

Міністерство освіти і науки України  
Миколаївський національний аграрний університет  
Інженерно-енергетичний факультет  
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

## **НАДІЙНІСТЬ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ**

Методичні рекомендації

для виконання практичних робіт і самостійної роботи студентами  
денної та заочної форм навчання спеціальності:  
7.10010203 «Механізація сільського господарства»

Миколаїв

2015

УДК 631.36:621.3  
ББК 34+30.10  
Н17

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 28 травня 2015 р., протокол № 9.

#### **Укладачі:**

- Г. О. Іванов – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.
- В. І. Гавриш – д-р екон. наук, професор, в. о. завідувача кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу, Миколаївський національний аграрний університет.
- П. М. Полянський – канд. екон. наук, в. о. зав. кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.
- О. В. Гольдшмідт – канд. техн. наук, доцент.

#### **Рецензенти:**

- О. А. Горбенко – канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри механізації та електрифікації сільськогосподарського виробництва, Миколаївський національний аграрний університет.
- К. В. Дубовенко – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри електротехнологій та електропостачання Миколаївського національного аграрного університету.

© Миколаївський національний  
аграрний університет, 2015

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	4
Практична робота № 1. Математичні основи розрахунку надійності .....	5
1.1. Короткі теоретичні відомості .....	5
1.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання .....	10
1.3. Питання для самостійної роботи студентів .....	13
Практична робота № 2. Вивчення законів розподілу випадкових величин .	13
2.1. Короткі теоретичні відомості .....	13
2.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання .....	22
2.3. Питання для самостійної роботи студентів .....	24
Практична робота № 3. Визначення кількісних характеристик надійності машин та обладнання .....	24
3.1. Короткі теоретичні відомості .....	25
3.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання .....	34
3.3. Питання для самостійної роботи студентів .....	35
Список використаної літератури .....	35

## ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації призначені для виконання практичних робіт і самостійної роботи студентами інженерних спеціальностей вищих аграрних навчальних закладів України III-IV рівнів акредитації денної і заочної форм навчання.

Зміст кожної роботи включає короткі теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи; приклад виконання розрахункової частини; індивідуальні завдання і контрольне питання для самостійної роботи. Метою даних практичних робіт є придбання студентами знань і навиків по здійсненню заходів спрямованих на підтримку і відновлення працездатності і ресурсу автотракторної техніки.

Після виконання практичних робіт в повному об'ємі студент повинен знати основні методи розрахунку показників надійності і ремонтпридатності, визначати ресурс машин і способи підвищення довговічності.

Студент повинен уміти визначати стани і ресурс машин (вузлів, агрегатів), розробляти заходи і рекомендації щодо підвищення надійності об'єктів, проводити розрахунки основних показників надійності, довговічності і ремонтпридатності автотракторної техніки.

# Практична робота № 1. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКУ НАДІЙНОСТІ

## 1.1. Короткі теоретичні відомості

Для кількісного визначення і порівняльної оцінки надійності машин служить теорія вірогідності. Ознайомлення з методами теорії вірогідності – науки, вивчаючої закономірності випадкових явищ, дає можливість з достатньою для практики точністю на підставі статистичної обробки необхідної кількості досвідчених даних, з урахуванням конструктивних і виробничо-технологічних особливостей машин наперед встановити, коли і які несправності можуть виникнути у даної групи об'єктів. Теорія вірогідності дозволяє вивчати масові явища, тобто що повторюються при багатократних випробуваннях. Випробуванням або дослідом називають реалізацію на практиці деяких правил або умов, наприклад: контроль придатності деталей граничними калібрами, визначення розміру деталі, обробленої на верстаті і т.д.

Явища, що виявляються в процесі випробувань, називають подіями. В теорії вірогідності – це всякий факт, який в результаті досвіду може відбутися або не відбутися. Події підрозділяються на достовірні, можливі, неможливі, сумісні, несумісні, єдино можливі, рівноможливі, залежні і незалежні. Достовірним називається подія, яка в результаті даного випробування обов'язково відбудеться (наприклад, поява непридатної деталі в партії забракованих). Можливим – коли в процесі випробування воно може відбутися і не відбутися (поява бракованої деталі в партії деталей, виготовлених при несталому або невивченому технологічному процесі). Неможливим – якщо в результаті випробування воно відбутися не може (поява годної деталі в партії непридатних).

Дві події називаються сумісними, якщо при випробуванні поява одного з них не виключає можливості появи іншого (наприклад, коли при контролі бракованої деталі прохідну і непрохідну сторони калібру «проскакують»). Несумісними називаються такі дві події, коли поява одного з них виключає можливість появи іншого (при контролі годної деталі прохідна і непрохідна сторони калібру не можуть йти «на прохід»). Події називаються єдино можливими, коли при випробуванні відбудеться хоча б одне з них. Наприклад, при контролі деталей єдино можливими подіями будуть поява годних і бракованих, а для годних деталей – прохідність прохідного калібру і непрохідність непрохідного. Якщо при випробуванні відбувається декілька можливих подій і при цьому немає підстави припускати, що поява одних можливе інших, то такі події називаються рівноможливими. Наприклад, при витяганні з партії деталей, що містить десяти пронумерованих бракованих, можливо поява бракованої деталі з будь-яким номером

Залежними називаються такі події, коли поява одного з них залежить від того, відбулося або не відбулося інше (наприклад, відмова двигуна, встановленого на тракторі, вабить втрату працездатності останнього). Незалежними – якщо поява одних не виключає вірогідності появи інших (незалежна відмова).

Вірогідністю події називається відношення числа випадків, що сприяють настанню даної події, до всього числа несумісних, єдино можливих і рівноможливих. Воно виражається формулою

$$P(A) = m/N, \quad (1.1)$$

де  $P(A)$  – вірогідність події  $A$ ;  $m$  – число випадків, що сприяють настанню події  $A$ ;  $N$  – загальне число випадків, тобто число несумісних, єдино можливих, рівноможливих подій.

Оскільки число сприятливих випадків завжди укладено між 0 і  $N$  (0 – для неможливого і  $N$  – для достовірної події), то вірогідність події завжди є раціональний правильний дріб

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

Поставимо перед собою задачу вивчити випадкову величину  $T$ , закон розподілу якої точно невідомий. Для його визначення над  $T$  проведемо серію незалежних дослідів (спостережень). При цьому  $T$  прикмет ряд конкретних значень, які представляють первинний статистичний матеріал, що підлягає обробці і науковому аналізу.

**Приклад 1.** Випадкова величина  $T$  – напрацювання (в годинах) двигунів СМД-14. Проведено 18 спостережень. Результати зводимо в простий статистичний ряд, представлений в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Простий статистичний ряд

Порядковий номер об'єкту, $i$	Наработка об'єкта, $t_i$	Порядковий номер об'єкту, $i$	Наработка об'єкта, $t_i$	Порядковий номер об'єкту, $i$	Наработка об'єкта, $t_i$
1	2225	7	2061	13	2105
2	2760	8	2800	14	3963
3	1939	9	2506	15	2047
4	1944	10	2527	16	2651
5	2522	11	1907	17	2151
6	2099	12	2279	18	1865

Отриманий матеріал може бути оброблений різними способами. Один з них – статистична функція розподілу випадкової величини, яка називається частотою події  $f$  при  $T < t$ , в цих методичних рекомендаціях:  $F(t) = P(T < t)$ .

Щоб знайти значення статистичної функції розподілу при даних  $t_i$ , підраховуємо число спостережень, в яких величина  $T$  прийняла значення  $< t_i$ , і ділимо на загальне число ( $N$ ) проведених спостережень ( $i$  – номер спостереження).

При достатньому числі дослідів для більшої компактності і наочності отриманий матеріал піддаємо додатковій обробці і будуємо так званий інтервальний статистичний ряд.

Число розрядів (інтервалів) не повинне бути дуже великим (як показала практика, в межах 10–20). Воно залежить від величини прийнятого інтервалу, який визначається з залежності

$$\Delta t = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{1 + 3,31 \cdot \ln N} \quad (1.3)$$

де  $\Delta t$  – величина інтервалу;  $N$  – число спостережень.

Знаючи величину інтервала визначаємо їх кількість

$$k = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{\Delta t} \quad (1.4)$$

Величину інтервалу доцільно округляти до цілого значення або до значення з точністю однієї значущої цифри після коми.

При цьому межі для будь-якого  $i$  - го інтервалу визначалися:

$$\text{нижня межа } X_{i-1} = R_{\min} + \Delta t \cdot (i - 1) \quad (1.5)$$

$$\text{верхня межа } X_i = X_{i-1} + \Delta t \quad (1.6)$$

При угрупованні значень  $T$  виникає питання про те, до якого розряду віднести значення, що знаходиться на межі двох інтервалів. В цих випадках слід вважати, що дане значення відноситься в рівній мірі до обох розрядів і його треба підсумовувати з числами  $t$ , - того і іншого розрядів по  $\frac{1}{2}$ .

**Приклад 2.** Проведено 65 спостережень за двигунами СМД-14, встановленими на тракторах Т-74. Результати спостережень зводимо в інтервальний статистичний ряд, представлений в табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Інтервальний статистичний ряд

Інтервали	Частота $m_i$	Статистична ймовірність, $P(t)$	Відносна частота $f_i$ , %
1100 - 1300	4	0,062	6,15
1300 - 1500	3	0,046	4,61
1500 - 1700	3	0,046	4,61
1700 - 1900	8	0,124	12,30
1900 - 2100	17	0,260	26,10
2100 - 2300	11	0,170	16,90
2300 - 2500	3	0,046	4,61
2500 - 2700	5	0,077	7,70
2700 - 2900	4	0,062	6,15
2900 - 3100	-	-	-
3100 - 3300	1	0,015	1,54
3300 - 3500	1	0,015	1,54
3500 - 3700	4	0,062	6,15
3700 - 3900	1	0,015	1,54
Разом	65	1,0	100

На підставі табл. 1.2 визначимо основні показники статистичного ряду: інтервал статистичного ряду рівний

$$\Delta t = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{1 + 3,31 \cdot \ln N} = \frac{3900 - 110}{1 + 3,31 \cdot \ln 65} = 189,502, \text{ приймаємо } \Delta t = 200;$$

кількість інтервалів знаходимо по формулі 1.4

$$k = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{\Delta t} = \frac{3900 - 1100}{200} = 14.$$

Межі класів, які були визначені по формулах (1.5) – (1.6) зведені в перший стовпець табл.1.2;

Статистичний ряд може бути оформлений графічно у вигляді гистограми, на рис. 1.1 приведена її побудова за даними табл. 1.2

Розрахунок параметрів і побудову гистограм доцільно проводити з використанням табличного процесора “Excel”.

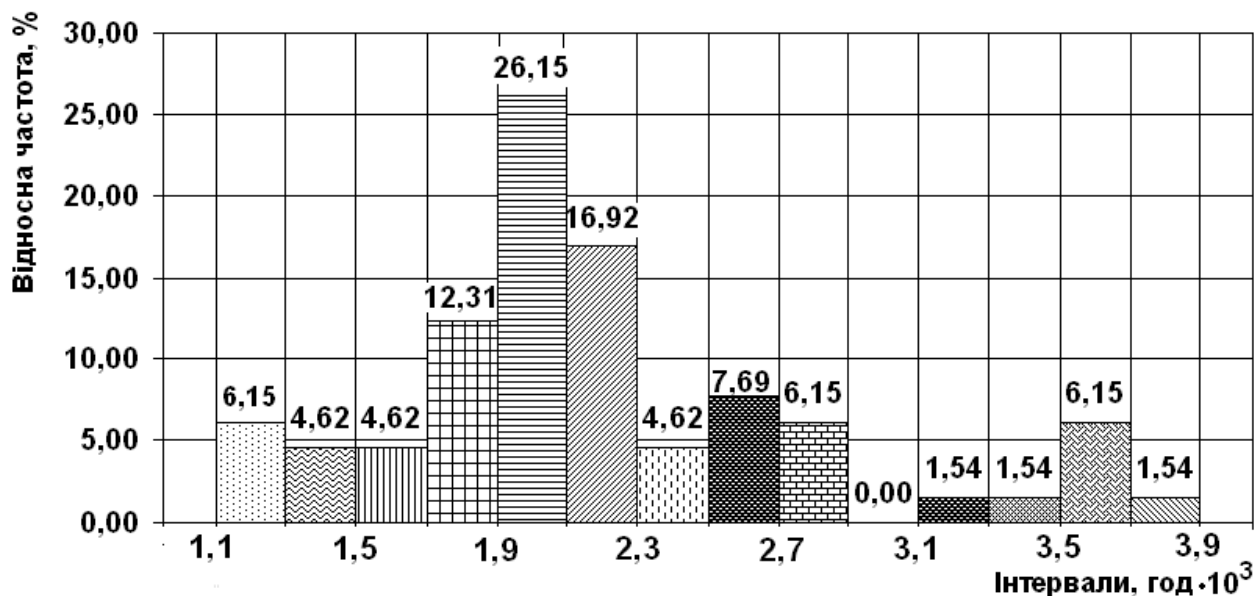


Рис.1.1. Графічне оформлення статистичного ряду (гістограма)

До основних параметрів, якими оцінюються параметри емпіричного розподілу випадкової величини відносяться середнє значення  $\bar{t}$ , середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  і коефіцієнт варіації  $v$ .

Методика обчислення параметрів вибірки залежить від кількості цифр, якими виражаються значення випадкової величини, а також від об'єму вибірки.

Розглянемо деякі з них.

Якщо значення вибірки виражені трьох - і більш значними числами, а об'єм вибірки  $N > 25$ , тоді розрахунок параметрів доцільно виконувати шляхом введення нової випадкової величини

$$t'_i = \frac{t_i - t_0}{\Delta t} \quad (1.7)$$

де  $t'_i$  – нова випадкова величина;  $\Delta t$  – величина інтервалу;  $t_0$  – деяке початкове значення (звичайно приймають середину середніх значень інтервалу  $\bar{t}_i$ );  $\bar{t}_i$  – середнє значення інтервалу.

Допоміжні коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$ , які використовують для зручності подальших розрахунків, знаходяться по формулах



$$a_1 = \frac{\sum m_i \cdot t'_i}{\sum m_i}; \quad a_2 = \frac{\sum m_i \cdot (t'_i)^2}{\sum m_i}. \quad (1.8)$$

Середнє значення випадкової величини  $T$  складе

$$\bar{t} = t_0 + a_1 \cdot \Delta t. \quad (1.9)$$

Середнє квадратичне відхилення  $T$  буде:

$$\sigma = \Delta t \cdot \sqrt{a_2 - a_1^2}. \quad (1.10)$$

Коефіцієнт варіації знаходиться по виразу

$$v = \frac{\sigma}{\bar{t}}. \quad (1.11)$$

**Приклад 3.** За даними прикладу 2 розрахувати основні параметри розподілу випадкової величини. Результати розрахунків зведені в табл. 1.3. Величини параметрів складуть: величину початкового значення  $t_0$  приймемо рівній 2500

годин, тоді  $t'_i = \frac{t_i - t_0}{\Delta t} = \frac{\bar{t}_i - 2500}{200}$ ;

допоміжні коефіцієнти визначаються як:

$$a_1 = \frac{\sum m_i \cdot t'_i}{\sum m_i} = \frac{-99,5}{65} = -1,530769, \quad a_2 = \frac{\sum m_i \cdot (t'_i)^2}{\sum m_i} = 11,63461;$$

середнє значення випадкової величини

$$\bar{t} = t_0 + a_1 \cdot \Delta t = 2500 - 1,531 \cdot 200 = 2194 \text{ год.};$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \Delta t \cdot \sqrt{a_2 - a_1^2} = 200 \cdot \sqrt{11,635 - 1,531^2} = 610$$

коефіцієнт варіації дорівнює  $v = \frac{\sigma}{\bar{t}} = \frac{610}{2194} \cdot 100\% = 27,803\%$

Таблиця 1.3

Результати допоміжних розрахунків при визначенні середнього значення і середнього квадратичного відхилення

Інтервали	Частота, $m_i$	Середнє значення інтервалу, $\bar{t}_i$	Нова випадкова величина, $t'_i$	$m_i \cdot t'_i$	$m_i \cdot (t'_i)^2$
1	2	3	4	5	6
1100 - 1300	4	1200	-6,50	-26	169
1300 - 1500	3	1400	-5,5	-16,5	90,75
1500 - 1700	3	1600	-4,5	-13,5	60,75
1700 - 1900	8	1800	-3,5	-28,0	98,0
1900 - 2100	17	2000	-2,5	-42,5	106,25
2100 - 2300	11	2200	-1,5	-16,5	24,75
2300 - 2500	3	2400	-0,5	-1,5	0,75
2500 - 2700	5	2600	+0,5	+2,5	1,25
2700 - 2900	4	2800	1,5	60	9,00

Продовження табл. 1.3.

1	2	3	4	5	6
2900 - 3100	-	3000	2,5	0	0
3100 - 3300	1	3200	3,5	3,5	12,25
3300 - 3500	1	3400	4,5	4,5	20,25
3500 - 3700	4	3600	5,5	2,2	121,0
3700 - 3900	1	3800	6,5	6,5	42,25
Разом	65	X	X	—99,5	756,25

**Приклад 4.** Якщо об'єм вибірки невеликий ( $N < 25$ ), значення випадкової величини ділити на інтервали недоцільно. В даному випадку, як правило, визначаються тільки середнє значення і дисперсія.

В результаті експерименту отримані значення випадкової величини  $T$  (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Значення випадкової величини  $T$  и ее частота

Наработка об'єкта $t_i$ , год.	Частота, $m_i$	Наработка об'єкта $t_i$ , год.	Частота, $m_i$	Наработка об'єкта $t_i$ , год.	Частота, $m_i$
2250	1	2061	1	2105	1
2760	1	2080	1	3963	1
1939	1	2506	1	2047	1
1944	1	3527	1	2561	1
2522	1	1907	1	2125	1
2099	1	2279	1	2074	1

Середнє значення, або «стандарт», визначаємо з виразів:

$$\bar{t} = \frac{\sum t_i}{N} = \frac{42749}{16} = 2671,813 \text{ год}; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{11370712}{16-1}} = 870,6592 \text{ год.}$$

## 1.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання

За даними табл. 1.5. визначити середнє напрацювання двигуна автомобіля ГАЗ-53  $\bar{t}$ , знайти дисперсію  $\sigma$  і коефіцієнт варіації  $v$ . Повторність досвіду  $N=50$ . Число інтервалів  $k$  задано в табл. 1.5. Робота виконується в такій послідовності:

з табл. 1.5. вибираємо максимальнє  $R_{\max}$  і мінімальнє  $R_{\min}$  значення напрацювання двигуна автомобіля;

за формулою  $\Delta t = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{k}$  знайти величину інтервалу  $\Delta t$ , при необхідності округляючи його значення;

скласти інтервальний статистичний ряд з вказівкою частоти  $m_i$  статистичної вірогідності  $P(t)$  і відносної частоти  $f_i$ ;

за виразом (1.7) знаходимо значення нової випадкової величини а за виразом (1.8) значення допоміжних коефіцієнтів  $a_1, a_2$ ;

середнє значення напрацювання  $\bar{t}$  розраховуємо за виразом (1.9), дисперсію  $\sigma$  – за формулою (1.10) і коефіцієнт варіації  $v$  – за (1.11).

Оформити звіт по практичній роботі.

Таблиця 1.5

Простий статистичний ряд напрацювання двигуна автомобіля ГАЗ-53

№ п/п	№ варіанта *)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$	$t_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	3320	5460	6125	1860	2200	2870	3800	4200	5850	4320
2	6280	3840	5320	3700	2780	1890	2480	6410	2890	3500
3	5780	4900	2830	3510	3920	5910	6120	5810	3900	7400
4	3620	3650	4520	5210	6910	4730	5980	5110	4320	6700
5	2940	4530	3710	3920	5810	2960	3170	2780	3690	1950
6	4510	2950	2560	1760	2410	3960	4620	2950	3120	4640
7	2140	2530	2670	6050	1930	2410	2390	3650	5780	3490
8	1840	1910	2050	4500	2190	3540	6320	4580	4690	3940
9	6090	2540	2490	4652	4840	2090	2540	3690	2090	2180
10	2510	3980	6120	5890	5620	2940	2760	2590	2490	1960
11	5060	3512	2290	2720	2640	2680	3920	4090	3950	4780
12	1930	1870	4620	1790	2940	6820	4180	2940	1890	6920
13	5630	5910	3980	6140	5920	4610	3260	5840	6150	1870
14	1620	1890	2910	2510	4510	5730	5090	4010	6030	5810
15	3250	3620	1980	3510	3950	4050	6150	4980	5280	3250
16	1890	2500	2900	2950	5120	5970	1820	1760	6050	1860
17	1520	1680	2080	3080	4150	4290	3950	4560	6700	2540
18	5120	2560	3460	6080	1960	1790	1990	3950	3560	5140
19	2120	2360	3650	4620	3620	4560	2860	7320	3920	4620
20	3260	3950	3260	1960	1860	5380	3540	3260	2860	2310
21	3280	2100	2890	3010	4900	4010	4560	5320	4620	3690
22	1260	2390	3920	3290	6650	6520	6920	3620	4520	3620
23	2150	2160	2250	2910	3650	3250	5120	2890	2630	2910
24	4890	4680	5420	5910	5090	3690	2980	2030	4340	2890
25	2150	6590	2650	3680	2160	2590	1980	1560	1970	2050
26	2790	4560	6120	7150	4060	2100	5690	2600	2950	3690
29	1950	2560	1910	5120	3650	5140	3650	2590	5620	3780
28	2360	2960	4960	4120	4820	6320	2140	2980	2350	5950
29	2690	5320	3620	6950	3640	2980	2140	2510	5320	3540
30	2950	5630	5410	5490	5690	4520	4980	3980	2790	1860
31	2560	2890	5320	2980	2640	6420	2600	2450	3890	3940
32	5480	2350	2560	4590	6080	1890	1920	5120	4120	4810
33	5810	5810	4320	3800	3250	1620	6120	4500	2190	5120
34	2410	2410	3500	2480	1890	3250	2290	4652	4840	2120

Продовження табл. 1.5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
35	1930	1930	7400	6120	1520	1890	4620	5890	5620	3260
36	2190	2190	6700	5980	5120	1520	3980	2720	2640	3280
37	4840	4840	1950	3170	2120	5120	2910	1790	2940	1260
38	5620	5620	4640	4620	3260	2120	1980	6140	5920	2150
39	2640	2640	3490	2390	3280	3260	2900	2510	4510	4890
40	2940	2940	3940	6320	1260	3280	2080	3510	3950	2150
41	5920	5920	2180	2540	2150	1260	3460	2950	5120	2790
32	4510	4510	1960	2760	4890	2150	3650	3080	4150	1950
43	3950	3950	4780	3920	2150	4890	3260	6080	1960	2360
44	5120	5120	6920	4180	2790	2150	2890	4620	3620	2690
45	4150	4150	1870	3260	1950	2790	3920	1960	1860	2950
46	1960	1960	5810	5090	2360	1950	2250	3010	4900	2560
47	3620	3620	3250	6150	2690	2360	5420	3290	6650	5480
48	1860	1860	1860	1820	2950	2690	2650	2910	3650	5120
49	4900	4900	2540	3950	2560	2950	6120	5910	5090	2120
50	6650	6650	5140	1990	5480	2560	1910	3680	2160	3260
51	3650	3650	4620	2860	3250	5480	4960	7150	4060	3280
52	5090	5090	2310	3540	1890	2200	3620	5120	3650	1260
53	2160	2160	3690	4560	1520	2780	2870	4500	2190	3800
54	4060	4060	3620	6920	5120	3920	2690	4652	4840	2480
55	3650	3650	2910	5120	2120	6910	1890	5890	5620	6120
56	4820	4820	2890	2980	3260	5810	5910	2720	2640	5980
57	3640	3640	2050	1980	4200	2410	4730	1790	2940	3170
58	5690	5690	3690	5690	6410	1930	2960	6140	5920	4620
59	2640	2640	3780	3650	5810	2190	3960	2510	4510	2390
60	6080	6080	5950	2140	5110	4840	2410	3510	3950	6320
61	5810	5810	3540	2140	2780	5620	3540	3260	5840	6150
62	2410	2410	1860	4980	2950	2640	2090	5090	4010	6030
63	1930	1930	3940	2600	3650	2940	2940	6150	4980	5280
64	2190	2190	4810	1920	4580	5920	2680	1820	1760	6050
65	4840	4840	4320	3800	3690	4510	6820	3950	4560	6700
66	5620	5620	3500	2480	2590	3950	4610	1990	3950	3560
67	2640	2640	7400	6120	4090	5120	5730	2860	7320	3920
68	2940	2940	6700	5980	2940	4150	4050	3540	3260	2860
69	5120	2560	3460	6080	1960	1790	1990	4560	5320	4620
70	3650	3250	5120	2890	2630	2910	3650	6920	3620	4520
k	10	15	14	20	13	11	18	17	16	12

\*) Номер варіанту відповідає останній цифрі залікової книжки.

### 1.3. Питання для самостійної роботи студентів

1. Що таке вірогідність події, в якому числовому діапазоні вона лежить?

2. Як визначити відносну частоту виникнення події?
3. Що таке генеральна сукупність?
4. Перерахуйте основне задачі математичної статистики, які розв'язуються в теорії надійності.
5. Чим відрізняється простий статистичний ряд від інтервального?
6. Як розрахувати величину розрядів (інтервалів) статистичного ряду?
7. Що таке дисперсія, як визначити її величину?
8. Чим відрізняється середнє значення випадкової величини від середньостатистичного значення?
9. Як підвищити точність статистичного опису процесу, що вивчається?
10. В якому числовому діапазоні повинна знаходитися кількість рядів (інтервалів) статистичного ряду?
11. Що характеризує коефіцієнт варіації?
12. Що таке гістограма вибірки, чи відрізняється гістограма вибірки від варіаційної кривої?

## **Практична робота № 2. ВИВЧЕННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН**

### **2.1. Короткі теоретичні відомості**

Якщо при визначенні будь-якої з випадкових величин виключати припущення і припущення, прагнучи чисто досвідченим шляхом визначити властивий їм закон розподілу, то зіткнулися б із задачею практично нездійсненній, оскільки довелося б у кожному окремому випадку проводити величезну кількість дослідів. Довільний вибір не завжди є вдалим, тому що критеріїв оцінки відповідності вибраної функції експериментальним даним не існує. Тому необхідно визначити загальні ознаки законів розподілу, дію яких можна передбачати, якщо не для всіх, то, принаймні, для широких класів випадкових величин, що зустрічаються на практиці. Такі ознаки були встановлені спочатку теоретично, а потім підтверджені досвідченим шляхом. На практиці для цієї мети часто користуються коефіцієнтом варіації  $v = \frac{\sigma}{t}$ .

Так, якщо коефіцієнт варіації  $v$  знаходиться в межах  $0 \leq v \leq 0,30$ , то дані, отримані в результаті досвіду, відповідають закону нормального розподілу.

При  $0,3 \leq v \leq 0,8$  розсіювання випадкової величини може відбуватися як за законом нормального розподілу, так і за законом Вейбулла–Гнеденка. Отже, допустимість збігу того або іншого закону слідує уточнити по критерію згоди.

Якщо дисперсія  $D = \sigma^2$  випадкової величини рівна її математичному очікуванню, то досвідчені дані слід розглядати, застосовуючи закон Пуассона.

При значеннях коефіцієнта варіації  $0,3 < v < 1,0$  діє закон Вейбулла–Гнеденка, який в окремому випадку переходить в закон Релея при  $v = 0,52$  і  $b = 2,0$  ( $b$  – параметр закону розподілу Вейбулла) і в експоненціальний закон при  $v = 1,0$  і  $b = 1,0$ .

Закон нормального розподілу характеризується щільністю вірогідності наступного вигляду:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.1)$$

де  $e$  – основа натуральних логарифмів;  $\bar{t}$  і  $\sigma^2$  – відповідно середнє значення і дисперсія випадкової величини.

Різновидами закону нормального розподілу є усічене нормальний і логарифмічний нормальний розподіли. Усіченим нормальним називається те, у якого значення випадкової величини  $T$  з двох сторін мають певні обмеження. Логарифмічно нормальним називається розподіл випадкової величини  $Y$ , якщо десятковий логарифм цієї величини розподіляється за законом нормального розподілу. При цьому в формулі (2.1)  $t = \log y$ .

Випадкова величина розподілена за законом Пуассона, якщо ймовірність її частот при певних значеннях  $m$  може бути представлений рівнянням

$$P_m = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a} \quad (2.2)$$

де  $m$  – випадкова величина, яка може приймати позитивні значення, включаючи нуль;  $a$  – деяка позитивна величина, звана параметром закону Пуассона.

Ряд розподілу випадкової величини  $T$  за законом Пуассона має наступний вигляд:

$T_m$	0	1	2	...	$m$	...
$P_m$	$e^{-a}$	$\frac{a}{1!} \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!} \cdot e^{-a}$	...	$\frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$	...

Випадкова величина  $T$  розподілена по експоненціальному закону, якщо частота розподілу вірогідності або диференціальна функція при  $t \geq 0$  має вигляд

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}. \quad (2.3)$$

Тут  $\lambda$  – постійна величина (коефіцієнт). Інтегральна функція в цьому випадку може бути представлений виразом

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 1 - e^{-\lambda t}. \quad (2.4)$$

Математичне очікування і середнє квадратичне відхилення випадкової величини буде  $\bar{t} = 1/\lambda = \sigma$

Якщо розподіл випадкової величини підкоряється закону Вейбулла–Гнеденко, то диференціальна функція такого розподілу виразиться рівнянням

$$f(t) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}. \quad (2.5)$$

Інтегральну функцію розподілу можна представити як

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \quad (2.6)$$

де  $a$  і  $b$  – параметри розподілу Вейбулла–Гнеденка, які визначаються на підставі інформації, отриманої в процесі дослідів. В цьому випадку можна рекомендувати декілька методів визначення параметрів за табульованими значеннями, при певних величинах  $v$ , методом максимальної правдоподібності, графоаналітичним і методом моментів.

**Приклад 1.** Ресурс двигунів СМД-62 первинного виробництва представлений статистичним поряд (табл. 2.1).

Таблиця 2.1.

Статистичний ряд ресурсів первинного виробництва двигунів СМД–62

Середнє значення інтервалу, $\bar{t}_i$	1750	2250	2750	3250	3750	4250	4750	5250	5750	6250
Частота повторюваності, $m_i$	2	11	13	19	8	3	3	3	1	1

*Примітка.* При перевірці по критеріях згоди закону розподілу ресурсу (табл. 2.1) найбільшу ймовірність згоди дає закон Вейбулла–Гнеденка.

Визначити параметри розподілу і коефіцієнт варіації.

Рішення виконується в такій послідовності:

знаходимо математичне очікування ресурсу первинного виробництва двигунів СМД-62  $\bar{t} = t_0 + \Delta t \cdot a_1 = 3340$  год.,

де  $t_0 = 1250$  ч;  $\Delta t = 500$  ч;

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot t'_i}{\sum_{i=1}^k m_i} = 4,18; \quad t'_i = \frac{t_i - t_0}{\Delta t};$$

встановлюємо середній квадратичний відхил

$$\sigma = \Delta t \cdot \sqrt{a_2 - a_1^2} = 1040 \text{ год.}, \quad \text{де } a_2 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot (t'_i)^2}{\sum_{i=1}^k m_i} = 21,78;$$

коефіцієнт варіації буде  $v = \frac{\sigma}{\bar{t}} = \frac{1040}{3340} \cdot 100\% = 31,14\%$

Раніше було сказано, що при  $v = 0,52$  і  $b = 2$  діє закон Релея. В цьому випадку при розподілі моментів виникнення відмов густина вірогідності матиме вигляд

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (2.7)$$

Закон розподілу Релея застосовується при визначенні довговічності елементів (виробів) з вираженим ефектом старіння (наприклад, механічного устаткування).

В кожний теоретичний розподіл (в диференціальну або інтегральну функцію) входять декілька величин, званих параметрами (математичне очікування,

дисперсія і ін.). Оскільки ці величини невідомі, визначити їх можна шляхом емпіричного розподілу, після підстановки у функцію густини замість теоретичних емпіричних значення. Потім слід розрахувати ймовірність середин всіх інтервалів. Помноживши цю ймовірність на число дослідів (N), отримаємо теоретичні значення частот випадкової величини, які можуть бути представлені у вигляді вирівняної кривої.

**Приклад 2.** Розглянемо вирівнювання емпіричного розподілу за законом нормального розподілу. Для цього знаходимо середнє арифметичне значення, середній квадратичний відхил і коефіцієнт варіації, використовуючи дані табл. 1.3:  $\bar{t} = 2194$  год.;  $\sigma = 610$  ч;  $v = 0,278$ . Підставимо знайдені значення  $\bar{t}$  і  $\sigma$  у функцію щільності

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t_i - \bar{t})^2}{2\sigma^2}} \quad \text{або} \quad f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (2.8)$$

де  $t = t_i - \frac{\bar{t}}{\sigma}$

Результати проміжних розрахунків зведені в табл. 2.2, де прийняти такі позначення  $\bar{t}_i$  – середнє значення інтервалу;  $m_i$  – емпіричні частоти;  $f(t)$  – функція щільності розподілу;  $P_{ii}$  – ймовірність інтервалів  $P_{ii} = \frac{\Delta t}{\sigma} \cdot f(t)$ ;  $m'_i$  – теоретичні частоти,  $m'_i = P_{ii} \cdot N$ .

Таблиця 2.2

**Розрахунок вирівнювання емпіричного розподілу**

$\bar{t}_i$	$m_i$	$\bar{t}_i - \bar{t}$	$t = \frac{\bar{t}_i - \bar{t}}{\sigma}$	$f(t)$	$P_{ii} = \frac{\Delta t}{\sigma} \cdot f(t)$	$m'_i = P_{ii} \cdot N$
1200	4	- 994	- 1,62	0,1074	0,035442	2,30373
1400	3	- 794	- 1,3	0,1714	0,056562	3,67653
1600	3	- 594	- 0,97	0,2492	0,082236	5,34534
1800	8	- 394	- 0,64	0,3251	0,107283	6,973395
2000	17	- 194	- 0,31	0,3802	0,125466	8,15529
2200	11	6	0,099	0,3989	0,131637	8,556405
2400	3	206	0,33	0,3778	0,124674	8,10381
2600	5	406	0,66	0,3209	0,105897	6,883305
2800	4	606	0,99	0,2444	0,080652	5,24238
3000	-	806	1,32	0,1669	0,055077	3,500005
3200	1	1006	1,64	0,1040	0,03432	2,2308
3400	1	1206	1,97	0,0573	0,018909	1,229085
3600	4	1406	2,3	0,0283	0,009339	0,607035
3800	1	1606	2,63	0,0126	0,004158	0,27027
	65					

По обчислених значеннях в статистичних таблицях функції нормального розподілу знаходимо значення  $f(t)$ . Вірогідність кожного інтервалу укладена в



його середині  $\frac{P(t_i) \cdot \Delta t}{\sigma \cdot f(t)}$ . Перемножив  $P(t)$  на  $N = \sum m_i$  отримаємо  $m_i'$  – значення теоретичних частот кривої, вирівняної за законом нормального розподілу (графа 7). Графіки емпіричної і вирівняної кривих наведені на рис. 2.1.

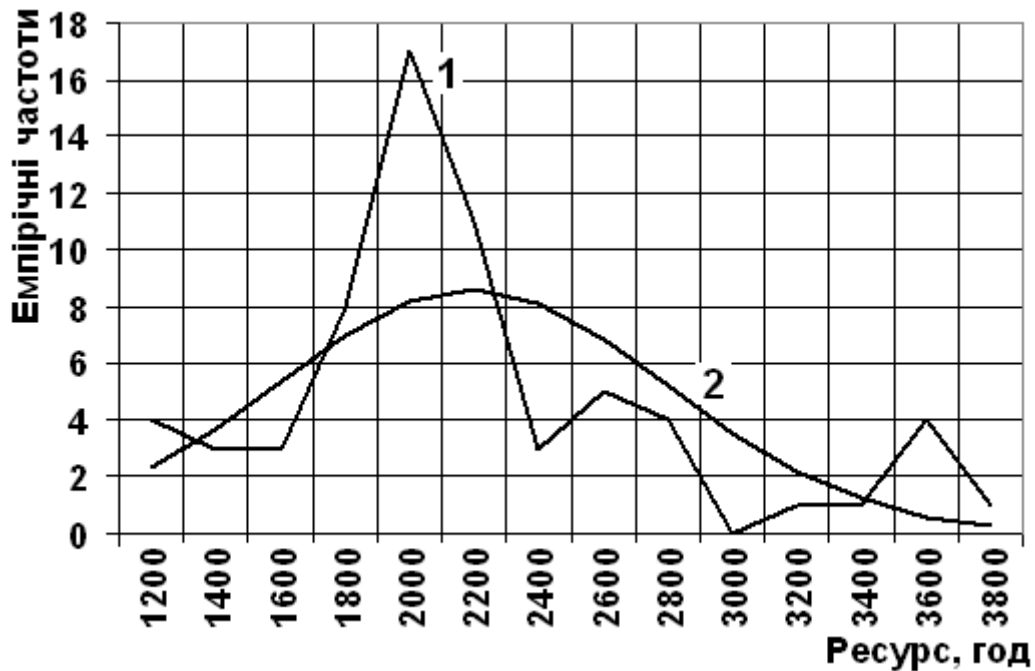


Рис.2.1. Криві розподілу: 1 – емпірична; 2 – теоретична

Після вирівнювання емпіричної кривої визначають її відповідність вибраному теоретичному закону розподілу. Як би ні була велика ймовірність збігу, вона ще не свідчить про те, що в цьому конкретному випадку закон вибраний правильно. Коли декілька теоретичних кривих не дають істотної розбіжності з емпіричною, за відповідну приймається та з них, яка виражає найбільшу ймовірність згоди. Стосовно показників надійності автотранспортної техніки частіше всього використовують критерії згоди Пірсона або Колмогорова.

Критерій згоди Пірсона при великому числі спостережень зводить помилки до мінімуму, ніж вигідно відрізняється від інших критеріїв згоди. Визначається він з виразу:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} \quad (2.9)$$

де  $m_i$  – досвідчена частота (кількість випадків) в  $i$ -м інтервалі статистичного ряду;  $n$  – прийнята кількість інтервалів;  $m_i' = N[F(t_{i+1}) - F(t_i)]$  – теоретична частота в  $i$ -ом інтервалі статистичного ряду.

Після знаходження  $\chi$  визначається число ступенів свободи:

$$k = n_i - r - 1, \quad (2.10)$$

де  $k$  – число ступенів свободи;  $n_i$  – число порівнюваних частот (з'єднані частоти на кінцях приймаються за одну частоту);  $r$  – число параметрів теоретичної функції розподілу.

Критерій згоди Колмогорова  $\lambda$ , визначається з виразу

$$\lambda = D_{\max} \cdot \sqrt{N}, \quad (2.11)$$

де  $D_{\max} = \frac{(m_i - m'_i)_{\max}}{N}$ .

Використовуючи вирази  $\lambda$ , знаходиться  $P(\lambda)$ – вірогідність згоди. Якщо  $\lambda \leq 1,0$ , то вважають, що згода між емпіричним і теоретичним законом розподілу добра. Більш точно оцінка згоди виконується по функції вірогідності  $P(\lambda)$ .

**Приклад 3.** За даними випробувань 142 двигунів ЗІЛ-130 побудований наступний укрупнений статистичний ряд:

$t_i$ , тис. км	40	80	120	160	200	240	280	
$m_i$ , шт	2	13	36	40	30	16	5	$\sum m_i = 142$

Необхідно встановити закон розподілу ресурсу ( $t_i$ ) двигунів ЗІЛ-130.

Для даного статистичного ряду знаходимо:

математичне очікування  $\bar{t} = t_0 - \Delta t \cdot a_1 = 200 + 40 \cdot (-0,936) = 162,56$  тис. км;

де  $a_1 = \frac{\sum m_i \cdot t'_i}{\sum m_i}$ ,  $t'_i = \frac{\bar{t}_i - t_0}{\Delta t} = (-4; -3; -2; -1; 0; +1; +2)$ .

середній квадратичний відхил

$$\sigma = \Delta t \cdot \sqrt{a_2 - a_1^2} = 40 \cdot \sqrt{2,8985 - 0,876} = 52,5 \text{ тис. км.}$$

Тут  $a_2 = \frac{\sum m_i \cdot (t'_i)^2}{\sum m_i} = 2,5985$ ;

коефіцієнт варіації  $v = \frac{\sigma}{\bar{t}} = \frac{52,5}{162,56} \cdot 100\% = 32,2\%$

виявляємо дію того або іншого закону розподілу по критеріях згоди (результати розрахунку представлені в табл. 2.3 і 2.4).

Таблиця 2.3.

Зведені дані для визначення ймовірності згоди при дії закону нормального розподілу

$m_i$	$m'_i$	$m_i - m'_i$	$(m_i - m'_i)^2$	$\frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$	
1	2	3	4	5	6
Критерій згоди Пірсона					
2	2,7974	0,3786	0,1433	0,0093	$\chi^2 = \sum_{i=1}^b \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} =$ $= 2,172; k = 3$
13	12,5812	4,8878	23,8906	0,7679	
36	31,1122	- 3,1254	9,7681	0,2265	
40	43,1254	-3,5688	12,7363	0,3794	
30	33,5688	1,5586	2,4292	0,1682	

Продовження табл. 2.3

1	2	3	4	5	6
16	14,4414	1,4784	2,1857	0,6207	при $k=3$ і $\chi^2 = 2.172$ $P(\chi^2)=0,5724$
5	3,5216	0,9675	1,9871	0,3591	
142				2,386	
Критерій згоди Колмогорова					
2	2,7974	2	2,7974	- 0,7974	$D_{\max} = 4,5092/142 =$ $=0,03175,$ $N = \Sigma m_i = 142?$ $\lambda = D_{\max} \cdot \sqrt{N} = 0.3785,$ при $\lambda = 0,3785$ $P(\lambda) = 0,9972$
13	12,5812	15	15,3786	- 0,3786	
36	31,1122	51	46,4908	4,5092	
40	43,1254	91	99,6162	1,3838	
30	33,5688	121	123,185	- 2,185	
16	14,4414	137	137,6264	- 0,6264	
5	3,5216	142	141,148	0,852	
142					

Таблиця 2.4.

Зведені дані для визначення ймовірності згоди  
при дії закону розподілу Вейбулла–Гнеденка

$m_i$	$m'_i$	$m_i - m'_i$	$(m_i - m'_i)^2$	$\frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$	
1	2	3	4	5	6
Критерій згоди Пірсона					
2	10,8062				при $k=3$ і $\chi^2 =$ $=197,323$ $P(\chi^2)=0,000$
13	29,7064	- 25,5126	650,8928	16,0664	
36	44,0342	- 8,0342	64,5484	1,4659	
40	37,5732	2,4268	5,8894	0,1567	
30	15,1859	14,8131	219,4279	14,4485	
16	3,0597	12,9403	167,4514	54,7280	
5	0,2079	4,7921	22,9642	110,4579	
142					
Критерій згоди Колмогорова					
2	10,8062	2	10,8062	- 8,8062	$D_{\max} = 33,5468/142 =$ $=0,2362,$ $N = \Sigma m_i = 142?$ $\lambda = D_{\max} \cdot \sqrt{N} = 2,8148,$ при $\lambda = 2,8148$ $P(\lambda) = 0,0000$
13	29,7064	15	40,5126	- 25,5126	
36	44,0342	51	84,5468	- 33,5468	
40	37,5732	91	122,1200	- 31,12	
30	15,1869	121	137369	-16,3069	
16	3,0597	137	140,3666	- 3,3666	
5	0,2079	142	140,5745	1,4255	
142					

Як видно з таблиць, найбільшу ймовірність згоди має закон нормального розподілу.

Показники надійності визначаються методом вибірки. Її об'єм залежить від встановленої точності  $\epsilon$  і довірчої ймовірності отриманих результатів, що задовольняють прийнятий закон розподілу. Якщо емпіричні дані апроксимуються за за-

коном нормального розподілу, то для визначення мінімального об'єму вибірки при заданій довірчій ймовірності можна скористатися теоремою Муавра–Лапласа (закон великих чисел):

$$\alpha \left\{ -t_p \leq \frac{W_n - P}{\sqrt{\frac{P \cdot q}{N}}} \leq +t_p \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_p}^{+t_p} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t_p), \quad (2.12)$$

де  $\alpha$  – ймовірність отримання результату із заданою точністю висновку;  $t_p$  – розрахунковий коефіцієнт, визначуваний по таблицях залежно від заданої довірчої ймовірності  $\alpha$ ;  $P$  – теоретична вірогідність здійснення даної події;  $N$  – необхідна кількість спостережень;  $q$  – теоретична вірогідність того, що подія не здійсниться,  $q = 1 - P$ ;  $W_n$  – фактично отримана емпірична ймовірність події (частотність);  $e = W_n - P$  – точність висновку, тобто різниця між фактичним результатом  $W_n$  і теоретичним (ймовірністю)  $\alpha$ ;  $\Phi(t_p)$  – нормована функція Лапласа

Для вирішення поставленої задачі теорема Муавра–Лапласа може бути перетворений і виражений формулою  $\varepsilon = W_n - P = \pm \sqrt{\frac{t_p^2 \cdot \sigma^2}{N}}$ , звідки  $N = \frac{t_p^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2}$ .

Об'єм вибірки при дії нормального закону розподілу можна знайти, використовуючи коефіцієнт варіації  $v$ , з виразу:

$$N = \frac{t_p^2 \cdot v^2}{\varepsilon_1^2}, \quad (2.13)$$

де  $\varepsilon_1$  – точність обчислення, яка знаходиться в межах  $0,3 \leq \varepsilon_1 \leq 0,2$ .

**Приклад 4.** В результаті досліджень встановлено, що ресурс двигунів Д-21 первинного виробництва, встановлених на тракторах Т-25, має наступний розподіл (табл. 2.5).

Таблиця 2.5.

Розподіл ресурсу двигунів Д-21 первинного виробництва, встановлених на тракторах Т-25

Інтервал, час.	1200 – 1600	1600 – 2000	2000 – 2400	2400 – 2800	2800 – 3200	3200 – 3600	3600 – 4000
Частота	3	2	5	7	16	1	3

середнє зважене значення ресурсу і середній квадратичний відхил відповідно складає  $\bar{t} = t_0 - \Delta t \cdot a_1 = 2697,2$  год.

Тут  $t_0$  – деяке початкове значення (прийнято 3000 ч).

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot t'_i}{\sum_{i=1}^k m_i}, \quad t'_i = \frac{\bar{t}_i - t_0}{\Delta t}$$

де  $\Delta t$  – величина прийнятого інтервалу;  $t_i$  – середнє значення інтервалу;  $k$  – кількість інтервалів;

$$\text{середній квадратичний відхил дорівнює } \sigma = \sqrt{\frac{\sum m_i \cdot (\bar{t}_i - \bar{t})^2}{N}} = 620 \text{ год.};$$

$$\text{коефіцієнт варіації } v = \frac{\sigma}{\bar{t}} = \frac{620}{2697,2} = 0,23 \text{ або } 23\%.$$

При перевірці по критерію згоди закону розподілу розсіювання ресурсу (див. табл. 2.5) переконуємося, що найбільшу ймовірність має закон нормального розподілу. Тоді необхідну кількість спостережень з точністю обчислення

$$0,1 \text{ визначимо із залежності (2.13) } N = \frac{t_p^2 \cdot v^2}{\varepsilon_1^2} = \frac{1,96^2 \cdot 0,23^2}{0,1^2} \cong 21 \text{ двигун (при}$$

$\alpha = 0,95, t_p = 1,96$ ).

**Приклад 5.** Необхідно встановити кількість двигунів Д-242 первинного виробництва, після випробування яких по атрибутивних показниках можна визначити характеристики їх надійності з таким розрахунком, щоб величина відносної помилки  $\varepsilon_a$  не перевищувала 10% при довірчій ймовірності  $\alpha = 0,95$ . Відомо, що розподіл ресурсів, підлеглий закону нормального розподілу з коефіцієнтом варіації  $v$ , що дорівнює 0,23. Тоді  $\varepsilon_a/v = 0,10/0,23 = 0,44$ .

По статистичним таблицям [2] визначаємо необхідну кількість спостережень, яка при  $\varepsilon_a/v = 0,44$  складе  $N = 21$  двигун.

При дії закону розподілу Вейбулла–Гнеденка необхідний об'єм вибірки знаходимо з виразу

$$(\varepsilon_a + 1)^b = \frac{2N}{\chi_{(1-\alpha; 2N)}^2}. \quad (2.14)$$

Тут  $\varepsilon_a$  – задана відносна точність середнього арифметичного показника;  $\alpha$  – задана довірча ймовірність;  $\chi_{(1-\alpha; 2N)}^2$  – квантіль розподілу ( $\chi_n^2$  – квадрат з  $2N$  ступенями свободи і довірчою ймовірністю  $1 - \alpha$ ).

**Приклад 6.** Необхідно визначити необхідну кількість двигунів ЗІЛ-130 первинного виробництва, випробовуваних на ресурсні показники при  $\varepsilon_a = 10\%$ ,  $\alpha = 0,90$ , якщо відомо, що коефіцієнт варіації  $v$  дорівнює 0,37.

При перевірці по критерію згоди найбільшу ймовірність отримав закон розподілу Вейбулла–Гнеденка.

При  $v = 0,37$  параметр  $b = 3$  [3]. Скориставшись рівнянням (2.14), і визначимо значення величини  $(\varepsilon_a + 1)^b = q = (0,1 + 1)^3 = 1,32$

По статистичним таблицям [1] при  $q = 1,32$  і  $\alpha_0 = 0,95$   $N = 60$  двигунів (при  $\alpha = 0,90$  існує двостороння, при  $\alpha_0 = 0,95$  – одностороння довірча ймовірність).

Якщо закон розподілу випадкової величини невідомий, то для знаходження мінімального числа  $N$  об'єктів спостережень при необхідній ймовірності  $P(t)$  безвідмовної роботи протягом деякого часу  $t$  з довірчою ймовірністю  $\alpha$  (задається з умови відсутність відмов за час  $t$ ) слід скористатися формулою

$$N = \frac{\ln(1 - \alpha)}{\ln P(t)} \quad (2.15)$$

**Приклад 7.** Визначити число  $N$  і з довірчою вірогідністю  $\alpha = 0,95$  перевірити, що вірогідність безвідмовної роботи  $P(t)$  не менше  $0,9$ .

Згідно формулі (2.15) мінімальна кількість спостережень при вірогідності  $P(t) = 0,9$  безвідмовної роботи протягом часу  $t$  і довірчої вірогідності  $\alpha = 0,95$  складе  $N = \frac{\ln(1 - 0,95)}{\ln 0,9} = 30$  одиниць.

Для визначення числа  $N$  об'єктів спостережень при застосуванні непараметричного методу можна скористатися табл. 2.6.

Таблиця 2.6  
Число  $N$  об'єктів спостережень

P(t)	$\alpha$			
	0,80	0,90	0,95	0,99
0,500	-	-	-	7
0,800	8	10	13	20
0,900	15	21	30	44
0,950	30	40	60	85
0,980	75	120	140	230
0,990	150	220	280	430
0,995	330	430	600	800

## 2.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання

За даними табл. 2.7, 2.8 при  $N = 100$  вибрати закон розподілу, визначити його параметри, побудувати варіаційні криві емпіричної і теоретичної (після згладжування) залежності, провести згладжування експериментальних даних, розрахувати критерії згоди Пірсона і Колмогорова, дати висновок про найбільш ймовірний закон розподілу. Знайти мінімальне число об'єктів, які вимагається піддати випробуванням при заданій довірчій ймовірності  $\alpha$  і відносній помилці  $\epsilon_\alpha$ .

Таблиця 2.7

Статистичний ряд ресурсів двигунів автомобіля ГАЗ-53

№ варіанту	Позначення	Початкові дані для виконання роботи									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\bar{t}_i$	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000
	$m_i$	2	0	15	22	25	12	10	8	4	2
2	$\bar{t}_i$	1500	1750	2000	2250	2500	2750	3000	3250	3500	3750
	$m_i$	3	15	12	28	24	10	4	2	-	2
3	$\bar{t}_i$	1300	1600	1900	2200	2500	2800	3100	3400	3700	4000
	$m_i$	5	2	11	32	15	14	10	6	4	1
4	$\bar{t}_i$	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900
	$m_i$	1	10	15	18	25	18	4	6	1	2

Продовження табл. 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	$\bar{t}_i$	4000	4100	4200	4300	4500	4600	4700	4800	4900	5000

	$m_i$	4	6	5	12	18	32	14	5	3	1
6	$\bar{t}_i$	2500	2650	2800	2950	3100	3250	2400	3550	3700	3850
	$m_i$	9	2	4	15	28	21	12	-	6	3
7	$\bar{t}_i$	2900	3100	3300	3500	3700	3900	4100	4300	4500	4700
	$m_i$	7	9	11	16	20	18	10	6	2	1
8	$\bar{t}_i$	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
	$m_i$	5	11	22	18	16	14	10	2	1	1
9	$\bar{t}_i$	2200	2600	3000	3400	3800	4200	4600	5000	5400	5800
	$m_i$	2	4	6	8	10	14	18	16	12	10
0	$\bar{t}_i$	1600	1850	2100	2350	2600	2850	3100	3350	3600	3850
	$m_i$	8	5	3	30	22	14	10	4	2	2

Таблиця 2.8.

Значення довірчій ймовірності  $\alpha$  і відносній помилці  $\epsilon_\alpha$  згідно варіантів виконання

Позначення	Номер варіанту*)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$\alpha$	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99	0,99	0,95	0,9	0,85	0,8
$\epsilon_\alpha$	10	5	8	7	10	5	12	15	10	5

\*) Номер варіанту відповідає останній цифрі залікової книжки.

Роботу виконують в такій послідовності:

1) розраховуємо величину середнього значення, середнього квадратичного відхилення і коефіцієнта варіації випадкової величини;

2) заздалегідь вибираємо закон розподілу випадкової величини (як правило закон нормального розподілу, експоненціальний закон або закон Вейбулла–Гнеденка);

3) будуємо варіаційну криву (графік) розподілу емпіричних даних;

4) проводимо згладжування варіаційної кривої і на координатах емпіричної залежності будуємо теоретичну криву;

5) перевіряємо адекватність емпіричної і теоретичної залежності за критеріями Пірсона і Колмогорова;

6) оцінюємо по якому закону можна отримати найадекватніші дані;

7) оцінюємо точність адекватності емпіричних і теоретичних даних;

8) за найадекватнішим законом розподілу випадкової величини знаходимо мінімальний об'єм досліджень, при якому результати будуть достовірні;

9) після проведення розрахунків оформляється звіт про виконання практичної роботи.

Розрахунок всіх вищезгаданих параметрів найбільш доцільно проводити в табличному процесорі «MS Excel», пакет програм для якого розроблений в Миколаївському національному аграрному університеті.

### 2.3. Питання для самостійної роботи студентів:

1. Залежно від чого залежить те або інший закон розподілу випадкової величини?

2. Що таке довірчий інтервал, відносна помилка і об'єм вибірки?
3. Чим обґрунтований вибір того або іншого критерію згоди?
4. Як розрахувати мінімальний об'єм проведення досліджень?
5. Як розрахувати мінімально необхідне число досліджень для отримання достовірної інформації?
6. Дайте визначення адекватності і довірчого інтервалу.
7. Навіщо потрібно проводити згладжування емпіричних результатів проведення досліджень?
8. В якому випадку використовують той або інший критерій згоди?
9. Приведіть методику розрахунку коефіцієнта варіації, середнього значення випадкової величини і середнього квадратичного відхилення.
10. Чим відрізняється поняття дисперсії від середнього квадратичного відхилення?
11. Що таке «число степенів вільності», як воно визначається і в яких розрахунках використовується?
12. Приведіть діапазон довірчих інтервалів, в яких застосовують розрахунки надійності автотракторної техніки.

### **Практична робота № 3. ВИЗНАЧЕННЯ КІЛЬКІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАДІЙНОСТІ МАШИН ТА ОБЛАДНАННЯ**

При вирішенні практичних задач, пов'язаних з надійністю об'єктів (машин, агрегатів, вузлів, деталей) недостатньо знати тільки якісну оцінку, необхідно мати свій в розпорядженні також оцінку кількісної. Її визначення пов'язано з рядом специфічних труднощів, основними з яких є: велика кількість змінних чинників, що впливають на надійність, і недостатність відомостей про них, відносна складність їх експериментального визначення, оскільки випробування об'єктів (машин, агрегатів, вузлів, деталей) на надійність пов'язано з великими витратами часу і частковим або повним їх руйнуванням.

При цьому кількісні характеристики повинні задовольняти наступним основним вимогам: облік більшості чинників, що визначають надійність, забезпечення простоти отримання і обробки даних і можливості використання наявних статистичних відомостей про надійність аналогічних систем.

Кількісні характеристики надійності носять характер вірогідності. Оцінювати і аналізувати їх слід за залежно від того закону розподілу, якому підпорядковується досліджувані величини.

#### **3.1. Короткі теоретичні відомості**

Математично ймовірність безвідмовної роботи протягом напрацювання  $t$  можна представити як ймовірність того, що об'єкт (машина, агрегат, вузол, деталь) напрацює з початку експлуатації  $T$  більше деякого заданого  $t$ , т. т.:

$$P(T) = P(T > t). \quad (3.1)$$

За статистичними даними ймовірність безвідмовної роботи протягом напрацювання від  $0$  до  $t$  визначається відношенням числа об'єктів, що пропрацювали безвідмовно до моменту часу  $t$ , до числа працездатних в початковий момент часу  $t = 0$ :



$$P = \frac{N_0 - n}{N_0}, \quad (3.2)$$

де  $N_0$  – початкове число працюючих об'єктів (машин, агрегатів вузлів, деталей);  $n$  – число об'єктів, що відмовили, до кінця напрацювання.

Із збільшенням числа дослідів  $P$  наближається до  $P(t)$ , тобто істинна ймовірність  $P$  визначається як межа

$$P(t) = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} \frac{N_0 - n}{N_0} \quad (3.3)$$

Для визначення величини ймовірності безвідмовної роботи, як правило, використовують дані, отримані в процесі експлуатації; разом з тим надійність об'єктів можна визначити і за величиною ймовірності відмов. При цьому ймовірність безвідмовної роботи і відмови є протилежними випадковими подіями. Вірогідність відмови  $q(t)$  можна визначити з виразу

$$q(t) = 1 - P(t) \quad (3.4)$$

Очевидно, що  $q(t)$  на відміну від  $P(t)$  визначається напрацюванням повністю машини (агрегату, вузла, деталі), меншого деякого напрацювання  $t$ :

$$q(t) = P(T < t) \quad (3.5)$$

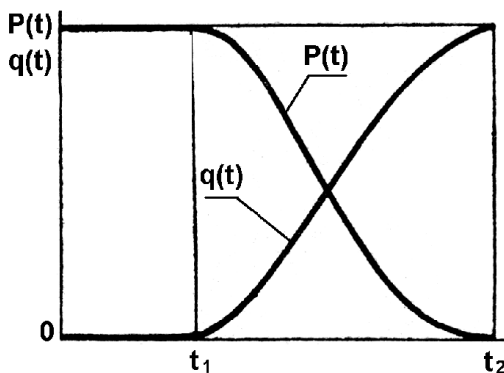


Рис. 3.1. Залежність ймовірності безвідмовної роботи і вірогідності відмов від часу

Подібну функцію називають функцією розподілу випадкової величини (рис. 3.1).

**Приклад 1.** Припустимо, що в процесі експлуатації (приблизно в однакових умовах) 1000 двигунів ЗІЛ-130 враховувалося кількість пасів вентилятора, що виходять з ладу, протягом кожної тисячі годин їх роботи. В результаті підрахунку отримані дані, які представлені в табл. 3.1 (що вийшли з ладу паси не замінювалися). Визначити ймовірність безвідмовної роботи пасів вентилятора, встановлених на двигунах ЗІЛ-130, протягом 5000 і 8000 ч. Застосовуючи формулу (3.2), отримаємо

$$P(t) = P(5000) = \frac{1000 - (20 + 25 + 35 + 50 + 30)}{1000} = 0,84;$$

$$P(t) = P(8000) = \frac{1000 - (20 + 25 + 35 + 50 + 30 + 40 + 40)}{1000} = 0,71.$$

**Приклад 2.** Встановити вірогідність відмови для прикладу 1. Підставивши відповідні значення у формулу (3.4), отримаємо

$$q(5000) = 1 - P(t) = 1 - 0,84 = 0,16; \quad q(8000) = 1 - P(t) = 1 - 0,71 = 0,29.$$

Характеристики надійності (ймовірність безвідмовної роботи і відмови)

Експериментальні дані виходу з ладу пасів вентилятора двигунів ЗІЛ-130

Інтервал $t_i$ , год.	Число відмов, $n_i$	Інтервал $t_i$ , год.	Число відмов, $n_i$
0-1000	20	13000-14000	40
1000-2000	25	14000-15000	50
2000-3000	35	15000-16000	40
3000-4000	50	16000-17000	50
4000-5000	30	17000-18000	40
5000-6000	50	18000-19000	50
6000-7000	40	19000-20000	35
7000-8000	40	20000-21000	35
8000-9000	50	21000-22000	50
9000-10000	30	22000-23000	35
10000-11000	40	23000-24000	25
11000-12000	40	24000-25000	30
12000-13000	50	25000-26000	20

мають певні недоліки. При розрахунку вищезгаданих кількісних характеристик надійності використовуються моделі, що ідеалізуються. Наприклад, якщо в результаті великого числа випробувань стало відомо, що ймовірність безвідмовної роботи пасів вентилятора двигунів СМД-62, встановлених на тракторах Т-150К рівна 0,95 або близька до 0,95, то з цього ще не витікає, що з 100 пасів вентилятора тільки 5 вийде з ладу за певний проміжок часу. Можливо, 3 або 7, або не буде жодної відмови. Але при збільшенні числа дослідів близько 95% пасів вентилятора

працюватиме без відмови, а у 5% вони виникнуть. Отже, можна уявити собі ідеальну модель, яка б безвідмовно працювала в 95 з 100 випадків. Проте навіть для ідеальної моделі не можна вказати, який конкретно пас вентилятора повинен вийти з ладу (відмовити), оскільки сама природа ймовірності дозволяє вельми точно передбачати число певних подій, які можуть відбутися при великій кількості випробувань, але не вказує на підсумок окремого випробування.

Під щільністю розподілу відмов слід розуміти відношення числа об'єктів, що відмовили, за одиницю часу до первинного їх кількості за умови, що всі що вийшли з ладу об'єкти не відновляються, тобто їх число під час випробувань зменшується. Щільність розподілу відмов одержуємо, взяв диференціал  $q(t)$ ,

$$f(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt} = P'(t) \quad (3.6)$$

За статистичними даними ця величина визначається з формули  $f(t) = \frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t}$  (3.7)

де  $n(t)$  – число виробів, що відмовили, за час  $\Delta t$ ;  $N_0$  – первинне число виробів, що, випробовуються;  $\Delta t$  – інтервал часу.

З рівнянь (3.4) і (3.6) встановлюємо зв'язок між характеристиками

$$q(t) = \int_0^t f(t)dt; \quad (3.8)$$

$$P(t) = 1 - q(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \int_t^{\infty} f(t)dt. \quad (3.9)$$

Ці характеристики дозволяють робити висновки про число об'єктів, які можуть вийти з ладу на якомусь проміжку часу. Використовуючи вираз (3.7), визначаємо необхідну кількість запасних виробів

$$n(t) = f(t) \cdot N_0 \cdot \Delta t. \quad (3.10)$$

Щільність розподілу відмов (їх частота) повно характеризує надійність об'єктів до першої відмови. Що вийшли з ладу об'єкти в подальших випробуваннях не беруть участь.

**Приклад 3.** Необхідно визначити залежність частоти відмов від часу для пасів вентилятора, встановлених на двигунах ЗІЛ-130. За даними табл. 3.1 і формулі (3.7) отримаємо

$$f(500) = \frac{20}{1000 \cdot 1000} = 0,2 \cdot 10^{-4}; \quad f(3500) = \frac{50}{1000 \cdot 1000} = 0,5 \cdot 10^{-4};$$

$$f(2500) = \frac{30}{1000 \cdot 1000} = 0,3 \cdot 10^{-4}.$$

**Приклад 4.** Визначити кількість пасів вентилятора, що виходять з ладу, встановлених на 1000 двигунів ЗІЛ-130, протягом 500 год. їх роботи. Підставивши відповідні значення у формулу (3.10), переконаємося, що за 500 год. роботи з ладу може вийти 10 пасів  $n(500) = 0,2 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 \cdot 500 = 10$ .

Інтенсивність відмов – умовна щільність ймовірності виникнення відмови об'єкту, що не відновлюється, який визначається в даний момент часу за умови, що до цього відмов не виникало. За статистичними даними ця величина визначається з формули

$$\lambda = \frac{n(t)}{(N_0 - n_1) \cdot \Delta t} \quad (3.11)$$

де  $n(t)$  – число відмов за час  $\Delta t$ ;  $N_0$  — початкове число випробовуваних виробів;  $n_1$  – число виробів, що відмовили, від початку випробувань до періоду  $\Delta t$ ;  $\Delta t$  – інтервал часу.

Між частотою відмов і ймовірністю безвідмовної роботи існує наступний зв'язок:

$$\lambda^* = \frac{\frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t}}{\frac{(N_0 - n_1) \cdot \Delta t}{N_0 \cdot \Delta t}} = \frac{f^*}{P^*}. \quad (3.12)$$

Зв'язок між вірогідністю безвідмовної роботи і інтенсивністю відмов можна визначити по виразах

$$-\int_0^t \lambda(t) dt = \ln P(t) \quad \text{або} \quad P(t) = \exp \left[ -\int_0^t \lambda(t) dt \right]. \quad (3.13)$$

**Приклад 5.** За даними табл. 3.1. треба визначити інтенсивність відмов пасів вентилятора, встановлених на двигунах ЗІЛ-130. Підставивши значення  $n(t)$ ,  $N_0$ ,  $n_1$  у формулу (3.11), отримаємо значення інтенсивності відмов залежно від часу роботи двигуна:

$$\lambda(500) = \frac{20}{(1000-10) \cdot 1000} = 0,202 \cdot 10^{-4}; \lambda(1500) = \frac{25}{(1000-32) \cdot 1000} = 0,258 \cdot 10^{-4};$$

$$\lambda(24500) = \frac{30}{(1000-965) \cdot 1000} = 0,8 \cdot 10^{-3}; \lambda(28500) = \frac{20}{(1000-990) \cdot 1000} = 0,2 \cdot 10^{-2},$$

Як бачимо, інтенсивність відмов до кінця випробувань зростає на два порядки, тобто частота відмов збільшується у міру зменшення ймовірності безвідмовної роботи.

Надійність неремонтованих об'єктів може бути охарактеризований середнім напрацюванням на відмову, яка визначається при спостереженні за випробуванням  $N$  об'єктів в заданих умовах.

При використуванні статистичних даних середнє напрацювання на відмову об'єктів може бути визначено по формулі

$$t_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \quad (3.14)$$

де  $n$  – число відмов об'єктів за період  $t$ ;  $t_i$  – напрацювання  $i$ -го об'єкту до відмові.

Аналітично ця величина може бути представлений виразом

$$t_{cp} = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \quad (3.15)$$

Оскільки час від'ємним бути не може, після інтегрування можна визначити зв'язок  $t_{cp}$  з ймовірністю безвідмовної роботи, тобто

$$t_{cp} = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = - \int_0^{\infty} t P'(t) dt = -tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t) dt \Rightarrow t_{cp} = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (3.16)$$

При законі нормального розподілу щільність ймовірності має наступний вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.17)$$

Ймовірність відмови  $q(t)$  визначається інтеграцією функції густини ймовірності, тобто

$$F(t) = q(t) = \int_0^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}} dt \Rightarrow P(t) = 1 - \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}} dt.$$

При  $\sigma = 1,0$  і  $\bar{t} = 0$  функція розподілу приймає вигляд  $F_0(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Центрована функція  $F_0(t)$  табульована, її значення приведені в [3]. З рівнянь  $F(t)$  і  $F_0(t)$  отримаємо

$$F(t) = F_0 \cdot \left( \frac{t - \bar{t}}{\sigma} \right), \quad (3.18)$$

де  $t$  – значення заданого показника надійності.

$$\text{Згідно рівнянню (3.18) } F_0(-t) = 1 - F_0(t) \quad (3.19)$$

**Приклад 6.** Напрацювання шліців вала коробки передач автомобіля КамАЗ-5320 має нормальний закон розподілу, відомі його параметри:  $\sigma = 1500$  ч,  $\bar{t} = 6000$  ч. Визначити кількісні характеристики  $f(t)$ ,  $P(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\lambda(t)$  для  $t = 2500$  год.

Щільність розподілу

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{1500 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(2500-6000)^2}{2 \cdot 1500^2}} = 0,17 \cdot 10^{-4};$$

$$q(t) = F(t) = F_0\left(\frac{t-\bar{t}}{\sigma}\right) = F_0\left(\frac{2500-6000}{1500}\right) = F_0(-2,33).$$

Оскільки функція  $F_0$  в даному випадку від'ємна, то згідно рівнянню (3.19)  $F(t) = q(t) = 1 - F_0(2,33)$ . По [2] визначимо  $F_0(2,33) = 0,99$ . Остаточо отримаємо  $q(t) = 1 - F_0(2,33) = 0,01$ .

$$\text{Тоді } P(2500) = 1 - q(2500) = 0,99; \quad \lambda(2500) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{0,17 \cdot 10^{-4}}{0,99} = 0,1717 \cdot 10^{-4}.$$

Залежність між основними характеристиками надійності при дії закону розподілу Вейбулла–Гнеденка можна представити наступними рівняннями:

$$f(t) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{b-a} \cdot e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \quad q(t) = \int_0^{\infty} f(t) dt = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \quad P(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}.$$

В даному випадку інтенсивність відмови має вигляд як  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}$ , а середнє напрацювання до відмови має наступний вигляд:  $t_{\text{ср}} = \sigma / \nu$ .

**Приклад 7.** Час роботи вузла трактора Т-150К розподілено за експоненціальним законом при  $\lambda = 3,1 \cdot 10^{-4}$  1/год. Встановити ймовірність безвідмовної роботи  $P(t)$ , частоту відмов  $f(t)$  для  $t = 800, 1200, 2400$  год. і середнє напрацювання до першої відмови  $t_{\text{ср}}$ .

Ймовірність безвідмовної роботи вузла можна записати як  $P(t) = e^{-\lambda t}$ , тоді  $P(800) = \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 800) = 0,7803$ ,  $P(1200) = \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 1200) = 0,6893$ ,  $P(2400) = \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 2400) = 0,4752$ .

Частота відмов визначиться як  $f(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t}$ , отже  $f(800) = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 800) = 2,41 \cdot 10^{-4}$ ,  $f(1200) = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 1200) = 2,13 \cdot 10^{-4}$ ,  $f(2400) = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot \exp(-3,1 \cdot 10^{-4} \cdot 2400) = 1,47 \cdot 10^{-4}$ .

Середнє напрацювання відмови складе  $t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3,1 \cdot 10^{-4}} = 3225,806$  год.

**Приклад 8.** На дефектувальній ділянці спеціалізованого ремонтного підприємства проводилися виміри поверхонь 100 ступінчастих шліцевих валів в п'яти позиціях (рис. 3.2, табл. 3.2). Слід визначити ймовірність появи 0, 1, 2, 3, 4, 5 дефектів одного валу.

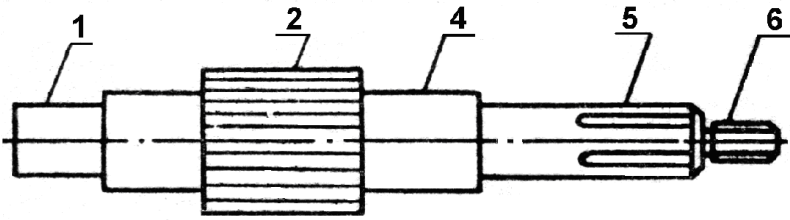


Рис. 3.2. Позначення дефектів у зношених валів.

Таблиця 3.2.

Результати вимірів шліцьових валів

№ поз. по рис. 3.2	Найменування дефекту	Кількість дефектних, деталей, шт.
1	Знос шийки під вальницю	25
2	Знос шліців	35
3	Знос циліндрової поверхні	25
4	Знос шліців	60
5	Знос нарізі	55
		$\Sigma = 200$

**Приклад 9.** В диспетчерську гаража поступають телефонні виклики з середньою щільністю 30 викликів за годину. Число викликів на будь-якій ділянці часу розподілено за законом Пуассона. Знайти ймовірність, при якій за три хвилини на станцію поступить 4 виклику.

Середнє число викликів за три хвилини рівно  $a = (3 \cdot 30) / 60 = 1,5$ . Ймовірність надходження чотирьох викликів складе  $P(m = 4) = \frac{1,5^4}{4!} \cdot e^{-1,5} \cong 0,05$ .

Напрацювання на відмову для ремонтіваних виробів – це середнє значення часу між відмовами. Вона визначається відношенням сумарного напрацювання відновлюваних об'єктів до сумарного числа їх відмов. Якщо на випробуванні знаходиться один об'єкт, то напрацювання на відмову визначається по формулі

$$t_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^r t_i}{r} \quad (3.21)$$

де  $t_i$  – час справної роботи об'єкту між  $(i - 1)$ -ої і  $i$ -ої відмовами;  $r$  – число відмов за деякий час  $t$ .

Якщо на випробуванні знаходиться  $N$  об'єктів протягом часу  $t$ , то

$$t_{cep} = \frac{\sum_{i=1}^N t_i}{\sum_{i=1}^N r_i} \quad (3.22)$$

Введемо позначення:  
 $N = 100$  валів,  $\Sigma = 200$  – кількість всіх дефектів на валах,  $n$  – число дефектів на одному валу. Параметр закону Пуассона для даного прикладу складе

$$a = \frac{\Sigma}{N} = \frac{200}{100} = 2.$$

Ймовірність появи 0, 1, 2, 3, 4, 5 дефектів одного вала відповідно формулі

$$P(m = n) = \frac{a^n}{n!} \cdot e^{-a} \quad (3.20)$$

складе:

$$P(m=0) \cong 0,14; \quad P(m=1) \cong 0,27; \\ P(m=2) \cong 0,27; \quad P(m=3) = 0,18; \\ P(m=4) \cong 0,10; \quad P(m=5) = 0,04.$$

При дії експоненціального закону розподілу напрацювання на відмову визначається по формулі  $t_{\text{сер}} = \frac{1}{\lambda}$ . (3.23)

**Приклад 10.** За весь період спостереження за роботою автомобіля ГАЗ-53 було зареєстровано 10 відмов. До початку випробувань автомобіль пропрацював 300 год., до кінця випробувань – 2500 год. Вимагається визначити середнє напрацювання на відмову  $t_{\text{сер}}$ .

Знаходимо напрацювання трактора за спостережуваний період  $t = t_1 - t_2 = 2500 - 300 = 2200$  год.

Приймаючи  $\sum_{i=1}^r t_i = 2200$ , визначаємо середнє напрацювання на відмову

$$t_{\text{сер}} = \frac{\sum_{i=1}^r t_i}{r} = \frac{2200}{10} = 220 \text{ год.}$$

**Приклад 11.** Під час спостереження за роботою трьох автомобілів «Урал-377» зафіксовано у першого 5 відмов, у другого і третього відповідно 10 і 8. Напрацювання першого автомобіля склало 1000 год., другого – 2500 і третього – 1200 год. Необхідно визначити напрацювання автомобілів на відмову

Визначаємо сумарне напрацювання трьох автомобілів:

$$\sum_{i=1}^{N=3} t_i = 1000 + 2500 + 1200 = 4700 \text{ год.}$$

Підсумовуємо кількість відмов  $r = \sum_{i=1}^{N=3} r_i = 5 + 8 + 10 = 23$ .

Знаходимо середнє напрацювання на відмову  $t_{\text{сер}} = \frac{\sum_{i=1}^{N=3} t_i}{\sum_{i=1}^{N=3} r_i} = \frac{4700}{23} = 204,35$  год.

Середній час відновлення згідно статистичним даним визначається за формулою

$$T_B = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i}{m} \quad (3.24)$$

де  $\tau_i$  – тривалість відновлення (включаючи час пошуку);  $m$  – кількість відновлених об'єктів.

**Приклад 12.** При експлуатації системи (трактор, сівалка, зчеплення борін) зареєстровано  $m = 13$  відмов. Час, що витрачається на відновлення цих відмов, склав 20 год. Знайти величину середнього часу відновлення системи.

Середній час відновлення системи для даного випадку складе

$$T_B = \frac{\sum_{i=1}^m \tau_i}{m} = \frac{20}{13} = 1,54 \text{ год.}$$

Згідно статистичним даним коефіцієнт готовності для ремонтів визначається по формулі

$$k_r = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{N \cdot T} \quad (3.25)$$

де  $\xi_i$  – час перебування  $i$ -го об'єкту в працездатному стані ( $i = 1, 2 \dots$ );  $T$  – тривалість експлуатації, що складається з послідовних інтервалів часу роботи і відновлення.

Якщо початок відновлення відбувається негайно, то коефіцієнт готовності може бути визначений із співвідношення

$$k_r = \frac{T_0}{T_0 + T_B} \quad (3.26)$$

де  $T_0$  – напрацювання на відмову;  $T_B$  – середній час відновлення.

Для оцінки надійності об'єкту по економічних критеріях часто користуються коефіцієнтом річних експлуатаційних витрат

$$k_{re} = \frac{C_{TO} + C_P}{C_0} \quad (3.27)$$

Тут  $C_{TO}$ ,  $C_P$  – відповідно річні витрати на технічні огляди і ремонт об'єкту, грн.;  $C_0$  – вартість об'єкту.

**Приклад 13.** Середнє напрацювання на відмову автотранспорту  $T_0 = 350$  годин і середній час відновлення  $T_B = 25$  год. Визначити коефіцієнт готовності.

Використовуючи вираз (3.26), визначимо коефіцієнт готовності

$$k_r = \frac{T_0}{T_0 + T_B} = \frac{350}{350 + 25} = 0,933.$$

Функцію готовності можна записати

$$k_r(t) = k_r + (1 - k_r) \cdot e^{-\frac{t}{k_r \cdot T_B}} = 0,933 + (1 - 0,933) \cdot e^{-\frac{t}{0,933 \cdot 25}}.$$

Коефіцієнт технічного використання ремонтів визначається відношенням сумарного часу перебування об'єктів в працездатному стані до добутку числа спостережуваних об'єктів при заданому часі експлуатації

$$k_{TB} = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i}{N \cdot T_{EKC}} \quad (3.28)$$

де  $T_{EKC}$  – тривалість експлуатації, що складається з інтервалів часу роботи, технічного обслуговування і ремонтів.

Якщо заданий час експлуатації  $T_{EKC}$  для кожного виробу різний, то формула (3.8) приймає вигляд:



$$k_{ТВ} = \frac{t_{\text{сум}}}{t_{\text{сум}} + t_{\text{рем}} + t_{\text{обс}}} \quad (3.29)$$

де  $t_{\text{сум}}$  – сумарне напрацювання всіх об'єктів;  $t_{\text{рем}}$  – сумарний час простоїв через планові і позапланові ремонти всіх об'єктів;  $t_{\text{обс}}$  – сумарний час простоїв через планове і позапланове технічне обслуговування всіх об'єктів.

**Приклад 14.** При експлуатації 10 тракторів Т-150К отримані наступні статистичні дані:  $t_{\text{сум}} = 850$  год.;  $t_{\text{рем}} = 43$  год.;  $t_{\text{обс}} = 27$  год. Визначити коефіцієнт технічного використання тракторів Т-150К.

Використовуючи вираз (3.29), отримаємо  $k_{ТВ} = 850/(850 + 43 + 27) = 0,924$ .

Якщо ресурс виробів розподілений з щільністю вірогідності  $f(t)$ , то гама - процентний ресурс  $t$  знаходять з виразу  $P(t_\gamma) = \gamma/100$ .

Коли відоме математичне очікування  $t$  (середнє значення) і середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ , то залежно від закону розподілу можна запропонувати наступну схему визначення величини гама - процентного ресурсу  $t_\gamma$ .

–при дії закону нормального розподілу гама - процентний ресурс слід знаходити з виразу  $t_\gamma = \bar{t} = N_k \cdot \sigma$ .

Тут  $N_k$  – величина, що визначається по таблиці квантилей;

–при розподілі за законом Вейбулла–Гнеденка розрахунок величини гама-процентного ресурсу проводиться так само, як і для закону нормального розподілу, визначення квантилей  $N_k/a$  – згідно з таблицями статистичних довідників.

**Приклад 15.** Визначити 80%-ний ресурс двигунів Д-21 первинного виробництва при  $\bar{t} = 2696,2$  год.;  $\sigma = 620$  год.;  $\nu = 0,23$ .

Оскільки розподіл ресурсів в даному випадку підчиняється закону нормального розподілу, то для встановлення величини гамма-процентного ресурсу слід використовувати вищенаведене рівняння.

Тоді  $t_{\lambda=80} = 2697,2 - 0,84 \cdot 620 = 2176,4$  год. (по [4] при  $P(t_\gamma) = 0,80$   $N_k = 0,84$ ).

**Приклад 16.** Визначити 80%-ний ресурс двигунів ЗІЛ-130 вторинного виробництва при  $\bar{t} = 76,5$  тис. км;  $\sigma = 27,92$  тис. км;  $\nu = 0,365$ .

Розподіл ресурсів відповідає закону Вейбулла–Гнеденка. В цьому випадку параметр  $b$  і коефіцієнт  $C_b$  визначаються по [2] і складають:  $b = 3,0$ ;  $C_b = 0,326$ . Знаходимо параметр Вейбулла–Гнеденка  $a = \sigma / C_b = 27,92/0,326 = 82,6$  тис. км.

Визначаємо квантіль  $N_k/a$  [2]. При  $P(t_\gamma) = 0,80$ ,  $[F(t_\gamma) = 0,20]$  і  $b = 3,0$ ;  $t_\gamma = N_k/a = 0,607$ . Тоді  $N_k = a \times 0,607 = 82,6 \times 0,607 = 50,14$  тис. км.

### 3.2. Завдання для практичної роботи і порядок її виконання

**Завдання 1.** За даними табл. 3.3, 3.4 при  $N = 200$ :

–визначити ймовірність безвідмовної роботи  $P(t_i)$  пасів приводу вентилятора автомобіля УАЗ-469 ( $\bar{t}_i$  – середнє значення інтервалу,  $n_i$  – число відмов в  $i$ -ому інтервалі) в перебігу заданого часу  $t_1$ ,  $t_2$  і  $t_3$ ;

–визначити ймовірність відмови  $q(t_i)$  в період часу  $t_1$ ,  $t_2$  і  $t_3$ ;

–визначити ймовірне число пасів  $n(t_i)$ , які можуть вийти з ладу в період часу  $t_1$ ,  $t_2$  і  $t_3$ ;

–розрахувати інтенсивність відмов  $\lambda(t_i)$  пасів в період часу  $t_1, t_2$  і  $t_3$

Таблиця 3.3

Частота виходу з ладу пасів вентилятора автомобіля УАЗ-469

№ варіанту	Позначення	Початкові дані для виконання роботи									
		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$\bar{t}_i$	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000	11000
	$n_i$	7	15	30	35	25	34	25	12	10	7
2	$\bar{t}_i$	1000	2500	4000	5500	7000	10000	11500	11300	11450	11600
	$n_i$	10	20	22	28	36	28	25	15	10	6
3	$\bar{t}_i$	1500	3500	5500	7500	9500	11500	13500	15500	17500	19500
	$n_i$	15	25	55	32	20	16	14	10	8	5
4	$\bar{t}_i$	1000	4000	7000	10000	13000	16000	19000	22000	25000	28000
	$n_i$	16	22	24	32	34	28	15	12	10	7
5	$\bar{t}_i$	500	2500	4500	6500	8500	10500	12500	14500	16500	18500
	$n_i$	6	0	22	28	30	42	31	30	6	5
6	$\bar{t}_i$	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	1000	11000	12000
	$n_i$	12	18	26	38	30	20	24	20	10	2
7	$\bar{t}_i$	10000	10500	11000	11500	12000	12500	13000	13500	14000	14500
	$n_i$	20	13	15	48	38	20	18	10	12	6
8	$\bar{t}_i$	15000	16000	17000	18000	19000	20000	21000	22000	23000	24000
	$n_i$	32	34	40	22	18	24	22	4	2	2
9	$\bar{t}_i$	6000	7500	9000	10500	12000	13500	15000	16500	18000	19500
	$n_i$	6	10	16	20	24	48	28	20	16	12
0	$\bar{t}_i$	500	3000	5500	8000	10500	13000	15500	18000	20500	23000
	$n_i$	12	22	33	35	32	28	22	10	4	2

Таблиця 3.4

Значення інтервалів часу  $t_1, t_2$  і  $t_3$

Позначення	№ варіанту*)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$t_1$	3000	2000	4000	5000	1000	6000	12000	20000	10000	5000
$t_2$	5000	4000	6000	7000	2500	9000	13000	21000	12000	10000
$t_3$	10000	6000	8000	9000	5000	11000	14000	22000	14000	15000

\*) Номер варіанту відповідає останній цифрі залікової книжки.

**Завдання 2.** При випробуваннях 3 тракторів Т-150К зафіксовано у першого  $n_1$  відмов, у другого –  $n_2$  відмов, у третього  $n_3$  відмов. Напрацювання на відказ відповідно складала  $t_1, t_2, t_3$ . Час на відновлення працездатності кожного трактора рівно  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ . Час на технічне обслуговування дорівнює  $t_{об.1}, t_{об.2}, t_{об.3}$ . По даним табл.

3.5 розрахувати напрацювання на відмову, середній час відновлення працездатності, коефіцієнт готовності і коефіцієнт технічного використання для кожного трактора та всіх тракторів в цілому.

Таблиця 3.5

Початкові дані для виконання завдання 2

Позна- чення	№ варіанту*)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$n_1$	5	4	3	2	1	2	4	8	10	12
$n_2$	12	13	8	10	5	6	12	1	8	3
$n_3$	3	5	4	11	12	2	4	8	10	2
$t_1$	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100
$t_2$	810	600	520	1200	2000	2500	1800	900	1100	900
$t_3$	1000	400	950	650	1300	400	250	700	600	1250
$\tau_1$	10	8	6	5	4	5	6	7	8	9
$\tau_2$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\tau_3$	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
$t_{об.1}$	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
$t_{об.2}$	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
$t_{об.3}$	10	12	10	13	11	14	12	15	15	16

\*) Номер варіанту відповідає останній цифрі залікової книжки.

### 3.3. Питання для самостійної роботи студентів

1. Чим відрізняється ремонтований об'єкт від неремontованого?
2. Приведіть особливості розрахунку основних показників надійності для ремонтovаних об'єктів;
3. Яка залежність існує між ймовірністю безвідмовної роботи і вірогідністю відмови?
4. Що таке густина розподілу відмов? Приведіть графічну залежність її величини від часу;
5. Що таке інтенсивність розподілу відмов? Приведіть криву залежності інтенсивності відмов від часу.
6. Що таке напрацювання на відмову для неремontованих виробів?
7. По яких статистичних законах може розподілятися щільність розподілу відмов і ймовірність безвідмовної роботи
8. Дайте визначення потоку відмов? Якими показниками можна охарактеризувати його параметри?

9. Чим відрізняється напрацювання на відказ для ремонтіваних і неремонтованих деталей?
10. Наведіть приклади неремонтованих деталей (вузлів, агрегатів), які використовуються в автотракторній техніці;
11. Як визначити середній час відновлення працездатності вузла, деталі, агрегату?
12. Чим відрізняється коефіцієнт готовності від коефіцієнта річних експлуатаційних витрат?
13. Як визначити коефіцієнт технічного використання? Чим він відрізняється від коефіцієнта готовності?
14. В яких випадках використовується методика розрахунку гамма - процентного ресурсу?
15. Для вирішення яких задач теорії надійності застосовують кількісні характеристики?
16. Поясніть відмінність методик розрахунку якісних характеристик від розрахунку кількісних при оцінці надійності об'єкту.

## Список використаної літератури

1. Система технического обслуживания и ремонта техники. Методы определения допустимого отклонения параметра технического состояния и прогнозирования остаточного ресурса составных частей агрегатов машин: ГОСТ 21571–96. – [Введен с 1996–01–01]. – М. : Госстандарт, 1996. – 47 с.
2. Комплексная система технического обслуживания и ремонта в сельском хозяйстве. – М. : ГОСНИТИ, 1986. – 322 с.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – 4-е изд. М. : Наука, 1989. – 385 с.
4. Гнеденко Б. В. Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. – 7-е изд. – М. : Наука, 1980. – 310 с.
5. Ермолов Л.С. Основы надёжности сельскохозяйственной техники / Л. С. Ермолов, В. М. Кряжков, В. Е. Черкун. – М. : Колос, 1982. – 270 с.
6. Сідашенка О. І. Ремонт машин / О. І. Сідашенка, А. Я. Полівського. – К. : Урожай, 1994. – 400 с.
7. Черноиванов В. И. Организация и технология восстановления деталей машин / В. И. Черноиванов. – М. : Агропромиздат, 1989. – 334 с.
8. Авдеев М. А. Технология ремонта машин и оборудования / М. А. Авдеев, Е. Л. Воловик, И. Е. Ульман. – М. : Агропромиздат, 1986. – 246 с.
9. Тельнов Н. Ф. Ремонт машин / Н. Ф. Тельнов. – М. : Агропромиздат, 1992. – 558 с.
10. Бабусенко С. М. Проектирование ремонтно-обслуживающих предприятий / С. М. Бабусенко. – М. : Агропромиздат, 1990. – 250 с.
11. Серый И. С. Курсовое и дипломное проектирование по надёжности и ремонту машин / И.С. Серый, А. П. Смелов, В. Е. Черкун. – М. : Агропромиздат, 1991. – 184 с.
12. Молодык Н. В. Восстановление деталей машин : справочник / Н. В. Молодык, А. С. Зеникин. – М. : Машиностроение, 1989. – 256 с.
13. Селиванов А. И. Справочная книга по технологии ремонта машин в сельском хозяйстве / А. И. Селиванов. – М. : Колос, 1985. – 600 с.
14. Авдеев Т. В. Технология ремонта машин и оборудования / Т. В. Авдеев, Е. Л. Воловик, И. Е. Ульман. – М. : Агропромиздат, 1986. – 246 с.
15. Черноиванов В. Н. Организация и технология восстановления деталей машин / В. Н. Черноиванов. – М. : Агропромиздат, 1989. – 334 с.
16. Тельнова Н. Ф. Ремонт машин / Н. Ф. Тельнова. – М. : Агропромиздат, 1992. – 560 с.
17. Сідашенка О. І. Ремонт сільськогосподарської техніки: довідник / О. І. Сідашенка, О. А. Науменка. – К. : Урожай, 1992. – 248 с.

18. Сушкевич М. В. Контроль при ремонте сельскохозяйственной техники / М. В. Сушкевич. – М. : Агропромиздат, 1998. – 254 с.
19. Черепанова С. С. Оборудование для ремонта сельскохозяйственной техники: справочник / С. С. Черепанова. – М. : Колос, 1981. – 312 с.
20. Есерберлик Р. Е. Капитальный ремонт автомобилей / Р. Е. Есерберлик. – М. : Транспорт, 1989. – 335 с.
21. Артемов М. Е. Ремонт зерноуборочных комбайнов / М. Е. Артемов, Ю. П. Шатров, В. А. Калинин. – М. : Россельхозиздат, 1986. – 142 с.
22. Кривенко М. М. Ремонт и техническое обслуживание автотракторных двигателей / М. М. Кривенко, И. М. Федосов. – М. : Колос, 1980. – 288 с.
23. Мочалов Н. И. Ремонт почвообрабатывающих машин / Н. И. Мочалов, С. И. Костенко, В. А. Васильев. – М. : Россельхозиздат, 1986. – 142 с.
24. Молод К. В. Восстановление деталей машин: справочник / К. В. Молод, А. С. Зенкин. – М. : Машиностроение, 1989. – 351 с.



**Навчальне видання**

# **НАДІЙНІСТЬ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ**

Методичні рекомендації

**Укладачі:**

**Іванов** Геннадій Олександрович.

**Гавриш** Валерій Іванович.

**Полянський** Павло Миколайович.

**Гольдшмідт** Олег Валеріанович.

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 2,5.

Тираж 50 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі  
Миколаївського національного аграрного університету  
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької Комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.