МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання та методичні рекомендації з теми
«Диференціальні рівняння»
для самостійної роботи студентів денної форми навчання напрямів підготовки 6.030509 «Облік і аудит»,
6.030601 «Менеджмент організацій»,
6.030601 «Менеджмент ЗЕД»,
6.030508 «Фінанси і кредит»,
6.100102 «Процеси, машини та обладнання в агропромисловому виробництві»,
6.100101 «Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі».

Миколаїв
2015

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.61
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 26.11.2015 р., протокол № 3.

Укладачі:
В. С. Шебанін – д-р. техн. наук кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Шебаніна – д-р. екон. наук кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївського національного аграрного університету
І. П. Атаманюк – д-р. техн. наук кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
В. Г. Богза – канд. техн. наук кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Цепуріт – ст. виклад. кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
С. І. Богданов – ст. виклад. кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Шептилевський– асист. кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
С. В. Євстрат’єв – асист. кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету

Рецензенти:
К. В. Дубовенко – д-р техн. наук, доцент, зав. кафедри електротехнологій і електропостачання Миколаївського національного аграрного університету,
Д. Д. Марченко – канд. техн. наук, асист. кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу Миколаївського національного аграрного університету.

Вступ

Для активізації самостійної роботи студентів програмою з вищої математики для вищих аграрних закладів освіти 3-4 рівнів акредитації запропоновано виконання типових розрахунків (ТР).

Типовий розрахунок № 2 по диференціальним рівнянням вміщує теоретичні питання (загальні для всіх) та задачі. Теоретичні питання вивчаються на лекціях та детально розглядаються на практичних і лабораторних заняттях. Після цього, в міру того, як продовжується вивчення курсу, студенти самостійно розв'язують задачі ТР, а викладач частинами перевіряє. Завершаючим етапом є захист ТР, на який студент подає всі перевірені та зараховані задачі. Під час захисту студент повинен знати та правильно відповідати на теоретичні питання, та вміти розв'язувати задачі аналогічного типу та давати до них необхідні пояснення.

Типовий розрахунок № 2 оцінюється згідно рейтингової оцінки знань при структурно – модульній системі навчання. Для оцінювання ТР № 2 пропонується наступний розрахунок балів:

незадовільно: 0 – 0,5 бали;

задовільно: 0,6 – 1,5 бали;

добре: 1,6 – 3,5 бали;

відмінно: 3,6 – 5 балів.

Завдання до самостійної роботи над типовим розрахунком № 2 охоплюють розділи "Звичайні диференціали рівняння першого порядку" та "Загальні диференціальні рівняння вищих порядків", передбачені програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форми навчання спеціальностей 7.091902 – механізація сільського господарства, 6.010100 – професійне навчання та для студентів економічного факультету спеціальностей 7.050106 – облік та аудит, 7.050202 – менеджмент організацій, 7.050206 – менеджмент зовнішньоекономічної діяльності і являються складовою частиною модулів 11, 12.

Задача 1.

В задачах 1.1. – 1.31. потрібно знайти загальний інтеграл диференціального рівняння. (Відповідь записати у вигляді $\psi(x, y) = C$).

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.2. $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$.

1.3. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$.

1.4. $\sqrt{3 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$.

1.5. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$.

1.6. $x\sqrt{3 + y^2}dx + y\sqrt{2 + x^2}dy = 0$.

1.7. $\left(e^{2x} + 5\right)dx + ye^{2x}dx = 0$.

1.8. $y'y\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 0$.

1.9. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.10. $x\sqrt{5 + y^2}dx + y\sqrt{4 + x^2}dy = 0$.

1.11. $y\left(4 + e^x\right)dy - e^x dx = 0$.

1.12. $\sqrt{4 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.14. $x\sqrt{4 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$.

1.15. $\left(e^x + 8\right)dy - ye^x dx = 0$.

1.16. $\sqrt{5 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0$.

1.17. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$.

1.18. $y\ln y + xy' = 0$.

1.19. $\left(1 + e^x\right)y' = ye^x$.

1.20. $\sqrt{1 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.

1.22. $y(1 + \ell ny) + xy' = 0$.

1.23. $(3 + e^x)yy' = e^x$.

1.24. $\sqrt{3 + y^2} + \sqrt{1 - x^2}yy' = 0$.

1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.

1.26. $\sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$.

1.27. $(1 + e^x)yy' = e^x$.

1.28. $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2 + y^2}dx = 0$.

1.29. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.

1.30. $2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}y' = 0$.

1.31. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$.

Задача 2.

В задачах 2.1 –2.31 потрібно знайти загальний інтеграл диференціального рівняння.

2.1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

2.2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

2.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.5. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$.

2.6. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

2.7. $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

2.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$.

2.10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

2.11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$.

2.12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

2.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$.

2.14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

2.15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$.

2.16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$.

2.18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

2.19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$.

2.20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

2.21. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$.

2.22. $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$.

2.23. $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

2.24. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

2.25. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.

2.26. $xy' = -\frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$.

2.27. $y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$.

2.28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

2.29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.

2.30. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

2.31. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$.

<u>Задача 3.</u>

В задачах 3.1 –3.31 потрібно знайти розв'язок задачі Коші.

3.1. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$.

3.2. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$.

3.3. $y' - y\,\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

3.4. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$.

3.5. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

3.6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$.

3.7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

3.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$

3.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

3.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

3.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4.$

3.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e.$

3.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ell nx}{x}, \quad y(1) = 1.$

3.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

3.15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$

3.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

3.17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

3.18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$

3.19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

3.20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = \frac{1}{e}.$

3.21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$

3.22. $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

3.23. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

3.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$

3.25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

3.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

3.27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}.$

3.28. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0.$

3.29. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ell n x}{x}, \quad y(1) = 1.$

3.30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

3.31. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$

<u>Задача 4.</u>

В задачах 4.1. – 4.31. потрібно знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

4.1. $3x^2 e^y dx + \left(x^3 e^y - 1\right) dy = 0.$

4.2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0.$

4.3. $\left(3x^2 + 4y^2\right)dx + \left(8xy + e^y\right)dy = 0.$

4.4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$

4.5. $\left(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\right)dx + \left(2xy + \operatorname{tg} x\right)dy = 0.$

4.6. $\left(3x^2 y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0.$

4.7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$

4.8. $\left[\sin 2x - 2\cos(x+y)\right]dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$

4.9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0.$

4.10. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0$.

4.11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx-\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+2y\right)dy=0$.

4.12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$.

4.13. $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$.

4.14. $\frac{dx}{y}-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

4.15. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$.

4.16. $\left(xe^x+\frac{y}{x^2}\right)dx-\frac{1}{x}dy=0$.

4.17. $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$.

4.18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0$.

4.19. $e^y dx+\left(\cos y+xe^y\right)dy=0$.

4.20. $\left(y^3+\cos x\right)dx+\left(3xy^2+e^y\right)dy=0$.

4.21. $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+tg^2 y\right)dy=0$.

4.22. $\left(5xy^2-x^3\right)dx+\left(5x^2y-y\right)dy=0$.

4.23. $\left[\cos(x+y^2)+\sin x\right]dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$.

4.24. $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$.

4.25. $\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0$.

4.26. $\left(1+\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy=0$.

4.27. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$.

4.28. $2\left(3xy^2+2x^3\right)dx+3\left(2x-y+y^2\right)dy=0$.

4.29. $\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$.

4.30. $xy^2dx+y\left(x^2+y^2\right)dy=0$.

4.31. $xdx+ydy+\left(xdy-ydx\right)\frac{1}{x^2+y^2}=0$.

Задача 5.

В задачах 5.1. – 5.5 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0, і має таку властивість, що в її довільній точці M нормальний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Oy має довжину, що дорівнює a і утворює гострий кут з додатним напрямом Oy.

5.1. M_0 (15; 1), a = 25.

5.2. M_0 (12; 2), a = 20.

5.3. M_0 (9; 3), a = 15.

5.4. M_0 (6; 4), a = 10.

5.5. M_0 (3; 5), a = 5.

В задачах 5.6. – 5.10 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок любої її нормалі, який розташований між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні а : в (якщо рахувати від осі Oy).

5.6. M_0 (1; 1), а : в = 1:2.

5.7. M_0 (-2; 3), а : в = 1:3.

5.8. M_0 (0; 1), а : в = 2:3.

5.9. M_0 (1; 0), а : в = 3:2.

5.10. M_0 (2;-1), а : в = 3:1.

В задачах 5.11. – 5.15 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок любої її дотичної між точкою дотику і віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю абсцис у відношенні а:в (якщо рахувати від осі Oy).

5.11. M_0 (2;-1), а : в = 1:1.

5.12. M_0 (1; 2), а : в = 2:1.

5.13. M_0 (-1; 1), а : в = 3:1.

5.14. M_0 (2; 1), а : в = 1:2.

5.15. M_0 (1;-1), а : в = 1:3.

В задачах 5.16. – 5.20 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0, якщо відрізок любої її дотичної, розташованої між осями координат, поділяється в точці дотику у відношенні а:в (починаючи від осі Оу).

5.16. M_0 (1; 2), а : в = 1:1. 5.17. M_0 (2; 1), а : в = 1:2.

5.18. M_0 (1; 3), а : в = 2:1. 5.19. M_0 (2;-3), а : в = 3:1.

5.20. M_0 (3;-1), а : в = 3:2.

В задачах 5.21. – 5.25 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0 і має таку властивість, що в любій її точці М дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Ох має проекцію на вісь Ох, обернено пропорційну абсцисі точки М, коефіцієнт пропорційності дорівнює а.

5.21. M_0 (1; e), $a = -\frac{1}{2}$. 5.22. M_0 (2; e), а = -2.

5.23. M_0 (-1; $\sqrt{e}$), а = -1. 5.24. M_0 (2; $\frac{1}{e}$), а = 2.

5.25. M_0 (1; $\frac{1}{e^2}$), $a = \frac{1}{4}$.

В задачах 5.26. – 5.31 потрібно знайти лінію, що проходить через точку M_0 і має таку властивість, що в любій її точці М дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Оу має проекцію на вісь Оу, що дорівнює а.

5.26. M_0 (1; 2), а = -1. 5.27. M_0 (1; 4), а = 2.

5.28. M_0 (1; 5), а = -2. 5.29. M_0 (1; 3), а = -4.

5.30. M_0 (1; 6), а = 3. 5.31. M_0 (1; 1), а = 1.

Задача 6.

В задачах 6.1. – 6.31. потрібно знайти розв’язок задачі Коші.

6.1. $4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

6.2. $y'' = 128y^3, \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 8$.

6.3. $y''y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4 \qquad y'(0) = 2$.

6.4. $y'' + 2\sin y \cdot \cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$.

6.5. $y''=32\sin^3 y\cdot\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2}\quad y'(1)=4.$

6.6. $y''=98y^3,\quad y(1)=1\quad y'(1)=7.$

6.7. $y''y^3+49=0,\quad y(3)=-7\quad y'(3)=-1.$

6.8. $4y^3y''=16y^4-1,\quad y(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad y'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6.9. $y''+8\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0\quad y'(0)=2.$

6.10. $y''=72y^3,\quad y(2)=1\quad y'(2)=6.$

6.11. $y''y^3+36=0,\quad y(0)=3\quad y'(0)=2.$

6.12. $y''=18\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2}\quad y'(1)=3.$

6.13. $4y^3y''=y^4-16,\quad y(0)=2\sqrt{2}\quad y'(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

6.14. $y''=50y^3,\quad y(3)=1\quad y'(3)=5.$

6.15. $y''y^3+25=0,\quad y(2)=-5\quad y'(2)=-1.$

6.16. $y''+18\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0\quad y'(0)=3.$

6.17. $y''=8\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2}\quad y'(1)=2.$

6.18. $y''=32y^3,\quad y(4)=1\quad y'(4)=4.$

6.19. $y''y^3+16=0\quad y(1)=2\quad y'(1)=2.$

6.20. $y''+32\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0\quad y'(0)=4.$

6.21. $y''=50\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\frac{\pi}{2}\quad y'(1)=5.$

6.22. $y''=18y^3,\quad y(1)=1\quad y'(1)=3.$

6.23. $y''y^3+9=0,\quad y(1)=1\quad y'(1)=3.$

6.24. $y^3y''=4(y^4-1),\quad y(0)=\sqrt{2}\quad y'(0)=\sqrt{2}.$

6.25. $y''+50\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0\quad y'(0)=5.$

6.26. $y''=8y^3,\quad y(0)=1\quad y'(0)=2.$

6.27. $y''y^3+4=0,\quad y(0)=-1\quad y'(0)=-2.$

6.28. $y''=2\sin^3 y\cos y, \quad y(1)=\frac{\pi}{2} \quad y'(1)=1.$

6.29. $y^3y''=y^4-16, \quad y(0)=2\sqrt{2} \quad y'(0)=\sqrt{2}.$

6.30. $y''=2y^3, \quad y(-1)=1 \quad y'(-1)=1.$

6.31. $y''y^3+1=0, \quad y(1)=-1 \quad y'(1)=-1.$

Задача 7.

В задачах 7.1. – 7.31. потрібно знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

7.1. $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x).$

7.2. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 6x.$

7.3. $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x).$

7.4. $y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x.$

7.5. $y''+2y'+5y=-\sin 2x.$

7.6. $y''-4y'+8y=e^x(5\sin x-3\cos x).$

7.7. $y''+2y'=e^x(\sin x+\cos x).$

7.8. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 3x.$

7.9. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x.$

7.10. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x.$

7.11. $y''+2y'+5y=-2\sin x.$

7.12. $y''-4y'+8y=e^x(-3\sin x+4\cos x).$

7.13. $y''+2y'=10e^x(\sin x+\cos x).$

7.14. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x.$

7.15. $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x.$

7.16. $y''+2y'+5y=-17\sin 2x.$

7.17. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos x.$

7.18. $y''-4y'+8y=e^x(3\sin x+5\cos x).$

7.19. $y''+2y'=6e^x(\sin x+\cos x).$

7.20. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 4x.$

7.21. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 5x$.

7.22. $y''+y=2\cos 7x-3\sin 7x$.

7.23. $y''+2y'+5y=-\cos x$.

7.24. $y''-4y'+8y=e^{x}(2\sin x-\cos x)$.

7.25. $y''+2y'=3e^{x}(\sin x+\cos x)$.

7.26. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 4x$.

7.27. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 8x$.

7.28. $y''+2y'+5y=10\cos x$.

7.29. $y''+y=2\cos 4x+3\sin 4x$.

7.30. $y''-4y'+8y=e^{x}(-\sin x+2\cos x)$.

7.31. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 6x$.

<u>Задача 8.</u>

В задачах 8.1. – 8.31. потрібно знайти розв’язок задачі Коші.

8.1. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=0$.

8.2. $y''+3y'=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0)=\ell n4, \quad y'(0)=3(1-\ell n2)$.

8.3. $y''+4y=8\operatorname{ctg}2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$.

8.4. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{1+e^{-2x}}, \quad y(0)=1+2\ell n2, \quad y'(0)=6\ell n2$.

8.5. $y''-9y'+18y=\dfrac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$.

8.6. $y''+\pi^2 y=\dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}, \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1, \quad y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{2}$.

8.7. $y''+\dfrac{1}{\pi^2}y=\dfrac{1}{\pi^2\cos\dfrac{x}{\pi}}, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0$.

8.8. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}, \quad y(0)=4\ell n4, \quad y'(0)=3(3\ell n4-1)$.

8.9. $y''+y=\dfrac{4}{\operatorname{tg}x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$.

8.10. $y''-6y'+8y=\dfrac{4}{2+e^{-2x}}, \quad y(0)=1+3\ell n3, \quad y'(0)=10\ell n3.$

8.11. $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

8.12. $y''+9y=\dfrac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=4, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\pi}{2}.$

8.13. $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

8.14. $y''-y'=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{-x}}, \quad y(0)=\ell n27, \quad y'(0)=\ell n9-1.$

8.15. $y''+4y=\dfrac{4}{\mathrm{tg}2x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2.$

8.16. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{3+e^{-x}}, \quad y(0)=1+8\ell n2, \quad y'(0)=14\ell n2.$

8.17. $y''-6y'+8y=\dfrac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

8.18. $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\pi.$

8.19. $y''+16y=\dfrac{16}{\cos 4x}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=0.$

8.20. $y''-2y'=\dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0)=\ell n4, \quad y'(0)=\ell n4-2).$

8.21. $y''+\dfrac{y}{4}=\dfrac{1}{4\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}, \quad y(\pi)=2, \quad y'(\pi)=\dfrac{1}{2}.$

8.22. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{2+e^{-x}}, \quad y(0)=1+3\ell n3, \quad y'(0)=5\ell n3.$

8.23. $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{2+e^{x}}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

8.24. $y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi.$

8.25. $y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

8.26. $y''+y'=\dfrac{e^{x}}{2+e^{x}}, \quad y(0)=\ell n27, \quad y'(0)=1-\ell n9.$

8.27. $y''+y=\dfrac{2}{\mathrm{tg}x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2.$

8.28. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}, \quad y(0)=1+2\ell n2, \quad y'(0)=3\ell n2.$

8.29. $y''-3y'+2y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{-x}}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

8.30. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

8.31. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

Задача 9.

В задачах 9.1. – 9.31. потрібно записати в матричній формі дану систему та її розв’язок, який задовольняє заданим початковим умовам.

9.1. $\begin{cases} x=4x+6y+4, \\ y=4x+2y, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} x=4x+6y, \\ y=4x+2y+t, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} x=4x+6y+\cos t, \\ y=4x+2y, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} x=-5x-4y+\sin t, \\ y=-2x-3y, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} x=-5x-4y+2, \\ y=-2x-3y, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} x=-5x-4y, \\ y=-2x-3y+t, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.7. $\begin{cases} x=3x+y+\cos t, \\ y=8x+y, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$

9.8. $\begin{cases} x = 3x + y, \\ y = 8x + y + t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.9. $\begin{cases} x = 3x + y + 10, \\ y = 8x + y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.10. $\begin{cases} x = 6x + 3y + 6, \\ y = -8x - 5y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.11. $\begin{cases} x = 6x + 3y, \\ y = -8x - 5y + \sin t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.12. $\begin{cases} x = 6x + 3y + t, \\ y = -8x - 5y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.13. $\begin{cases} x = -x + 5y + \cos t, \\ y = x + 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.14. $\begin{cases} x = -x + 5y, \\ y = x + 3y + 8, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} x = -x + 5y + t, \\ y = x + 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.16. $\begin{cases} x = 3x - 2y, \\ y = 2x - 2y + \sin t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.17. $\begin{cases} x = 3x - 2y, \\ y = 2x - 2y + 14, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.18. $\begin{cases} x = 3x - 2y + t, \\ y = 2x - 2y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.19. $\begin{cases} x = -4x - 6y + \cos t, \\ y = -4x - 2y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.20. $\begin{cases} x = -4x - 6y, \\ y = -4x - 2y + t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.21. $\begin{cases} x = -4x - 6y + 16, \\ y = -4x - 2y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.22. $\begin{cases} x = -5x - 8y, \\ y = -3x - 3y + \sin t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.23. $\begin{cases} x = -5x - 8y, \\ y = -3x - 3y + 18, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.24. $\begin{cases} x = -5x - 8y + t, \\ y = -3x - 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.25. $\begin{cases} x = -x - 5y + \cos t, \\ y = -7x - 3y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.26. $\begin{cases} x = -x - 5y, \\ y = -7x - 3y + t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.27. $\begin{cases} x = -x - 5y, \\ y = -7x - 3y + 16, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.28. $\begin{cases} x = -7x + 5y + \cos t, \\ y = 4x - 8y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.29. $\begin{cases} x = -7x + 5y, \\ y = 4x - 8y + t, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.30. $\begin{cases} x = -7x + 5y, \\ y = 4x - 8y + 24, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

9.31. $\begin{cases} x = 2x + y + t + \cos t, \\ y = x + 2y, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

<u>Задача 1.31.</u>

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння. (Відповідь записати у вигляді $\psi(x, y) = C$).

$$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx \tag{1.1}$$

<u>Розв’язання:</u> Перепишемо (1.1) у вигляді

$$20xdx + 5xy^2dx = 3ydy + 3x^2ydy,$$

або

$$5x(4 + y^2)dx = 3y(1 + x^2)dy \tag{1.2}$$

Поділивши обидві частини (1.2) на $(4 + y^2)(1 + x^2)$, отримаємо

$$\frac{5x}{1 + x^2}dx = \frac{3y}{4 + y^2}dy \tag{1.3}$$

Проінтегруємо обидві частини (1.3)

$$\int \frac{5x}{1 + x^2}dx = \int \frac{3y}{4 + y^2}dy,$$

або

$$\frac{5}{2}\int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(4 + y^2)}{4 + y^2},$$

звідки

$$\frac{5}{2}\ell n(1 + x^2) = \frac{3}{2}\ell n(4 + y^2) + \ell n c_1,$$

або

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}} = C_1 \cdot \left(4+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (1.4)$$

Піднесемо обидві частини (1.4) до квадрату та замінимо $C_1^{\ 2}$ на С. В результаті отримаємо

$$\left(1+x^2\right)^5 = C\left(4+y^2\right)^3,$$

або

$$\frac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^3} = C. \qquad (1.5)$$

Виконаємо перевірку, для чого знайдемо похідну y'_x від функції, яка задана рівнянням (1.5)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-\dfrac{(1+x^2)^5}{(4+y^2)^6}\cdot 3(4+y^2)^2 \cdot 2y}{\dfrac{5(1+x^2)^4\cdot 2x}{(4+y^2)^3}} = \frac{3y(1+x^2)}{5x(4+y^2)},$$

або

$$5x(4+y^2)dy = 3y(1+x^2)dx,$$

і переконуємось, що (1.5) – загальний інтеграл диференціального рівняння (1.1).

<u>Задача 2.31.</u>

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy} \qquad (2.1)$$

<u>*Розв'язання:*</u> Замінимо x на λx та y на λy:

$$\frac{(\lambda x)^2 + 2\lambda x\cdot\lambda y - 5(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2 - 6\lambda x\cdot\lambda y} = \frac{\lambda^2x^2 + 2\lambda^2 xy - 5\lambda^2y^2}{2\lambda^2x^2 - 6\lambda^2 xy} = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$$

Цим доведено, що диференціальне рівняння (2.1) однорідне. Зробимо підставку $y = u\cdot x$. Значить $y'' = u''x + u,$ і рівняння (2.1) буде мати вигляд

$$u'x + u = \frac{x^2 + 2xux - 5u^2x^2}{2x^2 - 6ux\cdot x},$$

скоротимо на x^2, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1 + 2u - 5u^2}{2 - 6u},$$

звідки

$$u'x = \frac{1 + u^2}{2 - 6u} \qquad (2.2)$$

Диференціальне рівняння (2.2) є рівняння із змінними, що відокремлюються. Після відокремлення змінних отримаємо

$$\frac{2 - 6u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x}. \qquad (2.3)$$

Проінтегруємо обидві частини (2.3), отримаємо

$$\int \frac{2 - 6u}{1 + u^2} du = \int \frac{dx}{x},$$

або

$$2\int \frac{du}{1 + u^2} - 3\int \frac{d(1 + u^2)}{1 + u^2} = \ell n|x| + C.$$

Звідки

$$2\operatorname{arctg}u - 3\ell n\left(1 + u^2\right) = \ell n|x| + C,$$

або

$$2\operatorname{arctg}u - \ell n\left[\ |x|(1 + u^2)^3\ \right] = C.$$

Замінимо u на $\frac{y}{x}$, отримаємо

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ell n\left[\ |x| \cdot \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3\ \right] = C. \qquad (2.4)$$

Знайдемо похідну y' функції, яка задана рівнянням (2.4)

$$y' = -\frac{2\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3} \cdot \left[\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3 + x \cdot 3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{y^2}{x^4}\right) \cdot 2x\right]}{2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^3} \cdot x \cdot 3\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^2 \cdot \frac{2y}{x^2}} =$$

$$= -\frac{\dfrac{-2y}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{x\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}-6\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{\dfrac{2x}{x^2+y^2}-\dfrac{6y}{x^2+y^2}} = -\frac{-x^2-2xy+5y^2}{2x^2-6xy} = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy},$$

і переконуємось, що (2.4) – загальний інтеграл диференціального рівняння (2.1).

Задача 3.31.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1. \tag{3.1}$$

Розв'язання: Спочатку знайдемо загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (3.1). Застосуємо підстановку $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$ і запишемо (3.1) у вигляді

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\frac{2}{x^2}, \tag{3.2}$$

далі

$$uv' - \frac{uv}{x} = 0 \Rightarrow u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = 0.$$

Якщо $u \neq 0$, то останнє рівняння рівносильне диференціальному рівнянню із змінними, що відокремлюються

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0 \text{ або } \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}. \tag{3.3}$$

Проінтегрувавши обидві частини (3.3), отримаємо

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ell n|v| = \ell n|x|,$$

звідки v=x.

Підставимо v=x в (3.2), отримаємо

$$u'x = -\frac{2}{x^2},$$

або

$$u' = -\frac{2}{x^3},$$

звідки

$$u = \int\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx + C = \frac{1}{x^2} + C.$$

Загальний розв’язок (3.1) матиме вигляд

$$y = u \cdot v = \left(\frac{1}{x^2} + C\right) \cdot x = \frac{1}{x} + Cx.$$

Використовуючи початкову умову y(1)=1, виділимо із загального розв’язку частковий (визначимо С):

$$y(1) = \frac{1}{1} + C \cdot 1 = 1 \Rightarrow C = 0.$$

Таким чином, частковий розв’язок має вигляд $y = \frac{1}{x}$.

Зробимо перевірку

$$y(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Підставивши $y = \frac{1}{x}$ і $y' = -\frac{1}{x^2}$ в (3.1), отримаємо $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2}, -\frac{2}{x^2} \equiv -\frac{2}{x^2}$.

Задача 4.31.

Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$xdx + ydy + (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = 0 \qquad (4.1)$$

Розв’язання: Запишемо (4.1) у вигляді

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0.$$

Знаходимо

$$\left(y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

$$\left(x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_y = -\frac{1 \cdot \left(x^2 + y^2\right) - y \cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2},$$

і переконуємося, що $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$. Цим доведено, що диференціальне рівняння (4.1) є рівняння в повних диференціалах, тобто існує така функція u(x, y), що

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = x - \frac{y}{x^2 + y^2}; \qquad u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = y + \frac{x}{x^2 + y^2}. \tag{4.2}$$

Проінтегруємо перше рівняння в (4.2), отримаємо

$$u = \int \left(x - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y), \tag{4.3}$$

де φ(y) – невідома функція змінної y (тобто довільна стала інтегрування по x).

Використовуючи друге рівняння (4.2), отримаємо

$$\left(\frac{x^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \varphi(y) \right)'_y = y + \frac{x}{x^2 + y^2},$$

звідки

$$-\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} \right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) + \varphi'(y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2},$$

або

$$\varphi'(y) = y.$$

Розв'язавши останнє диференціальне рівняння, отримаємо

$$\varphi(y) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} - C. \tag{4.4}$$

Підставимо (4.4) в (4.3), знаходимо загальний інтеграл диференціаль-ного рівняння (4.1) у вигляді

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C. \tag{4.5}$$

Знайдемо похідну y' від функції, яка задана рівнянням (4.5)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{y}}{y-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)}=-\frac{x-\dfrac{y}{x^2+y^2}}{y+\dfrac{x}{x^2+y^2}},$$

звідки

$$\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0,$$

і переконуємось, що (4.5) – загальний інтеграл диференціального рівняння (4.1).

<u>Задача 5.31.</u>

Знайти лінію, що проходить через точку $M_0(1;1)$ і має таку властивість, що в любій її точці M дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, що дорівнює 1.

<u>Розв’язання:</u> Рівняння дотичної T_x до відшукуваної лінії $y=y(x)$ в довільній її точці $M(x;y)$, запишеться у вигляді

$$T_x : У-y=y'(x)(X-x) \tag{5.1}$$

де через X, У позначено поточні координати прямої T_x.

Підставимо в (5.1) X=0, отримаємо

$$У-y=-y'(x)\cdot x \tag{5.2}$$

За умовою задачі для довільної точки $M(x;y)$ лінії $y=y(x)$ повинна виконуватись рівність

$$У-y=1 \tag{5.3}$$

Підставивши (5.3) в (5.2), отримаємо:

$$-y'x=1 \quad \text{або} \quad y'=-\frac{1}{x} \tag{5.4}$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (5.4), знаходимо загальний розв’язок

$$y = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\ell n|x| + C. \qquad (5.5)$$

Використавши початкову умову y(1) = 1, визначаємо стале C:

$$y(1) = -\ell n1 + C = 1,$$

звідки маємо: C = 1.

Отже, рівняння відшукуваної лінії має вигляд

$$y = -\ell nx + C \qquad (5.6)$$

Зобразимо відшукувану лінію на рис.1

Рис. 1

Задача 6.31.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1 \qquad (6.1)$$

$$y''\cdot y^3 + 1 = 0.$$

Розв'язання: Оскільки диференціальне рівняння не містить незалежної змінної, то пониження порядку досягається шляхом підстановки

$$y' = p(y), \quad y'' = p'\cdot p, \quad p' = \frac{dp}{dy}. \qquad (6.2)$$

Підставляючи (6.2) в (6.1), отримаємо

$$p' \cdot p \cdot y^3 = -1. \qquad (6.3)$$

Відокремлюючи змінні в (6.3) та інтегруючи, знаходимо

$$pdp = -\frac{dy}{y^3}, \quad \int pdp = -\int \frac{dy}{y^3},$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2}, \quad p = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}. \qquad (6.4)$$

Враховуючи, що $p = y'$ рівняння (6.4) перепишемо у вигляді

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}. \qquad (6.5)$$

Використовуючи початкову умову із (6.1), знаходимо C_1:

$$-1 = -\sqrt{\frac{1}{(-1)^2} + C_1} \Rightarrow C_1 = 0.$$

Отже, рівняння (6.5) має вигляд

$$y' = \frac{1}{y}. \qquad (6.6)$$

Відокремлюючи змінні в (6.6) і інтегруючи, знаходимо

$$ydy = dx, \quad \int ydy = \int dx, \quad \frac{y^2}{2} = x + C_2,$$

або

$$y = \pm\sqrt{2x + 2C_2}. \qquad (6.7)$$

Використовуючи початкову умову y(1) = -1, знаходимо C_2

$$-1 = -\sqrt{2 \cdot 1 + 2C_2} \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Підставивши значення $C_2 = -\frac{1}{2}$ в (6.7), отримаємо

$$y = -\sqrt{2x - 1}. \qquad 6.8)$$

Для виконання перевірки правильності знайденного розв'язку (6.8) знаходимо похідні

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{2x-1}};$$

$$y''=\frac{1}{2x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2=\frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(\sqrt{2x-1})^{3}}.$$

Підставивши y'' та y в (6.1), переконуємось, що:

$$\frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(-\sqrt{2x-1}\right)^{3}+1=0,\quad y(1)=-\sqrt{2\cdot 1-1}=-1,\quad y'(1)=-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1-1}}=-1$$

Отже, знайдена функція $y=-\sqrt{2x-1}$ - єдиний розв'язок задачі Коші (6.1).

<u>Задача 7.31.</u>

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-4y'+4y=e^{2x}\cdot\sin 6x \tag{7.1}$$

<u>Розв'язання:</u> Відкидаємо праву частину в (7.1) і розв'язуємо однорідне рівняння

$$y''-4y'+4y=0 \tag{7.2}$$

Характеристичне рівняння k^2-4k+4 = 0 має корені $k_1=k_2=2$.

Отже, загальний розв'язок (7.2) записується у вигляді:

$$y_0=\left(C_1+C_2x\right)e^{2x} \tag{7.3}$$

Далі розглянемо праву частину (7.1) та відшукуємо часткові розв'язки (7.1) у вигляді

$$y_r=e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x) \tag{7.4}$$

Підставляючи (7.4) в (7.1) отримаємо:

$$\begin{array}{r|l}
4 & y_r=e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x) \\
-4 & y_r'=2e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)+e^{2x}(-6A\sin x+6B\cos 6x) \\
1 & y_r''=4e^{2x}(A\cos 6x+B\sin 6x)+4e^{2x}(-6A\sin 6x+6B\cos 6x)+e^{2x}(-36A\cos 6x-36B\sin 6x) \\
\hline
\Sigma & =1\cdot e^{2x}\sin 6x+0e^{2x}\cos 6x
\end{array}$$

Порівнюючи коефіцієнти при $e^{2x}\cos 6x$ та $e^{2x}\sin 6x$ в лівій і правій частинах (7.1), отримаємо рівняння для знаходження невідомих коефіцієнтів A та B:

при $e^{2x}\cos 6x \,|\, 4A\text{-}8A\text{-}24B\text{+}4A\text{+}24B\text{-}36A = 0, \ \Rightarrow \ A = 0$

при $e^{2x}\sin 6x \,|\, 4B\text{-}8B\text{+}24A\text{+}4B\text{-}24A\text{-}36B = 1, \ \Rightarrow \ B = -\dfrac{1}{36}$

Підставивши $A = 0$, $B = -\dfrac{1}{36}$ в (7.4), знаходимо частковий розв'язок (7.1)

$$y_r = e^{2x}\left(\frac{-\sin 6x}{36}\right) \tag{7.5}$$

Складаючи частковий розв'язок, (7.5) та загальний розв'язок (7.3) однорідного рівняння (7.2), знаходимо загальний розв'язок у заданого рівняння (7.1):

$$y=y_0+y_r \Rightarrow y = \left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)e^{2x}. \tag{7.6}$$

Знаходимо першу та другу похідні від (7.6)

$$y' = \left(C_2 - \frac{\cos 6x}{6}\right)e^{2x} + \left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)2e^{2x}$$

$$y'' = \sin 6x \cdot e^{2x} + 2\left(C_2 - \frac{\cos 6x}{6}\right)\cdot e^{2x}\cdot 2 + \left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)\cdot 4e^{2x}.$$

Підставляючи y, y', y'' в (7.1) переконуємось, що загальний розв'язок диференціального рівняння (7.6) знайдено правильно:

$$\sin 6x \cdot e^{2x} + 4\left(C_2 - \frac{\cos 6x}{6}\right)e^{2x} + 4\left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)e^{2x} -$$

$$-4\left(C_2 \frac{\cos 6x}{6}\right)e^{2x} - 8\left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)e^{2x} + 4\left(C_1 + C_2 x - \frac{\sin 6x}{36}\right)e^{2x} =$$

$$=e^{2x}\left\{\begin{aligned}&(4C_2+4C_1-4C_2-8C_1+4C_1)+(4C_2x-8C_2x+4C_2x)+\\&+\sin 6x\left(1-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right)+\cos 6x\left(-\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\right)\end{aligned}\right\}\equiv e^{2x}\sin 6x.$$

<u>Задача 8.31</u>

Знайти розв'язок задачі Коші.

$$y''+y=\frac{1}{\cos x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0 \qquad (8.1)$$

<u>Розв'язання:</u> Відкидаючи праву частину в (8.1) розв'язуємо однородне рівняння

$$y''+y=0 \qquad (8.2)$$

Характерестичне рівняння $k^2+1=0$ має корені $k_1=i$ $k_2=-i$. Отже, загальний розв'язок (8.2) записується в вигляді.

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x. \qquad (8.3)$$

Згідно з методом варіації довільних сталих, будемо відшукувати частковий розв'язок (8.1) у вигляді

$$y_r=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x. \qquad (8.4)$$

Система рівнянь для визначення невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ має вигляд:

$$\begin{cases}C_1'\cdot y_1+C_2'\cdot y_2=0,\\ C_1'\cdot y_1'+C_2'\cdot y_2'=f(x).\end{cases} \qquad (8.5)$$

Підставляючи у (8.5)

$$y_1=\cos x,\quad y_1'=-\sin x,\quad y_2=\sin x,\quad y_2'=\cos x,$$

$f(x)=(\cos x)^{-1}$, отримаємо

$$\begin{cases}C_1'\cos x+C_2'\sin x=0,\\ -C_1'\sin x+C_2'\cos x=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases} \qquad (8.6)$$

Розв'язуючи систему (8.6), знаходимо

$$C_1' = -\mathrm{tg}x, \quad C_2' = 1. \tag{8.7}$$

Інтегруючи (8.7), отримаємо

$$C_1 = \ell n|\cos x|, \quad C_2 = x\,. \tag{8.8}$$

Підставляючи (8.8) в (8.4), одержимо

$$y_r = \cos x \cdot \ell n|\cos x| + x \cdot \sin x. \tag{8.9}$$

Додаючи (8.9) с загальним розв'язком (8.3) однорідного рівняння (8.2), знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння (8.1):

$$y = \left(C_1 + \ell n|\cos x|\right)\cos x + \left(C_2 + x\right)\sin x. \tag{8.10}$$

Знайдемо y':

$$y' = \frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)\cos x + \left(C_1 + \ell n|\cos x|\right)\left(-\sin x\right) + \sin x + \left(C_2 + x\right)\cos x.$$

Використовуючи початкові умови (8.1), складемо систему рівнянь для визначення сталих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} y(0) = \left(C_1 + \ell n\cos 0\right)\cos 0 + \left(C_2 + 0\right)\sin 0 = 1, \\ y'(0) = -\sin 0 + \left(C_1 + \ell n\cos 0\right)\left(-\sin 0\right) + \sin 0 + \left(C_2 + 0\right)\cos 0 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи яку, легко знаходимо, що

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0\,. \tag{8.11}$$

Підставивши (8.11) в (8.10), одержимо

$$y = \left(1 + \ell n|\cos x|\right)\cos x + x\sin x\,. \tag{8.12}$$

Знаходимо похідні y' та y'':

$$y' = \frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)\cos x - \left(1 + \ell n|\cos x|\right)\sin x + \sin x + x\cos x =$$
$$= \left(1 + \ell n|\cos x|\right)\sin x + x\cos x\,,$$

$$y'' = \frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)\sin x - \left(1 + \ell n|\cos x|\right)\cos x + \cos x - x\sin x =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x\,\ell n|\cos x| - x\sin x\,.$$

Підставивши y та y'' в (8.1), одержимо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x \ell n|\cos x| - x \sin x + (1 + \ell n|\cos x|)\cos x + x \sin x =$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} \equiv \frac{1}{\cos x}.$$

Враховуючи до цього, що

$$y(0) = (1 + \ell n \cos 0)\cos 0 + 0 \sin 0 = 1,$$

$$y'(0) = -(1 + \ell n \cos 0)\sin 0 + 0 \cos 0 = 0,$$

переконуємось, що (8.12) – єдиний розв’язок задачі Коші (8.1).

Задача 9.31.

Записати в матричній формі систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + t + \cos t, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \tag{9.1}$$

та її розв’язок, що задавольняє початковим умовам

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0. \tag{9.2}$$

Розв’язання: Розглянемо неоднорідну систему 2-х лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t), \end{cases} \tag{9.3}$$

де $a_{11},...,a_{22}$ – задані числа; $f_1(t)$, $f_2(t)$ – відомі функції, а x і y - невідомі(відшукувані) функції змінної t.

Введемо позначення:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Використовуючи правила множення, додавання та рівності матриць систему (9.3) можна записати в матричній формі так

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + F. \qquad (9.4)$$

Позначивши через

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad (9.5)$$

загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X, \qquad (9.6)$$

через

$$X_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} \qquad (9.7)$$

будь-який частинний розв'язок системи (9.4), тоді загальний розв'язок неоднорідної системи (9.4) можна записати у вигляді:

$$X = X_0 + X_r \qquad (9.8)$$

Для того щоб знайти загальний розв'язок X_0, необхідно розв'язати характеристичне рівняння

$$dct(A - k \cdot E) = 0 \qquad (9.9)$$

де E – одинична матриця.

Якщо корені k_1 та k_2 рівняння (9.9) різні, то для кожного значення k_i із системи

$$(A - k_i E)T_i = 0 \qquad (9.10)$$

можна знайти будь-який ненульовий розв'язок, що визначає ненульову матрицю-стовпець

$$T_i = \begin{bmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1{,}2 \qquad (9.11)$$

Використовуючи (9.11), загальний розв'язок однорідної системи (9.6) можна записати у вигляді

$$X_0 = \begin{bmatrix} t_1^{(1)} t_1^{(2)} \\ t_2^{(1)} t_2^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^{k_1 t} \\ C_2 e^{k_2 t} \end{bmatrix}, \qquad (9.12)$$

де C_1 та C_2 - довільні сталі.

Частинний розв'язок (9.7) в запропонованих прикладах легко знаходиться методом підбору.

Підставивши в (9.4)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} t + \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

знаходимо

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t + \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.13}$$

це і є матричний запис системи диференціальних рівнянь (9.1). Складемо характеристичне рівняння (9.9) та знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0, \text{ звідки } k_1 = 1, \ k_2 = 3.$$

Тепер запишемо системи (9.10) та знайдемо якій-небудь їх ненульові розв'язки:

$$\begin{cases} (2-k_i)t_1^{(i)} + t_2^{(i)} = 0, \\ t_1^{(i)} + (2-k_i)t_2^{(i)} = 0, \end{cases} \text{ звідки } T_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Підставивши T_i в (9.12), отримаємо

$$X_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cdot e^t \\ C_2 \cdot e^{3t} \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

При знаходженні частинного розв'язку X_r використовуємо принцип суперпозиції. Складемо стовпець D у вигляді суми стовпців D_1 та D_2, де

$$D_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9.15}$$

Тоді частинний розв'язок X_r в свою чергу можна записати у вигляді відповідної суми

$$X_r = X_r^{(1)} + X_r^{(2)}.$$

Будемо відшукувати $X_r^{(1)}$ системи (9.13) для D = D_1 у вигляді

$$X_r^{(1)} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \end{bmatrix}. \qquad (9.17)$$

Підставимо (9.17) в (9.13). В результаті одержимо матричну рівність

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C \cdot t$$

яка рівносильна двом звичайним:

A = 2·(At + B)+1·(Ct + D)+t,

C = 1·(At + B) + 2·(Ct + D) + 0

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степеней t в лівій та правій частинах записаних рівностей, одержимо систему для знаходження чисел A, B, C та D:

$$\begin{cases} 0 = 2A + C + 1, \\ A = 2B + D, \\ 0 = A + 2C, \\ C = B + 2D. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + C = -1, \\ A - 2B - D = 0, \\ A + 2C = 0, \\ B - C + 2D = 0. \end{cases}$$

Із 1-го та 3-го рівнянь $\begin{cases} 2A + C = -1 \\ A + 2C = 0 \end{cases}$ маємо систему

$$\begin{cases} 2A + C = -1, \\ A + 2C = 0, \end{cases} \text{звідки } C = \frac{1}{3},\ A = -\frac{2}{3}.$$

Із 2-го та 4-го рівнянь $\begin{cases} A - 2B - D = 0, \\ B - C + 2D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3} - 2B - D = 0, \\ B - \frac{1}{3} + 2D = 0 \Rightarrow B = -2D + \frac{1}{3}, \end{cases}$

звідки $-\frac{2}{3}+4D-\frac{2}{3}-D=0,\ 3D=\frac{4}{3},\ D=\frac{4}{9},\ B=-\frac{8}{9}+\frac{1}{3},\ B=-\frac{5}{9}.,$

Підставляючи розв’язок системи

$$A=-\frac{2}{3};\quad B=-\frac{5}{9};\quad C=\frac{1}{3};\quad D=\frac{4}{9}$$ в (9.17),

знаходимо

$$X_r^{(1)}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{9}\\ \frac{1}{3}t+\frac{4}{9}\end{bmatrix}. \tag{9.18}$$

Частинний розв’язок $X_r^{(2)}$ системи (9.13) для $D = D_2$ будемо відшукувати в вигляді

$$X_r^{(2)}=\begin{bmatrix}A\cos t+B\sin t\\ C\cos t+D\sin t\end{bmatrix}. \tag{9.19}$$

Підставимо (9.19) в (9.13). В результаті одержимо матричну рівність

$$\begin{bmatrix}-A\sin t+B\cos t\\ -C\sin t+D\cos t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}A\cos t+B\sin t\\ C\cos t+D\sin t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos t\\ 0\end{bmatrix}$$

яка рівносильна двом звичайним

$$-A\sin t+B\cos t=2A\cos t+2B\sin t+C\cos t+D\sin t+\cos t,$$
$$-C\sin t+D\cos t=A\cos t+B\sin t+2C\cos t+2D\sin t+0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin t$; $\cos t$ в лівій і правій частинах останніх 2-х рівностей будемо мати систему для визначення коефіцієнтів A, B, C та D.

$$\begin{cases}-A=2B+D\\ B=2A+C+1\\ -C=B+2D\\ D=A+2C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+2B+D=0\\ 2A-B+C=-1\\ B+C+2D=0\\ A+2C-D=0\end{cases}$$

Підставляючи розв’язок системи

$$A=-\frac{2}{5};\quad B=\frac{3}{10};\quad C=\frac{1}{10};\quad D=-\frac{1}{5}\ \text{в (9.19)},$$

запишемо, що

$$X_r^{(2)}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{3}{10}\sin t\\ \frac{1}{10}\cos t-\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}. \tag{9.20}$$

Підставляючи (9.18) та (9.20) в (9.16), знаходимо

$$X_r=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{3}{10}\sin t\\ \frac{1}{3}t+\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}. \tag{9.21}$$

Таким чином, загальний розв’язок системи (9.13) у відповідності з формулою (9.8) знаходимо у вигляді

$$X=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}C_1\bullet e^{t}\\ C_2\bullet e^{3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{3}{10}\sin t\\ \frac{1}{3}t+\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{1}{5}\sin t\end{bmatrix}. \tag{9.22}$$

Використовуючи початкові умови (9.2), запишемо матричну рівність

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}C_1\cdot e^{0}\\ C_2\cdot e^{3\cdot 0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\cdot 0-\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\cos 0+\frac{3}{10}\sin 0\\ \frac{1}{3}\cdot 0+\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\cos 0-\frac{1}{5}\sin 0\end{bmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{43}{45}\\ \frac{49}{90}\end{bmatrix},$$

яка рівносильна двом звичайним рівностям:

$$\begin{cases}0=-C_1+C_2-\frac{43}{45}\ ,\\ 0=C_1+C_2+\frac{49}{90}\ .\end{cases}$$

Підставляючи розв’язок данної системи

$$C_1 = -\frac{3}{4}, \quad C_2 = \frac{37}{180} \text{ в (9.22)},$$

знаходимо

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \cdot e^t \\ \frac{37}{180} \cdot e^{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}t - \frac{5}{9} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t \\ \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{5}\sin t \end{bmatrix}. \tag{9.23}$$

Із (9.23) слідує, що відшукуваний розв'язок задачі Коші для системи (9.1) з початковими данними (9.2) задається формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{4}e^t + \frac{37}{180}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{9} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t, \\ y(t) &= -\frac{3}{4}e^t + \frac{37}{180}e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{5}\sin t. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Для контролю знаходимо:

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{3}{4}e^0 + \frac{37}{180}e^{3\cdot 0} - \frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{5}{9} - \frac{2}{5}\cos 0 + \frac{3}{10}\sin 0 = \\ &= \frac{3}{4} + \frac{37}{180} - \frac{5}{9} - \frac{2}{5} = \frac{135+37}{180} - \frac{43}{45} = \frac{172}{180} - \frac{43}{45} = \frac{43}{45} - \frac{43}{45} = 0 \ . \\ y(0) &= -\frac{3}{4}e^0 + \frac{37}{180}e^{3\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cos 0 - \frac{1}{5}\sin 0 = \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{37}{180} + \frac{4}{9} + \frac{1}{10} = -\frac{3}{4} + \frac{37+80+18}{180} = -\frac{3}{4} + \frac{135}{180} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0 \ . \end{aligned}$$

та, підставляючи знайдений розв'язок (9.24) в рівняння данної системи (9.1) переконуємось, що вони тотожно виконуються:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4}e^t + \frac{37\cdot 3}{180}e^{3t} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\sin t + \frac{3}{10}\cos t = \\ &= 2\left(\frac{3}{4}e^t + \frac{37}{180}e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{9} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{3}{10}\sin t\right) + \\ &+ \left(-\frac{3}{4}e^t + \frac{37}{180}e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cos t - \frac{1}{5}\sin t\right) + t + \cos t \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{4} + \frac{3}{4}\right)e^t + \left(\frac{37\cdot 3}{180} - \frac{2\cdot 37}{180} - \frac{37}{180}\right)e^{3t} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{10}{9} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{6}{10} + \frac{1}{5}\right)\sin t +$$

$$+\left(\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\frac{1}{10}-1\right)\cdot \cos t+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-1\right)\cdot t\equiv 0\ ,$$

$$-\frac{3}{4}e^{t}+\frac{37\cdot 3}{180}e^{3t}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}\cos t=$$

$$=\frac{3}{4}e^{t}+\frac{37}{180}e^{3t}-\frac{2}{3}t-\frac{5}{9}-\frac{2}{5}\cos t+\frac{3}{10}\sin t+$$

$$+2\left(-\frac{3}{4}e^{t}+\frac{37}{180}e^{3t}+\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{1}{5}\sin t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{6}{4}\right)e^{t}+\left(\frac{37\cdot 3}{180}-\frac{37}{180}-\frac{2\cdot 37}{180}\right)e^{3t}+\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{9}-\frac{8}{9}\right)+$$

$$+\left(-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}+\frac{2}{5}\right)\sin t+\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{10}\right)\cos t+\left(\frac{2}{3}t-\frac{2}{3}t\right)\cdot t\equiv 0\ .$$

Довідковий матеріал

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$
   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Список рекомендованої літератури

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчесление / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. –560 с.
2. Барковський В. В. Вища математика для економістів / В. В. Барковський, Н. В. Барковська – К. : ЦУЛ, 2002. – 400 с.
3. Овчинніков П. П. Вища математика: підруч. для вузів / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко – К. : Техніка, 2000 – 592 с.
4. Соколенко О. І. Вища математика : підруч. / О. І. Соколенко – Академія , 2002. – 432 с.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 1985. – 383 с.
6. Вища математика : зб. задач / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрина. – К., 2001. – 480 с.
7. Демидович Б. П. Дифференциальные уравнения: учеб. пособ. / Б. П. Демидович, В. П. Моденов –3-е изд. – М. : изд-во «Лань», 2008. – 288 с.
8. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А. Ф. Филиппов – 2-е изд. – М. : КомКнига, 2007. - 240 с.

Зміст

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Контрольні завдання та методичні рекомендації

Укладачі:
Шебанін В'ячеслав Сергійович,
Шебаніна Олена В'ячеславівна,
Атаманюк Ігор Петрович
та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 2,5.
Тираж 50 прим. Зам. №____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул Паризької Комуни, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р.