymbol{p}$ дуже мале, приводить до значних відхилень від точного значення ймовірності $\boldsymbol{Đ_n\left(t=m\right)}$.Тоді при досить малих значеннях $\boldsymbol{p}$ та великих значеннях $\boldsymbol{n}$ використовується асимптотична формула Пуассона.

Якщо ймовірність $\boldsymbol{p}$ появи події $\boldsymbol{A}$ в кожному з $\boldsymbol{n}$ незалежних випробовувань мала, а число випробовувань $\boldsymbol{n}$ досить велике, то ймовірність того, що подія $\boldsymbol{A}$ наступить рівно $\boldsymbol{m}$ разів, обчислюється за формулою Пуассона:

$$\boldsymbol{Đ_n\left(m\right)=P_n\left(t\ =m\right)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}} \tag{2.8}$$

Де $\boldsymbol{\lambda}\ =\ \mathrm{n}\cdot\mathrm{p}$ – середнє число появи подій.

Формулу (7.1) використовують в тих випадках, коли $\boldsymbol{\lambda\ =\ np\ \le\ 10}$. При цьому, чим більше число випробовувань $\boldsymbol{n}$ та чим менше ймовірність $\boldsymbol{p}$**,** тим точніше буде результат (відповідна ймовірність), який обчислений за формулою (2.8).

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 4.</u>

Ймовірність пошкодження довгоносиком коренеплоду цукрового буряку на деякій ділянці дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде:

1) рівно 4 коренеплоди;

2) менше 4 коренеплодів;

3) більше 4 коренеплодів;

4) хоча б один коренеплід.

<u>Розв’язання.</u>

Згідно з умовою задачі $\boldsymbol{n\ =1000,\ m=\ 4,\ p\ =\ 0{,}003}$;

Тоді $\boldsymbol{\lambda\ =\ np\ =\ 1000\cdot0{,}003=3<10.}$

1) Використовуючи формулу (2.8) знаходимо ймовірність $\text{Đ}_{1000}\left(t\ =4\right)$

$$\text{Đ}_{1000}\left(4\right)=\text{Đ}_{1000}\left(t\ =4\right)=\frac{3^4}{4!}2{,}71^{-3}=\frac{81\cdot 0{,}0502}{24}\approx 0{,}1694\,.$$

2) Шукана подія A – з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде менше 4 коренеплодів полягає в тому, що для 1000 коренеплодів можливі такі результати: " жодного пошкодженого коренеплоду", або "один пошкоджений", або "два пошкоджених", або "три пошкоджені". Вказані чотири події несумісні. За теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність дорівнює:

$$(3)\qquad \text{Đ}_{1000}\left(t<4\right)=P_{1000}\left(t=0\right)+P_{1000}\left(t=1\right)+P_{1000}\left(t=2\right)+P_{1000}\left(t=3\right).$$

Кожна з ймовірностей у правій частині формули окремо знайдемо за формулою Пуассона (2.8).

$$P_n\left(m\right)=P_n\left(t=m\right)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\,;$$

$$m\ =0,\ \lambda\ =3,\ e\ =2{,}71;$$

$$P_{1000}\left(t\ =0\right)=\frac{3}{0!}\cdot 2{,}71^{-3}=\frac{1}{2{,}71^3}=\ 0{,}0502;$$

$$m\ =1,\ \lambda\ =3,\ e\ =2{,}71;$$

$$P_{1000}\left(t=1\right)=\frac{3^1}{1!}\cdot 2{,}71^{-3}=\frac{3}{2{,}71^3}=0{,}1507\,;$$

$$m=2,\ \lambda=3,\ e=2{,}71;$$

$$P_{1000}\left(t\ =2\right)=\frac{3^2}{2!}2{,}71^{-3}=\frac{9}{2\cdot 2{,}71^3}=0{,}2261\,;$$

$$m\ =\ 3,\ \lambda\ =\ 3,\ e\ =2{,}71;$$

$$P_{1000}\left(t\ =3\right)=\frac{3^3}{3!}\cdot 2{,}71^{-3}=\frac{27}{6\cdot 2{,}71^3}=0{,}2261\,.$$

Підставивши результат у формулу (3), маємо:

$$P_{1000}\left(t<4\right)=0{,}0502+0{,}1507+0{,}2261+0{,}2261\ =0{,}6531.$$

3) Шукана подія A – з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде більше 4 коренеплодів, полягає в тому, що для 1000 коренеплодів можливі такі результати: "пошкоджених 4 коренеплоди", або "пошкоджених 5 коренеплодів", або "пошкоджених 6 коренеплодів" і т.д. аж до "пошкоджених 1000 коренеплодів".

Знайти шукану ймовірність $P_{1000}\left(k\ \geq\ 4\right)$ звичайним способом, використовуючи формулу (3.5) практично неможливо внаслідок того, що треба знаходити суму численної кількості ймовірностей кожної з несумісних подій. Тому це питання задачі розв’язується, використовуючи поняття протилежних подій. Події "з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде більше 4" і "з 1000 коренеплодів цукрового буряка пошкоджених буде менше 4" – вважаємо протилежними подіями. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P_{1000}\left(k\geq 4\right)+P_{1000}\left(k<4\right)=1.$$

Звідки:

$$P_{1000}\left(k\geq 4\right)=1-P_{1000}\left(k<4\right).$$

Ймовірність $P_{1000}\left(k\ <\ 4\right)$знайдена в пункті "б", тому ймовірність того, що з 1000 коренеплодів пошкоджених буде більше чотирьох, знайдемо:

$$P_{1000}\left(k\geq 4\right)=1-0{,}6531=0{,}3469.$$

4) Це питання задачі розв’язується також використовуючи поняття протилежних подій. Події "з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджений буде хоча б один" і "з 1000 коренеплодів цукрового буряку жоден не буде пошкоджений" – вважаємо протилежними подіями. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P_{1000}\left(k<1\right)+P_{1000}\left(k\ \ =0\right)=1.$$

Звідки

$$P_{1000}(k<1)\ =1-P_{1000}(k=0).$$

Ймовірність того, що з 1000 коренеплодів цукрового буряку жоден не буде пошкоджений, знайдено в пункті "б" задачі:

$$Ð_{1000}(k\ \ =0)=0{,}0502,$$

тому ймовірність того, що з 1000 коренеплодів цукрового буряку хоча б один пошкоджений знайдемо:

$$Ð_{1000}(k<1)\ =1-0{,}0502=0{,}9498.$$

Формули Бернуллі (2.1), Пуассона (2.8) та асимптотична формула (2.7), що виражає локальну теорему Муавра-Лапласа, дозволяють знаходити ймовірність появи події A рівно m разів в n незалежних випробовуваннях. На практиці досить часто буває потрібно визначити ймовірність того, що подія A наступить не менше як m_1 раз та не більше як m_2 разів, тобто число $t=m$ визначається нерівностями $m_1\le m\le m_2$. в таких випадках застосовується формула з **інтегральної теореми Муавра-Лапласа.**

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n випробовувань стала і дорівнює $ð(0<p<1)$, то ймовірність $Ð_n(m_1;\ m_2)$ того, що в n незалежних випробовуваннях подія A наступить не менше як m_1 разів, наближено дорівнює різниці функцій Лапласа для значення $õ_2$ та $õ_1$:

$$Ð_n(m_1;\ m_2)\approx Ô\ (õ_2)-Ô\ (õ_1), \qquad (2.9)$$

де

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ \ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};$$

$$Ô\ (õ)\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{õ} å^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Для отримання значень функції Лапласа $Ô(õ)$ для даного аргументу x

використовуємо ту ж **таблицю 2**, враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто$\hat{O}\left(-\tilde{o}\right) = \hat{O}\left(\tilde{o}\right)$. Для значень аргументу $\tilde{o} > 5$ беремо $\hat{O}\left(\tilde{o}\right) \approx 0{,}5$, а для значень $\tilde{o} < -5$ приймаємо $\hat{O}\left(\tilde{o}\right) \approx -0{,}5$.

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 3 (продовження).</u>

На тракторному заводі робітник за зміну виготовляє 200 деталей, серед яких 93% найвищої якості. Знайти ймовірність того, що деталей найвищої якості серед виготовлених буде:

1) не менше як 180 штук та не більше як 195 штук;

2) не менше як 180 штук;

3) не більше як 195 штук.

<u>Розв'язання.</u>

1) У відповідності з умовою задачі маємо: $n = 200;\ m_1 = 180;\ m_2 = 195$,

$\text{Ð} = \dfrac{93\%}{100\%} = 0{,}93$; $\quad q = 1 - p = 1 - 0{,}97 = 0{,}07$. Знаходимо значення аргументів $\tilde{o}_1$ та $\tilde{o}_2$ для функції Лапласа $\hat{O}\left(\tilde{o}\right)$:

$$\tilde{o}_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{180 - 200 \cdot 0{,}93}{\sqrt{200 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}07}} \approx \frac{-6}{3{,}608} \approx -1{,}663;$$

$$\tilde{o}_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 200 \cdot 0{,}93}{\sqrt{200 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}07}} \approx \frac{9}{3{,}608} \approx 2{,}494.$$

У таблиці 2 додатку знаходимо:

$$\hat{O}\left(\tilde{o}_1\right) = \hat{O}\left(-1{,}66\right) = -\hat{O}\left(1{,}66\right) \approx -0{,}4515;$$

$$\hat{O}\left(\tilde{o}_2\right) = \hat{O}\left(2{,}49\right) = \frac{\hat{O}(2{,}48) + \hat{O}(2{,}5)}{2} \approx \frac{0{,}4934 + 0{,}4938}{2} = 0{,}4936$$

Підставляючи ці значення $\hat{O}\left(\tilde{o}_1\right)$ та $\hat{O}\left(\tilde{o}_2\right)$ у формулу (4.2), знаходимо шукану ймовірність:

$$\text{Ð}_{200}\left(180;\ 195\right) \approx 0{,}4936 - \left(-0{,}4515\right) = 0{,}9451.$$

2) Оскільки в умові задачі говориться "не менше як 100 штук", тобто більше 180 штук, то нижня межа буде m_1 = 180, а верхню межу беремо m_2 = 200 – максимальне число деталей.

Знаходимо значення аргументів $\tilde{o}_1$ та $\tilde{o}_2$ для функції Лапласа $\hat{O}\left(\tilde{o}\right)$:

$$\tilde{o}_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \frac{180 - 200 \cdot 0,93}{= \sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{-6}{3,608} \approx -1,663;$$

$$\tilde{o}_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{14}{3,608} \approx 3,88.$$

У таблиці 2 додатку знаходимо

$$\hat{O}\left(\tilde{o}_1\right) = \hat{O}\left(-1,66\right) = -\hat{O}\left(1,66\right) \approx -\ 0,4515;$$

$$\hat{O}\ \left(\tilde{o}_2\right) = \hat{O}\left(-3,88\right) = \frac{\hat{O}(3,80) + \hat{O}(4,00)}{2} \frac{0,49993 + 0,49997}{2} = 0,49995.$$

Підставляючи ці значення $\hat{O}\ \left(\tilde{o}_1\right)$та $\hat{O}\ \left(\tilde{o}_2\right)$ у формулу (4.2), знаходимо шукану ймовірність:

$$Đ_{200}\left(180;\ 200\right) = 0,49995 - \left(-\ 0,4515\right) = 0,49995 + 0,4515 = 0,95145.$$

3) "Не більше як 195 штук" в умові задачі розуміємо так, що нижня межа **m₁** повинна бути 0, а верхня повинна бути 195.

Знаходимо значення аргументів $\tilde{o}_1$ та $\tilde{o}_2$ для функції Лапласа $\hat{O}\left(\tilde{o}\right)$:

$$\tilde{o}_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx -\frac{186}{3,608} \approx -51,55;$$

$$\tilde{o}_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{9}{3,608} \approx 2,494.$$

У таблиці 2 додатка знаходимо:

$$\hat{O}\left(\tilde{o}_1\right) = \hat{O}\left(-51,55\right) = -\hat{O}\left(51,55\right) \approx -0,5$$

$$\hat{O}\left(\tilde{o}_2\right) = \hat{O}\ \left(2,494\right) = \frac{\hat{O}(2,48) + \hat{O}(2,5)}{2} \approx \frac{0,4934 + 0,4938}{2} = 0,4936.$$

Підставляючи ці значення $\hat{O}\ \left(\tilde{o}_1\right)$та $\hat{O}\ \left(\tilde{o}_2\right)$ у формулу (2.9), знаходимо шукану ймовірність:

$$\text{Đ}_{200}\left(90;\ 195\right)=0,4936-\left(-0,5\right)=0,4936\ +0,5\ =0,9936\,.$$

ЗАДАЧА 5. У задачах 5.1 – 5.31 задано закон розподілу дискретної випадкової величини ***X*** (у першому рядку таблиці дано можливі значення $\tilde{O}$**,** а в другому рядку вказані ймовірності ***p*** цих можливих значень). Знайти числові характеристики:

1) математичне сподівання ***M(X)*;**

2) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

3) середнє квадратичне відхилення $\delta=\delta\left(\tilde{O}\right)$**.**

Побудувати многокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на ньому знайдені значення математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення.

5.1

X	**23+β**	**28+β**	**28+β**	**29+β**
p	**0,3**	**0,2**	**0,4**	**0,1**

5.2

X	**15+β**	**29+β**	**42+β**	**56+β**
p	**0,1**	**0,3**	**0,2**	**0,4**

5.3

X	**17+β**	**21+β**	**25+β**	**27+β**
p	**0,2**	**0,4**	**0,3**	**0,1**

5.4

X	**24+β**	**26+β**	**28+β**	**30+β**
p	**0,2**	**0,2**	**0,5**	**0,1**

5.5

X	**10+β**	**18+β**	**25+β**	**34+β**
p	**0,3**	**0,2**	**0,4**	**0,1**

5.6

X	**25+β**	**27+β**	**30+β**	**32+β**
p	**0,2**	**0,4**	**0,3**	**0,1**

5.7

X	**12+β**	**16+β**	**19+β**	**21+β**
p	**0,1**	**0,5**	**0,3**	**0,1**

5.8

X	**23+β**	**29+β**	**35+β**	**40+β**
p	**0,1**	**0,3**	**0,2**	**0,4**

5.9

X	30+β	32+β	35+β	40+β
p	0,1	0,5	0,2	0,2

5.10

X	12+β	14+β	16+β	20+β
p	0,1	0,2	0,5	0,2

5.11

X	21+β	35+β	48+β	51+β
p	0,1	0,4	0,2	0,3

5.12

X	21+β	25+β	28+β	31+β
p	0,1	0,4	0,2	0,3

5.13

X	60+β	64+β	67+β	70+β
p	0,1	0,3	0,2	0,4

5.14

X	12+β	26+β	39+β	51+β
p	0,1	0,5	0,3	0,1

5.15

X	45 + β	47 + β	50 + β	52 + β
p	0,2	0,4	0,3	0,1

5.16

X	46+β	49+β	51+β	55+β
p	0,2	0,3	0,1	0,4

5.17

X	25+β	27+β	30+β	32+β
p	0,2	0,4	0,3	0,1

5.18

X	18+β	22+β	23+β	26+β
p	0,2	0,3	0,4	0,1

5.19

X	78+β	80+β	84+β	85+β
p	0,2	0,3	0,1	0,4

5.20

X	26+β	38+β	50+β	64+β
p	0,2	0,3	0,4	0,1

5.21

X	37+β	41+β	43+β	45+β
p	0,2	0,1	0,5	0,2

5.22

X	25+β	28+β	30+β	33+β
p	0,1	0,2	0,4	0,3

5.23

X	16+β	29+β	41+β	55+β
p	0,2	0,3	0,1	0,4

5.24

X	56+β	58+β	60+β	64+β
p	0,2	0,3	0,4	0,1

5.25

X	15+β	27+β	40+β	52+β
p	0,2	0,4	0,3	0,1

5.26

X	31+β	34+β	37+β	40+β
p	0,3	0,5	0,1	0,1

5.27

X	11+β	25+β	38+β	51+β
p	0,1	0,4	0,2	0,3

5.28

X	20+β	23+β	23+β	17+β
p	0,1	0,4	0,3	0,2

5.29

X	28+β	32+β	34+β	36+β
p	0,1	0,1	0,2	0,5

5.30

X	28+β	40+β	54+β	65+β
p	0,2	0,3	0,1	0,4

5.31

X	35+β	39+β	42+β	46+β
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Методичні рекомендації

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Використання теорії ймовірностей для розв’язання задач практики в першу чергу пов’язано з цим поняттям.

Випадковою величиною називають величину, що в результаті випробовування набуде одного і тільки одного можливого значення, наперед невідомого, тому що воно залежить від багатьох випадкових величин (факторів), які заздалегідь не можуть бути враховані. Розрізняють два види випадкових величин: **дискретні** та **неперервні**. Випадкові величини прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту ***X, Y, Z***, або $\tilde{O}_1, \tilde{O}_2, \tilde{O}_3 \ldots Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ **Дискретною** називають випадкову величину, можливі значення якої є окремі ізольовані числа (тобто між двома сусідніми можливими значеннями немає інших можливих значень), які ця випадкова величина приймає з відомими ймовірностями. Іншими словами, можливі значення дискретної випадкової величини можна пронумерувати. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним (в останньому разі множина всіх можливих значень буде зчисленною).

Законом розподілу або **рядом розподілу дискретної випадкової величини** називається відповідність між її можливими значеннями та ймовірностями. Закон розподілу дискретної випадкової величини можна записати у вигляді таблиці, перший рядок якої складається з можливих значень x_i, а в другій записані відповідні ймовірності p_i:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

(3.1)

де $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$, та $P(X = x_i) = p_i \left(i = 1,2,3 \ldots n \right)$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини **X** може бути заданий аналітично (у вигляді формули):

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i), \qquad (3.2)$$

за допомогою функції, яку називають **інтегральною функцією розподілу**.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно. Для цього в прямокутній системі координати достатньо побудувати точки $M(x_1; p_1), M(x_2; p_2), \ldots M_n(x_n; p_n)$ та з'єднати їх відрізками прямих. Одержану фігуру називають **багатокутником розподілу**.

Біномним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробовуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події стала і дорівнює "p":

ймовірність того, що випадкова величина **X** прийме можливе значення, рівне $\boldsymbol{m}$, де $\boldsymbol{m}$ – число появи подій, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$\text{Ð}\left(\tilde{o} = m\right) = P_n\left(t\ =\ m\right) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (3.3)$$

Якщо число випробовувань **n** велике, а ймовірність **p** появи події в кожному випробовуванні дуже мала, то використовують наближену формулу Пуассона:

$$\text{Ð}\left(\tilde{o} = m\right) = \text{Ð}\left(t = m\right) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (3.4)$$

де $\boldsymbol{m}$ – число появи подій в $\boldsymbol{n}$ незалежних випробовуваннях;

$\lambda\ =\ np$ – середнє число появи події в n випробовуваннях.

У такому разі (формула (3.4)) говорять, випадкова величина $\boldsymbol{X}$ розподілена за законом Пуассона.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідну ймовірність:

$$\text{Ì}\ \left(X\right) = \tilde{o}_1 \eth_1 + \tilde{o}_2 \eth_2 + \tilde{o}_3 \eth_3 + \ldots + \tilde{o}_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,. \qquad (3.5)$$

Дисперсією випадкової величини $\boldsymbol{X}$ називають математичне сподівання квадрата відхилення:

$$D\ \left(X\right)\ =\ M\ \left(\left(X\ -\ M\ \left(X\right)\right)^2\right)\ = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i\,. \qquad (3.6)$$

Дисперсію також можна обчислити за іншою формулою:

$$D\left(X\right) = M\left(X^2\right) - \left(M\left(X\right)\right)^2 \qquad (3.7)$$

Середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\delta = \delta\left(X\right) = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (3.8)$$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 5.</u>

Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ***X***(в першому рядку дано можливі значення ***X***, а в другому вказані ймовірності ***p*** цих можливих значень):

X	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Знайти числові характеристики:

1) математичне сподівання ***M(X)*;**

2) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

3) середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\delta = \delta\left(X\right)}$**.**

Побудувати багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на ньому знайдені значення математичного сподівання ***M(X)*** та середнього квадратичного відхилення $\boldsymbol{\delta\left(\tilde{\mathrm{O}}\right)}$**.**

<u>Розв’язання.</u>

1) Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється за формулою (6.5) :

$$\boldsymbol{\grave{I}\left(\tilde{O}\right) = \tilde{o}_1\eth_1 + \tilde{o}_2\eth_2 + \tilde{o}_3\eth_3 + \tilde{o}_4\eth_4 = 21\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}4 + 28\cdot 0{,}2 + 31\cdot 0{,}3 =}$$
$$\boldsymbol{= 2{,}1 + 10{,}0 + 5{,}6 + 9{,}3 = 27{,}0}$$

2) Дисперсію дискретної випадкової величини можна обчислювати безпосередньо за визначенням (формула (3.6)). Для цього обчислимо всі можливі значення квадрата відхилення:

$$\boldsymbol{\left(\tilde{o}_1 - M\left(\tilde{O}\right)\right)^2 = \left(21 - 27\right)^2 = \left(-6\right)^2 = 36};$$

$$\boldsymbol{\left(\tilde{o}_2 - M\left(\tilde{O}\right)\right)^2 = \left(25 - 27\right) = \left(-2\right)^2 = 4};$$

$$\boldsymbol{\left(\tilde{o}_3 - M\left(\tilde{O}\right)\right)^2 = \left(28 - 27\right) = \left(1\right)^2 = 1};$$

$$\boldsymbol{\left(\tilde{o}_4 - M\left(\tilde{O}\right)\right)^2 = \left(31 - 27\right) = \left(4\right)^2 = 16}.$$

Для того, щоб обчислити дисперсію ***D (X)***, запишемо закон розподілу квадрата відхилення, а потім знову використаємо формулу (3.5) :

$\left(\tilde{O}-M\left(\tilde{O}\right)\right)^2$	36	4	1	16
p	0,1	0,4	0,2	0,3

$$D\left(X\right)=36\cdot 0,1+4\cdot 0,4\ +1\cdot 0,2\ +16\cdot 0,3=3,6+1,6+0,2+4,8=10,2.$$

Обчислимо дисперсію дискретної випадкової величини **X** іншим способом, тобто за формулою (6.7). Для цього запишемо закон розподілу величини $\tilde{O}^2$:

X^2	$(21)^2$	$(25)^2$	$(28)^2$	$(31)^2$
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Далі знаходимо математичне сподівання $M\ \left(X^2\right)$:

$$M\ \left(X^2\right)=\tilde{o}_1^2\eth_1+\tilde{o}_2^2\eth_2+\tilde{o}_3^2\eth_3+\tilde{o}_4^2\eth_4$$
$$=\left(21\right)^2\cdot 0,1\ +\left(25\right)^2\cdot 0,4\ +\left(28\right)^2\cdot 0,2+\left(31\right)\cdot 0,3=$$
$$=441\cdot 0,1\ +625\cdot 0,4\ +784\cdot 0,2+961\cdot 0,3=$$
$$=44,1\ +\ 250,0\ +\ 156,8\ +\ 288,3\ =739,2.$$

Користуючись формулою (6.7), знаходимо:

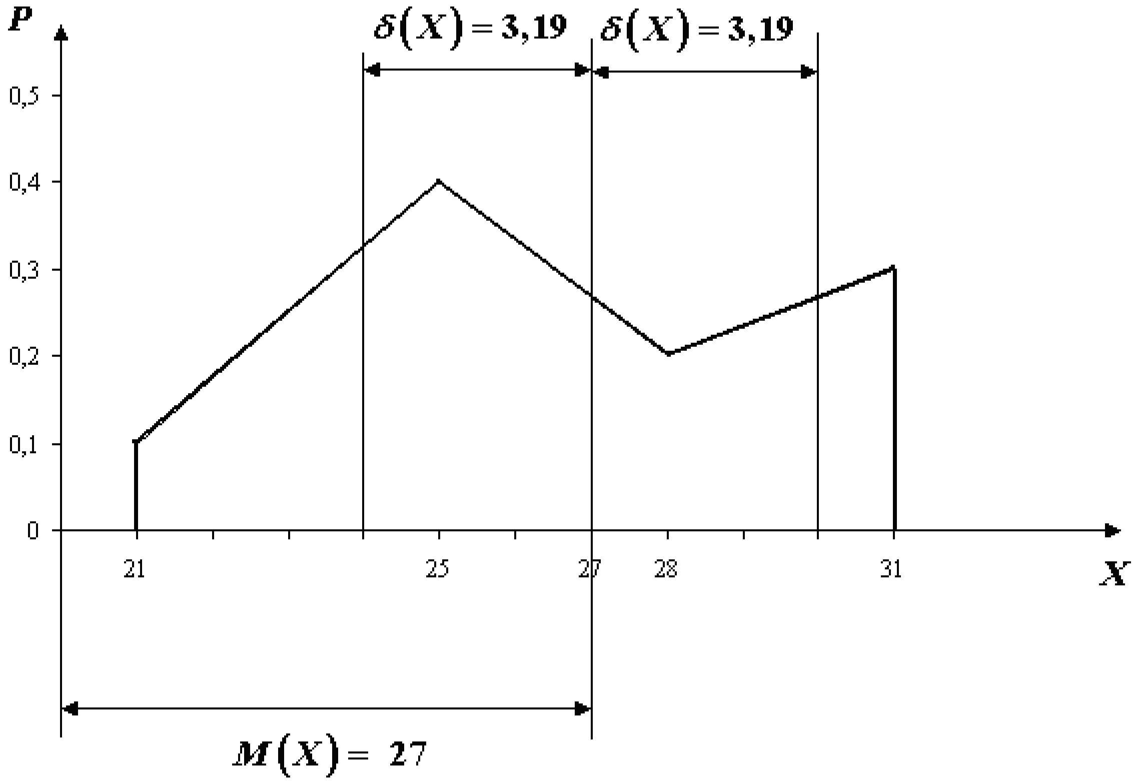
$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left(M\ \left(X\right)\right)^2=739,2\ -\left(27\right)^2=739,2-729=10,2.$$

Виконані обчислення показали, що значення дисперсної ***D(X)*** в обох випадках одне й те саме.

3) Середнє квадратичне відхилення σ обчислюємо за (3.8):

$$\delta=\delta\left(\tilde{O}\right)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{10,2}\approx\ 3,19.$$

Побудуємо багатокутник розподілу. По осі абсцис відкладаємо у вибраному масштабі можливі значення $\tilde{o}_i$ випадкової величини ***X***; по осі ординат – відповідні значення ймовірностей $ð_з$. Побудовані точки $\left(õ_i; ð_з\right)$з’єднуємо відрізками прямих. Одержали багатокутник розподілу заданої випадкової величини. Знайдене значення математичного сподівання $M\left(\tilde{O}\right) = 27$ відкладаємо від точки 0 (початок системи координат) по осі абсцис. Від значення математичного сподівання вправо та вліво відкладаємо відрізки довжиною в одне квадратичне відхилення. Виконані вказаним способом побудови подано нижче, на **рис.1.**



ЗАДАЧА 6. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \text{ÿêù î}\ õ \le \alpha+\beta-1 \\ \dfrac{\left(õ-\alpha-\beta+1\right)^2}{\left(2\left(\alpha+\beta\right)+1\right)^2},\ \text{ÿêù î}\ \alpha+\beta-1< õ \le 3(\alpha+\beta) \\ 1\ ,\ \text{ÿêù î}\ õ > 3(\alpha+\beta) \end{cases}$$

Знайти :

1) щільність розподілу ймовірності (диференціальну функцію);

2) математичне сподівання ***M(X)*****;**

3) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

4) середнє квадратне відхилення $\sigma = \sigma(\tilde{O})$;

ймовірність $Đ\left(\alpha + \beta < \tilde{o} < \frac{5(\alpha+\beta)}{2}\right)$

5) побудувати графіки інтегральної $F(x)$**,** на диференціальної $f(\tilde{o})$ функцій.

Методичні рекомендації

Інтегральною функцією розподілу називають функцією $F(x)$, яка визначає для кожного значення х ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення менше x , тобто $F(x) = Đ(\tilde{O} < \tilde{o})$.

Диференціальною функцією розподілу ймовірностей (щільністю розподілу ймовірностей) називають першу похідну від інтегральної функції $f(\tilde{o}) = F'(x)$.

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $(\grave{a}, b)$ дорівнює приросту інтегральної функції на цьому інтервалі:

$$Đ(\grave{a} < X < b) = F(b) - F(\grave{a}). \tag{3.9}$$

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (a;b) дорівнює визначеному інтервалу від диференціальної функції взятому в межах від a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \tag{3.10}$$

Доведено, що невластивий інтеграл від диференціальної функції $f\left(\tilde{o}\right)$ в межах $+\infty$ від $-\infty$ до дорівнює одиниці :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad (3.11)$$

Якщо неперервна випадкова величина X приймає можливі значення тільки із інтервалу $\left(\grave{a},b\right)$, тобто $f\left(\tilde{o}\right) = 0$ для всіх x, які не належать $\left(\grave{a},b\right)$, то визначений інтеграл від такої диференціальної функції в межах від a до b дорівнює одиниці :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1 \qquad (3.12)$$

Якщо для неперервної випадкової величини X відома диференціальна функція $f\left(\tilde{o}\right)$, то її інтегральну функцію $F(x)$ можна знайти за допомогою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\tilde{o}} f(x)dx \qquad (3.13)$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать всій осі OX , визначаються за формулою:

$$\grave{I}\left(\tilde{O}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}\, f(x)dx, \qquad (3.14)$$

де $f\left(\tilde{o}\right) -$ диференціальна функція. При цьому припускаємо, що невластивий інтеграл збігається абсолютно.

Якщо ж всі можливі значення неперервної випадкової величини X належать інтервалу $\left(\grave{a},b\right)$, то

$$\grave{I}\left(\tilde{O}\right) = \int_{a}^{b} \tilde{o}\, f(x)dx. \qquad (3.15)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать всій осі OX, визначається рівністю:

$$D(\tilde{O}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \grave{I}\ \ (X))^2 f(x)dx \tag{3.16}$$

або рівносильною рівністю:

$$D(\tilde{O}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{o}^2 f(x)dx - (\grave{I}\ \ \ (X))^2. \tag{3.17}$$

Якщо ж всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(\grave{a};b)$ то дисперсія знаходиться за формулами:

$$D(\tilde{O}) = \int_{a}^{b} (x - \grave{I}\ \ (\tilde{O}))^2 f(x)dx \tag{3.18}$$

або

$$D(\tilde{O}) = \int_{a}^{b} \tilde{o}^2 f(x)dx - \left(\grave{I}\ \ \ \left(\tilde{O}\right)\right)^2 \tag{3.19}$$

Середнє квадратичне відхилення для неперервної випадкової величини X визначається так же, як і для дискретної випадкової величини:

$$\sigma \ = \ \sigma\left(\tilde{O}\right) = \sqrt{D(X)}\ . \tag{3.20}$$

Розподіл ймовірностей називають **рівномірним**, якщо в інтервалі (a;b), якому належать всі можливі значення такої випадкової величини, диференціальна функція має стале значення. Таким чином для рівномірного розподілу диференціальна функція має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \text{ÿêùî} \ \tilde{o} \ \le \ \grave{a}; \\ \dfrac{1}{b-a}, \ \text{ÿêùî} \ \grave{a} < \ \tilde{o} \ \le \ b; \\ 0\ , \ \text{ÿêùî} \ \tilde{o} \ > b. \end{cases}$$

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, якщо її диференціальна функція має такий вигляд:

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} å^{-\frac{(õ-à)^2}{2\sigma^2}} \quad ,$$

де a – математичне співвідношення, σ^2 – дисперсія, σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Ймовірність того, що нормально розподіленна випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалу $(\alpha;\beta)$ визначається за формулою:

$$Ð(< õ < \beta) = Ô\left(\frac{\beta - à}{\sigma}\right) - Ô\left(\frac{\alpha - à}{\sigma}\right) \tag{3.21}$$

де $Ô\ (õ) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{õ} å^{\frac{-z^2}{2}} dz$ − функція Лапласа, значення якої приведенні в **таблиці 2** додатку.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення значень нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання α буде меншою чим додатне число δ визначається за формулою:

$$P\left(\left|Õ - à\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{3.22}$$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 6.</u>

Неперервна випадкова величина **X** задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ ÿêù\ î\ õ \le 1; \\ \frac{1}{7}\left(õ^3 - 1\right),\ ÿêù\ î\ 1 < õ \le 2; \\ 1\ ,\ ÿêù\ î\ õ > 2. \end{cases}$$

Знайти: **1)** щільність розподілу ймовірностей (диференціальну функцію) $f(x)$;

2) математичне сподівання ***M(X)*;**

3) дисперсію ***D(X)***- двома способами;

4) середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sigma(\tilde{O})$**;**

5) ймовірність $\text{Đ}(1,5 < X < 3)$ того, що в результаті одного випромінювання величина **X** прийме можливе значення, яке належить інтервалу (1,5;3);

6)побудувати графіки інтегральної ***F(x)*** та диференціальної ***f(x)*** функцій.

<u>Розв'язання:</u>

1) Знайдемо щільність розподілу ймовірностей – диференціальну функцію ***f(x)*** випадкової величини ***X***, Для цього обчислимо похідну по х від заданої інтегральної функції ***F(x)***:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \quad ,\text{ÿêù î } \tilde{o} \le 1; \\ \left(\frac{1}{7}\left(\tilde{o}^3 - 1\right)\right)', \text{ÿêù î } 1 < \tilde{o} \le 2; \\ \quad ,\text{ÿêù î } \tilde{o} > 2. \end{cases}$$

Отже, диференціальна функція ***f(x)*** має такий вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ÿêù î } \tilde{o} \le 1; \\ \frac{3}{7}\tilde{o}^2, \text{ÿêù î } 1 < \tilde{o} \le 2; \\ 0, \text{ÿêù î } \tilde{o} > 2. \end{cases}$$

2) Знаходимо математичне сподівання ***M(X)*** за формулою (3.15), враховуючи що ***x*** є (1;2):

$$\text{Ì}\left(\tilde{O}\right) = \int_a^b x f(x)dx = \int_1^2 x\frac{3}{7}x^2dx = \frac{3}{7}\int_1^2 x^3dx = \frac{3}{7}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2 = \frac{3}{28}x^4\bigg|_1^2 = \frac{3}{28}\left(16-1\right) = \frac{45}{28}$$

Отже маємо, що $\boldsymbol{\grave{I}\ \left(\tilde{O}\right) = \approx 1{,}6071.}$

3) Знайдемо дисперсію ***D(X)*** двома способами:

а) за формулою (3.18)

$$D(\tilde{O}) = \int_a^b (x - \grave{I}\ (X))^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\tilde{o} - \frac{45}{28}\right)^2 \cdot \frac{3}{7}\tilde{o}^2 dx =$$

$$= \frac{3}{7}\int_1^2 \left(x^2 - \frac{45}{14}x + \frac{2025}{784}\right)x^2 dx = \frac{3}{7}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{45}{14}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{2025}{784}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2$$

$$\frac{3}{7}\left(\left(\frac{32}{5} - \frac{90}{7} + \frac{675}{98}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{45}{56} + \frac{675}{784}\right)\right) = \frac{3}{7}\left(\frac{31}{5} - \frac{675}{56} + \frac{4725}{784}\right) = \frac{3}{7}\cdot\frac{679}{3920}$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{24304 - 47205 + 23625}{3920} \approx 0{,}074235.$$

б) за формулою (3.19)

$$D(\tilde{O}) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (\grave{I}\ (X))^2 = \int_1^2 x^2\frac{3}{7}x^2 dx - \left(\frac{45}{28}\right)^2 = \frac{3}{7}\int_1^2 x^4 dx - \frac{2025}{784}$$

$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2 - \frac{2025}{784} = \frac{3}{35}\left(32 - 1\right) - \frac{2025}{784}\frac{93}{35} - \frac{2025}{784} = \frac{291}{3920} \approx 0{,}074235.$$

Виконані обчислення показали, що значення дисперсії ***D(X)*** в обох випадках одне і те ж:

$$D(\tilde{O}) = \frac{291}{3920} \approx 0{,}074235.$$

4) Середнє квадратичне відхилення σ знаходимо за формулою (3.20):

$$\sigma = \sigma\left(\tilde{O}\right) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}074235} \approx 0{,}272.$$

5) Ймовірність $\boldsymbol{\text{Đ}(1{,}5 < X < 3)}$ того, що неперервна випадкова величина ***X*** в результаті одного випробування прийме можливе значення, яке належить інтервалу (1,5;3) можна обчислити двома способами:

а) за формулою (3.9), використовуючи теорему про додавання ймовірностей несумісних подій:

$$\text{Ð}(1,5<X<3)=\ \text{Ð}(1,5<X\le 2)+\text{Ð}(2<X<3)=(F\left(2\right)-F\left(1,5\right))+(F\left(3\right)-F\left(2\right))=$$

$$\left(\frac{1}{7}\left(2^3-1\right)-\frac{1}{7}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3-1\right)\right)+\left(1-1\right)=\frac{1}{7}\left(8-1-\frac{27}{8}+1\right)=\frac{1}{7}\cdot\frac{37}{8}=\frac{37}{56};$$

б) за формулою (3.10) використовуючи властивості визначеного інтегралу:

$$\text{Ð}(1,5<X<3)=\int_{1,5}^{3}f(x)dx=\int_{1,5}^{2}\frac{3}{7}\tilde{o}^2dx+\int_{2}^{3}0dx=\frac{3}{7}\cdot\frac{\tilde{o}^3}{3}\Bigg|_{1,5}^{2}=\frac{1}{7}\left(2^3-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)=$$

$$\frac{1}{7}\left(8-\frac{27}{8}\right)=\frac{1}{7}\cdot\frac{37}{8}=\frac{37}{56}\approx\ 0,6607.$$

Отже, в обох випадках шукана ймовірність одна і та ж:

$$\text{Ð}(1,5<X<3)=\frac{37}{56}\approx 0,66.$$

Графік інтегральної функції ***F(x)*** побудовано на **рис. 1**, а графік диференціальної функції ***f(x)*** побудовано на **рис. 2.**

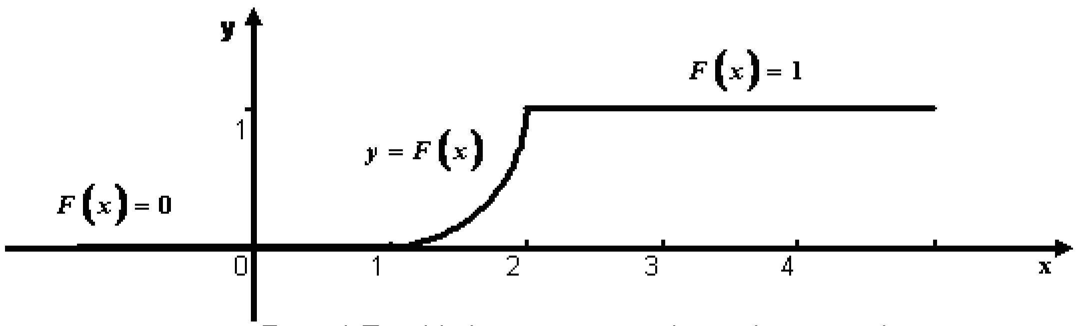


Рис. 1 Графік інтегральної функції розподілу

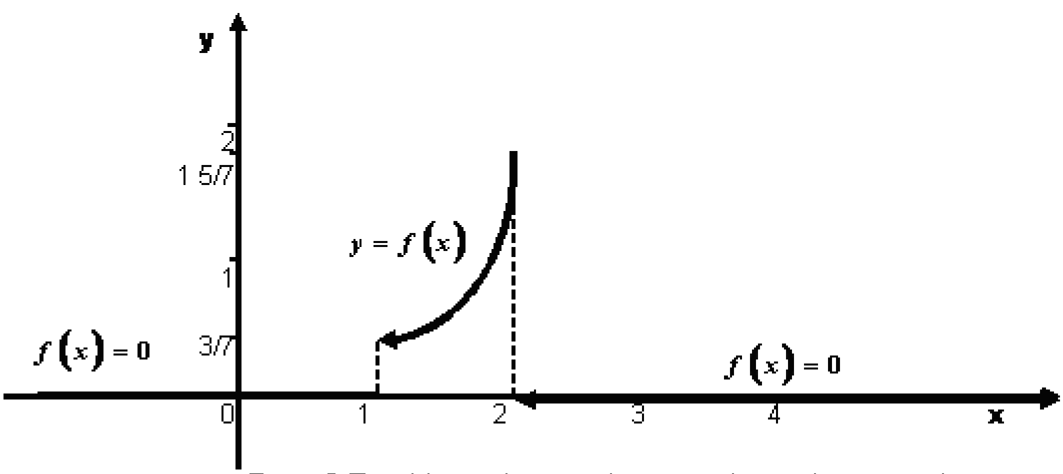


Рис. 2 Графік диференціальної функції розподілу

Елементи математичної статистики. Генеральна сукупність та вибірка.

ЗАДАЧА 7.

На птахофермі виконана вибірка несучості яєць (шт.) у 15 курей.

1) Записати вибірку числа яєць

$\boldsymbol{253+\alpha,\ 238+\alpha,\ 182+\alpha,\ 194+\alpha,\ 182+\ \alpha,\ 215+\ \alpha,\ 178+\ \alpha,\ 184+\ \alpha,}$
$\boldsymbol{194+\ \alpha,\ 182+\ \alpha, 184+\ \alpha,\ 178+\ \alpha,\ 182+\ \alpha,\ 178+\ \alpha,\ 182+\ \alpha,}$

у вигляді варіаційного ряду. Чому дорівнює розмах варіації? Знайти коефіцієнт варіації.

2) Записати вибірку числа яєць

$\boldsymbol{235+\alpha,\ 238+\alpha,\ 192+\alpha,\ 194+\alpha,\ 182+\alpha,\ 215+\alpha,\ 178+\alpha,\ 184+\alpha,\ 194+\alpha,}$
$\boldsymbol{182+\alpha,\ 184+\alpha,\ 178+\alpha,\ 182+\alpha,\ 178+\alpha,\ 182+\alpha,}$

у вигляді статистичного ряду. Чому дорівнює найчастіше значення варіанти?

3) Для вибірки зображеної статистичним рядом знайти емпіричну функцію розподілу $\boldsymbol{F(x)}$. Чому дорівнює $\boldsymbol{F(194+\alpha)}$?

4) Побудувати гістограму відносних частот для вибірки зображеної у вигляді таблиці частот.

Методичні рекомендації

Вибірковою сукупністю (вибіркою) називається сукупність випадково відібраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називається вихідна сукупність об'єктів, з яких робиться вибірка.

Об'єктом сукупності (вибіркової або генеральної) називається число об'єктів цієї сукупності.

Нехай з генеральної сукупності значень дискретної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ зроблено вибірку, причому значення $\boldsymbol{\tilde{o}_1}$ спостерігається $\boldsymbol{n_1}$ разів, $\boldsymbol{x_2 - n_2}$ разів, $\boldsymbol{x_k - n_k}$ разів і $\boldsymbol{\sum n_i = n}$ - об'єм вибірки.

Значення x_i, які спостерігаються, називаються варіантами, послідовність варіант, які записано в зростаючому порядку — варіаційним рядом. Числа спостережень називають **частотами**, а їх відношення до об'єму вибірки $\frac{n_i}{n} = Wi$ **— відносними частотами.**

Розмах варіації це різниця між максимальним та мінімальним значенням ознаки:

$$R = x_{\max} - x_{\min} \tag{4.1}$$

Коефіцієнт варіації — це процентне відношення середнього квадратичного відхилення до середнього арифметичного.

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\,\%\ , \tag{4.2}$$

де середнє арифметичне :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\ ; \tag{4.3}$$

середнє квадратичне відхилення отримують як корінь квадратний з дисперсії:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}\ . \tag{4.4}$$

Статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант і відповідних до них частот або відносних частот.

Позначимо $n_{\tilde{o}}$ – число спостережень, при яких спостерігались значення кількісної ознаки $\tilde{O} < \tilde{o}$; n – загальне число спостережень. **Емпіричною функцією розподілу** називають функцію $F\left(\tilde{o}\right) = \frac{n_x}{n}$.

Поділимо інтервал, у якому містяться усі значення ознаки X, які спостерігаються, на декілька частинних інтервалів довжиною h і знайдемо для кожного частинного інтервалу значення $n_з$- суму частот, які містяться у i - тому інтервалі. **Гістограмою частот** називають ступінчату фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{n}$, яке називають щільністю частоти. **Гістограмою відносних частот** називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, і висоти дорівнюють відношенню $\frac{Wi}{h}$, яке називають щільністю відносної частоти.

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 7.</u>

На птахофермі зроблена вибірка несучості яєць (шт.) у 15 курей.

1) Записати вибірку числа яєць:

264, 249, 193, 205, 193, 226, 189, 195, 205, 193, 195, 189, 193,189,193

у вигляді варіаційного ряду. Знайти розмах варіації R. Знайти коефіцієнти варіації V.

2) Записати вибірку яєць:

264, 249, 193, 205, 193, 226, 189, 195, 205, 193, 195, 189, 193, 189, 193

у вигляді статистичного ряду. Чому дорівнює найчастіше значення варіанти?

3) Для вибірки зображеної статистичним рядом знайти емпіричну функцію розподілу $F(x)$. Чому дорівнює $F(205)$?

4) Побудувати гістограму відносних частот для вибірки зображеної у вигляді таблиці частот.

<u>Розв´язання :</u>

1) Для запису вибірки у вигляді варіаційного ряду треба розташувати послідовність варіант у зростаючому порядку. Отже варіаційний ряд несучості має вигляд:

189, 189, 189, 193, 193, 193, 193, 193, 195, 195, 205, 205, 226, 249, 264.

Розмах варіації R знайдемо за формулою (4.1)

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 264 - 189 = 75.$$

Для визначення коефіцієнта варіації V, визначимо спочатку $\bar{x}$ - середнє арифметичне за формулою (4.3)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

$$= \frac{189+189+189+193+193+193+193+193+195+195+205+205+226+249+264}{15} =$$

$$= \frac{3071}{15} \approx 204,73.$$

$x_1 - \bar{x} = 189 - 204,73 = -15,73$; $x_2 - \bar{x} = 189 - 204,73 = -15,73$;

$x_3 - \bar{x} = 189 - 204,73 = -15,73$; $x_4 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$;

$x_5 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$; $x_6 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$;

$x_7 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$; $x_8 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$;

$x_9 - \bar{x} = 193 - 204,73 = -11,73$; $x_{10} - \bar{x} = 195 - 204,73 = -9,73$;

$x_{11} - \bar{x} = 205 - 204,73 = 0,27$; $x_{12} - \bar{x} = 205 - 204,73 = 0,27$;

$x_{13} - \bar{x} = 226 - 204,73 = 21,27$; $x_{14} - \bar{x} = 249 - 204,73 = 44,27$;

$x_{15} - \bar{x} = 264 - 204,73 = 59,27$.

Визначимо середнє квадратичне відхилення за формулою (4.4):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}} =$$

$$\sqrt{\frac{(-15,73)^2 + (-15,73)^2 + (-15,73)^2 + (-11,73)^2 + (-11,73)^2 + (-11,73)^2 + (-11,73)^2 + (-11,73)^2 + (-9,73)^2 + (-9,73)^2 + 0,27^2 + 0,27^2 + 21,27^2 + 44,27^2 + 59,27^2}{15}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7544,9335}{15}} = \sqrt{502,9955} \approx 22,4276$$

Коефіцієнт варіації V за формулою (4.2):

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{22,4276}{204,47} \cdot 100\% \approx 10,97.$$

2) Знайдемо перелік варіант у зростаючому порядку, а також відповідні частоти, дістанемо статистичний ряд у вигляді:

x_i	189	193	195	205	226	249	264
n_i	3	5	2	2	1	1	1

Оскільки значення варіанти 193 спостерігалось найчастіше число разів, то 193 є найчастіше значення варіанти.

3) Знайдемо об'єм вибірки:$\boldsymbol{n} = \mathbf{3+5+2+2+1+1+1=15}$

Найменша варіанта дорівнює 189, отже $F(\tilde{o}) = 0$ при $\tilde{o} \le 189$.

Значення $\tilde{O} < 193$, саме $x_1 = 189$ спостерігалось 3 рази, звідси , що

$F(\tilde{o}) = \dfrac{3}{15} = 0{,}2$ при $189 < X \le 193$.

Значення $\tilde{O} < 195$, саме $x_1 = 189$, $x_2 = 193$ спостерігалось 3+5=8 разів,

звідси , що $F(\tilde{o}) = \dfrac{8}{15} = 0{,}53$ при $193 < X \le 195$.

Значення $\tilde{O} < 205$, саме $x_1 = 189$, $x_2 = 193$, $x_3 = 195$ спостерігалось

3+5+2=10 разів, звідси , що $F(\tilde{o}) = \dfrac{10}{15} = 0{,}66$ при $195 < X \le 205$.

Значення $\tilde{O} < 226$, саме $x_1 = 189$,

$x_2 = 193$, $x_3 = 195$, $x_4 = 205$ спостерігалось 3+5+2+2=12 разів, звідси , що

$F(\tilde{o}) = \dfrac{12}{15} = 0{,}8$ при $205 < X \le 226$.

Значення $\tilde{O} < 249$, саме $x_1 = 189$, $x_2 = 193$, $x_3 = 195$, $x_4 = 205$, $x_5 = 226$

спостерігалось 3+5+2+2+1=13 разів, звідси, що $F(\tilde{o}) = \dfrac{13}{15} = 0{,}87$ при

$226 < \tilde{o} \le 249$.

Значення $\tilde{O} < 264$, саме $x_1 = 189$, $x_2 = 193$, $x_3 = 195$, $x_4 = 205$, $x_5 = 226$

$x_6 = 249$ спостерігалось 3+5+2+2+1+1=14 разів, звідси, що

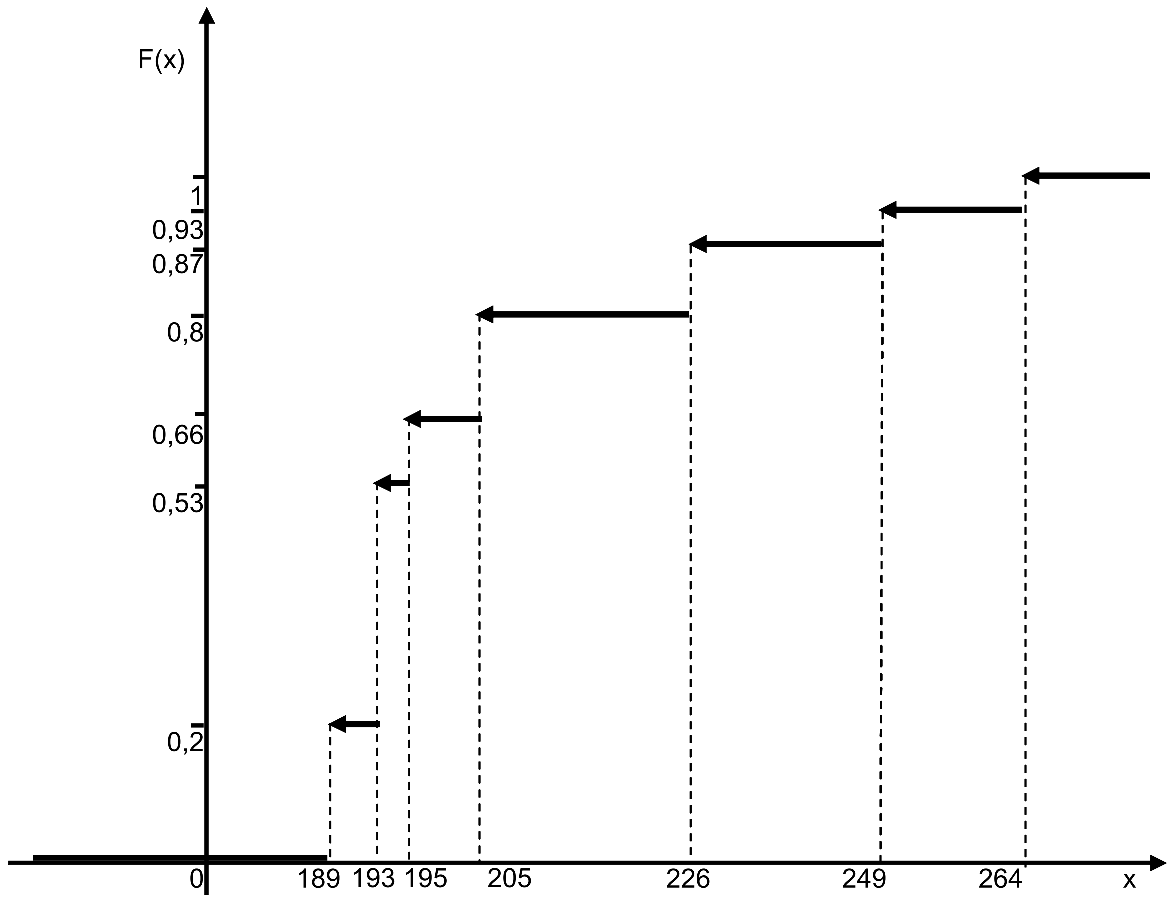
$F(\tilde{o}) = \dfrac{14}{15} = 0{,}93$ при $249 < X \le 264$. .

Оскільки 264 це найбільше значення варіанти, то $\boldsymbol{F\left(\tilde{o}\right)=1}$ при $\boldsymbol{X>264}$.

Шукана емпірична функція:

$$\boldsymbol{F\left(\tilde{o}\right)=\begin{cases} 0 \quad \text{ï ðè} \quad \tilde{o}\le 189; \\ 0{,}2 \quad \text{ï ðè} \quad 189<\tilde{o}\le 193; \\ 0{,}53\,\text{ï ðè} \quad 193<\tilde{o}\le 195; \\ 0{,}66\,\text{ï ðè} \quad 195<\tilde{o}\le 205; \\ 0{,}8 \quad \text{ï ðè} \quad 205<\tilde{o}\le 226; \\ 0{,}87\,\text{ï ðè} \quad 226<\tilde{o}\le 249; \\ 0{,}93\,\text{ï ðè} \quad 249<\tilde{o}\le 264; \\ 1 \quad \text{ï ðè} \quad \tilde{o}>264. \end{cases}}$$

Графік цієї функції зображено на малюнку:



Значення **F(205)** дорівнює **0,66** , оскільки ***F(x)*= 0,66** при $\boldsymbol{195<X\le 205}$.

Елементи математичної статистики. Вибіркове середнє. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

ЗАДАЧА 8.

Надій молока за одну лактацію (у літрах) в 15 корів становив:

$\mathbf{40\alpha; 41\alpha; 42\alpha; 43\ \alpha; 43{,}5\alpha; 44\alpha; 45\alpha; 47\alpha; 49\alpha; 52\alpha; 55\alpha; 56\alpha; 59\alpha; 61\alpha; 61{,}5\alpha.}$

Знайти:

1. Вибіркову середню надою молока $\overline{\tilde{o}}$.
2. Вибіркову дисперсію помилок вимірювання величини надою.
3. Вибіркову середню квадратів величини надою молока
4. Число $\overline{\tilde{o}^2} - \left(\overline{\tilde{o}}\right)^2$.
5. Виправлену вибіркову дисперсію помилок вимірювання надою молока.

Методичні рекомендації

Вибірковою середньою $\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}}$ називають середнє арифметичне спостережуваних значень ознаки вибіркової сукупності. Якщо всі значення $\tilde{o}_1$, $\tilde{o}_2$, ..., $\tilde{o}_n$ ознаки об’єму n різні, то:

$$\overline{x_{\hat{a}}} = \frac{\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}. \qquad (4.5)$$

Якщо значення ознаки $\tilde{o}_1$, $\tilde{o}_2$, ..., $\tilde{o}_n$ мають відповідні частоти n_1, n_2, ..., n_k , при чому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то:

$$\overline{x_{\hat{a}}} = \frac{\left(n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k\right)}{n} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)}{n}. \qquad (4.6)$$

Вибірковою дисперсією $D_{\hat{a}}$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення спостережуваних значень ознаки від їх середнього значення $\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}}$.

Якщо всі значення n_1, n_2, ..., n_k ознаки вибірки об’єму n різні, то:

$$D_{\hat{a}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_{\hat{a}}}\right)^2\right)}{n} . \tag{4.7}$$

Якщо значення ознаки $\tilde{o}_1$, $\tilde{o}_2$, ..., $\tilde{o}_n$ мають відповідні частоти n_1, n_2, ..., n_k причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то:

$$D_{\hat{a}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \overline{x_{\hat{a}}}\right)^2\right)}{n} . \tag{4.8}$$

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називають квадратичний корінь з вибіркової дисперсії:

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{D_{\hat{a}}} . \tag{4.9}$$

Дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат загальної середньої :

$$D = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 . \tag{4.10}$$

Генеральною дисперсією називають середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\overline{\tilde{o}_{\hat{a}}}$.

За оцінку генеральної дисперсії беруть виправлену вибіркову дисперсію, яка звичайно позначається S^2 і знаходиться за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\hat{a}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x_{\hat{a}}} \right)^2}{n-1}. \qquad (4.11)$$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 8</u>

В результаті вимірювання вмісту пересувних форм фосфатів у орному шарі ґрунту здобуті наступні результати (%):

6,5; 7,5; 12; 14; 15; 16; 17,5; 18,5; 22; 23; 24; 25; 27; 27,5; 28.

Знайти:

1. Вибіркову середню величини вмісту фосфатів $\overline{x}$.
2. Вибіркову дисперсію помилок вимірювання величини вмісту фосфатів.
3. Вибіркову середню квадратів величини вмісту фосфатів.
4. Число $\overline{\tilde{o}^2} - \left(\overline{\tilde{o}}\right)^2$.
5. Виправлену вибіркову дисперсію помилок вимірювання вмісту фосфатів.

<u>Розв'язування :</u>

1) Оскільки всі значення вибірки різні використаємо формулу (4.5):

$$\overline{x_{\hat{a}}} = \frac{\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)}{n}.$$

Отже для даних задачі $n = 15$

$$\overline{x} = \frac{6{,}5 + 7{,}5 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17{,}5 + 18{,}5 + 22 + 23 + 24 + 25 + 27 + 27{,}5 + 28}{15} =$$

$$= \frac{283{,}5}{15} = 18{,}9$$

2) Знайдемо вибіркову дисперсію помилок вимірювання величини вмісту фосфатів за формулою (4.7)

$$D_{\hat{a}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x_{\hat{a}}} \right)^2 \right)}{n}.$$

Отже:

$$D_{\hat{a}} = \frac{(6,5+18,9)^2 + \left(7,5-18,9\right)^2 + \left(12-18,9\right)^2 + \left(14-18,9\right)^2 + \left(15-18,9\right)^2 + \left(16-18,9\right)^2 +}{15}$$

$$+\frac{\left(17,5-18,9\right)^2 + \left(18,5-18,9\right)^2 + \left(22-18,9\right)^2 + \left(23-18,9\right)^2 + \left(24-18,9\right)^2 + \left(25-18,,9\right)^2}{15} +$$

$$+\frac{\left(27-18,9\right)^2 + \left(27,5-18,9\right)^2 + \left(28-18,9\right)^2}{15} = \frac{693,1}{15} = 46,21$$

3) Вибіркову середню квадратів величини вмісту фосфатів $\overline{x^2}$ знайдемо таким чином:

$$\overline{x^2} = \frac{6,5^2 + 7,5^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17,5^2 + 18,5^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 27^2 + 27,5^2 + 28^2}{15} =$$

$$= \frac{6051,25}{15} = 403,42$$

4) Дисперсію $D_{\hat{a}}$ знайдемо використавши формулу (4.10)

$$D_{\hat{a}} = \overline{\tilde{o}^2} - \left(\overline{\tilde{o}}\right)^2;$$

$$D_{\hat{a}} = 403,42 - \left(18,9\right)^2 = 403,42 - 357,21 = 46,21.$$

5). Виправлена вибіркова дисперсія помилок вимірювання величини вмісту фосфатів знаходиться за формулою (4.11):

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\hat{a}};$$

$$S^2 = \frac{15}{14} \cdot 46,21 \approx 49,51.$$

Кореляційно-регресійний метод аналізу. Визначення параметрів лінійної регресії методом найменших квадратів.

ЗАДАЧА 9.

Дано дослідні дані кореляції жирності молока y_i корів - дочок від жирності молока x_i їх матерів:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y_i %	2.87+0.01α	2.39+0.01α	2.75+0.01α	2.63+0.01α	2.96+0.01α	2.65+0.01α
x_i %	2.63+0.01α	2.35+0.01α	3.1+0.01α	2.63+0.01α	2.69+0.01α	2.82+0.01α
n	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
y_i %	2.71+0.01α	2.43+0.01α	2.65+0.01α	2.58+0.01α	2.15+0.01α	2.67+0.01α
x_i %	2.67+0.01α	2.17+0.01α	2.65+0.01α	2.77+0.01α	2.18+0.01α	2.12+0.01α

За допомогою методу найменших квадратів знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{x}$ у формі:

$\boldsymbol{Y = r_{yx} x + b}$ та регресії $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{y}$ в формі $\boldsymbol{X = r_{xy} y + d}$.

У відповіді вказати:

1. Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r_{yx}}$ регресії **Y** на $\boldsymbol{x}$.

2. Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r_{xy}}$ регресії $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{y}$.

3. Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r}$ лінійної кореляції.

4. Значення параметрів $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{d}$.

5. Побудувати графік залежності жирності $\boldsymbol{Y}$ молока корів дочок від жирності **x** молока їх матерів, та графік залежності жирності $\boldsymbol{X}$ молока корів матерів від жирності **y** молока їх дочок.

Методичні рекомендації

Нехай кожному значенню деякої кількості ознаки, яку позначимо $\boldsymbol{X}$, відповідає розподіл значень кількісної ознаки y (тобто декілька значень y з різними ймовірностями кожного з них). Така сама відповідь існує між кожним значенням величини у і зв'язаними з ним значеннями x.

На основі результатів спостережень за значеннями змінних x і y складається таблиця, яку називаємо **кореляційною**:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	n_x
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	n_{x1}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2m}	n_{x2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{km}	n_{xk}
n_y	n_{y1}	n_{y2}	$\dots$	n_{ym}	N

де $\sum_{l} n_{ij} = n_x i \quad , i = 1,2,3,\dots,k;$

$$\sum_{j} n_{ij} = n_{yj} \quad , j = 1,2,3,\dots,m;$$

$$\sum_{i} n_{xi} = \sum_{d} n_{yj} = N .$$

Сукупність чисел у кожному рядку - це ряд розподілу значень y відповідно даному значенню x.

Сукупність чисел у стовбці — ряд розподілу значень x відповідних даному значенню y.

Обробка даних кореляційності дає можливість встановити форму кореляційного зв’язку між змінними x та y. Кожному значенню x поставимо у відповідність середнє значення y, яке позначимо $\overline{y_x}$ і обчислимо за правилом визначення середньої зваженої.

Графічне зображення точок, які відповідають парам $\left(x;\overline{y_x}\right)$ з послідовним сполученням усіх точок відрізками прямих дає ламану, яка називається **емпіричною лінією регресії *Y* на *x*** і аналітично визначається параметрами лінійної функції:

$$Y = ax + b. \qquad (5.1)$$

Аналогічно кореляційна залежність між у та $\overline{x_y}$ визначається рівнянням:

$$X = cy + d. \qquad (5.2)$$

Для відшукування за способом найменших квадратів коефіцієнтів a і b використовується система нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum n_x x^2 + b\sum n_x x = \sum n_x x\overline{y_x} \\ a\sum n_x x + b\sum n_x x = \sum n_x x\overline{y_x} \end{cases}$$

Після перетворень цієї системи і підстановки в рівняння (5.1), можна дістати рівняння: $Y - \overline{y} = a\left(x - \overline{x}\right)$

Коефіцієнт a в рівнянні прямої регресії називають **коефіцієнтом прямої регресії *Y*** на x і позначають r_{yx}, отже:

$$Y - \overline{y} = r_{yx}\left(x - \overline{x}\right). \qquad (5.3)$$

Коефіцієнти r_{yx} можна знайти за формулою:

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}. \qquad (5.4)$$

При $r_{yx} > 0$ лінія регресії буде зростаючою, при $r_{yx} < 0$ - спадаючою, а при $r_{yx} = 0$ $(Y = \hat{a} =)$

графік залежності Y від x зображується лінією, паралельною осі x. Це вказує на відсутність залежності Y від X.

Аналогічно:

$$X - \bar{x} = r_{xy}\left(y - \bar{y}\right), \quad r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2}. \qquad (5.5)$$

При $r_{yx} > 0$ лінія регресії буде зростаючою, при $r_{yx} < 0$ - спадаючою, а при $r_{yx} = 0(\tilde{O} = d =)$

графік залежності X від y зображується лінією, паралельною осі y. Це вказує на відсутність залежності X від y

За міру лінійного кореляційного зв'язку береться **коефіцієнт кореляції** r, який можна обчислити за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2}\sqrt{\overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2}}. \qquad (5.6)$$

Коефіцієнт кореляції r може приймати значення від 0 до ± 1. Чим більше значення $|r|$, тим більший зв'язок між ознаками. При $r \to \pm 1$ маємо прямолінійну залежність між величинами x та y (зростання у випадку $r \to \pm 1$, спадання у випадку $r \to -1$). При $r \to 0$ прямолінійний зв'язок відсутній. Отже, коефіцієнт кореляції r є критерієм прямолінійної залежності між двома величинами x та y.

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 9</u>

Дано дослідні данні кореляції жирності молока y_i 15 корів – дочок від жирності молока x_i їх матерів:

n	1	2	3	4	5	6	7
y_i %	3,89	3,36	3,79	3,45	3,98	3,61	3,71
x_i %	3,65	3,34	4,05	3,45	3,65	3,80	3,61
n	7	8	9	10	11	12	14
y_i %	3,44	3,61	3,57	3,11	3,65	3,28	3,56
x_i %	3,27	3,61	3,76	3,17	3,0	3,31	3,48

За допомогою методу найменших квадратів знайти вибіркове рівняння прямої лінії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{x}$ у формі :

$$\boldsymbol{Y = r_{yx} x + b}$$

та регресії $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{y}$ у формі:

$$\boldsymbol{X = r_{xy} y + d}$$

У відповіді вказати:

1) Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r_{yx}}$ регресії $\boldsymbol{Y}$ $\boldsymbol{x}$ на.

2) Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r_{xy}}$ регресії $\boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{y}$ на.

3) Числове значення вибіркового коефіцієнта $\boldsymbol{r}$ лінійної кореляції. Зробити висновки.

4) Значення параметрів $\boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{d}$.

5) Побудувати графік залежності жирності $\boldsymbol{Y}$ молока корів-дочок від жирності $\boldsymbol{x}$ молока їх матерів, та графік залежності жирності $\boldsymbol{X}$ молока корів-дочок від $\boldsymbol{y}$ молока їх дочок.

<u>Розв´язання:</u>

1. Для знаходження коефіцієнта $\boldsymbol{r_{yx}}$ використовуємо формулу (5.4)

$$\boldsymbol{r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}}.$$

Знаходимо відповідні середні значення:

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{3{,}65 + 3{,}34 + 4{,}05 + 3{,}45 + 3{,}65 + 3{,}80 + 3{,}61 + 3{,}27 + 3{,}61 + 3{,}76 + 3{,}17 + 3{,}0 + 3{,}31 + 3{,}48 + 3{,}72}{15}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{52.8700}{15} = 3.5247};$$

$$\boldsymbol{\overline{y} = \frac{3.89 + 3.36 + 3.79 + 3.45 + 3.98 + 3.61 + 3.71 + 3.44 + 3.61 + 3.57 + 3.11 + 3.65 + 3.28 + 3.56 + 3.63}{15}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{53.6400}{15} = 3.5760};$$

$$\overline{xy}=\frac{3.89\cdot 3.65+3.36\cdot 3.34+3.79\cdot 4.05+3.45\cdot 3.45+3.98\cdot 3.65+3.61\cdot 3.80+3.71\cdot 3.61+3.44\cdot 3.27}{15}+$$

$$+\frac{3.61\cdot 3.61+3.57\cdot 3.76+3.11\cdot 3.17+3.65\cdot 3.0+3.28\cdot 3.31+3.56\cdot 3.48+3.63\cdot 3.72}{15}=$$

$$=\frac{189.5730}{15}=12.6382$$

$$\overline{x^2}=\frac{3.65^2+3.34^2+4.05^2+3.45^2+3.65^2+3.80^2+3.61^2+3.27^2+3.61^2+3.76^2+3.17^2+3.0^2+3.31^2}{15}+$$

$$+\frac{3.48^2+3.72^2}{15}=\frac{187.3941}{15}=12.4929;$$

$$\left(\overline{x}\right)^2=\left(3.5247\right)^2=12.4235.$$

Підставляючи ці значення у формулу (5.4) маємо:

$$r_{yx}=\frac{12,6382-3,5247\cdot 3,5760}{12,4929-12,4235}=\frac{0,03387}{0,0694}=0,4879.$$

2. Для знаходження коефіцієнта кореляції r_{xy} використовуємо формулу (5.5):

$$r_{xy}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2}.$$

Значення $\overline{xy}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$ — знайдені.

Знаходимо $\overline{y^2}$ та $\left(\overline{y}\right)^2$:

$$\overline{y^2}=\frac{3.89^2+3.36^2+3.79^2+3.45^2+3.98^2+3.61^2+3.71^2+3.44^2+3.61^2+3.57^2+3.11^2+3.65^2}{15}+$$

$$+\frac{3.28^2+3.56^2+3.63^2}{15}=\frac{192.5390}{15}=12.8359;$$

$$\left(\overline{y}\right)^2=\left(3.5760\right)^2=12.7878.$$

Підставляючи у формулу (5.5) маємо:

$$r_{xy}=\frac{12.6382-3.5247\cdot 3.5760}{12.8359-12.7878}=\frac{0.03387}{0.0481}=0.7059.$$

3. Значення вибіркового коефіцієнта r лінійної кореляції знайдемо за формулою (5.6):

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}\sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}}.$$

$$r = \frac{12.6382 - 3.5247 \cdot 3.5760}{\sqrt{12.4929 - 12.4235} \cdot \sqrt{12.8359 - 12.7878}} = \frac{0.03387}{0.0577} \approx 0.5869.$$

Кореляційний зв'язок між жирністю молока $\boldsymbol{Y}$ у корів дочок і жирністю молока $\boldsymbol{X}$ їх матерів є досить значним.

4) Запишемо рівняння прямої регресії $\boldsymbol{Y}$ на $\boldsymbol{x}$:

$$Y - \overline{y} = r_{yx}\left(x - \overline{x}\right)$$
$$Y - 3.5760 = 0.4879 \cdot \left(x - 3.5247\right)$$
$$Y = 0.4879x + 1.8562$$

Отже , $\boldsymbol{b = 1,5862}$.

Запишемо рівняння прямої регресії $\boldsymbol{X}$ на $\boldsymbol{y}$:

$$X - \overline{x} = r_{xy}\left(y - \overline{y}\right)$$
$$X - 3.5247 = 0.7059\left(y - 3.5760\right)$$
$$X = 0.7059y + 1.0005$$

Отже, $\boldsymbol{d = 1,0005.}$

З рівнянь лінійної регресії видно, що залежність жирності молока корів дочок від жирності молока їх матерів слабша порівняно з протилежною залежністю, оскільки $r_{xy} > r_{yx}$ $\left(0,7059 > 0,4879\right)$

Знайдемо точки перетину цих прямих з осями координат. У випадку прямої $Y = 0.4879\tilde{o} + 1.8562$: при $\tilde{o} = 0$ отримаємо $\acute{o} = 1.8562$; при $\acute{o} = 0$ маємо $\tilde{o} = -3.8045.$

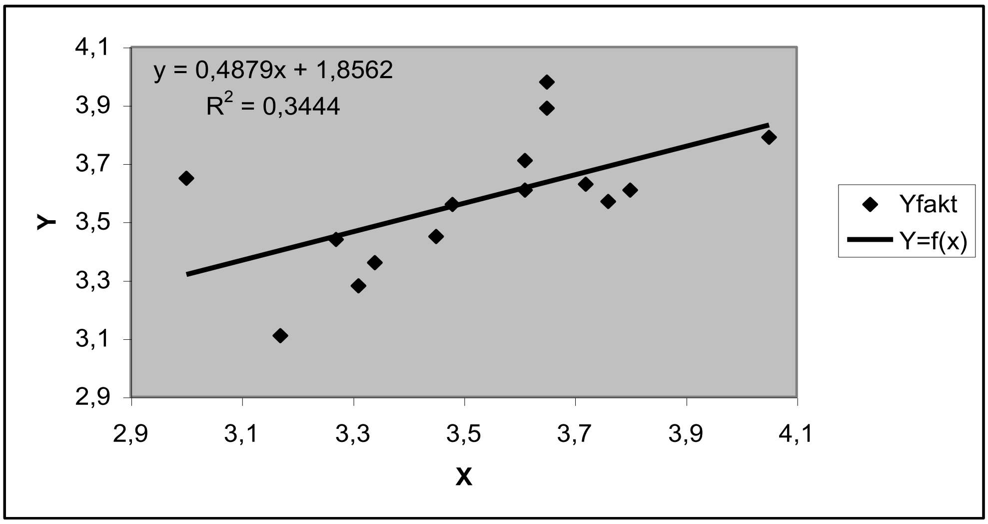
Отже, точки перетину цієї прямої з осями є: (0;1.8562) і (-3.8045; 0).

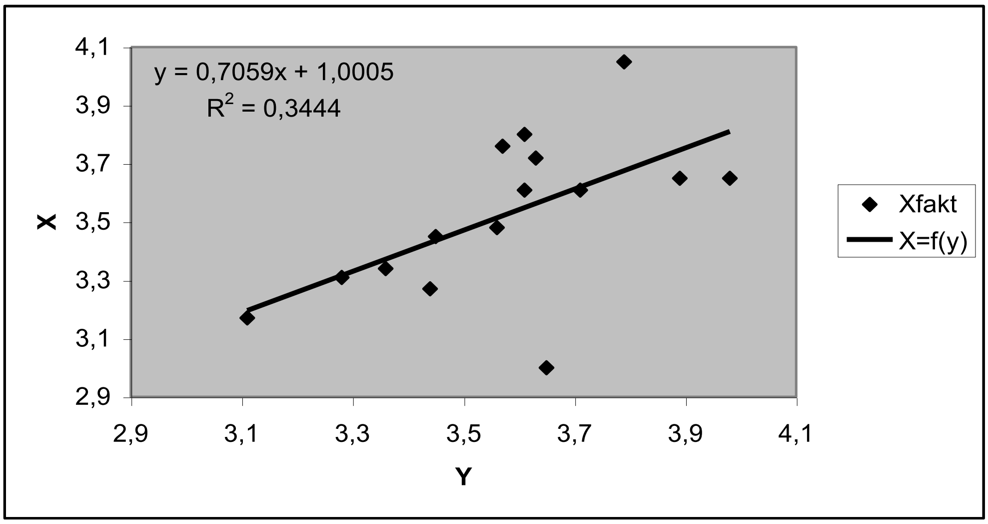
Аналогічно для другої прямої $\tilde{o} = 0.7059\acute{o} + 1.0005$: при $\acute{o} = 0$ отримаємо $\tilde{o} = 1.0005$; при $\tilde{o} = 0$ маємо $\acute{o} = -1.4173$.

Точки перетину - (1.0005; 0); (0;- 1.4173)

Кореляційно-регресійний метод аналізу зручно проводити, використовуючи **Microsoft Excel.**

N	Y	X	Y*X	X*X	Y*Y		
1	3,89	3,65	14,1985	13,3225	15,1321	Ryx=	0,4879
2	3,36	3,34	11,2224	11,1556	11,2896	Rxy=	0,7059
3	3,79	4,05	15,3495	16,4025	14,3641	R=	0,5869
4	3,45	3,45	11,9025	11,9025	11,9025		
5	3,98	3,65	14,5270	13,3225	15,8404		
6	3,61	3,80	13,7180	14,4400	13,0321		
7	3,71	3,61	13,3931	13,0321	13,7641		
8	3,44	3,27	11,2488	10,6929	11,8336		
9	3,61	3,61	13,0321	13,0321	13,0321		
10	3,57	3,76	13,4232	14,1376	12,7449		
11	3,11	3,17	9,8587	10,0489	9,6721		
12	3,65	3,00	10,9500	9,0000	13,3225		
13	3,28	3,31	10,8568	10,9561	10,7584		
14	3,56	3,48	12,3888	12,1104	12,6736		
15	3,63	3,72	13,5036	13,8384	13,1769		
Symma	**53,6400**	**52,8700**	**189,5730**	**187,3941**	**192,5390**		
Sredne	**3,5760**	**3,5247**	**12,6382**	**12,4929**	**12,8359**		





Задача лінійного програмування

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

ЗАДАЧА 10. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування. Знайти найбільше та найменше значення цільової функції за даними умовами.

1. $Z = \tilde{O}_1 + 6\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 8\tilde{O}_1 + 7\tilde{O}_2 \le 56 \\ 3X_1 + 5X_2 \ge 15 \\ 5X_1 + 3X_2 \ge 15 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

2. $Z = \tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 10 \\ X_1 + X_2 \le 1 \\ X_2 \ge 1 \\ X_2 \le 4, X_1 \ge 0 \end{cases}$$

3. $Z = 7\tilde{O}_1 + 3\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 10X_1 + 9X_2 \le 90 \\ -X_1 + 9X_2 \le 6 \\ 6X_1 + 5X_2 \le 30 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

4. $Z = \tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \le 3 \\ X_1 + X_2 \le 6 \\ -X_1 + 3X_2 \le 10 \\ X_1 + 4X_2 \ge 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

5. $Z = 2\tilde{O}_1 - 4\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 11 \\ X_1 + X_2 \le 6 \\ X_1 - X_2 \le 2 \\ -2X_1 + 4X_2 \ge 4 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. $Z = 3\tilde{O}_1 + 4\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \le 20 \\ -X_1 + 4X_2 \le 20 \\ X_1 \ge 5 \\ X_2 \ge 5 \end{cases}$$

7. $Z = \tilde{O}_1 + \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 - X_2 \le 2 \\ X_1 + X_2 \le 2 \\ X_1 - 2X_2 \le 1 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

8. $Z = \tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 10 \\ -X_1 + X_2 \le 4 \\ X_1 \le 5 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. $Z = 4\tilde{O}_1 + 3\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \le 10 \\ X_1 + 2X_2 \ge 2 \\ -X_1 + 3X_2 \le 3 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

10. $Z = -\tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 4X_1 + 5X_2 \le 20 \\ 7X_1 + 3X_2 \le 21 \\ 2X_1 + X_2 \ge 2 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

11. $Z = 3\tilde{O}_1 - 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \le 10 \\ -3X_1 + 4X_2 \ge -12 \\ 2X_1 + 4X_2 \le 12 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

12. $Z = 2\tilde{O}_1 - \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 12 \\ -2X_1 + X_2 \le 4 \\ X_1 - 3X_2 \le 0 \\ X_1 + 2X_2 \ge 2 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

13. $Z = \ -\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 \ge 10 \\ X_1 + X_2 \le 4 \\ -4X_1 + 2X_2 \ge -8 \\ X_1 - 2X_2 \le 0 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

14. $Z = 2\tilde{O}_1 - 3\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} -5X_1 + 3X_2 \le 15 \\ -2X_1 + 3X_2 \ge 0 \\ X_1 + X_2 \ge 2 \\ 2X_1 + X_2 \le 10 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

15. $Z = \ -2\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} -3X_1 + X_2 \le 1 \\ X_1 + X_2 \le 2 \\ X_1 - X_2 \le 0 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

16. $Z = -3\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \ge 2 \\ X_1 - X_2 \le 1 \\ 2X_1 + X_2 \le 4 \\ -9X_1 + 3X_2 \le 6 \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

17. $Z = -3\tilde{O}_1 - 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 - 4X_2 \le 0 \\ -3X_1 + X_2 \le 3 \\ 6X_1 + 5X_2 \ge 30 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

18. $Z = -7\tilde{O}_1 - 4\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 \le 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \ge 6 \\ -X_1 + 2X_2 \le 4 \\ X_1 \ge 0 \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

19. $Z = 2\tilde{O}_1 + 5\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 6X_1 + 5X_2 \geq 30 \\ 3X_1 - 2X_2 \leq 12 \\ -3X_1 + 6X_2 \leq 12 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

20. $Z = 6\tilde{O}_1 + 4\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 4 \\ X_1 + 2X_2 \geq 4 \\ -X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

21. $Z = 5\tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 5X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ 2X_1 - 3X_2 \leq 6 \\ X_1 + 2X_2 \geq 4 \\ 7X_1 + 2X_2 \leq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

22. $Z = -5\tilde{O}_1 - 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 4X_1 + 3X_2 \leq 24 \\ X_1 + X_2 \geq 2 \\ X_1 - 2X_2 \leq 2 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

23. $Z = 4\tilde{O}_1 + 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ 9X_1 + 8X_2 \leq 72 \\ -X_1 + X_2 \leq 5 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

24. $Z = -3\tilde{O}_1 - 4\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} -4X_1 + 3X_2 \leq 12 \\ X_1 - X_2 \leq 4 \\ 6X_1 + 7X_2 \leq 42 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

25. $Z = -2\tilde{O}_1 + 3\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 5X_1 - 2X_2 \leq 10 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \leq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

26. $Z = -5\tilde{O}_1 - 3\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ -5X_1 + 2X_2 \leq 10 \\ X_1 \geq 0 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

27. $Z = -3\tilde{O}_1 + \tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 \geq 1 \\ X_1 - X_2 \leq 1 \\ 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

28. $Z = -3\tilde{O}_1 - 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ -3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 5X_1 + 2X_2 \geq 10 \\ X_1 \leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

29. $Z = -2\tilde{O}_1 - 2\tilde{O}_2$

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \geq 12 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 12 \\ X_1 + 2X_2 \leq 8 \\ X_1 \leq 6 \\ X_1 \leq 6, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

30. $Z = 3\tilde{O}1 + 2\tilde{O}2$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 \geq 10 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1 - 2X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Методичні рекомендації

Задача лінійного програмування задається у вигляді:

Знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = \tilde{N}_1\tilde{O}_1 + \tilde{N}_2\tilde{O}_2 + \ldots\ldots\ldots \tilde{N}_n\tilde{O}_n \qquad (1)$$

або

$$Z = \tilde{N}_1\tilde{O}_1 + \tilde{N}_2\tilde{O}_2 + \ldots\ldots\ldots \tilde{N}_n\tilde{O}_n \ \rightarrow \max(\min)$$

за умов:

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots . A_{1n}\ X_{1n}\{\leq,\ \geq,\ =\}b_1 \\ A_{12}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots . A_{2n}\ X_{1n}\{\leq,\ \geq,\ =\}b_2 \\ A_{m1}X1 + A_{m2}X_2 + \ldots . A_{mn}\ X_n\{\leq,\ \geq\ ,=\}b_m \\ \tilde{O}_1 \geq 0,\ \tilde{O}_2\ \geq 0, \ldots\ldots, X_n\ \geq\ 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Отже, потрібно знайти значення $X_1, X_2 \ldots.., X_n$, які задовольняють умови (2), тоді як цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення. Задача лінійного програмування полягає у знаходженні найбільшого або найменшого значення лінійної функції при наявності лінійних обмежень. Функція (1), найбільше або найменше значення якої відшукується, називається **цільовою функцією**, а сукупність значень змінних, за яких досягається найбільше або найменше значення, називається **оптимальним планом**.

Сукупність усіх розв’язків задачі лінійного програмування є багатогранною опуклою множиною ***D***, яку називають **багатокутником розв’язків (планів).**

Коли задано систему нерівностей (2), багатокутник розв'язків $\boldsymbol{D}$, отримується як перетин скінченого числа півплощин, які визначають кожну з нерівностей, що входить до системи. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин багатокутника розв'язків $\boldsymbol{D}$. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многокутника, то вона досягає його в будь-якій точці, то є лінійною комбінацією таких вершин.

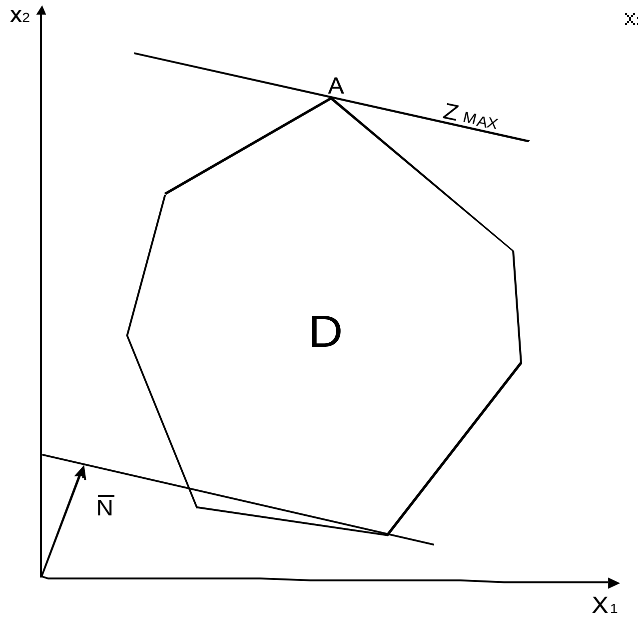
Якщо кількість змінних $\boldsymbol{n = 2}$, то задача лінійного програмування називається двовимірною.

Алгоритм графічного методу складається з наступних кроків:

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник $\boldsymbol{D}$ розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\boldsymbol{\bar{N} = (\tilde{N}_1; \tilde{N}_2)}$, що задає напрям зростання значень цільової функції.
5. Будуємо пряму $\boldsymbol{\tilde{N}_1 \tilde{O}_1 + \tilde{N}_2 \tilde{O}_2 = const}$, перпендикулярну до вектора $\boldsymbol{\bar{N}}$.
6. Переміщуючи пряму $\boldsymbol{\tilde{N}_1 \tilde{O}_1 + \tilde{N}_2 \tilde{O}_2 = const}$ в прямі вектора $\boldsymbol{\bar{N}}$ (для задачі максимізації) або протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв’язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині ***A*** багатокутника розв’язків ***D*** **(рис 1)**



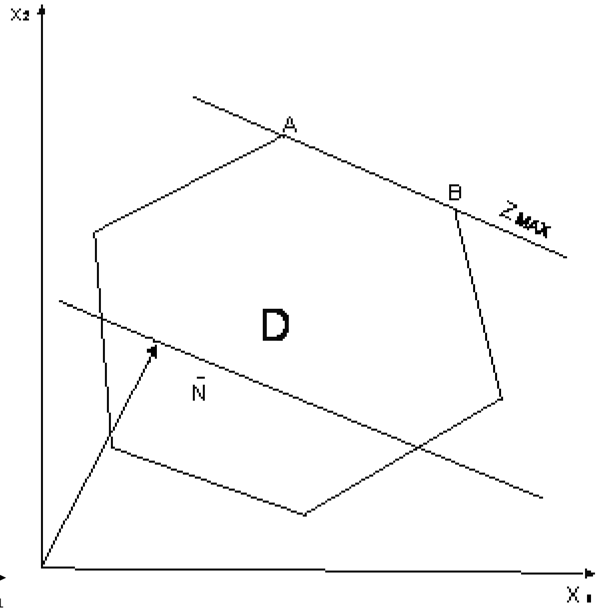
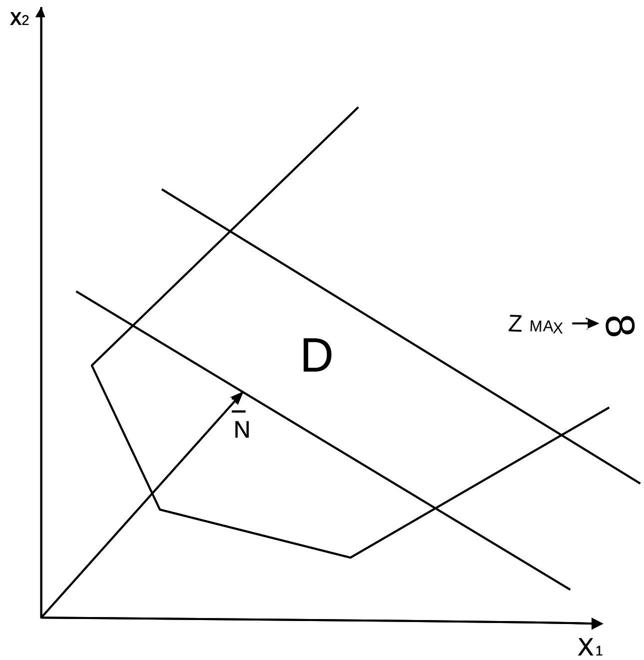


Рис 1 **Рис 2**

Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка ***AB*** (рис 2). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні розв’язки.



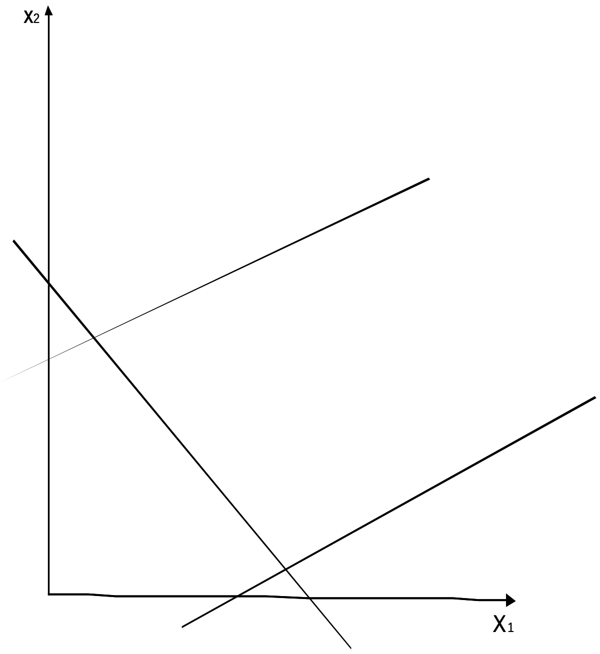


Рис 3 **Рис 4**

Задача лінійного програмування не має оптимальних розв’язків(рис 3 – цільова функція не обмежена згори; рис 4 – система обмежень задачі несумісна).

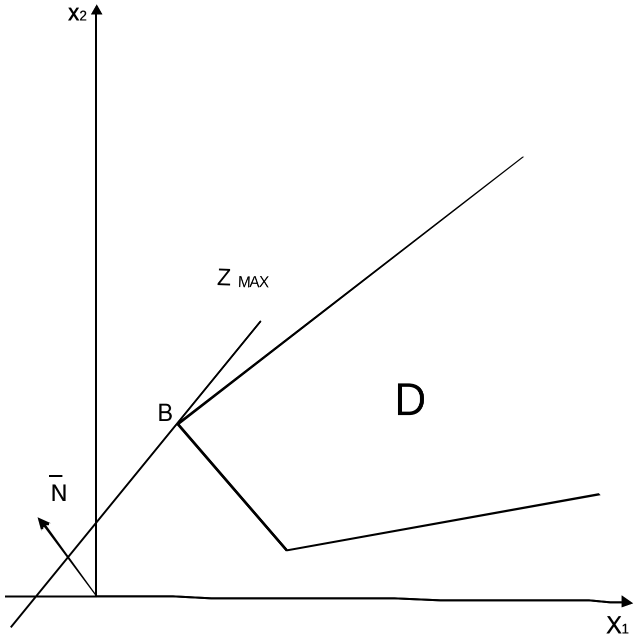


Рис 5

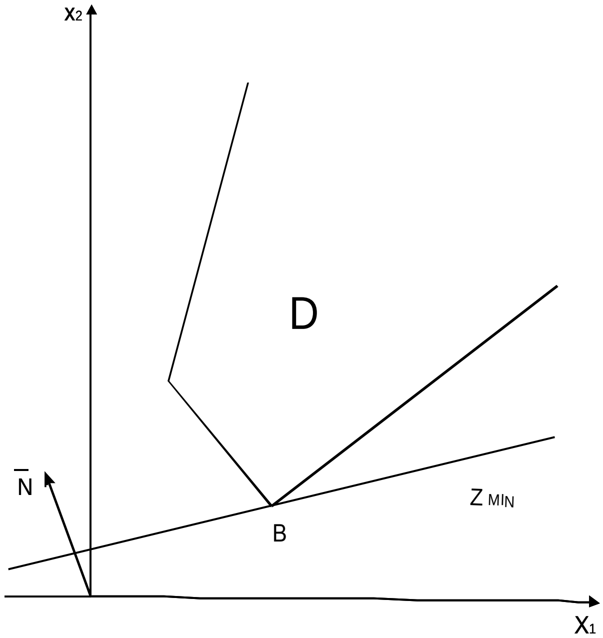


Рис 6

Задача лінійного програмування має оптимальний розв’язок за необмеженої області доступних розв’язків(рис 5, рис 6) На рис 5 в точці ***B*** маємо максимум, на рис 6 в точці ***B*** маємо мінімум.

Приклад виконання ЗАДАЧІ 10

Розв’язати графічним методом задачу лінійного програмування.

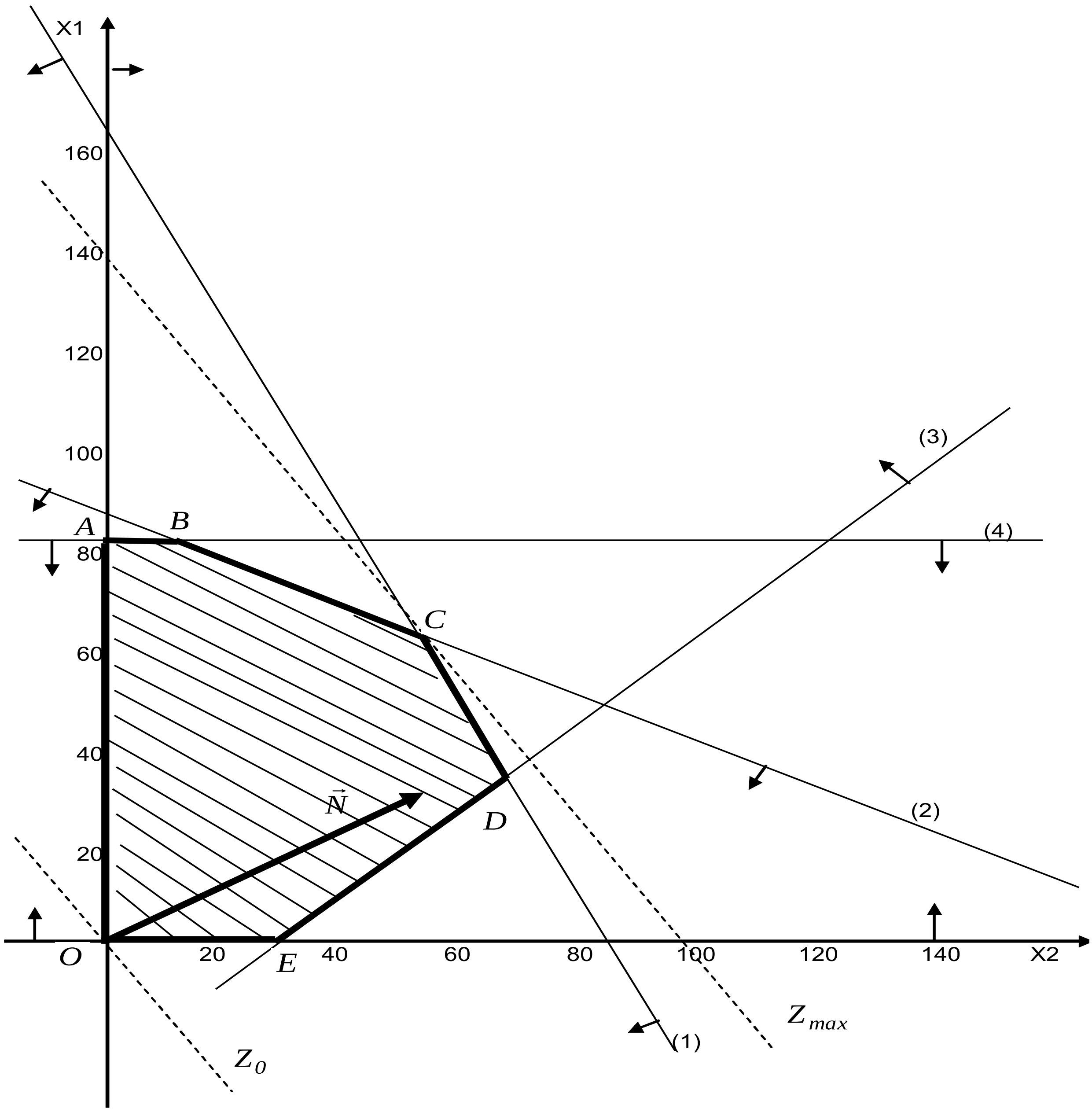
Знайти найбільше значення цільової функції $\boldsymbol{Z = 50X_1 + 30X_2}$ за даними умовами:

$$\begin{cases} 30\tilde{O}_1 + 15\tilde{O}_2 \le 2400; \\ 12\tilde{O}_1 + 26\tilde{O}_2 \le 2160; \\ \tilde{O}_1 - \tilde{O}_2 \le 30; \\ \tilde{O}_2 \le 80; \\ \tilde{O}_1 \ge 0,\ \tilde{O}_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображені обмежень задачі. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих. Наприклад, пряму (1) будуємо за точками $\grave{A}_1\left(0;\frac{2400}{15}\right)$ і $\grave{A}_2\left(\frac{2400}{30};0\right)$.

$$\begin{cases} 30\tilde{O}_1 + 15\tilde{O}_2 = 2400 & (1) \\ 12\tilde{O}_1 + 26\tilde{O}_2 = 2160 & (2) \\ \tilde{O}_1 - \tilde{O}_2 = 30 & (3) \\ \tilde{O}_2 = 80 & (4) \\ \quad \tilde{O}_1 = 0,\ \tilde{O}_2 = 0 & \end{cases}$$



Кожна з набутих прямих поділяє півплощину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють розглядувану нерівність, а іншої – на задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначають стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координат зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то площина, в якій містяться вибрана точка, є геометричним зображенням нерівностей. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $\tilde{\boldsymbol{O}}_1 \geq \mathbf{0},\ \tilde{\boldsymbol{O}}_2 \geq \mathbf{0}$обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі – шестикутник ***OABCDE***. Координати будь-якої точки його задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних . Відшукаємо точку, в якій $\boldsymbol{Z}$ набуває найбільшого значення. Для цього побудуємо вектор $\bar{\boldsymbol{N}} = \left(\boldsymbol{C}_1;\boldsymbol{C}_2\right)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\bar{\boldsymbol{N}}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами$\left(\tilde{\boldsymbol{O}}_1 = \tilde{\boldsymbol{N}}_1; \tilde{\boldsymbol{O}}_2 = \tilde{\boldsymbol{N}}_2\right)$. В нашій задачі вектор$\bar{\boldsymbol{N}} = \left(\mathbf{50;30}\right)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції, а вектор, протилежний йому, - напрям їх зменшення.

Виконаємо 5 та 6 кроки алгоритму розв'язку задачі лінійного програмування графічним методом. Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню$\boldsymbol{Z} = \mathbf{0}$. Це буде пряма $\mathbf{50}\tilde{\boldsymbol{O}}_1 + \mathbf{30}\tilde{\boldsymbol{O}}_2 = \mathbf{0}$, яка перпендикулярна до $\bar{\boldsymbol{N}}$ і проходить через початок координат. Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, пересуватимемо пряму $\mathbf{50}\tilde{\boldsymbol{O}}_1 + \mathbf{30}\tilde{\boldsymbol{O}}_2 = \mathbf{0}$ в напрямі вектора $\bar{\boldsymbol{N}}$ доти, доки не визначаємо вершину многокутника, яка відповідає оптимальному плану задачі. Останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника

OABCDE є точка ***C***. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі. Координати ***C*** визначаються перетином прямих (2) та (1)

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{30}\tilde{O}_1+\mathbf{15}\tilde{O}_2=\mathbf{2400}\\ \mathbf{12}\tilde{O}_1+\mathbf{26}\tilde{O}_2=\mathbf{2160}\end{array}\right|_{5}^{2}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathbf{60}X_1+\mathbf{30}X_2=\mathbf{4800}\\ \mathbf{60}X_1+\mathbf{130}X_2=\mathbf{10800}\end{array}\right.\rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{60}X_1+\mathbf{30}X_2=\mathbf{4800}\\ \qquad -\mathbf{100}X_2=-\mathbf{6000}\end{array}\right.\rightarrow\left\{\begin{array}{l}X_1=\mathbf{50}\\ X_2=\mathbf{60.}\end{array}\right.$$

Розв’язавши цю систему рівнянь дістанемо $\tilde{O}_1=\mathbf{50};\ \tilde{O}_2=\mathbf{60}$. Отже, задача лінійного програмування має оптимальний план $X\ \hat{\imath}\ddot{\imath}\grave{o}=(\mathbf{50;60})$ з максимальним значенням цільової функції $Z\,\mathbf{max}=\mathbf{50}\tilde{O}_1+\mathbf{30}\tilde{O}_2=\mathbf{50\cdot50+30\cdot60=4300.}$

Додатки

Значення функції $\phi(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathring{a}^{-\frac{\tilde{o}^2}{2}}$

Таблиця 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3762	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0883	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0504	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004

Продовження табл. 1

3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Значення функції $\Phi(\tilde{o}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\tilde{o}} \mathring{a}^{-\frac{\ddot{y}^2}{2}} dz$ **Таблиця 2**

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,34	0,1331	0,68	0,2517	1,02	0,3461
0,01	0,0040	0,35	0,1368	0,69	0,2549	1,03	0,3485
0,02	0,0080	0,36	0,1406	0,70	0,2580	1,04	0,3508
0,03	0,0120	0,37	0,1443	0,71	0,2611	1,05	0,3531
0,04	0,0160	0,38	0,1480	0,72	0,2642	1,06	0,3554
0,05	0,0199	0,39	0,1517	0,73	0,2673	1,07	0,3577
0,06	0,0239	0,40	0,1554	0,74	0,2703	1,08	0,3599
0,07	0,0279	0,41	0,1591	0,75	0,2734	1,09	0,3621
0,08	0,0319	0,42	0,1628	0,76	0,2764	1,10	0,3643
0,09	0,0359	0,43	0,1664	0,77	0,2794	1,11	0,3665
0,10	0,0398	0,44	0,1700	0,78	0,2823	1,12	0,3686
0,11	0,0438	0,45	0,1736	0,79	0,2852	1,13	0,3708
0,12	0,0478	0,46	0,1772	0,80	0,2881	1,14	0,3729
0,13	0,0517	0,47	0,1808	0,81	0,2910	1,15	0,3749
0,14	0,0557	0,48	0,1844	0,82	0,2939	1,16	0,3770
0,15	0,0596	0,49	0,1879	0,83	0,2967	1,17	0,3790
0,16	0,0636	0,50	0,1915	0,84	0,2995	1,18	0,3810
0,17	0,0675	0,51	0,1950	0,85	0,3023	1,19	0,3830
0,18	0,0714	0,52	0,1985	0,86	0,3051	1,20	0,3849
0,19	0,0753	0,53	0,2019	0,87	0,3078	1,21	0,3869
0,20	0,0793	0,54	0,2054	0,88	0,3106	1,22	0,3883
0,21	0,0832	0,55	0,2088	0,89	0,3133	1,23	0,3907
0,22	0,0871	0,56	0,2123	0,90	0,3159	1,24	0,3925
0,23	0,0910	0,57	0,2157	0,91	0,3186	1,25	0,3944
0,24	0,0948	0,58	0,2190	0,92	0,3212	1,26	0,3962
0,25	0,0987	0,59	0,2224	0,93	0,3238	1,27	0,3980
0,26	0,1026	0,60	0,2257	0,94	0,3264	1,28	0,3997
0,27	0,1064	0,61	0,2291	0,95	0,3289	1,29	0,4015
0,28	0,1103	0,62	0,2324	0,96	0,3315	1,30	0,4032
0,29	0,1141	0,63	0,2357	0,97	0,3340	1,31	0,4049
0,30	0,1179	0,64	0,2389	0,98	0,3365	1,32	0,4066
0,31	0,1217	0,65	0,2422	0,99	0,3389	1,33	0,4082
0,32	0,1255	0,66	0,2451	1,00	0,3413	1,34	0,4099
0,33	0,1293	0,67	0,2486	1,01	0,3438	1,35	0,4115

Продовження табл. 2

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,36	0,4131	1,67	0,4525	1,98	0,4761	2,58	0,4961
1,37	0,4147	1,68	0,4535	1,99	0,4767	2,60	0,4953
1,38	0,4162	1,69	0,4545	2,00	0,4772	2,62	0,4956
1,39	0,4177	1,70	0,4554	2,02	0,4783	2,64	0,4959
1,40	0,4192	1,71	0,4564	2,04	0,4793	2,66	0,4961
1,41	0,4207	1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,68	0,4963
1,42	0,4222	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,70	0,4965
1,43	0,4236	1,74	0,4591	2,10	0,4821	2,72	0,4967
1,44	0,4251	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,74	0,4969
1,45	0,4265	1,76	0,4608	2,14	0,4838	2,76	0,4971
1,46	0,4279	1,77	0,4616	2,16	0,4846	2,78	0,4973
1,47	0,4292	1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,80	0,4974
1,48	0,4306	1,79	0,4633	2,20	0,4861	2,82	0,4976
1,49	0,4319	1,80	0,4641	2,22	0,4868	2,84	0,4977
1,50	0,4332	1,81	0,4649	2,24	0,4875	2,86	0,4979
1,51	0,4345	1,82	0,4556	2,26	0,4881	2,88	0,4980
1,52	0,4357	1,83	0,4664	2,28	0,4887	2,90	0,4981
1,53	0,4370	1,84	0,4671	2,30	0,4893	2,92	0,4982
1,54	0,4382	1,85	0,4678	2,32	0,4898	2,94	0,4984
1,55	0,4394	1,86	0,4686	2,34	0,4904	2,96	0,4985
1,56	0,4406	1,87	0,4693	2,36	0,4909	2,98	0,4986
1,57	0,4418	1,88	0,4699	2,38	0,4913	3,00	0,49865
1,58	0,4429	1,89	0,4706	2,40	0,4918	3,20	0,49931
1,59	0,4441	1,90	0,4713	2,42	0,4922	3,40	0,49966
1,60	0,4452	1,91	0,4719	2,44	0,4927	3,60	0,4999841
1,61	0,4463	1,92	0,4726	2,46	0,4931	3,80	0,499928
1,62	0,4474	1,93	0,4732	2,48	0,4934	4,00	0,499968
1,63	0,4484	1,94	0,4738	2,50	0,4938	4,50	0,499997
1,64	0,4495	1,95	0,4744	2,52	0,4991	5,00	0,499997
1,65	0,4505	1,96	0,4750	2,54	0,4945		
1,66	0,4515	1,97	0,4756	2,56	0,4948		

Таблиця оцінювання розрахунково-графічних робіт

Назва роботи	Максимальне число балів	Мінімальне число балів
Розрахунково-графічна робота №1		
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	12	5
Аналітична геометрія на площині	10	3
Розрахунково-графічна робота № 2		
Аналітична геометрія в просторі	10	3
Розрахунково-графічна робота № 3		
Похідна та диференціал функції	12	3
Розрахунково-графічна робота № 4		
Невизначений та визначений інтеграл	12	3
Усього	52	17

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Бергман – М. : Наука, 1985. – 287 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 1977. – 245 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 2-е изд. – М. : Высшая школа, 1975. – 301 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. – у 2-х ч. Ч. II / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – 4-е изд.. – М. : Высшая школа, 1986. – 287 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика : зб. задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрина. – К. : А.С.К., 2001. – 319 с.
6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов – М. : Наука, 1977. – 127 с.
7. Засуха В. А. Прикладна математика / В. А. Засуха. – К. : Арістель, 2004. – 250 с.
8. Ивашев-Мусатов О. С. Теория вероятностей и математическая статистика / О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Высшая школа, 1979. – 237 с.
9. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. / Д. В. Клетеник – М. : Наука, 1989. – 150 с.
10. Коленаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика/ В. А. Коленаев, О. В. Староверов, В. В. Турундаевский. – М. : Высшая школа, 1991. – 190 с.
11. Лавренчук В. П. Вища математика. – в 2-х ч. / В. П. Лавренчук – Чернівці : Рута, 2002. – 560 с.

12. Мармоза А.Т. Практикум по математической статистике / А. Т. Мармоза. – К. : Вища школа, 1990. – 290 с.
13. Мартиненко М. А. Теорія ймовірностей / М. А. Мартиненко, Р. К. Клименко, І. В. Лебедєва. – К. : УДУХТ, 1999 – 242 с.
14. Опря А. Т. Математична статистика / А. Т. Опря. – К. : Урожай, 1994. – 187 с.
15. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб. : у 2-х ч. – Ч. І. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2001. – 304 с.
16. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб.: у 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.
17. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник / П. С. Сеньо 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Знання, 2007. – 556 с.

З М І С Т

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання та методичні рекомендації

Укладачі:
Шебанін В'ячеслав Сергійович;
Шебаніна Олена В'ячеславівна;
Богза Володимир Георгійович
та ін.

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 7,9
Наклад 50 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету

54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.