

**МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА
УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Інженерно-енергетичний факультет

**Кафедра тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і
технічного сервісу**

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації

по виконанню розрахунково-графічних робіт з модулів «Статика» та
«Кінематика»

для студентів напряму підготовки 6.100102 «Процеси, машини та обладнання
агропромислового виробництва» денної та заочної форм навчання

Миколаїв

2015

УДК 531/534

ББК 22.21

Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 26 лютого 2015р., протокол № 6.

Укладачі:

К. М. Думенко – д-р техн. наук, професор кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу, Миколаївський національний аграрний університет;

К. С. Шевченко – асистент кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Каіров О. С. – д-р техн. наук, завідувач кафедрою технології суднового машинобудування, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| ВСТУП..... | 4 |
| 1. Розрахунково-графічна робота № 1 «Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми»..... | 5 |
| 2. Розрахунково-графічна робота № 2 «Визначення реакцій опор складеної конструкції»..... | 26 |
| 3. Розрахунково-графічна робота № 3 «Визначення реакцій опор просторової конструкції»..... | 36 |
| 4. Розрахунково-графічна робота № 4 «Знаходження швидкості і прискорення точки за заданим рівнянням її руху»..... | 48 |
| 5. Розрахунково-графічна робота № 5 «Кінематичний аналіз плоского механізму»..... | 62 |
| Перелік рекомендованих джерел..... | 93 |

ВСТУП

Теоретична механіка є однією з фундаментальних дисциплін загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу. Дисципліна вивчає найбільші загальні закономірності механічного руху і рівноваги матеріальних тіл та систем. Інженер-механік повинен знати існуючі методи визначення цих закономірностей.

Теоретична механіка є науковою основою більшості загально технічних дисциплін таких, як теорія механізмів і машин, механіка матеріалів і конструкцій, деталі машин та інші, а також спеціальних дисциплін – теорія трактора і автомобіля, теорія сільськогосподарських машин.

Мета дисципліни – вивчити методи визначення закономірностей руху механічних систем та сил діючих на них, та способи приведення системи сил до простішого виду.

У результаті вивчення дисципліни студент **має знати:**

- основні закони, теореми, принципи механіки;
- використання теорії до вирішення конкретних задач;
- методи визначення статичних та динамічних реакцій в'язей;
- способи складання умов рівноваги механічних систем;
- кінематичні формули визначення швидкостей та прискорень тіл точок.

Має вміти:

- складати динамічні схеми та диференціальні рівняння руху;
- визначати закони руху тіл та діючих на них сил;
- розраховувати статичні та динамічні реакції;
- приводити систему сил до простішого виду.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

Тема: «Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми»

1.1. Теоретичні відомості

Предмет вивчення статички

Статика розв'язує дві основні задачі:

1. Якщо на тверде тіло діє система сил, то яким чином цю систему сил можна спростити?

2. В яких випадках тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил?

В статистиці розглядаються абсолютно тверді тіла.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстань між точками якого не змінюється при любых механічних діях з боку інших тіл. Це значить, що в статистиці не враховують деформації, які виникають в реальних тілах. В подальшому будемо говорити "тверде тіло" замість "абсолютно тверде тіло".

В механіці використовується ще один абстрактний образ тіла – матеріальна точка.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху (або рівноваги) . Матеріальна точка відрізняється від геометричної тим, що в ній зосереджена вся маса тіла.

Для врахування механічної взаємодії між тілами вводиться поняття сили.

Сила - це характеристика взаємодії двох тіл. Сила - величина векторна і визначається слідуючими трьома елементами: 1) точкою прикладання сили, 2) напрямом сили і 3) числовим значенням сили. Розмірність сили $N = \frac{кг \cdot м}{с^2}$

(ньютон) . Позначаються сили різними буквами $\vec{F}, \vec{P}, \vec{G}, \vec{N}$. В посібнику в основному буде використовуватись позначення \vec{F} . Якщо над буквою є стрілочка, то сила розглядається як векторна величина, якщо без стрілочки (наприклад $F=10$ Н) , то враховується тільки числове значення сили. На рисунках сила обов'язково повинна бути позначена як вектор.

Якщо на рисунку показується сила (а сила - це характеристика взаємодії двох тіл) , то необхідно вказати, які два тіла взаємодіють.

Наприклад:

На рисунку 1,а тіло D висить на стержні. На рисунку 1,б показано дві сили, що діють на тіло D.

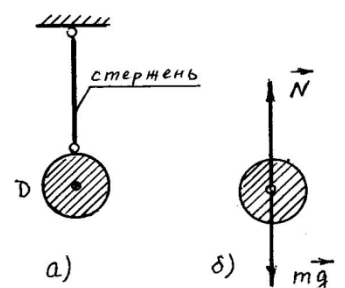


Рис1.

Сила $m\vec{g}$ є характеристикою взаємодії тіла D і Землі, а сила \vec{N} - тіла D і стержня.

Системи сил, що діють на тіло, бувають різні:

1. Якщо лінії дії сил перетинаються в одній точці, то такі сили називаються збіжними. Якщо ці сили знаходяться в одній площині, то це плоска система збіжних сил, якщо ці сили в просторі - то це просторова система збіжних сил.

2. Якщо сили діють в одній площині довільним чином, то ці сили складають плоску довільну систему сил.

3. Якщо сили діють в просторі довільним чином, то такі сили складають просторову довільну систему сил.

Зрозуміло, що найпростішою системою сил є система збіжних сил, а найскладнішою - просторова довільна система сил.

Якщо одну систему сил, що діють на дане вільне тіло, можна замінити другою системою сил, не змінюючи при цьому спокій чи рух, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються еквівалентними.

Аксиоми статyki

Статика побудована на шести аксіомах.

Аксиома 1. Абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил тільки тоді, коли ці сили рівні по величині і напрямлені по одній прямій в протилежні сторони.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (1)$$

Сили, які показані на рисунку 2, називаються зрівноваженими.



Рис.2

Аксиома 2. Не змінюючи дію системи сил на абсолютно тверде тіло, можна приєднати до цієї системи сил (або відкинути з неї) будь-яку зрівноважену систему сил (рис 3).

На рисунку 3, а зрівноважені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_4 і по аксіомі 2 їх можна відкинути. Результат видно на рисунку 3, б.

Використовуючи аксіому 2, можна довести слідуючу теорему.

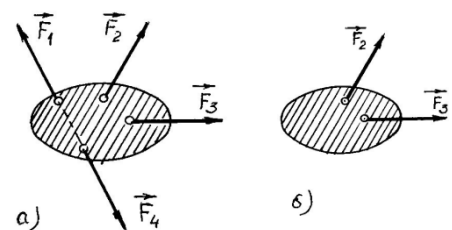


Рис. 3

Теорема 1.1 Силу можна переносити по лінії її дії і від цього дія сили на тверде тіло не зміниться.

Доведення.

Нехай на тіло в точці А діє сила \vec{F} (рис 4). Чи зміниться дія сили на тіло, якщо її перенести в

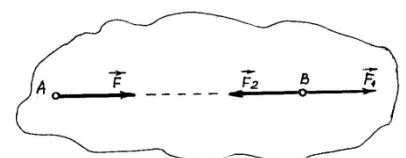


Рис 4

точку В по лінії АВ? В точці В приєднаємо зрівноважені сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , причому $F_1 = F_2 = F$. По аксіомі 2 це можна зробити. Маємо систему з трьох сил. Розглянемо сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 . Це зрівноважені сили і по аксіомі 2 їх можна відкинути. Таким чином, залишилась сила \vec{F}_1 , що діє в точці В.

Аксиома 3. Якщо на тверде тіло в одній точці діють дві сили, то дію цих сил можна замінити дією однієї сили, яка напрямлена по діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах, і чисельно дорівнює довжині діагоналі.

Сила \vec{R} , яка заміняє в даному випадку дію сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , називається рівнодійною (рис. 5)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \quad (3)$$

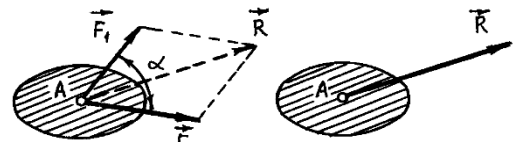


Рис.5

Використовуючи аксіоми 1 і 3 і теорему 1.1, доведемо наступну теорему.

Теорема 1.2 Якщо вільне тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох сил, які лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

Доведення.

Нехай тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох сил (рис. 6, а) Перемістимо сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 по лінії їх дії в точку перетину А. Дію сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 замінимо дією однієї сили $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

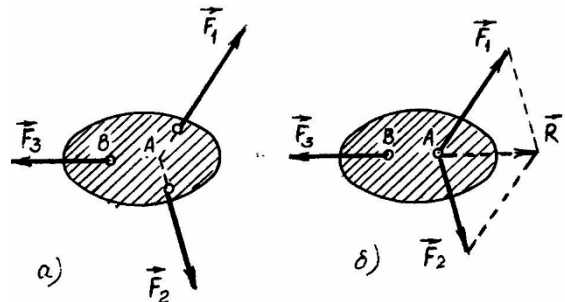


Рис. 6

(рис. 6, б) . Тепер замість трьох сил маємо дві сили \vec{R} і \vec{F}_3 і тіло знаходиться в рівновазі. Згідно аксіоми 1 це можливо при умові, що сили \vec{R} і \vec{F}_3 діють по одній прямій в протилежні сторони, тобто лінія дії сили \vec{F}_3 перетинає точку А.

Аксиома 4. Два тіла взаємодіють між собою з силами, рівними по величині і напрямленими по одній прямій в протилежні сторони.

Ця аксіома називається законом рівності дії і протидії.

Якщо тіло 1 діє на тіло 2 з силою \vec{F}_2 , то одночасно тіло 2 діє на тіло 1 з силою $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (рис. 7)

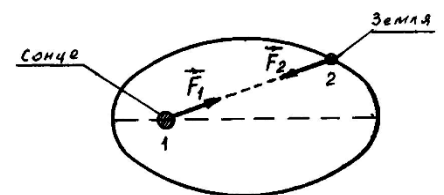


Рис.7

Сили \vec{F}_1 і \vec{F}_2 не являються зрівноваженими силами, так як вони прикладені не до одного тіла, а до двох.

Аксіома 5. Якщо деформоване тіло знаходиться в рівновазі під дією сил, то рівновага не порушиться і в тому випадку, коли це тіло затвердіє (стане абсолютно твердим).

Ця аксіома дозволяє результати, отримані в статичі абсолютно твердого тіла, переносити на тіла, які можуть деформуватись.

В'язі і аксіома про в'язі

В статичі розглядають вільні тіла. Тіло називається *вільним*, якщо воно в просторі може займати довільне положення. Тіло називається *невільним*, якщо воно може рухатись лише в певних напрямках, або взагалі не може рухатись. Наприклад, вагон є тіло невільне, його рух спрямовується рейками. При розв'язуванні задач статичи завжди будуть зустрічатися невільні тверді тіла.

Тіла, які перешкоджають вільному переміщенню даного тіла, називають в'язями, а сили, з якими ці тіла діють на дане тіло - *реакціями в'язей*.

Всі сили, що діють на дане тіло, можна поділити на *активні сили* і *реакції в'язей*. До активних сил відносяться сили тяжіння, сили пружності і т.п. і, як правило, ці сили відомі. Реакції в'язей виникають тільки тоді, коли дане тіло під дією активних сил тисне на ці в'язі. Як тільки дане тіло перестає тиснути на в'язі, то зникають реакції в'язей. Тому реакції в'язей називають *пасивними силами*. Величина реакції в'язей і напрям дії наперед невідомі.

В статичі задачі на рівновагу невільних тіл розв'язуються на основі слідуєчої аксіоми.

Аксіома 6. (аксіома про в'язі) . Всяке невільне тіло можна розглядати як вільне, коли умовно його звільнити від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.

Аксіома 6 дозволяє використовувати до невільних тіл умови рівноваги, які отримані в статичі для вільного тіла. Потрібно тільки в число сил, що діють на тіло, обов'язково включити і реакції відкинутих в'язей.

Більшість задач статичи якраз і пов'язана із знаходженням реакцій в'язей. Знаючи їх, ми будемо знати і сили тиску на в'язі, тобто будемо мати дані, необхідні для розрахунку на міцність відповідних конструкцій.

Типи в'язей і їх реакції

Розглянемо, як знаходиться напрям реакції деяких основних типів в'язей.

1. Гладенька опорна поверхня.

Гладенькою називається поверхня, тертям тіла по якій можна знехтувати.

Гладенька опорна поверхня не перешкоджає руху тіла по поверхні, але перешкоджає переміщенню тіла вздовж нормалі до поверхні в'язі, тому реакція в'язі напрямлена по нормалі до в'язі. Цю реакцію називають *нормальною реакцією*.

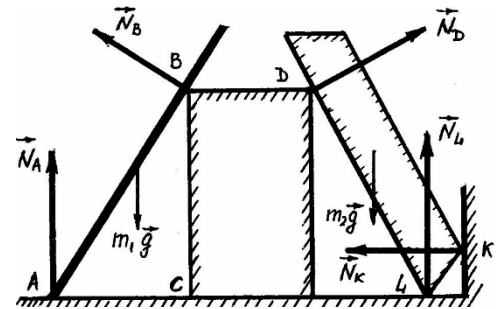


Рис. 8

В точці А (рис. 8) нормальна реакція \vec{N}_A напрямлена перпендикулярно поверхні АС, в точці В реакція \vec{N}_B перпендикулярна АВ. В точці D реакція \vec{N}_D перпендикулярна поверхні DL. З рисунка 8 видно, як напрямлені реакції опори в точках К і L.

2. Негладенька опорна поверхня.

Негладенька опорна поверхня - це шорстка поверхня і в цьому випадку необхідно врахувати сили тертя ковзання. На рисунку 9 $\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_D$ - це нормальні реакції опор. $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_D$ - це сили тертя ковзання.

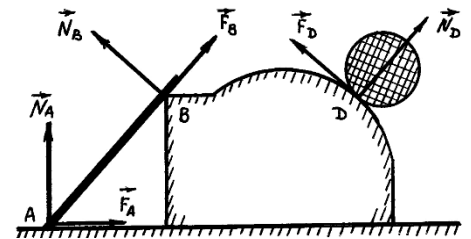


Рис. 9

3. Шарнірне з'єднання тіл.

На рисунку 10. балка АВ знаходиться на двох опорах. В точці А опора називається нерухомий шарнір, а в точці В - рухомий шарнір. Конструктивно нерухомий шарнір виконаний слідуючим чином. На нерухомий циліндричний болт надівається

стержень AL (рис. 10), який має циліндричний отвір, діаметр якого більший за діаметр болта. Стержень AL (AB) має можливість тільки обертатись навколо осі болта. Реакція \vec{R}_A циліндричного шарніра лежить в площині, перпендикулярній осі болта і проходить через центр болта. Реакція опори \vec{R}_A невідома по

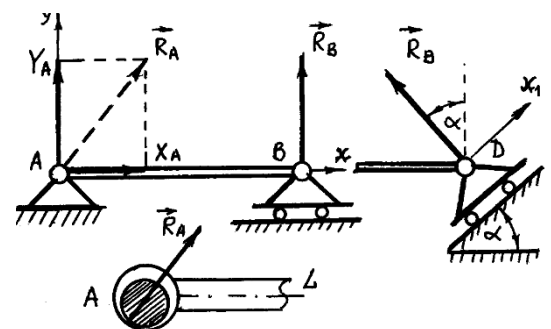


Рис. 10

величині і невідомий напрям її дії. Тому цю реакцію розкладають на дві складові X_A і Y_A , де X_A - проекція вектора \vec{R}_A на вісь Ax, а Y_A - на вісь Ay. Якщо будуть знайдені проекції X_A, Y_A , то реакція

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2};$$

Рухомий шарнір В побудований таким чином як і нерухомий шарнір, але він має можливість зміщуватись в одному із напрямів. Наприклад (рис. 10), шарнір В має можливість зміщуватись вздовж осі x , а шарнір D - вздовж осі x_1 . Реакція рухомого шарніра проходить через вісь шарніра і напрямлена по нормалі до опорної поверхні.

4. Підп'ятник, сферичний шарнір.

Сферичний шарнір представляє собою кулю, яка може обертатись як завгодно всередині сферичної порожнини (рис. 11). Напрямок реакції в цьому випадку вказати неможливо, тому цю реакцію \vec{R}_A

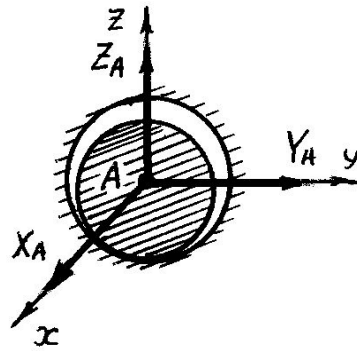


Рис.11

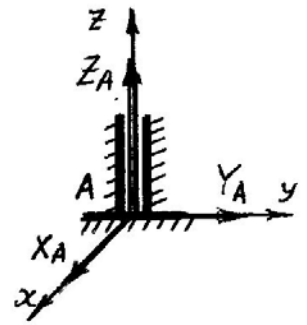


Рис. 12

розкладають по трьом осям координат на три складові X_A, Y_A, Z_A .

Підп'ятник представляє собою з'єднання циліндричного шарніра з опорною площиною (рис. 12). Така в'язь дозволяє обертатися валу навколо його осі і переміщатись вздовж неї тільки в одному напрямку. Реакція підп'ятника складається з реакції циліндричного підшипника X_A і Y_A і нормальної реакції Z_A опорної площини.

5. Реакція невагомому стержню.

Якщо невагомий стержень має на кінцях шарнірні з'єднання, то реакція цього стержня напрямлена по стержню.

Для тіла D (рис. 13, а) стержні 1 і 2 являються в'язями.

Реакції цих в'язей напрямлені по стержням 1 і 2. Реакції стержнів 1 і 2 тіла D_1 показані на рисунку 13, б.

6. Жорстке защемлення.

Жорстке защемлення балки АВ показано на рис. 14. Якщо на балку діють активні сили \vec{F} , то в защемленні виникають реакції, які складаються з реакції защемлення \vec{R}_A і пари сил з моментом защемлення M_A . Так як напрям реакції \vec{R}_A невідомий, то ця реакція розкладається на дві невідомі складові X_A, Y_A . Таким чином, в точці А жорсткого защемлення маємо три невідомі складові реакції X_A, Y_A, M_A .

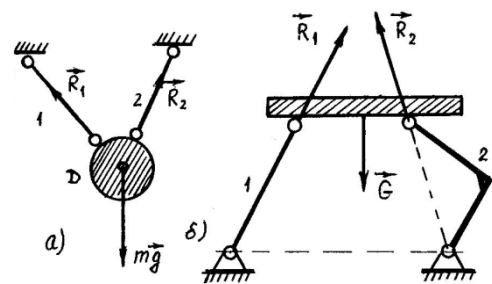
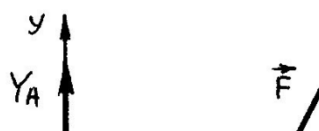


Рис 13



1.2. Методичні вказівки до розв'язування задач про рівновагу плоскої довільної системи сил

До розв'язування задач необхідно приступати тільки після попереднього вивчення теоретичного матеріалу. Найбільш загальним методом розв'язування задач на рівновагу є аналітичний метод.

Задачі на плоску систему збіжних сил можна розв'язувати за допомогою силового многокутника, або аналітичним способом. Якщо брати в порівнянні, то аналітичний спосіб розв'язання задач більш ефективний.

Рекомендуємо слідуєчий порядок дій при розв'язанні задач статички аналітичним способом:

1. Вияснити, рівновагу якої точки або тіла необхідно розглянути.
2. Вибрати осі координат.
3. Якщо тіло (точка) не вільне, то необхідно звільнитися від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.
4. Проаналізувати отриману систему активних сил і реакцій в'язей.
5. Записати аналітичні умови рівноваги отриманої системи сил і скласти рівняння рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь.

Цієї послідовності необхідно дотримуватись і при розв'язуванні задач на рівновагу плоскої довільної системи сил.

Для отримання більш простих рівнянь рівноваги потрібно:

1) складаючи рівняння проєкцій сил, необхідно одну з координатних осей напрямити перпендикулярно до лінії однієї, а якщо можливо, то і двох невідомих сил; при цьому проєкція сили на цю вісь буде дорівнювати нулю, а на вісь, їй перпендикулярній, сила спроектуюється в натуральну величину;

2) складаючи рівняння моментів для плоскої системи сил, доцільно вибрати центр моментів в тій точці, де більше всього невідомих сил; тоді в рівняння моментів всіх сил ввійде тільки одна невідома сила.

В тих випадках, коли при знаходженні момента сили відносно точки важко знайти плече сили, то буває доцільно цю силу розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові і шукати момент цих складових сил відносно даної точки.

В більшості задач статички неможливо наперед вказати напрям реакції опори. Тому в цих випадках невідому реакцію треба розкласти на дві складові, які напрямляються вздовж відповідних осей координат, і ввести їх в рівняння рівноваги в якості невідомих. Якщо в результаті розв'язання рівнянь величина якої–небудь складової реакції буде від'ємна, то це означає, що в дійсності ця складова реакції напрямлена в протилежну сторону вибраного напрямку.

Якщо за умовою задачі необхідно знайти дію даного тіла на його в'язь, то в рівняння рівноваги тіла необхідно вводити реакцію в'язі. Сила, яку шукаємо, буде рівна по величині і протилежна по напрямку знайденій реакції в'язі.

Перед розв'язуванням задачі необхідно встановити, чи статично визначена задача, чи ні.

Ті задачі, де кількість невідомих реакцій в'язей (враховуючи окремі складові) дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної конструкції, називаються *статично визначеними*. Якщо ж кількість невідомих реакцій в'язей виявиться більше кількості незалежних рівнянь рівноваги конструкції, то такі задачі називаються *статично невизначеними*. В останньому випадку ці задачі можуть бути розв'язані методами опору матеріалів.

Розрахунок плоских ферм

Фермою називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних брусів, з'єднаних між собою шарнірами, і служить для сприйняття зовнішніх навантажень і передачі їх на опори. Якщо зовнішні сили прикладені тільки до шарнірів, то ферма називається *стержневою*, а її бруси – *стержнями*. Якщо зовнішні сили прикладені не тільки до шарнірів, а і до точок самих стержнів, то така ферма називається *балочною*, а бруси її – *балками*. Балки балочної ферми крім розтягу – стиску зазнають ще і згин. *Плоскою* називається ферма, бруси якої розміщені в одній площині. Ми будемо розглядати тільки *плоскі стержневі ферми*.

Точка, де стержні з'єднуються шарнірами, називається *вузлом*. Не всяке шарнірне з'єднання стержнів є фермою. По означенню ферма повинна забезпечувати незмінність її форми (жорсткість). Самою простою фермою є стержневий трикутник (рис. 4.5.а). Якщо з'єднати чотири стержні шарнірами (рис. 4.5.б), то таке шарнірне з'єднання під дією прикладених в вузлах сил буде змінювати свою форму і не являється фермою. Таке з'єднання в механіці називається механізмом.

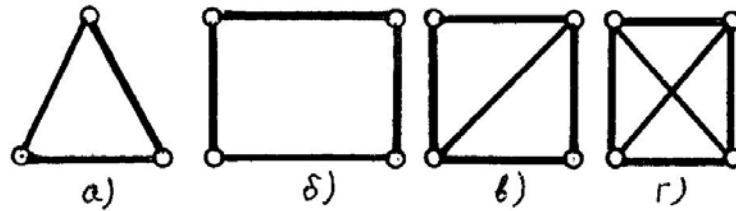


Рис. 15

Щоб прямокутник зробити фермою, достатньо з'єднати дві протилежні вершини стержнем (рис. 15.в). На рисунку 15.г прямокутник також являється фермою. Між останніми фермами є різниця: ферма на рис. 15.в не має зайвого стержня, а ферма на рис. 15.г має один зайвий стержень.

Якщо з ферми неможливо зняти ні одного стержня, не змінивши її жорсткості, то таку ферму називають *фермою без зайвих стержнів*. Ми будемо розглядати ферми без зайвих стержнів.

В плоскій фермі без зайвих стержнів має місце слідуюча залежність між числом стержнів k і числом вузлів, n

$$k = 2n - 3 \quad (4)$$

Зробити розрахунок ферми – це знайти реакції опор і зусилля в усіх стержнях ферми. При цьому повинні виконуватись такі умови: а) всі стержні ферми невагомі і прямолінійні, б) тертя в шарнірах відсутнє, в) навантаження, які діють на ферму, лежать в її площині і прикладені тільки в вузлах. При виконанні таких умов стержні ферми будуть зазнавати тільки стиск або розтяг.

Розрахунок ферми починається з знаходження реакцій опор ферми. Після того, як реакції опор знайдені, можна приступати до визначення зусиль в стержнях ферми. Для знаходження зусиль в стержнях можна використати: 1) спосіб вирізання вузлів, 2) спосіб Ріттера.

1.3. Завдання для розрахунково-графічних робіт (РГР) по темі «Довільна плоска система сил»

РГР №1 «Визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми»

Аналітично визначити реакції опор ферми та способом вирізання вузлів знайти зусилля в її стержнях. Способом Ріттера знайти зусилля в стержнях, номери яких вказані в таблиці.

Варіанти завдань РГР №1

Схеми ферм показані на рисунках. Необхідні числові дані приведені в таблицях 1-4. На схемах не показані місцезнаходження опор ферми та точки прикладання сил. Ці дані беруться з таблиць. На рис. 16. показані напрями дії сил в залежності від кута α .

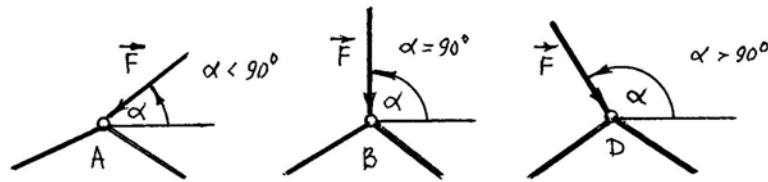


Рис. 16

Для даного варіанта по даним таблиці необхідно побудувати схему з опорами і діючими силами.

Для ілюстрації на рис. 17 побудована ферма з опорами і діючими на неї силами згідно варіанту 32.

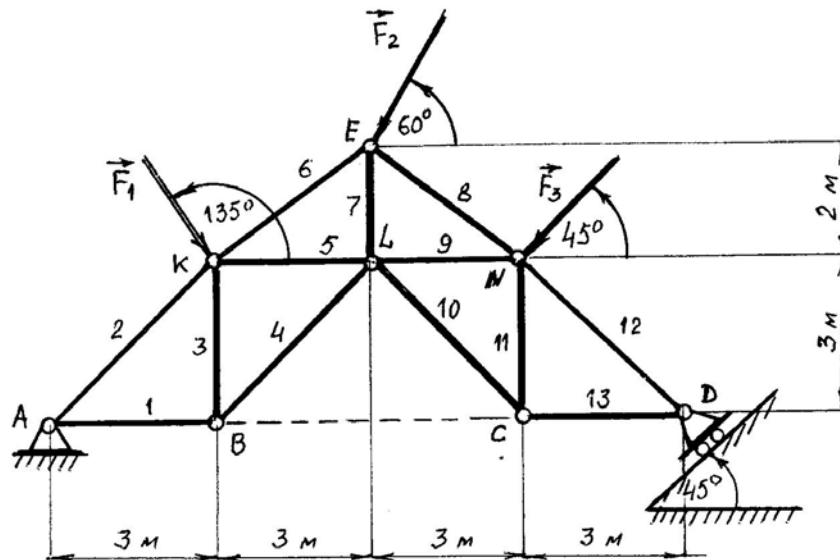








Рис. 17

| Варіант | Схема | Тип опори і її місце знаходження | | | Розмір ферми | | Зосереджені сили | | | | | | | | | | Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера |
|---------|-------|---|---|---------|--------------|-----|------------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|------------|----------|---|
| | |  |  | β | a | h | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | \vec{F}_3 | | | | |
| | | | | | | | F_1 | Точка прикладання | α_1 | F_2 | Точка прикладання | α_2 | F_3 | Точка прикладання | α_3 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | кН | |
| 1 | 1 | A | B | 30 | 2 | 2 | 20 | C | 60 | 15 | D | 120 | 10 | N | 30 | 8,9,10 | |
| 2 | 1 | L | T | 0 | 3 | 2 | 15 | E | 45 | 20 | K | 60 | 14 | D | 90 | 12,13,14 | |
| 3 | 1 | B | A | 45 | 4 | 4 | 10 | C | 45 | 12 | E | 75 | 10 | D | 60 | 4,5,6 | |
| 4 | 1 | A | T | 0 | 3 | 3 | 12 | L | 45 | 14 | K | 60 | 12 | D | 120 | 7,8,9 | |
| 5 | 2 | A | B | 30 | 4 | 1 | 8 | E | 45 | 10 | K | 60 | 14 | L | 90 | 4,5,6 | |
| 6 | 2 | C | D | 0 | 6 | 2 | 10 | A | 90 | 12 | B | 60 | 16 | L | 60 | 8,9,10 | |
| 7 | 2 | C | B | 30 | 4 | 2 | 12 | E | 60 | 14 | K | 90 | 18 | N | 60 | 4,5,7 | |
| 8 | 2 | B | C | 0 | 3 | 2 | 4 | E | 70 | 8 | A | 120 | 10 | L | 45 | 8,9,11 | |
| 9 | 2 | D | C | 30 | 4 | 3 | 6 | A | 90 | 10 | N | 135 | 12 | L | 60 | 4,7,10 | |
| 10 | 3 | D | C | 45 | 2 | 3 | 10 | A | 90 | 12 | L | 60 | 14 | B | 45 | 4,5,7 | |
| 11 | 3 | A | B | 30 | 4 | 3 | 12 | D | 180 | 14 | K | 60 | 16 | L | 45 | 8,9,10 | |
| 12 | 3 | D | B | 45 | 4 | 4 | 6 | A | 60 | 10 | K | 75 | 12 | N | 40 | 8,11,13 | |
| 13 | 3 | A | C | 0 | 2 | 3 | 18 | D | 120 | 20 | K | 60 | 22 | L | 45 | 4,5,6 | |
| 14 | 4 | A | B | 30 | 2 | 2 | 16 | C | 45 | 17 | D | 60 | 20 | K | 0 | 4,5,6 | |
| 15 | 4 | C | D | 45 | 4 | 3 | 10 | A | 120 | 12 | B | 60 | 16 | L | 90 | 8,9,10 | |
| 16 | 4 | B | A | 45 | 2 | 3 | 12 | C | 180 | 16 | L | 60 | 8 | T | 90 | 4,5,10 | |
| 17 | 4 | C | B | 30 | 4 | 4 | 9 | A | 135 | 10 | L | 90 | 12 | D | 60 | 6,7,8 | |
| 18 | 4 | K | B | 30 | 6 | 4 | 20 | A | 120 | 25 | D | 45 | 18 | L | 90 | 8,9,10 | |
| 19 | 5 | A | B | 45 | 4 | 5 | 14 | K | 120 | 16 | D | 90 | 20 | L | 60 | 4,5,6 | |
| 20 | 5 | E | C | 90 | 3 | 4 | 8 | A | 150 | 10 | D | 90 | 15 | B | 75 | 6,7,10 | |
| 21 | 5 | B | A | 0 | 4 | 4 | 12 | K | 60 | 14 | L | 45 | 16 | C | 120 | 4,7,8 | |
| 22 | 5 | C | A | 30 | 3 | 5 | 9 | E | 120 | 12 | D | 90 | 14 | B | 60 | 6,9,10 | |
| 23 | 6 | A | B | 60 | 2 | 3 | 16 | K | 120 | 18 | D | 60 | 20 | L | 90 | 5,4,8 | |
| 24 | 6 | K | B | 30 | 4 | 3 | 10 | A | 180 | 12 | C | 120 | 16 | D | 45 | 7,6,8 | |
| 25 | 6 | C | B | 0 | 5 | 4 | 6 | A | 0 | 10 | L | 90 | 12 | D | 60 | 7,9,10 | |
| 26 | 6 | B | A | 30 | 3 | 4 | 8 | K | 135 | 12 | C | 60 | 14 | D | 120 | 7,8,9 | |
| 27 | 6 | L | A | 0 | 2 | 4 | 7 | C | 45 | 9 | D | 0 | 11 | B | 75 | 5,4,9 | |
| 28 | 7 | A | B | 30 | 4 | 2 | 14 | C | 60 | 16 | K | 135 | 10 | L | 0 | 6,7,8 | |
| 29 | 7 | C | B | 45 | 3 | 3 | 10 | E | 120 | 12 | D | 90 | 16 | N | 60 | 4,5,6 | |
| 30 | 7 | B | A | 0 | 1,5 | 2 | 12 | C | 150 | 10 | K | 60 | 14 | L | 0 | 4,12,10 | |

Продовження таблиці 1

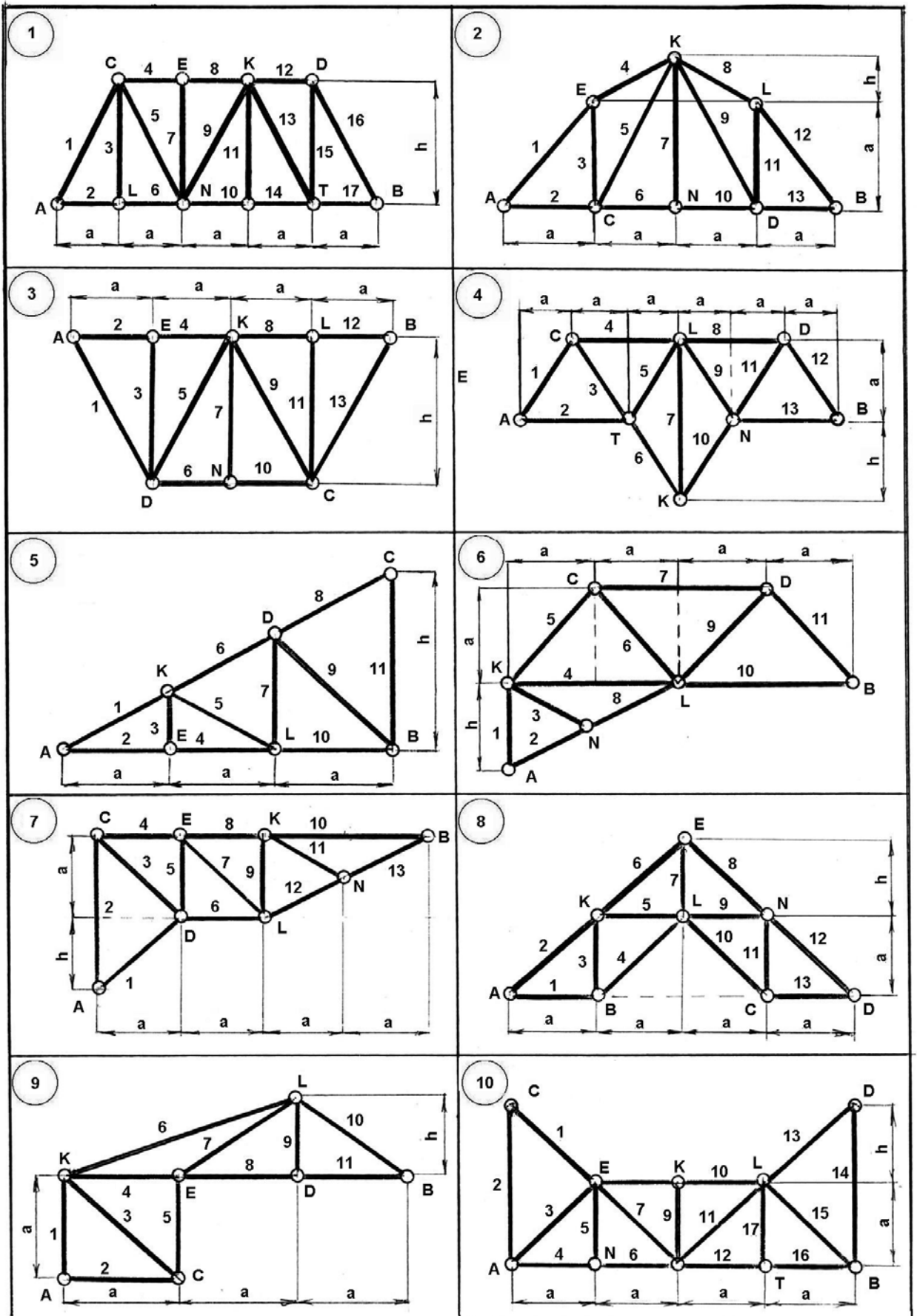
| Варіант | Схема | Тип опори і її місце знаходження | | | Розмір ферми | | Зосереджені сили | | | | | | | | | Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера |
|---------|-------|---|---|---------|--------------|-----|------------------|-------|------------|-------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|------------|---|
| | |  |  | β | a | h | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | \vec{F}_3 | | | |
| | | | | | | | F_1 | Точка | α_1 | F_2 | Точка прикладання | α_2 | F_3 | Точка прикладання | α_3 | |
| | | | | град | м | м | кН | | Град | кН | | Град | кН | | Град | |
| 31 | 7 | D | B | 30 | 4 | 3 | 5 | A | 0 | 10 | E | 120 | 12 | K | 150 | 4,5,9 |
| 32 | 8 | A | D | 45 | 3 | 2 | 20 | K | 135 | 25 | E | 60 | 21 | N | 45 | 4,5,6 |
| 33 | 8 | B | C | 0 | 4 | 3 | 15 | A | 150 | 20 | L | 45 | 16 | D | 60 | 6,7,9 |
| 34 | 8 | B | D | 30 | 5 | 4 | 22 | A | 90 | 21 | E | 135 | 18 | C | 45 | 8,9,10 |
| 35 | 8 | E | D | 0 | 2 | 1 | 18 | B | 0 | 20 | K | 150 | 22 | N | 60 | 9,10,11 |
| 36 | 8 | A | C | 0 | 2 | 3 | 16 | L | 45 | 18 | N | 90 | 20 | D | 100 | 3,4,7 |
| 37 | 9 | A | B | 30 | 3 | 2 | 15 | K | 75 | 16 | L | 120 | 18 | D | 90 | 6,7,8 |
| 38 | 9 | C | B | 45 | 4 | 4 | 12 | A | 105 | 14 | E | 90 | 16 | L | 60 | 4,6,7 |
| 39 | 9 | D | A | 0 | 5 | 3 | 8 | C | 75 | 10 | L | 60 | 12 | B | 80 | 5,8,9 |
| 40 | 9 | K | D | 30 | 6 | 4 | 9 | A | 65 | 11 | E | 45 | 13 | B | 60 | 7,8,5 |
| 41 | 10 | A | B | 30 | 2 | 3 | 20 | E | 70 | 21 | K | 45 | 22 | L | 60 | 6,7,8 |
| 42 | 10 | N | T | 0 | 4 | 3 | 12 | A | 60 | 13 | K | 70 | 14 | D | 180 | 10,11,12 |
| 43 | 10 | C | D | 90 | 5 | 2 | 13 | A | 120 | 14 | K | 60 | 15 | B | 45 | 5,7,8 |
| 44 | 10 | C | B | 45 | 3 | 3 | 21 | N | 60 | 22 | L | 120 | 23 | D | 150 | 10,17,16 |
| 45 | 10 | D | N | 0 | 2,5 | 3 | 15 | A | 45 | 16 | E | 90 | 17 | L | 120 | 13,15,16 |
| 46 | 11 | A | B | 30 | 2 | 1 | 16 | C | 60 | 14 | K | 45 | 12 | 0 | 60 | 6,8,9 |
| 47 | 11 | C | B | 0 | 4 | 2 | 8 | E | 45 | 10 | K | 60 | 12 | T | 135 | 4,5,6 |
| 48 | 11 | C | D | 30 | 3 | 3 | 10 | A | 180 | 12 | K | 60 | 14 | N | 0 | 8,9,11 |
| 49 | 11 | A | D | 45 | 4 | 5 | 12 | C | 90 | 16 | N | 0 | 8 | B | 60 | 5,6,8 |
| 50 | 11 | B | D | 0 | 2 | 2 | 8 | E | 135 | 10 | L | 0 | 6 | A | 60 | 9,11,12 |
| 51 | 12 | A | B | 30 | 2 | 1 | 10 | E | 90 | 12 | L | 0 | 7 | K | 45 | 4,5,6 |
| 52 | 12 | C | D | 0 | 3 | 2 | 6 | C | 60 | 8 | K | 45 | 9 | L | 0 | 6,7,8 |
| 53 | 12 | C | B | 60 | 4 | 1 | 16 | E | 60 | 14 | D | 90 | 12 | K | 0 | 4,5,8 |
| 54 | 12 | A | D | 0 | 3 | 1 | 12 | C | 30 | 13 | D | 45 | 14 | L | 90 | 7,5,6 |
| 55 | 13 | L | B | 30 | 2 | 3 | 8 | A | 60 | 10 | D | 45 | 12 | E | 75 | 4,5,7 |
| 56 | 13 | A | C | 0 | 3 | 3 | 22 | L | 135 | 24 | D | 120 | 20 | N | 60 | 6,7,9 |
| 57 | 13 | D | C | 30 | 4 | 2 | 18 | A | 120 | 20 | L | 90 | 22 | N | 135 | 7,8,9 |
| 58 | 13 | A | B | 45 | 2 | 2 | 11 | D | 60 | 12 | N | 130 | 14 | C | 90 | 4,5,6 |
| 59 | 13 | A | N | 90 | 3 | 2 | 10 | L | 120 | 14 | D | 45 | 16 | B | 60 | 5,7,8 |
| 60 | 14 | C | B | 30 | 4 | 3 | 12 | A | 120 | 14 | E | 45 | 10 | K | 90 | 5,6,7 |

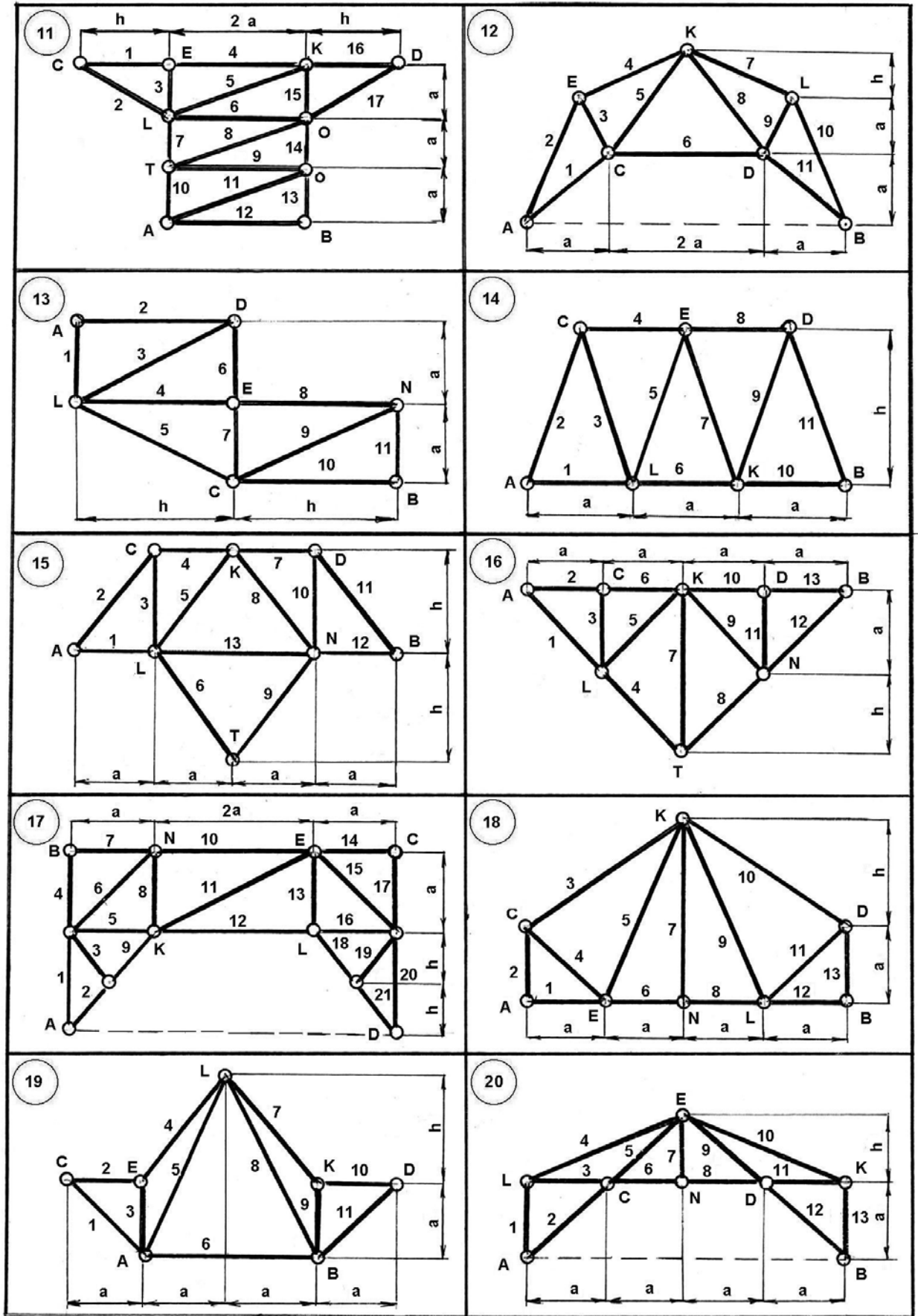
Продовження таблиці 1

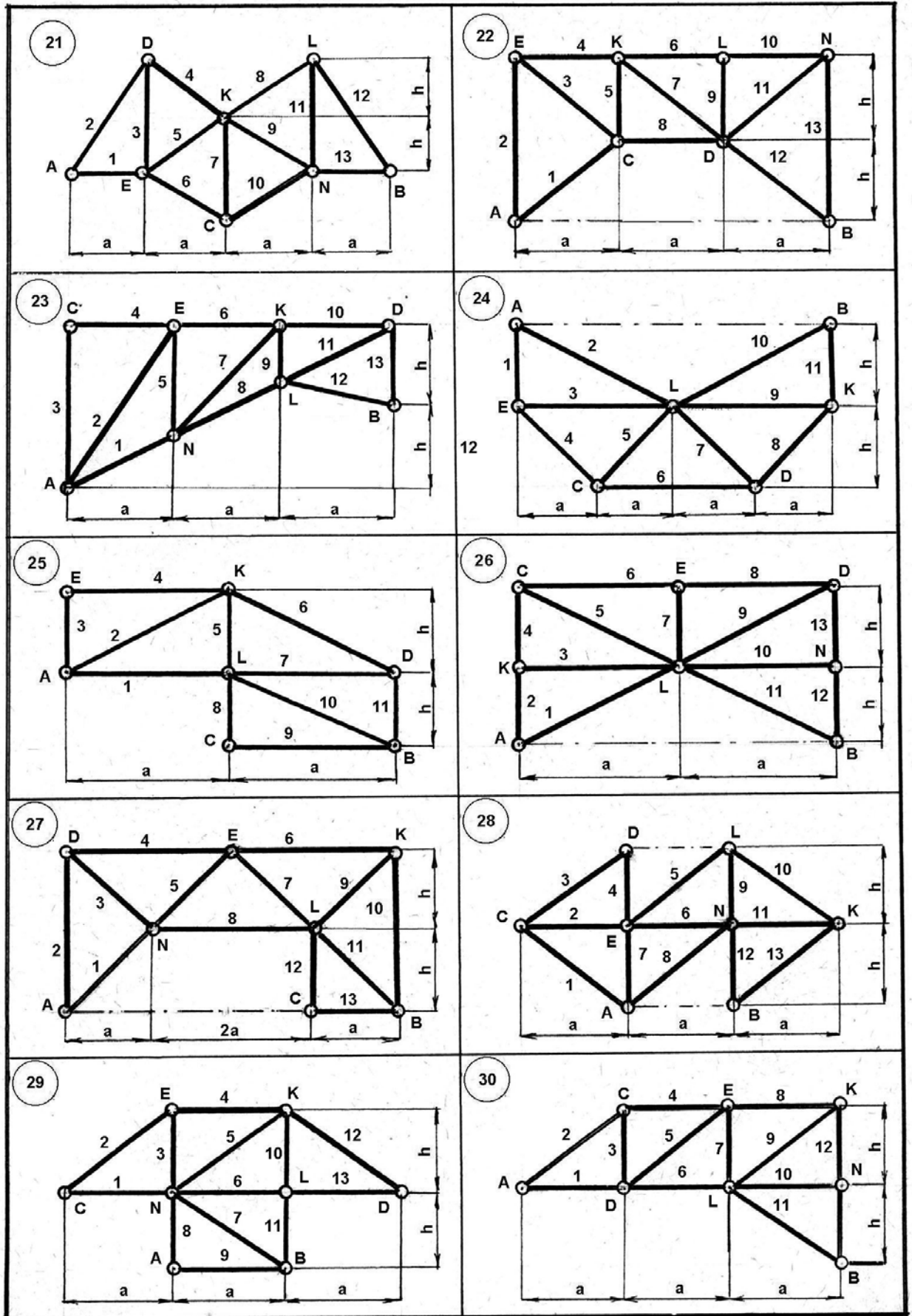
| Варіант | Схема | Тип опори і її місце знаходження | | Розмір ферми | | Зосереджені сили | | | | | | | | | | Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера |
|---------|-------|---|---|--------------|-----|------------------|----------------|-------------------|-------------|----------------|-------------------|-------------|----------------|-------------------|------------|---|
| | | | | | | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | \vec{F}_3 | | | | |
| | |  |  | β | A | h | F ₁ | Точка прикладання | α_1 | F ₂ | Точка прикладання | α_2 | F ₃ | Точка прикладання | α_3 | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 61 | 14 | A | B | 60 | 3 | 4 | 10 | C | 30 | 12 | D | 45 | 14 | K | 90 | 6,7,9 |
| 62 | 14 | L | B | 45 | 2 | 3 | 6 | A | 120 | 8 | E | 45 | 10 | D | 0 | 8,7,10 |
| 63 | 14 | A | D | 90 | 2,5 | 2,5 | 4 | C | 60 | 10 | L | 65 | 12 | K | 90 | 7,8,10 |
| 64 | 15 | A | B | 30 | 2 | 2 | 8 | C | 75 | 10 | D | 120 | 11 | T | 0 | 4,5,13 |
| 65 | 15 | L | B | 45 | 3 | 4 | 18 | K | 60 | 20 | B | 90 | 16 | A | 90 | 7,10,12 |
| 66 | 15 | A | T | 0 | 4 | 2 | 20 | C | 120 | 21 | D | 75 | 22 | B | 45 | 3,4,5 |
| 67 | 15 | C | B | 30 | 3 | 2 | 22 | A | 120 | 20 | K | 110 | 16 | N | 45 | 7,8,10 |
| 68 | 15 | L | D | 90 | 2 | 1 | 10 | A | 90 | 15 | C | 50 | 18 | T | 45 | 3,4,5 |
| 69 | 16 | A | B | 90 | 2 | 1 | 12 | C | 75 | 13 | D | 60 | 15 | T | 20 | 4,5,6 |
| 70 | 16 | T | B | 90 | 3 | 1 | 14 | A | 120 | 15 | K | 80 | 16 | L | 0 | 9,10,11 |
| 71 | 16 | L | N | 0 | 4 | 2 | 6 | C | 80 | 8 | D | 45 | 10 | T | 0 | 9,11,12 |
| 72 | 16 | C | B | 30 | 2 | 2 | 16 | A | 135 | 16 | D | 60 | 14 | N | 30 | 5,6,7 |
| 73 | 17 | A | D | 30 | 2 | 1 | 10 | B | 60 | 12 | E | 90 | 10 | L | 90 | 10,11,12 |
| 74 | 17 | B | D | 45 | 3 | 1 | 14 | N | 65 | 13 | C | 80 | 12 | K | 90 | 6,8,10 |
| 75 | 17 | N | D | 0 | 3 | 2 | 8 | B | 60 | 10 | C | 65 | 14 | L | 90 | 14,15,16 |
| 76 | 17 | K | L | 0 | 3 | 1,5 | 6 | B | 120 | 12 | E | 50 | 13 | A | 0 | 5,6,9 |
| 77 | 17 | K | D | 30 | 2 | 2 | 15 | A | 180 | 14 | N | 45 | 12 | L | 90 | 8,11,12 |
| 78 | 18 | A | B | 60 | 2 | 1 | 21 | C | 135 | 22 | K | 45 | 23 | D | 60 | 3,4,5 |
| 79 | 18 | C | B | 30 | 3 | 2 | 23 | A | 130 | 24 | D | 50 | 22 | L | 90 | 5,6,7 |
| 80 | 18 | K | L | 0 | 4 | 3 | 16 | A | 150 | 18 | B | 60 | 20 | N | 90 | 7,8,9 |
| 81 | 18 | A | D | 90 | 1 | 2 | 6 | C | 140 | 8 | K | 60 | 10 | L | 90 | 9,10,11 |
| 82 | 19 | C | D | 45 | 2 | 3 | 12 | A | 90 | 14 | K | 60 | 12 | L | 45 | 4,5,6 |
| 83 | 19 | A | B | 30 | 3 | 2 | 10 | C | 130 | 12 | L | 45 | 14 | D | 60 | 6,7,8 |
| 84 | 19 | A | D | 40 | 3 | 3 | 11 | E | 100 | 13 | K | 60 | 15 | B | 0 | 8,9,10 |
| 85 | 19 | E | D | 60 | 2 | 2 | 13 | C | 65 | 14 | L | 45 | 16 | B | 30 | 4,5,8 |
| 86 | 19 | C | D | 0 | 2 | 1 | 16 | A | 105 | 18 | E | 120 | 20 | L | 45 | 3,5,6 |
| 87 | 20 | C | D | 0 | 4 | 2 | 18 | A | 120 | 20 | E | 45 | 22 | K | 35 | 4,5,6 |
| 88 | 20 | L | B | 45 | 3 | 1 | 8 | C | 90 | 10 | D | 45 | 12 | E | 60 | 6,7,9 |
| 89 | 20 | A | K | 90 | 4 | 3 | 10 | L | 110 | 12 | C | 90 | 14 | B | 75 | 7,8,9 |
| 90 | 20 | A | B | 30 | 2 | 2 | 20 | L | 60 | 22 | E | 45 | 24 | N | 90 | 8,9,10 |

Продовження таблиці 1

| Варіант | Схема | Тип опори і її місце знаходження | | Розмір ферми | | | Зосереджені сили | | | | | | | | | Стержні, в яких зусилля визначаються по способу Ріттера |
|---------|-------|----------------------------------|----|--------------|-----|-----|------------------|-------------|-------------------|--------------------|-------------|-------------------|--------------------|-------------|-------------------|---|
| | | | | β | a | h | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | \vec{F}_3 | | | |
| | | град | м | | | | м | F_1 кН | Точка прикладання | α_1 град | F_2 кН | Точка прикладання | α_2 град | F_3 кН | Точка прикладання | |
| | | 91 | 21 | A | B | 30 | 3 | 2 | 10 | D | 60 | 12 | L | 45 | 9 | |
| 92 | 21 | A | C | 0 | 2 | 2 | 12 | D | 45 | 14 | B | 60 | 15 | N | 90 | 4,5,6 |
| 93 | 21 | D | B | 45 | 4 | 3 | 16 | A | 90 | 18 | K | 45 | 12 | L | 55 | 4,5,7 |
| 94 | 22 | A | B | 20 | 2,5 | 2,5 | 20 | E | 75 | 22 | L | 60 | 14 | C | 90 | 6,7,8 |
| 95 | 22 | C | B | 35 | 1,5 | 2 | 17 | K | 135 | 18 | N | 90 | 19 | D | 90 | 4,5,8 |
| 96 | 22 | C | D | 0 | 2 | 2 | 18 | A | 0 | 22 | E | 120 | 24 | L | 90 | 8,9,10 |
| 97 | 23 | A | B | 40 | 3 | 2 | 22 | N | 0 | 24 | C | 120 | 20 | K | 45 | 6,7,8 |
| 98 | 23 | N | B | 30 | 2 | 2 | 16 | A | 0 | 18 | E | 45 | 22 | D | 120 | 8,9,10 |
| 99 | 23 | C | L | 0 | 3 | 3 | 12 | A | 0 | 16 | K | 70 | 10 | D | 20 | 4,5,7 |
| 100 | 24 | A | B | 90 | 2 | 2,5 | 16 | L | 80 | 18 | K | 45 | 12 | D | 0 | 3,5,6 |
| 101 | 24 | A | D | 30 | 1,5 | 1,2 | 14 | L | 110 | 16 | B | 30 | 13 | K | 0 | 7,9,10 |
| 102 | 24 | L | C | 0 | 2 | 2 | 24 | A | 130 | 25 | B | 35 | 26 | K | 0 | 2,5,6 |
| 103 | 25 | A | B | 30 | 3 | 2 | 26 | E | 120 | 27 | K | 35 | 28 | D | 0 | 6,7,8 |
| 104 | 25 | A | C | 0 | 2 | 1 | 13 | K | 45 | 16 | D | 60 | 17 | B | 0 | 1,5,6 |
| 105 | 25 | C | B | 30 | 3 | 3 | 20 | A | 90 | 22 | K | 45 | 21 | D | 0 | 6,7,8 |
| 106 | 26 | A | B | 0 | 3 | 1,5 | 18 | K | 120 | 20 | E | 45 | 22 | D | 0 | 6,7,8 |
| 107 | 26 | B | A | 0 | 2 | 1,5 | 26 | C | 45 | 25 | L | 90 | 16 | N | 60 | 7,8,9 |
| 108 | 26 | L | B | 20 | 2,5 | 2 | 30 | A | 0 | 26 | C | 75 | 20 | D | 120 | 8,9,10 |
| 109 | 27 | A | C | 0 | 2 | 2 | 15 | D | 150 | 16 | E | 45 | 17 | K | 0 | 4,5,8 |
| 110 | 27 | B | A | 0 | 3 | 2,5 | 16 | N | 90 | 18 | E | 120 | 16 | K | 40 | 6,7,8 |
| 111 | 27 | D | B | 30 | 2 | 3 | 22 | A | 0 | 20 | N | 90 | 23 | E | 60 | 6,9,10 |
| 112 | 28 | A | B | 0 | 3 | 2 | 14 | C | 110 | 13 | D | 60 | 15 | K | 0 | 5,6,8 |
| 113 | 28 | D | L | 90 | 2 | 3 | 12 | C | 90 | 14 | L | 120 | 16 | B | 0 | 5,6,7 |
| 114 | 28 | D | B | 0 | 1,5 | 2 | 8 | C | 120 | 10 | L | 75 | 12 | K | 90 | 8,9,10 |
| 115 | 29 | C | D | 30 | 2 | 3 | 6 | E | 135 | 12 | K | 60 | 13 | B | 75 | 4,5,10 |
| 116 | 29 | A | B | 45 | 1,5 | 2 | 10 | C | 90 | 14 | E | 140 | 18 | D | 40 | 3,4,5 |
| 117 | 29 | C | B | 0 | 3 | 3 | 19 | A | 90 | 16 | K | 150 | 20 | D | 60 | 4,5,6 |
| 118 | 30 | A | B | 30 | 2 | 3 | 22 | D | 90 | 23 | E | 140 | 26 | N | 75 | 4,5,6 |
| 119 | 30 | N | A | 0 | 3 | 3 | 18 | C | 135 | 20 | K | 75 | 22 | B | 0 | 6,7,8 |
| 120 | 30 | D | B | 0 | 4 | 4 | 28 | A | 120 | 30 | E | 45 | 26 | N | 30 | 7,8,9 |







Вказівки до виконання РГР №1

$F_1 = 6 \text{ кН}$

Перевіримо, чи є дана ферма статично визначеною.

| | |
|-------------|--|
| $F_2=4$ кН | Кількість вузлів $n=8$. Кількість стержнів $\kappa=13$. Використаємо залежність (4) |
| $F_3=10$ кН | |
| | $13=2 \cdot 8 - 3$ |

Ця ферма статично визначена і жорстка.

1. Знайдемо реакції в'язей.

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї в'язями є опора в точці А (нерухомий шарнір) і опора в точці В (рухомий шарнір). Реакції будуть X_A, Y_A, \overline{R}_B .

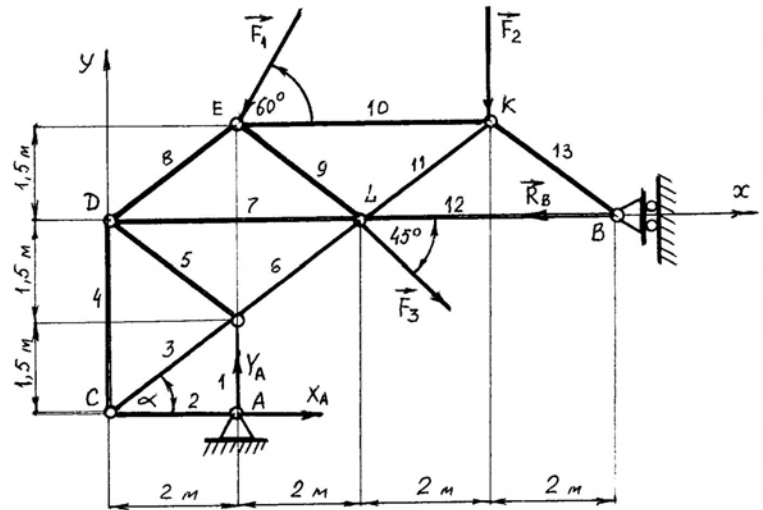


Рис. 18

Запишемо рівняння рівноваги ферми

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - F_1 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ - R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_2 - F_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\overline{F}_k) = 0; \quad F_1 \cos 60^\circ \cdot 4,5 - F_3 \cos 45^\circ \cdot 3 - F_3 \sin 45^\circ \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + R_B \cdot 3 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо:

$$X_A = 8,55 \text{ кН}; \quad Y_A = 16,27 \text{ кН}; \quad R_B = 12,62 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_{k=1}^n M_K(F_k) = X_A \cdot 4,5 - Y_A \cdot 4 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 4 + F_3 \cos 45^\circ \cdot 1,5 +$$

$$+ F_3 \sin 45^\circ \cdot 2 - R_B \cdot 1,5 = -0,05$$

2. Обчислення зусиль в стержнях ферми способом вирізання вузлів.

Розрахунок почнемо з вузла А, де сходяться два стержня 1 і 2. (рис. 19,а)

Запишемо рівняння рівноваги:

$$a) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - S_2 = 0; \quad X_A = S_2; \quad S_2 = 8,55 \text{ кН}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A + S_1 = 0; \quad S_1 = -Y_A; \quad S_1 = -16,27 \text{ кН}$$

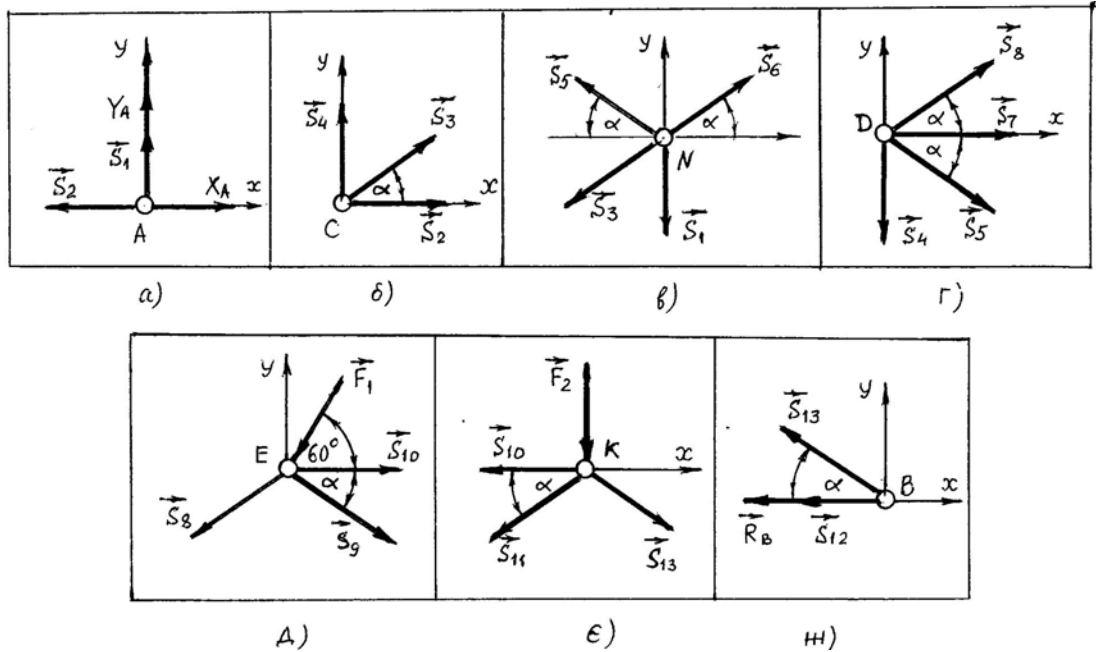


Рис. 19

Розглянемо рівновагу вузла С (рис. 19,б)

$$\text{б) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_2 + S_3 \cos \alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_4 + S_3 \sin \alpha = 0$$

Знайдемо значення $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$

$$CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ (м);}$$

$$\sin \alpha = \frac{AN}{CN} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{AC}{CN} = \frac{2}{2,5} = 0,8.$$

$$\sin \alpha = 0,6; \quad \cos \alpha = 0,8; \quad \alpha = 36,9^\circ.$$

Тоді із системи рівнянь б) маємо:

$$S_3 = -10,69 \text{ кН}; \quad S_4 = 6,41 \text{ кН}.$$

Для вузла N (рис. 19,в)

$$\text{в) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_6 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_6 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha + S_5 \sin \alpha - S_1 = 0$$

Маємо: $S_5 = -13,56 \text{ кН}; \quad S_6 = -24,25 \text{ кН}.$

Для вузла D (рис. 19,г)

$$\text{г) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_7 + S_8 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_8 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_4 = 0$$

Маємо: $S_8 = -2,88 \text{ кН}; \quad S_7 = 13,15 \text{ кН}.$

Для вузла Е (рис. 19,д)

$$\begin{aligned} \text{д) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; & S_{10} + S_9 \cos \alpha - S_8 \cos \alpha - F_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0; & -F_1 \sin 60^\circ - S_9 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Маємо: $S_9 = -5,78$ кН; $S_{10} = +5,32$ кН.

Для вузла К (рис. 19,е)

$$\begin{aligned} \text{е) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; & -S_{10} - S_{11} \cos \alpha + S_{13} \cos \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0; & -F_2 - S_{11} \sin \alpha - S_{13} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Маємо: $S_{13} = 0$ кН; $S_{11} = -6,65$ кН.

Для вузла В (рис. 19,ж)

$$\begin{aligned} \text{ж) } \sum_{k=1}^n F_{k_x} &= 0; & -R_B - S_{12} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{k_y} &= 0; & S_{13} \sin \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Маємо: $S_{12} = -12,62$ кН.

Для перевірки розрахунків доцільно для кожного вузла побудувати багатокутник сил. На рисунку 20 показані багатокутники сил для вузлів, що розглядалися.

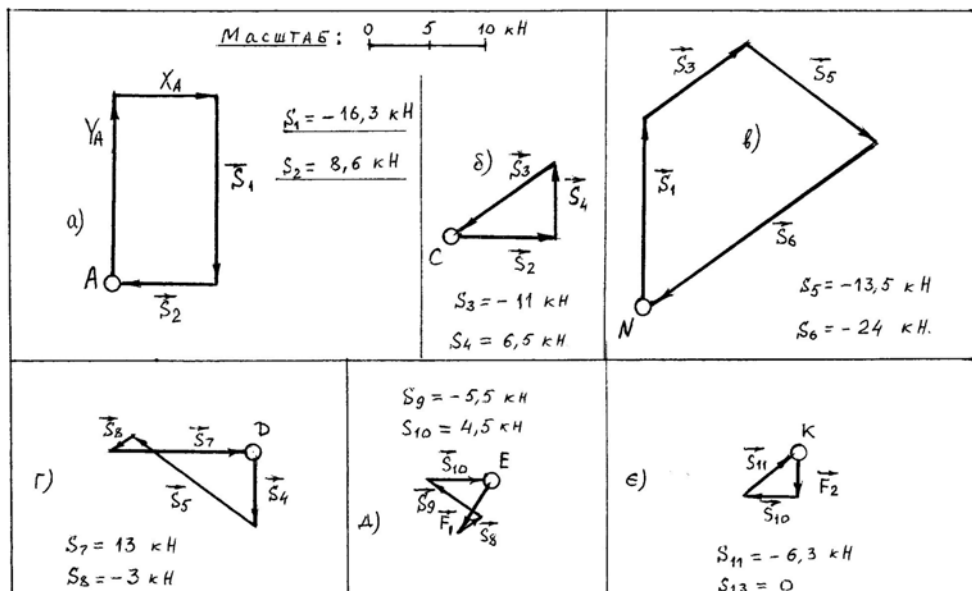


Рис.20

3). По способу Ріттера знайдемо зусилля в стержнях 6, 7, 8.

Для цього розріжемо ферму по цих стержнях і розглянемо, наприклад, ліву половину ферми. Дія правої частини ферми на ліву передається по стержням 6, 7, 8. Реакції цих стержнів спрямуємо від вузлів по стержням (рис. 21).

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки L

$$\sum_{k=1}^n M_L(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_8 \sin \alpha \cdot 4 - Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0$$

Маємо: $S_8 = -2,87$ кН

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки D.

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0;$$

$$S_6 \cos \alpha \cdot 1,5 + S_6 \sin \alpha \cdot 2 + Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0$$

Маємо: $S_6 = -24,24$ кН.

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки N.

$$\sum_{k=1}^n M_N(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_7 \cdot 1,5 - S_8 \cos \alpha \cdot 1,7 - S_8 \sin \alpha \cdot 2 + X_A \cdot 1,5 = 0$$

Маємо: $S_7 = 13,14$ кН.

Ці результати добре узгоджуються з результатами, що отримані за допомогою способу вирізання вузлів. Знайдені зусилля зведемо в одну таблицю 2

Таблиця 2

| | | | | | | | | |
|---------------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|------|
| Номер стержня | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Знак сили | - | + | - | + | - | - | + | - |
| Сила, кН | 16,27 | 8,55 | 10,69 | 6,41 | 13,56 | 24,25 | 13,15 | 2,88 |

| | | | | |
|------|------|------|-------|----|
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| - | + | - | - | |
| 5,78 | 5,32 | 6,65 | 12,62 | 0 |

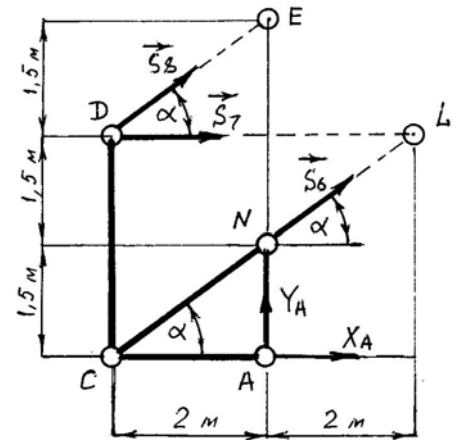


Рис.21

РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА №2
«Визначення реакцій опор складеної конструкції»

Визначити реакції опор і зусилля в проміжному шарнірі для конструкції, що складається з двох тіл.

Варіанти завдань РГР №2

Схеми конструкцій показані на рисунках. Необхідні числові дані наведені в таблицях. На схемах не показані місцезнаходження опор та точки прикладання зосереджених сил, пар сил, та ділянки, де розміщене розподілене навантаження. Ці дані беруться з таблиць. На рисунку 22 показані напрями дії сил в залежності від кута α , а також показаний напрям дії зосередженого навантаження і пари сил. Задана пара сил з моментом M діє завжди проти ходу годинникової стрілки.

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ$$

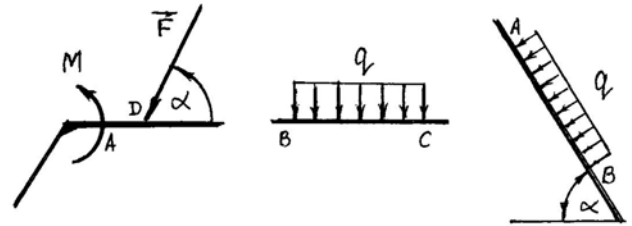


Рис.22

Для даного варіанту по даним, що приведені в таблиці, необхідно побудувати конструкцію з опорами і діючими силами.

Для ілюстрації на рисунку 23 побудована конструкція з опорами і діючими на неї силами згідно варіанту 13.

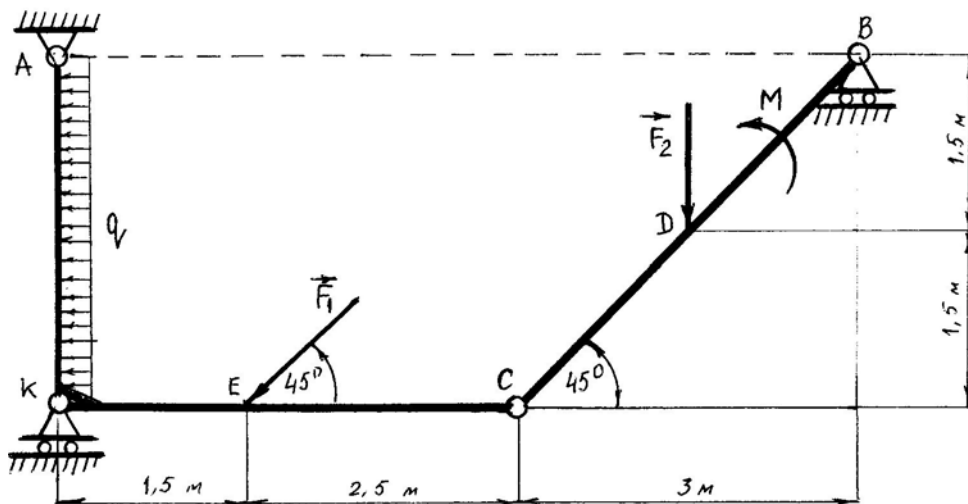








Рис. 23


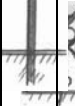

Таблиця 3

| Варіант | Схема | ОПОРА | | | | Зосереджені сили | | | | | | Пара сил | | Розподілене навантаження | |
|---------|-------|---|---|---|---------|------------------|-------------------|------------|-------|-------------------|------------|----------|---------|--------------------------|---------|
| | | Тип, місце знаходження | | | | F_1 | | | F_2 | | | М | Ділянка | q | Ділянка |
| | |  |  |  | β | F_1 | Точка прикладання | α_1 | F_2 | Точка прикладання | α_2 | | | | |
| | | | | | Град | кН | | град | кН | | град | кНм | кН/м | | |
| 1 | 1 | A,B | - | - | - | 5 | E | 30 | 6 | K | 45 | 4 | CL | 2 | EC |
| 2 | 1 | - | B | A | 30 | 10 | E | 45 | 15 | D | 60 | 5 | LK | 4 | CL |
| 3 | 1 | - | D | A | 0 | 12 | B | 60 | 14 | L | 45 | 6 | AE | 3 | EC |
| 4 | 2 | - | A | B | 45 | 8 | D | 60 | 4 | L | 45 | 4 | CB | 4 | AL |
| 5 | 2 | A,B | - | - | - | 4 | D | 45 | 8 | K | 60 | 6 | DL | 6 | CB |
| 6 | 2 | D | - | A,B | 0 | 10 | K | 30 | 12 | L | 45 | 4 | AL | 3 | CB |
| 7 | 3 | A,B | - | - | - | 7 | K | 45 | 8 | E | 30 | 6 | EC | 4 | BL |
| 8 | 3 | - | A | B | 30 | 5 | E | 60 | 4 | L | 45 | 4 | KD | 6 | BL |
| 9 | 3 | - | B | A | 0 | 4 | D | 30 | 5 | L | 60 | 6 | CL | 4 | KD |
| 10 | 4 | A,B | - | - | - | 12 | L | 30 | 10 | K | 45 | 8 | CL | 6 | AC |
| 11 | 4 | - | A | B | 30 | 10 | L | 60 | 12 | K | 0 | 4 | LD | 3 | BD |
| 12 | 4 | - | B | A | 30 | 8 | D | 30 | 9 | L | 90 | 6 | BK | 4 | AC |
| 13 | 5 | A | - | K,B | 30 | 4 | L | 45 | 5 | D | 90 | 6 | DB | 4 | AK |
| 14 | 5 | - | A | B | 30 | 3 | L | 60 | 4 | D | 120 | 5 | CD | 5 | LC |
| 15 | 5 | - | B | A | 30 | 6 | K | 120 | 5 | D | 0 | 4 | AK | 3 | KL |
| 16 | 6 | A,B | - | - | - | 8 | D | 45 | 7 | E | 90 | 6 | CD | 5 | KB |
| 17 | 6 | - | A | B | 45 | 10 | D | 0 | 9 | E | 60 | 8 | CE | 7 | AD |
| 18 | 6 | - | B | A | 30 | 12 | E | 90 | 10 | K | 45 | 12 | EK | 8 | BK |
| 19 | 7 | A,B | - | - | - | 4 | K | 180 | 3 | L | 0 | 2 | KC | 2 | BL |
| 20 | 7 | - | A | B | 30 | 6 | D | 0 | 4 | L | 45 | 2 | CL | 2 | KD |
| 21 | 7 | - | B | A | 0 | 8 | K | 45 | 6 | L | 30 | 4 | AD | 4 | BL |
| 22 | 8 | D,B | - | - | - | 5 | A | 60 | 4 | L | 45 | 3 | BK | 2 | AD |
| 23 | 8 | - | B | D | 0 | 16 | D | 45 | 14 | L | 0 | 10 | CL | 8 | DC |
| 24 | 8 | A,B | - | - | - | 20 | D | 30 | 18 | K | 45 | 16 | DC | 10 | BK |
| 25 | 9 | A | - | B,D | 0 | 18 | E | 30 | 16 | L | 45 | 10 | CD | 6 | KL |
| 26 | 9 | B | - | A,D | 0 | 8 | E | 0 | 6 | L | 90 | 6 | CD | 4 | LC |
| 27 | 9 | D | - | A,B | 0 | 6 | E | 45 | 4 | K | 30 | 2 | CD | 2 | BC |
| 28 | 10 | A,D | - | - | - | 4 | L | 45 | 3 | B | 30 | 2 | CD | 2 | AL |
| 29 | 10 | D | - | A,B | 0 | 5 | L | 60 | 0 | - | - | 4 | AE | 4 | CD |
| 30 | 10 | B | - | A,D | 0 | 12 | L | 45 | 0 | - | - | 10 | CD | 8 | AL |




Продовження таблиці 3

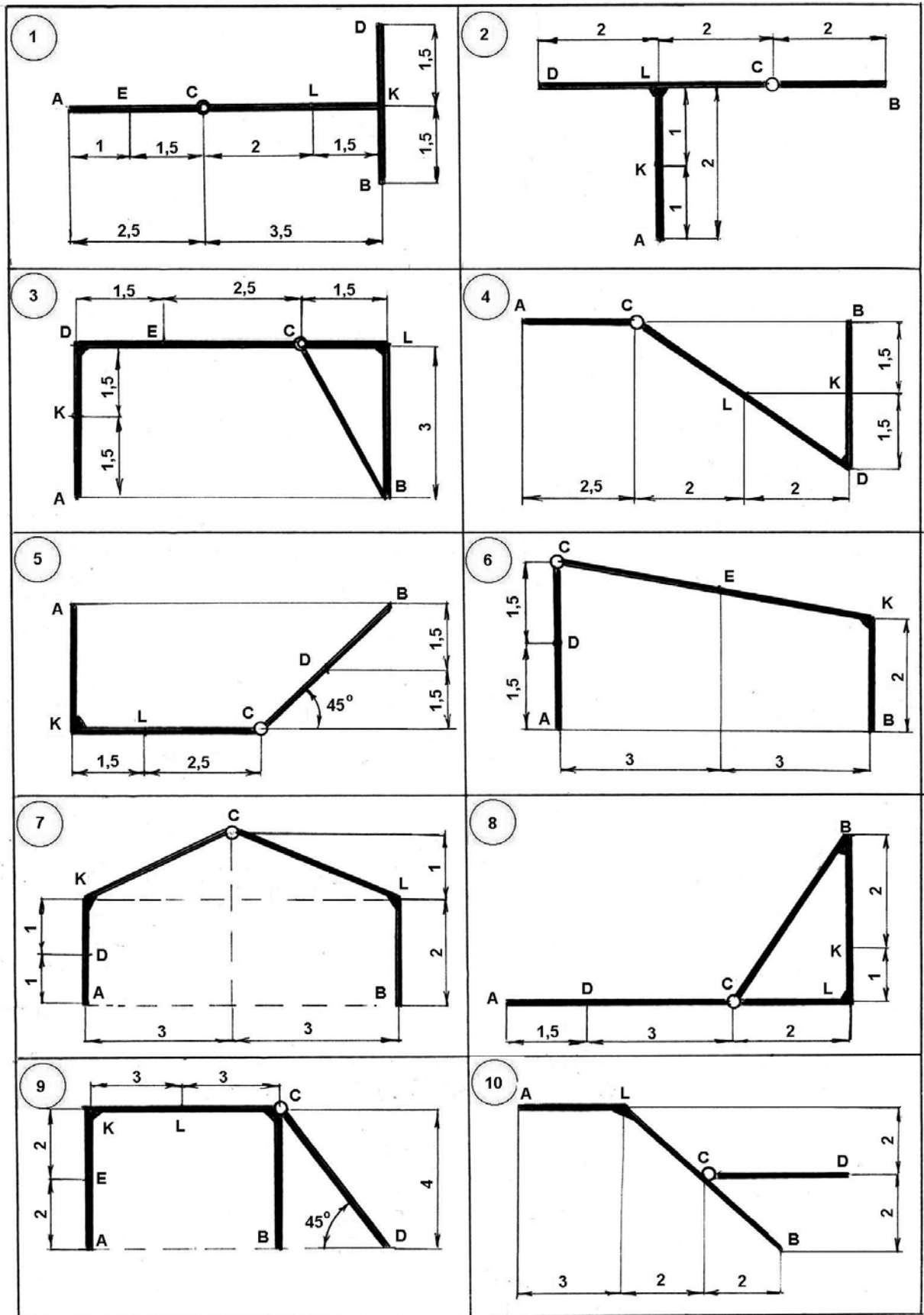
| Варіант | Схема | ОПОРА | | | | Зосереджені сили | | | | | | Пара сил | | Розподілене навантаження | |
|---------|-------|---|---|---|-------------------|------------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|------------|----------|---------|--------------------------|---------|
| | | Тип, місце знаходження | | | | | | | | | | М | Ділянка | q | Ділянка |
| | |  |  |  | β | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | | | | |
| | | | | | | F_1 | Точка прикладання | α_1 | F_2 | Точка прикладання | α_2 | | | | |
| Град | кН | Точка прикладання | град | кН | Точка прикладання | град | кНм | Ділянка | кН/м | Ділянка | | | | | |
| 31 | 11 | A,B | - | - | - | 8 | E | 60 | 6 | D | 45 | 4 | CD | 4 | BL |
| 32 | 11 | - | B | A | 0 | 10 | E | 120 | 8 | L | 90 | 6 | DL | 6 | AE |
| 33 | 11 | - | A | B | 30 | 14 | E | 45 | 12 | D | 60 | 8 | BL | 4 | EC |
| 34 | 12 | A,B | - | - | - | 4 | K | 135 | 5 | L | 60 | 6 | AE | 3 | KC |
| 35 | 12 | L | - | A,B | 0 | 2 | E | 90 | 3 | D | 180 | 4 | KC | 3 | DL |
| 36 | 12 | - | A | B | 60 | 7 | E | 45 | 8 | L | 60 | 3 | AE | 4 | EK |
| 37 | 13 | - | D | B | 45 | 6 | A | 60 | 7 | L | 30 | 5 | CL | 4 | CK |
| 38 | 13 | A,B | - | - | - | 5 | E | 180 | 6 | K | 30 | 4 | CK | 6 | KL |
| 39 | 13 | - | A | B | 30 | 10 | D | 45 | 12 | L | 60 | 8 | CE | 4 | AC |
| 40 | 14 | D | - | A,B | 0 | 20 | E | 120 | 18 | K | 45 | 10 | EL | 8 | CD |
| 41 | 14 | A | - | B,D | 0 | 18 | L | 90 | 16 | K | 60 | 8 | BK | 6 | AE |
| 42 | 14 | B | - | A,D | 30 | 12 | E | 120 | 10 | L | 45 | 6 | EA | 4 | CD |
| 43 | 15 | - | A | D | 30 | 8 | E | 45 | 6 | B | 60 | 7 | NC | 4 | EL |
| 44 | 15 | A | - | D,B | 0 | 17 | N | 60 | 15 | L | 90 | 10 | EC | 6 | AN |
| 45 | 15 | - | D | A | 30 | 10 | E | 90 | 12 | L | 60 | 8 | NC | 14 | EL |
| 46 | 16 | A | - | B,D | 0 | 8 | K | 60 | 10 | L | 90 | 12 | KC | 10 | DL |
| 47 | 16 | - | B | D | 45 | 4 | E | 120 | 6 | L | 45 | 10 | BC | 6 | AK |
| 48 | 16 | - | D | B | 0 | 16 | A | 60 | 10 | L | 135 | 6 | CL | 4 | DL |
| 49 | 17 | A,B | - | - | - | 20 | L | 90 | 16 | D | 60 | 12 | AE | 10 | CD |
| 50 | 17 | - | A | B | 60 | 30 | E | 60 | 25 | D | 45 | 10 | AC | 6 | LE |
| 51 | 17 | - | B | A | 0 | 16 | L | 120 | 18 | D | 8 | 15 | CB | 7 | CD |
| 52 | 18 | D | - | A,B | 0 | 4 | L | 90 | 6 | K | 60 | 8 | LC | 6 | AL |
| 53 | 18 | - | A | B | 30 | 12 | K | 120 | 10 | D | 45 | 6 | AL | 4 | CK |
| 54 | 18 | - | B | A | 45 | 14 | L | 90 | 12 | N | 45 | 10 | DN | 8 | KN |
| 55 | 19 | K | - | A,B | 0 | 22 | E | 60 | 20 | N | 45 | 15 | AL | 16 | EC |
| 56 | 19 | - | A | B | 30 | 18 | K | 120 | 16 | D | 45 | 14 | AK | 14 | CD |
| 57 | 19 | - | B | A | 45 | 16 | K | 45 | 14 | N | 60 | 12 | DE | 10 | DN |
| 58 | 20 | L,B | - | - | - | 6 | E | 120 | 8 | D | 45 | 10 | LC | 6 | BK |
| 59 | 20 | - | B | A | 0 | 12 | L | 180 | 10 | K | 45 | 8 | AC | 4 | AL |
| 60 | 20 | - | L | D | 0 | 10 | A | 120 | 6 | B | 45 | 4 | LC | 6 | CD |

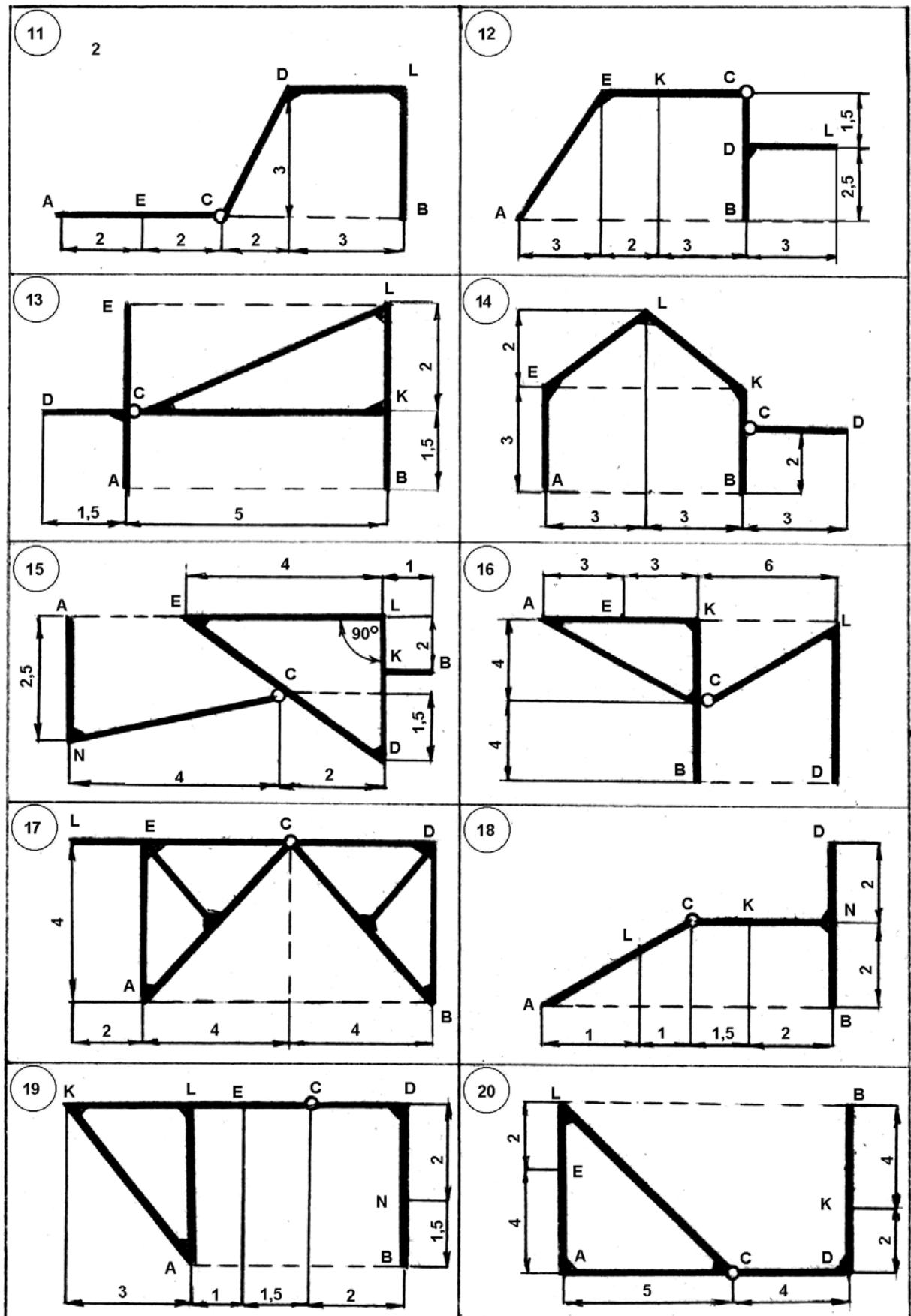
Продовження таблиці 3

| Варіант | Схема | ОПОРА | | | | Зосереджені сили | | | | | | Пара сил | | Розподілене навантаження | |
|---------|-------|---|---|---|------------------|------------------|------------------|----------------|----------------|------------------|----------------|----------|---------|--------------------------|---------|
| | | Тип, місце знаходження | | | | | | | | | | М | Ділянка | q | Ділянка |
| | |  |  |  | β | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | | | | |
| | | | | | | F ₁ | Точка прикладанн | α ₁ | F ₂ | Точка прикладанн | α ₂ | | | | |
| град | кН | Точка прикладанн | град | кН | Точка прикладанн | град | кНм | Ділянка | кН/м | Ділянка | | | | | |
| 61 | 21 | A,B | - | - | - | 8 | L | 60 | 6 | D | 135 | 10 | AC | 6 | BN |
| 62 | 21 | A | - | L,B | 0 | 6 | K | 45 | 8 | N | 60 | 12 | AC | 10 | LK |
| 63 | 21 | - | A | B | 30 | 10 | L | 90 | 12 | D | 45 | 8 | BN | 6 | CD |
| 64 | 22 | A,B | - | - | - | 4 | K | 90 | 6 | D | 45 | 10 | AC | 8 | DL |
| 65 | 22 | - | A | B | 45 | 14 | K | 120 | 12 | L | 0 | 6 | BD | 7 | AC |
| 66 | 22 | - | B | A | 30 | 10 | K | 60 | 12 | L | 90 | 10 | CL | 6 | BD |
| 67 | 23 | A,B | - | - | - | 8 | L | 90 | 10 | E | 60 | 12 | BD | 8 | CD |
| 68 | 23 | - | A | B | 40 | 10 | L | 0 | 12 | D | 60 | 10 | KD | 10 | ED |
| 69 | 23 | - | B | A | 0 | 12 | L | 180 | 14 | E | 45 | 12 | CE | 8 | KD |
| 70 | 24 | A,B | - | - | - | 4 | E | 60 | 6 | D | 45 | 8 | LC | 6 | CD |
| 71 | 24 | - | A | B | 90 | 16 | L | 75 | 10 | D | 60 | 10 | EL | 8 | AE |
| 72 | 24 | - | B | A | 30 | 14 | E | 45 | 12 | D | 60 | 12 | LC | 6 | CD |
| 73 | 25 | A,B | - | - | - | 20 | K | 45 | 22 | L | 60 | 10 | CD | 8 | AL |
| 74 | 25 | - | B | A | 0 | 22 | K | 60 | 18 | D | 45 | 12 | BK | 10 | AC |
| 75 | 25 | - | A | B | 0 | 12 | L | 75 | 16 | K | 60 | 10 | KC | 8 | CD |
| 76 | 26 | A,B | - | - | - | 15 | N | 60 | 14 | D | 75 | 8 | CN | 6 | LD |
| 77 | 26 | - | A | B | 30 | 10 | N | 75 | 12 | L | 30 | 6 | LB | 4 | CL |
| 78 | 26 | - | B | A | 45 | 12 | N | 60 | 14 | D | 135 | 4 | CN | 6 | LD |
| 79 | 27 | A,B | - | - | - | 5 | B | 60 | 6 | L | 90 | 7 | CB | 6 | DC |
| 80 | 27 | - | A | B | 60 | 20 | K | 75 | 22 | D | 60 | 6 | CB | 12 | DC |
| 81 | 27 | - | B | A | 0 | 25 | K | 135 | 20 | D | 30 | 16 | KL | 10 | CB |
| 82 | 28 | A,B | - | - | - | 16 | E | 60 | 15 | L | 75 | 12 | CL | 10 | BD |
| 83 | 28 | - | A | B | 30 | 13 | E | 45 | 14 | L | 60 | 10 | AE | 12 | LD |
| 84 | 28 | - | B | A | 45 | 9 | E | 60 | 10 | L | 135 | 12 | EC | 10 | BL |
| 85 | 29 | A | - | K,B | 0 | 13 | D | 60 | 12 | E | 45 | 10 | NK | 12 | CB |
| 86 | 29 | A,B | - | - | - | 16 | D | 135 | 14 | K | 45 | 9 | AE | 10 | CB |
| 87 | 29 | - | B | A | 30 | 8 | D | 45 | 10 | K | 90 | 12 | CB | 10 | CB |
| 88 | 30 | D | - | A,B | 0 | 12 | K | 60 | 10 | L | 90 | 14 | AL | 16 | CK |
| 89 | 30 | - | A | B | 0 | 8 | D | 60 | 12 | L | 90 | 16 | CL | 14 | KB |
| 90 | 30 | - | D | A | 0 | 6 | B | 60 | 8 | L | 90 | 10 | CK | 6 | KB |

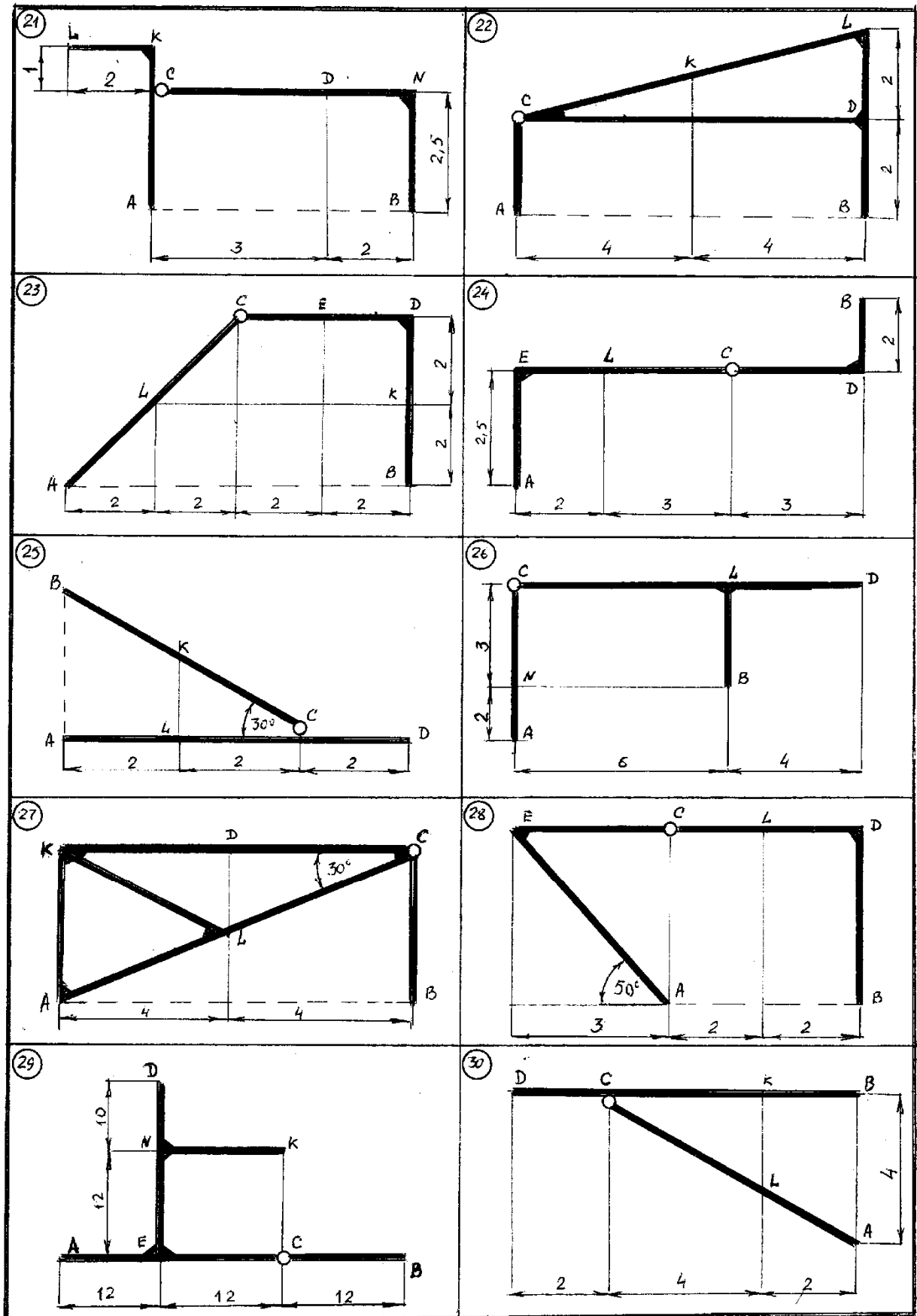
Продовження таблиці 3

| Варіант | Схема | ОПОРА | | | | Зосереджені сили | | | | | | Пара сил | | Розподілене навантаження | |
|---------|-------|---|---|---|---------|------------------|-------------------|------------|-------------|-------------------|------------|----------|---------|--------------------------|---------|
| | | Тип, місце знаходження | | | | | | | | | | М | Ділянка | q | Ділянка |
| | |  |  |  | β | \vec{F}_1 | | | \vec{F}_2 | | | | | | |
| | | | | | | F_1 | Точка прикладання | α_1 | F_2 | Точка прикладання | α_2 | | | | |
| град | кН | град | кН | град | кН | град | кН | град | кНм | кН/м | Ділянка | | | | |
| 91 | 31 | A | - | B,D | 0 | 16 | K | 75 | 18 | N | 0 | 10 | ND | 4 | LB |
| 92 | 31 | - | D | B | 30 | 10 | A | 135 | 12 | N | 90 | 14 | KL | 2 | ND |
| 93 | 31 | - | A | D | 0 | 12 | B | 60 | 10 | N | 130 | 8 | CN | 4 | AK |
| 94 | 32 | - | A | B | 30 | 10 | D | 30 | 8 | K | 120 | 4 | NK | 6 | LC |
| 95 | 32 | A,B | - | - | - | 16 | L | 140 | 12 | N | 45 | 6 | AD | 4 | NB |
| 96 | 32 | B | - | D,L | 0 | 18 | A | 150 | 16 | K | 45 | 10 | DL | 5 | LC |
| 97 | 33 | - | B | A | 0 | 17 | L | 60 | 19 | K | 90 | 12 | DK | 6 | CB |
| 98 | 33 | B,A | - | - | - | 13 | D | 50 | 14 | L | 45 | 8 | DL | 3 | AD |
| 99 | 33 | B | - | A,K | 0 | 10 | N | 45 | 12 | D | 120 | 11 | LK | 4 | DL |
| 100 | 34 | A | - | B,K | 0 | 14 | N | 60 | 16 | D | 135 | 9 | AL | 6 | DK |
| 101 | 34 | - | A | B | 45 | 20 | L | 30 | 22 | K | 0 | 16 | CK | 10 | DB |
| 102 | 34 | A,B | - | - | - | 21 | N | 130 | 16 | D | 90 | 10 | DB | 3 | NC |
| 103 | 35 | A,D | - | - | - | 15 | B | 75 | 17 | K | 30 | 12 | CK | 3 | KL |
| 104 | 35 | - | B | D | 30 | 19 | A | 120 | 16 | L | 0 | 10 | LD | 4 | AC |
| 105 | 35 | - | A | D | 45 | 12 | B | 60 | 13 | K | 0 | 11 | CK | 3 | CK |
| 106 | 36 | A,B | - | - | - | 9 | L | 70 | 12 | N | 150 | 10 | CD | 2 | KB |
| 107 | 36 | - | A | B | 30 | 21 | K | 110 | 18 | N | 60 | 12 | LC | 3 | NC |
| 108 | 36 | - | D | A | 0 | 8 | B | 120 | 12 | L | 40 | 11 | LK | 4 | AN |
| 109 | 37 | A,B | - | - | - | 17 | D | 135 | 16 | L | 40 | 15 | CD | 3 | KL |
| 110 | 37 | - | B | A | 0 | 13 | K | 60 | 14 | L | 135 | 16 | AC | 3 | LB |
| 111 | 37 | - | A | B | 30 | 10 | D | 0 | 13 | K | 45 | 15 | CD | 4 | KL |
| 112 | 38 | A,B | - | - | - | 6 | D | 45 | 9 | K | 90 | 11 | CB | 6 | LC |
| 113 | 38 | - | A | B | 30 | 12 | D | 0 | 13 | K | 135 | 10 | CK | 6 | NC |
| 114 | 38 | - | A | K | 0 | 14 | N | 75 | 15 | B | 90 | 6 | CB | 4 | CK |
| 115 | 39 | A,B | - | - | - | 16 | D | 70 | 14 | T | 0 | 13 | NB | 3 | KC |
| 116 | 39 | - | A | B | 45 | 11 | K | 120 | 12 | N | 90 | 10 | CT | 4 | DK |
| 117 | 39 | - | B | A | 30 | 9 | L | 45 | 10 | T | 0 | 12 | NT | 2 | DC |
| 118 | 40 | - | B | D | 30 | 14 | A | 75 | 13 | K | 90 | 10 | LB | 2 | AB |
| 119 | 40 | D,B | - | - | - | 16 | A | 60 | 15 | K | 135 | 12 | AL | 2 | LB |
| 120 | 40 | - | D | B | 30 | 10 | A | 120 | 12 | K | 90 | 8 | LB | 2 | CD |

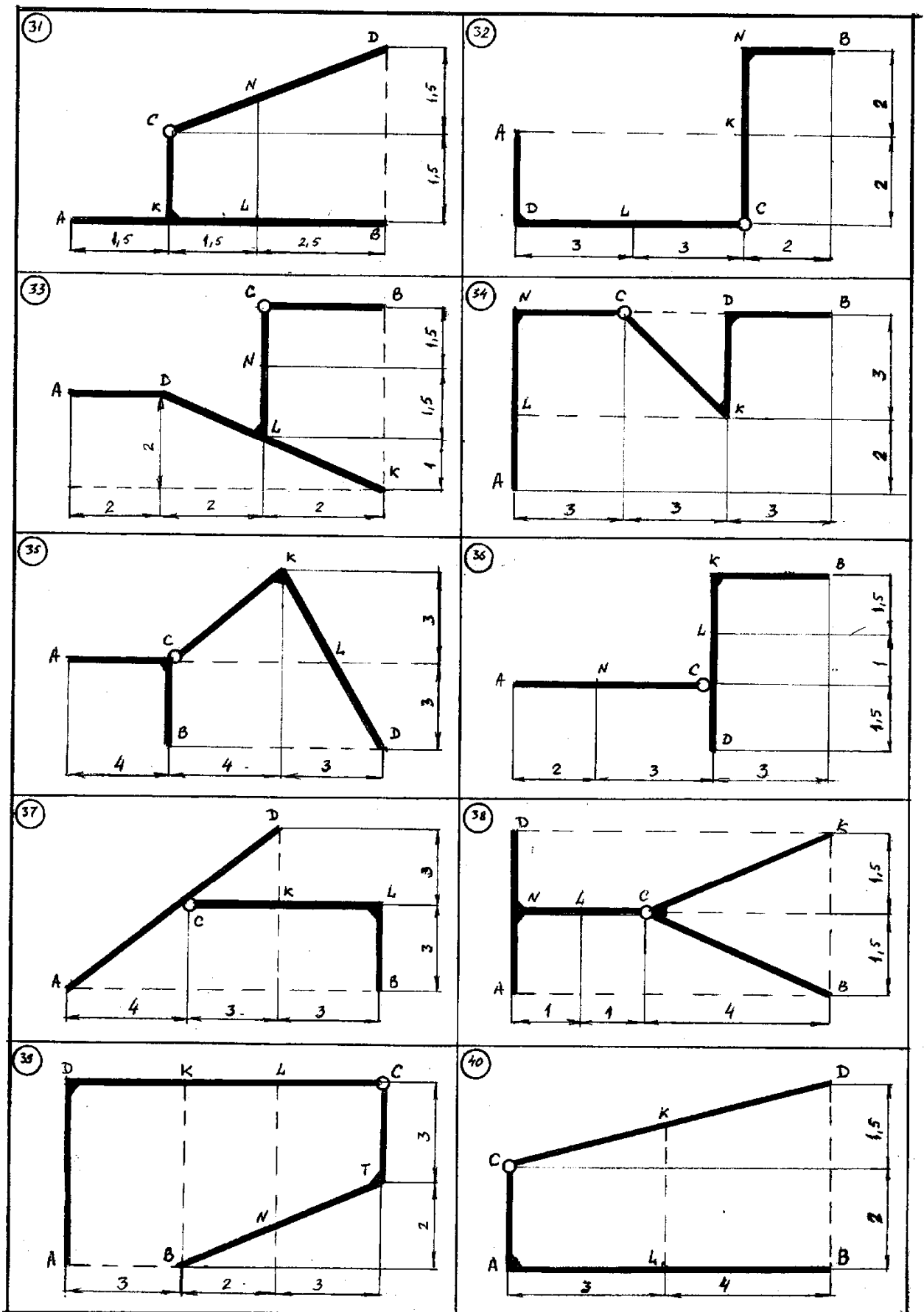




Схеми до варіантів



Схеми до варіантів



Вказівки до виконання РГР №2

Розглянемо конструкцію, що складається з двох невагомих балок АС і ВС, які з'єднані між собою шарніром С. (рис. 23) Розміри (в метрах) вказані на рисунку.

Визначити реакції опор А і В і зусилля, що діє в шарнірі С, якщо $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 8$ кН, $q = 3$ кН/м, $M = 8$ кНм.

Розглянемо рівновагу конструкції АСВ в цілому. Для неї в'язями є опори в точках А і В (нерухомі шарніри). Маємо чотири невідомих X_A, Y_A, X_B, Y_B (рис. 23). Тому цю конструкцію розріжемо по шарніру С на дві балки АС і СВ, і розглянемо рівновагу балки СВ (рис. 23) і балки АС (рис. 23).

Розподілене навантаження замінимо зосередженою силою

$$Q = q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6 \text{ (кН)}.$$

Розглянемо рівновагу балки СВ (рис. 23)

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_B + X_C = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_B - F_2 + Y_C = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad M - F_2 \cdot 1 - X_B \cdot 2 + Y_B \cdot 2 = 0 \quad (3)$$

Розглянемо рівновагу балки АС (рис.23)

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - X'_C - F_1 \cos 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A - Q - F_1 \sin 60^\circ - Y'_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 1 = 0 \quad (6)$$

$$X_C = X'_C; \quad Y_C = Y'_C$$

Розв'язуючи ці рівняння, маємо: $X_A = -10,4$ кН; $Y_A = 5,8$ кН;

$X_B = 13,4$ кН; $Y_B = 13,4$ кН; $X_C = \pm 13,4$ кН; $Y_C = \pm 5,4$ кН

Перевірка: розглянемо рівновагу конструкції АСВ.

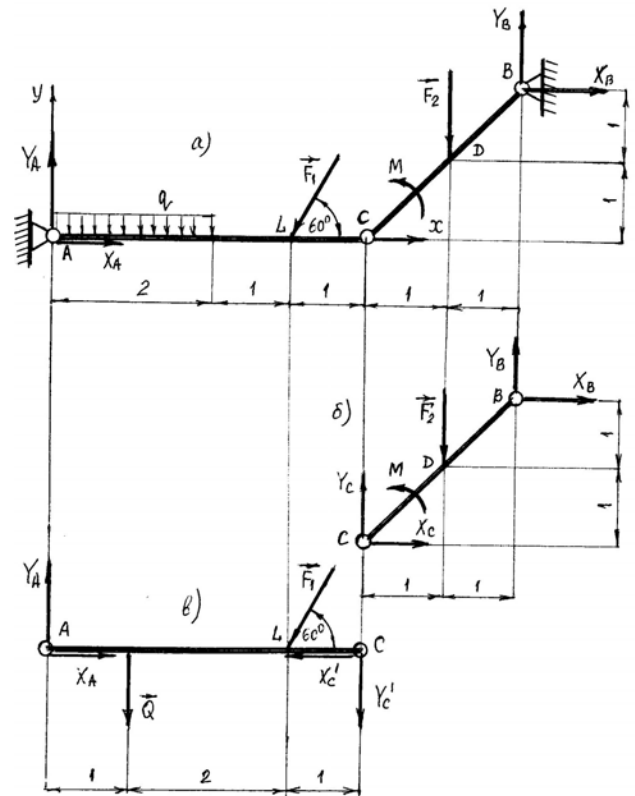


Рис. 23

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 4 + Q \cdot 3 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 1 + M - F_2 \cdot 1 - X_B \cdot 2 + Y_B \cdot 2 = -0,004 \approx 0.$$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 3

«Визначення реакцій опор просторової конструкції»

Задачі на просторову систему сил розділяються на два основні типи:

- 1) Спростити задану систему сил;
- 2) Знайти реакції опор твердого тіла у випадку його рівноваги

під дією системи сил.

При розв'язуванні задач першого типу необхідно:

- 1) Вибрати за центр зведення початок системи координат і осі напрямити так, щоб можна було простіше знаходити проекції сил на осі і моменти сил відносно цих осей.

- 2) Знайти проекції головного вектора \vec{R}^1 і головного моменту \vec{M}_O на кожен із трьох координатних осей.

- 3) Встановити, до якого найпростішого вигляду приводиться дана система сил.

Методика розв'язування задач статки на рівновагу тіла приведена в модулі 1 Новим для просторової системи сил є те, що необхідно знаходити моменти сили відносно координатних осей. В тих випадках, коли важко знайти момент сили відносно осі, доцільно цю силу розкласти на складові сили і, використовуючи теорему Варіньона, шукати момент складових сил відносно координатних осей.

Таблиця: 4

| Варіант | Геометричні розміри | | | Місцерозташування елементів і дані про них | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---------------------|----|----|--|-------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|-----------|----------------|----------------|------------------------------|----------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|----|----------------|----------------|----------------|
| | | | | Ел.2 | | Елемент 3 | | | | Елемент 4 | | | | Елемент 5 | | | | Елемент 6 | | | | | | |
| | a | b | d | Точки | Точка | r ₃ | α ₃ | τ _{3/t₃} | t ₃ | Точка | r ₄ | α ₄ | τ _{4/t₄} | t ₄ | Ділянка | d ₅ | α ₅ | γ ₅ | F ₅ | Точка | δ | α ₆ | γ ₆ | P ₆ |
| | см | см | см | | | см | град | - | кН | | см | град | - | кН | | см | град | град | кН | | см | град | град | кН |
| 1 | 20 | 10 | 10 | A,B | C | 12 | 45 | 2 | 20 | - | - | - | - | - | kN | 20 | 15 | 60 | ? | - | - | - | - | - |
| 2 | 30 | 10 | 10 | C,B | A | 15 | 30 | 1,5 | 15 | L | 10 | 45 | 1,2 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 3 | 40 | 15 | 15 | C,B | A | 10 | 15 | 1,2 | ? | - | - | - | - | - | kL | 20 | 20 | 45 | 8 | - | - | - | - | - |
| 4 | 25 | 25 | 40 | C,B | - | - | - | - | - | A | 15 | 25 | 1,5 | 6 | - | - | - | - | - | N | 12 | 30 | 45 | ? |
| 5 | 45 | 20 | 30 | A,B | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | CD | 18 | 30 | 30 | ? | L | 14 | 45 | 30 | 10 |
| 6 | 50 | 30 | 20 | D,B | A | 20 | 35 | 1,4 | 10 | - | - | - | - | - | LN | 15 | 60 | 35 | ? | - | - | - | - | - |
| 7 | 60 | 30 | 15 | D,B | - | - | - | - | - | A | 20 | 30 | 1,8 | 12 | - | - | - | - | - | K | 16 | 35 | 40 | ? |
| 8 | 45 | 35 | 20 | A,N | B | 20 | 30 | 0,8 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | C | 25 | 75 | 30 | 15 |
| 9 | 55 | 45 | 25 | A,N | - | - | - | - | - | B | 18 | 45 | 0,9 | ? | DK | 25 | 45 | 60 | 10 | - | - | - | - | - |
| 10 | 65 | 30 | 30 | C,N | A | 30 | 20 | 0,7 | 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | B | 15 | 90 | 30 | ? |
| 11 | 42 | 32 | 28 | A,N | C | 25 | 35 | 1,6 | 15 | B | 15 | 30 | 1,3 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 12 | 60 | 40 | 30 | D,N | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | AC | 20 | 90 | 35 | ? | B | 18 | 60 | 40 | 14 |
| 13 | 50 | 40 | 20 | D,N | - | - | - | - | - | B | 25 | 32 | 1,6 | 20 | - | - | - | - | - | A | 16 | 80 | 30 | ? |
| 14 | 55 | 45 | 35 | D,B | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | AC | 13 | 80 | 30 | 12 | N | 10 | 90 | 45 | ? |
| 15 | 52 | 45 | 30 | D,B | N | 22 | 15 | 0,5 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | A | 12 | 65 | 35 | 13 |
| 16 | 70 | 30 | 30 | C,N | A | 20 | 40 | 1,8 | 25 | B | 35 | 30 | 1,2 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 17 | 75 | 35 | 30 | C,B | A | 15 | 38 | 1,4 | ? | N | 22 | 35 | 1,6 | 1,2 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 18 | 80 | 20 | 40 | C,B | - | - | - | - | - | A | 30 | 18 | 2,0 | 18 | - | - | - | - | - | L | 20 | 85 | 35 | ? |
| 19 | 85 | 25 | 35 | A,B | - | - | - | - | - | L | 35 | 22 | 1,7 | ? | - | - | - | - | - | C | 25 | 0 | 55 | 18 |
| 20 | 84 | 28 | 32 | A,N | B | 16 | 42 | 1,5 | 15 | - | - | - | - | - | CD | 20 | 85 | 35 | ? | - | - | - | - | - |
| 21 | 60 | 30 | 25 | A,N | - | - | - | - | - | B | 40 | 28 | 0,7 | ? | KL | 22 | 35 | 65 | 12 | - | - | - | - | - |
| 22 | 50 | 25 | 25 | A,B | - | - | - | - | - | K | 25 | 40 | 1,2 | 20 | - | - | - | - | - | N | 15 | 60 | 40 | ? |
| 23 | 40 | 30 | 30 | A,K | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | NB | 15 | 82 | 35 | ? | D | 10 | 40 | 60 | 9 |
| 24 | 55 | 35 | 25 | A,K | B | 12 | 45 | 1,6 | 8 | - | - | - | - | - | DK | 30 | 90 | 30 | ? | - | - | - | - | - |
| 25 | 40 | 40 | 30 | A,L | C | 14 | 38 | 0,6 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | B | 20 | 0 | 60 | 12 |
| 26 | 30 | 30 | 30 | A,L | - | - | - | - | - | D | 15 | 10 | 1,5 | 12 | - | - | - | - | - | B | 10 | 20 | 70 | ? |
| 27 | 45 | 55 | 30 | C,N | - | - | - | - | - | A | 16 | 12 | 0,8 | ? | Dk | 25 | 60 | 45 | 18 | - | - | - | - | - |
| 28 | 42 | 32 | 30 | DB | N | 16 | 20 | 1,4 | ? | - | - | - | - | - | AC | 20 | 75 | 35 | 15 | - | - | - | - | - |
| 29 | 30 | 40 | 30 | D,L | A | 15 | 25 | 0,8 | 20 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | B | 12 | 65 | 35 | ? |
| 30 | 40 | 30 | 20 | A,B | - | - | - | - | - | D | 15 | 30 | 2,0 | ? | - | - | - | - | - | L | 18 | 75 | 45 | 10 |

Варіанти 31 – 60

Прямокутна плита ABCD вагою G підтримується в горизонтальному положенні за допомогою шести стержнів. Знайти зусилля в цих стержнях, якщо вони невагомі, на кінцях мають шарнірні з'єднання. Кінцями стержнів можуть бути точки A, B, C, D, E, K, L, N, плити і точки A_1, B_1, D_1, C_1 опор. В площині плити вздовж однієї із сторін плити або її діагоналі діє сила F . Необхідні числові дані приведені в таблиці 5. У всіх варіантах початок системи координат знаходиться в точці A. (рис. 2)

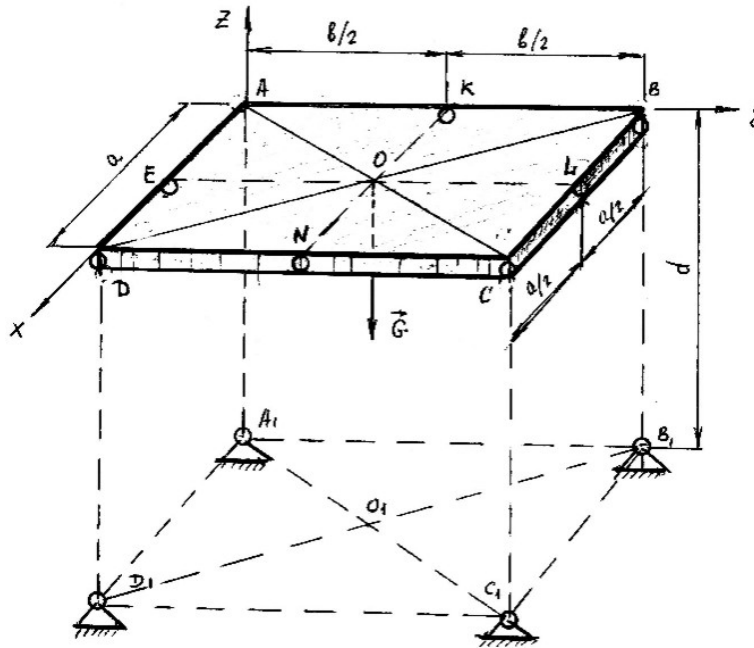


Рис. 2

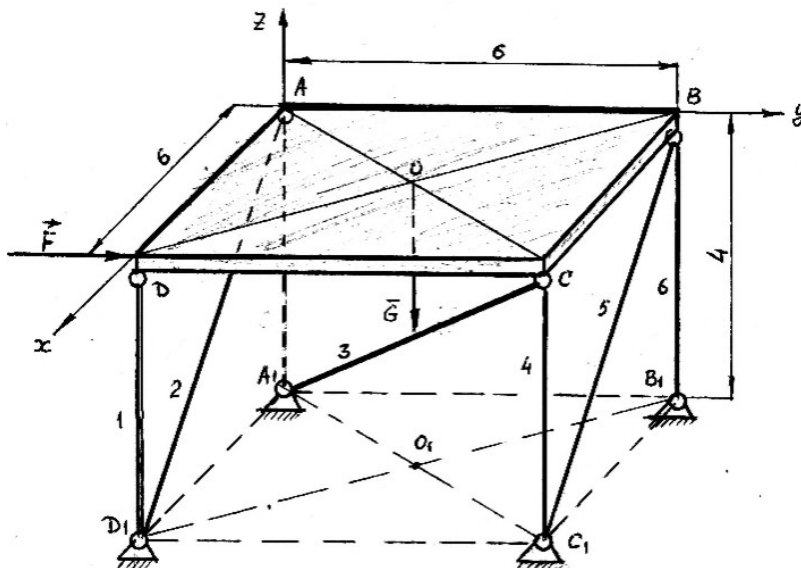


Рис. 3

Рисунк. 3. побудований по ланам варіанта 31

Таблиця 5

| Ва-ріант | розмір плити | | d | Стержні | | | | | | Сила \vec{F} | | | G |
|----------|--------------|-----|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------|----|----|
| | a | b | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Точка приклада-ння | Напрям дії | F | |
| | м | м | М | - | - | - | - | - | - | - | - | кН | кН |
| 31 | 6 | 6 | 4 | D ₁ D | D ₁ A | A ₁ C | C ₁ C | C ₁ B | B ₁ B | D | DC | 20 | 10 |
| 32 | 4 | 6 | 3 | D ₁ D | D ₁ C | A ₁ A | C ₁ A | B ₁ B | B ₁ A | D | DB | 15 | 12 |
| 33 | 1,5 | 6 | 2,5 | D ₁ D | A ₁ D | A ₁ B | B ₁ B | B ₁ C | C ₁ C | C | CB | 22 | 16 |
| 34 | 2 | 5 | 3 | D ₁ A | D ₁ C | A ₁ A | A ₁ B | B ₁ B | B ₁ C | C | CA | 24 | 18 |
| 35 | 3 | 4 | 5 | D ₁ C | A ₁ D | A ₁ B | C ₁ A | C ₁ B | C ₁ C | B | BC | 26 | 20 |
| 36 | 5 | 3 | 4 | D ₁ E | A ₁ A | A ₁ B | C ₁ C | C ₁ L | B ₁ B | B | BA | 15 | 16 |
| 37 | 3 | 5 | 4 | D ₁ N | B ₁ K | B ₁ L | A ₁ A | A ₁ B | C ₁ B | A | AD | 14 | 14 |
| 38 | 4 | 4 | 4 | A ₁ E | A ₁ C | C ₁ B | B ₁ B | D ₁ C | C ₁ C | A | AB | 8 | 10 |
| 39 | 2 | 4 | 3 | B ₁ C | B ₁ B | B ₁ D | B ₁ A | A ₁ D | A ₁ A | A | AC | 12 | 11 |
| 40 | 2 | 3 | 3 | B ₁ B | A ₁ A | C ₁ C | C ₁ L | B ₁ K | D ₁ A | D | DB | 18 | 12 |
| 41 | 2 | 4 | 2 | D ₁ D | D ₁ E | D ₁ N | B ₁ A | C ₁ C | C ₁ B | D | DC | 10 | 11 |
| 42 | 3 | 3 | 2 | B ₁ B | B ₁ K | B ₁ D | D ₁ D | D ₁ A | C ₁ C | D | DA | 8 | 10 |
| 43 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | C ₁ C | C ₁ L | D ₁ N | A ₁ A | B ₁ B | D ₁ D | C | CB | 6 | 7 |
| 44 | 3 | 2,5 | 1,5 | D ₁ B | D ₁ C | A ₁ A | C ₁ L | C ₁ C | B ₁ B | C | CA | 7 | 9 |
| 45 | 2 | 5 | 1,5 | C ₁ D | D ₁ D | D ₁ E | A ₁ A | A ₁ B | B ₁ B | C | CD | 8 | 7 |
| 46 | 2 | 4 | 1,5 | C ₁ B | B ₁ B | B ₁ K | A ₁ A | A ₁ E | D ₁ B | B | BA | 9 | 8 |
| 47 | 2 | 3 | 2 | A ₁ A | A ₁ K | B ₁ B | B ₁ C | C ₁ C | D ₁ D | B | BC | 12 | 13 |
| 48 | 3 | 4 | 2 | A ₁ A | A ₁ D | D ₁ D | D ₁ B | C ₁ N | B ₁ B | B | BD | 22 | 20 |
| 49 | 5 | 5 | 3 | A ₁ A | A ₁ C | B ₁ K | B ₁ C | C ₁ C | D ₁ D | A | AC | 19 | 11 |
| 50 | 4,5 | 5 | 3 | C ₁ A | A ₁ A | C ₁ B | D ₁ C | D ₁ D | B ₁ B | A | AD | 25 | 20 |
| 51 | 3 | 5 | 3 | D ₁ D | D ₁ B | C ₁ B | A ₁ K | C ₁ C | A ₁ A | A | AB | 30 | 20 |
| 52 | 3 | 4 | 2 | D ₁ D | A ₁ E | A ₁ A | D ₁ C | B ₁ C | B ₁ K | D | DC | 40 | 20 |
| 53 | 6 | 4 | 3 | B ₁ C | B ₁ A | B ₁ D | D ₁ D | A ₁ A | C ₁ C | D | DA | 42 | 22 |
| 54 | 5 | 4 | 3 | D ₁ A | D ₁ B | A ₁ A | C ₁ N | B ₁ K | B ₁ B | D | DC | 38 | 30 |
| 55 | 4 | 3 | 3 | A ₁ D | B ₁ A | C ₁ D | C ₁ C | C ₁ L | B ₁ B | C | CB | 36 | 26 |
| 56 | 4 | 4 | 2 | D ₁ A | D ₁ N | C ₁ C | C ₁ B | A ₁ A | B ₁ K | C | CA | 35 | 35 |
| 57 | 3 | 4 | 1,5 | A ₁ E | C ₁ B | A ₁ A | D ₁ C | A ₁ B | C ₁ C | C | CD | 41 | 31 |
| 58 | 1 | 2 | 1 | D ₁ D | D ₁ C | D ₁ A | C ₁ C | A ₁ A | AB ₁ | B | BC | 16 | 20 |
| 59 | 5 | 4 | 3 | B ₁ B | B ₁ D | C ₁ L | D ₁ D | D ₁ C | A ₁ A | B | BA | 28 | 20 |
| 60 | 3 | 4 | 4 | D ₁ C | D ₁ E | C ₁ A | C ₁ C | B ₁ B | B ₁ A | B | BD | 16 | 18 |

Варіанти 61-90

Прямокутна плита $ABCD$ вагою G має дві опори: сферичний шарнір і завісу (підшипник). Плита підтримується в рівновазі в горизонтальному положенні невагомим стержнем, який має на кінцях шарнірні з'єднання. Один кінець стержня може бути в одній із точок A, B, C, D, O плити, а другий – в одній із точок $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ вертикальної стіни. В вертикальній площині на діагоналі AC плити діє зосереджена сила \vec{F} , яка складає з діагоною кут α . (рис. 4)

Знайти опорні реакції і зусилля в стержні.

Варіанти розміщення опор, стержня і сили \vec{F} приведені в таблиці 6. Початок системи координат знаходиться в сферичному шарнірі.

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = d_1, \quad AA_2 = BB_2 = CC_2 = d_2, \quad CK = l.$$

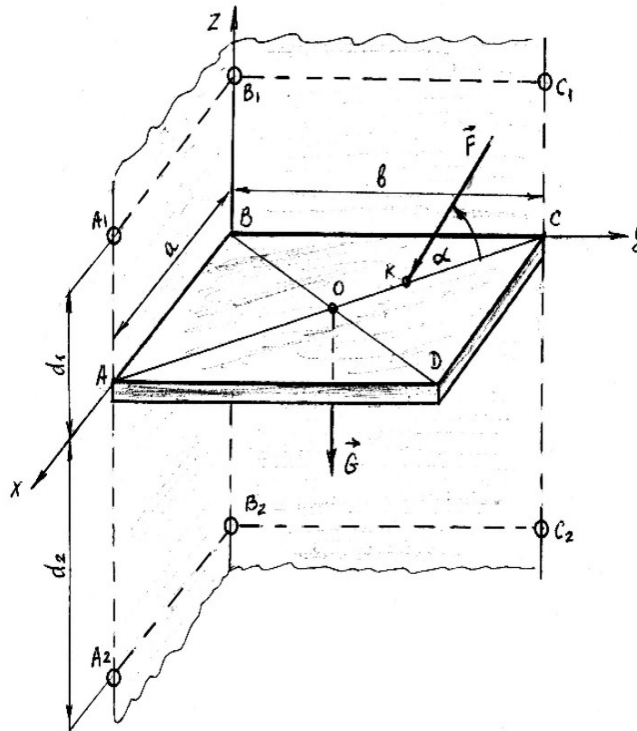


Рис. 4. Конструкція, яка побудована по даним варіанта 61, показана на рисунку 4.1

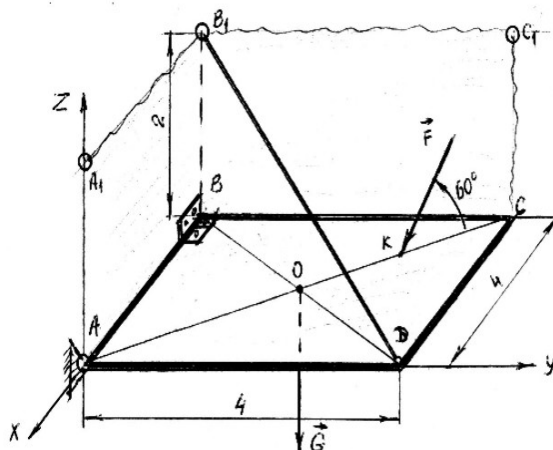


Рис. 4.1

Таблиця 6

| Варіант | Розміри плити | | Місцезнаходження опор | | | Стержень | d ₁ | d ₂ | Зосереджена сила F | | | G |
|---------|---------------|-----|-----------------------|-----------|-------|-----------------|----------------|----------------|--------------------|-----|----|----|
| | a | b | Сферичний Шарнір | Підшипник | | | | | F | L | α | |
| | м | м | | Точка | точка | | | | | | | |
| 61 | 4 | 4 | A | B | AB | DB ₁ | 2 | - | 4 | 1,8 | 60 | 2 |
| 62 | 3 | 2 | B | C | BC | DB ₁ | 3 | - | 5 | 1 | 70 | 4 |
| 63 | 3 | 3 | C | A | AB | DC ₁ | 4 | - | 6 | 2 | 45 | 3 |
| 64 | 4 | 2 | A | B | AB | OC ₂ | - | 3 | 8 | 3 | 30 | 5 |
| 65 | 4 | 4 | B | A | AB | OB ₂ | - | 4 | 6 | 2 | 75 | 4 |
| 66 | 5 | 2 | B | C | BC | DA ₂ | - | 3 | 8 | 3 | 60 | 3 |
| 67 | 3 | 1,5 | A | C | BC | DB ₁ | 4 | - | 10 | 2 | 30 | 4 |
| 68 | 2,5 | 2,5 | A | B | AB | DC ₁ | 3 | - | 12 | 0,9 | 75 | 6 |
| 69 | 5 | 5 | C | B | AB | DB ₂ | - | 4 | 14 | 4 | 80 | 10 |
| 70 | 6 | 1,5 | C | B | BC | DC ₂ | - | 5 | 10 | 3 | 60 | 8 |
| 71 | 4 | 3 | A | B | BA | CB ₁ | 2 | - | 8 | 1,5 | 40 | 12 |
| 72 | 4 | 4 | B | C | CB | AB ₂ | - | 3 | 10 | 2 | 45 | 11 |
| 73 | 5 | 4 | B | C | CB | OA ₂ | - | 2 | 14 | 3 | 65 | 10 |
| 74 | 4 | 5 | B | C | CB | OC ₂ | - | 3 | 16 | 2,5 | 30 | 12 |
| 75 | 3 | 5 | C | A | AB | OB ₂ | - | 2 | 18 | 2 | 45 | 14 |
| 76 | 3 | 4,5 | C | A | AB | OB ₁ | 2 | - | 20 | 1,5 | 50 | 16 |
| 77 | 3,5 | 3 | C | A | AB | DB ₂ | - | 1,5 | 22 | 1 | 60 | 20 |
| 78 | 4 | 2 | B | A | AB | CB ₁ | 1,5 | - | 24 | 1,5 | 75 | 22 |
| 79 | 5 | 3 | B | A | AB | OA ₂ | - | 3 | 26 | 2,5 | 70 | 18 |
| 80 | 5 | 2 | B | A | AB | OC ₁ | 2 | - | 25 | 2 | 30 | 20 |
| 81 | 5 | 5 | A | B | BC | OA ₁ | 3 | - | 20 | 3 | 35 | 15 |
| 82 | 4 | 3,5 | A | B | AB | OB ₂ | - | 2 | 16 | 1,5 | 40 | 14 |
| 83 | 4 | 2,5 | A | B | AB | CB ₁ | 1,8 | - | 12 | 1,6 | 70 | 10 |
| 84 | 3 | 2,5 | B | C | CB | DB ₂ | - | 1 | 10 | 1 | 85 | 8 |
| 85 | 2 | 6 | B | C | CB | AB ₁ | 2 | - | 28 | 3 | 60 | 20 |
| 86 | 2 | 5 | B | C | CB | AC ₂ | - | 3 | 30 | 2 | 65 | 15 |
| 87 | 2 | 4 | C | A | AB | BC ₂ | - | 1,5 | 35 | 1,6 | 35 | 20 |
| 88 | 1 | 2 | C | A | AB | BB ₁ | 1 | - | 10 | 0,5 | 30 | 5 |
| 89 | 1,5 | 1,5 | A | B | BC | OB ₁ | 1,5 | - | 12 | 1 | 65 | 7 |
| 90 | 4 | 6 | B | C | CB | OC ₁ | 2 | - | 18 | 2 | 60 | 9 |

Варіанти 91-120

Елементи конструкції зображені на рис. 5, а необхідні для розрахунків дані приведені в таблиці 7. Лінійні розміри задані в сантиметрах, а сили – в кілоньютонах. По даним варіанта 91 побудована конструкція (рис. 5.1). Аналогічно кожний студент по даним свого варіанту будує конструкцію і визначає реакції опор конструкції і одну із невідомих сил (якщо така є). У всіх варіантах вісь обертання вертикальна, а початок системи координат вибирається в точці А.

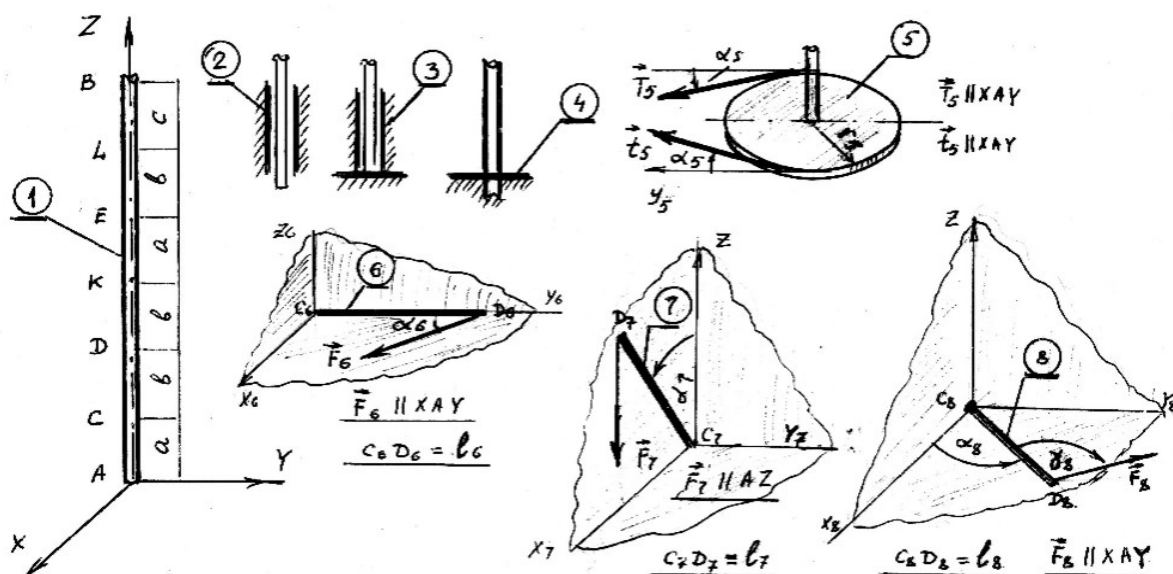


Рис.5

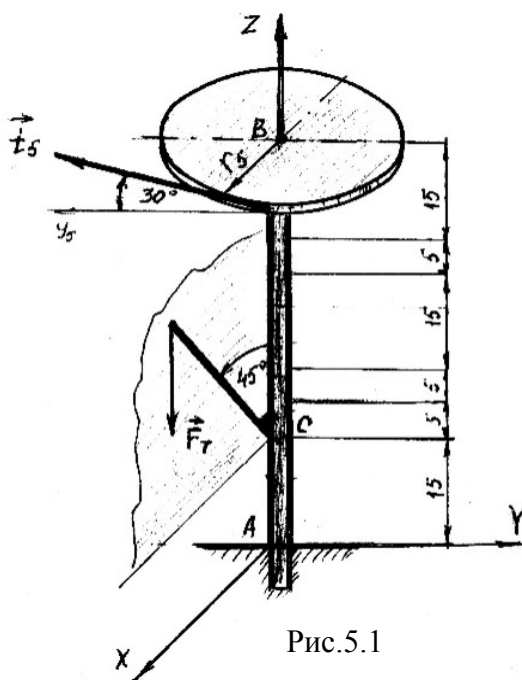


Рис.5.1

| | Геометричні розміри | | | Місцезнаходження елементів і дані про них | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---------------------|----|----|---|-------|-------|-----------|----------------|----------------|--------------------------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | | | Елемент | | | Елемент 5 | | | | Елемент 6 | | | | Елемент 7 | | | | Елемент 8 | | | | | |
| | a | b | C | 2 | 3 | 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | см | см | См | Точка | Точка | Точка | Точка | r ₅ | α ₅ | T ₅ /t ₅ | t ₅ | Точка | α ₆ | l ₆ | F ₆ | Точка | α ₇ | l ₇ | F ₇ | Точка | α ₈ | l ₈ | γ ₈ | F ₈ |
| 91 | 15 | 5 | 15 | - | - | A | B | | 30 | 0 | 8 | - | - | - | - | C | 45 | 20 | 10 | - | - | - | - | - |
| 92 | 10 | 10 | 10 | - | - | A | B | 18 | 35 | 0 | 10 | - | - | - | - | D | 60 | 25 | 12 | - | - | - | - | - |
| 93 | 12 | 10 | 12 | - | - | A | - | - | - | - | - | B | 50 | 22 | 12 | D | 70 | 30 | 15 | - | - | - | - | - |
| 94 | 8 | 12 | 15 | - | - | A | - | - | - | - | - | - | - | - | - | L | 80 | 35 | 16 | C | 30 | 20 | 45 | 10 |
| 95 | 14 | 10 | 10 | B | A | - | D | 22 | 40 | 1.5 | 12 | L | 30 | 28 | ? | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 96 | 16 | 5 | 5 | B | A | - | C | 20 | 25 | 0.8 | 14 | - | - | - | - | - | - | - | - | E | 20 | 25 | 120 | ? |
| 97 | 12 | 12 | 10 | B | A | - | - | - | - | - | - | E | 120 | 30 | ? | - | - | - | - | D | 45 | 18 | 150 | 12 |
| 98 | 11 | 10 | 10 | B | A | - | K | 18 | 30 | 1.2 | ? | L | 90 | 20 | 35 | - | - | - | - | C | 45 | 22 | 60 | 16 |
| 99 | 13 | 8 | 9 | B | A | - | L | 20 | 20 | 1.4 | 40 | K | 135 | 25 | ? | - | - | - | - | C | 60 | 25 | 150 | 10 |
| 100 | 10 | 12 | 15 | - | - | A | - | - | - | - | - | B | 30 | 18 | 10 | E | 30 | 20 | 13 | D | 30 | 18 | 90 | 11 |
| 101 | 20 | 10 | 20 | - | - | A | E | 30 | 45 | 0 | 20 | - | - | - | - | C | 45 | 30 | 22 | C | 75 | 20 | 35 | 8 |
| 102 | 25 | 15 | 20 | - | - | A | D | 22 | 42 | 0 | 25 | B | 115 | 20 | 15 | K | 50 | 25 | 20 | - | - | - | - | - |
| 103 | 26 | 14 | 20 | - | - | A | B | 20 | 38 | 0 | 15 | - | - | - | - | L | 75 | 20 | 16 | D | 70 | 40 | 95 | 16 |
| 104 | 22 | 18 | 12 | - | - | A | - | - | - | - | - | C | 120 | 25 | 22 | D | 10 | 20 | 13 | B | 90 | 30 | 100 | 14 |
| 105 | 23 | 17 | 13 | E | A | - | B | 30 | 35 | 0.9 | ? | - | - | - | - | - | - | - | D | 20 | 25 | 150 | 12 | |
| 106 | 13 | 17 | 12 | K | A | - | C | 18 | 43 | 1.2 | 4 | B | 150 | 23 | ? | - | - | - | - | E | 0 | 16 | 105 | 10 |
| 107 | 12 | 18 | 10 | L | A | - | - | - | - | - | - | B | 45 | 25 | 28 | - | - | - | - | C | 85 | 21 | 30 | ? |
| 108 | 14 | 16 | 12 | L | A | - | K | 16 | 48 | 0.6 | 14 | C | 40 | 21 | ? | - | - | - | - | B | 90 | 12 | 120 | 18 |
| 109 | 16 | 14 | 11 | E | A | - | D | 18 | 36 | 0.75 | ? | L | 130 | 19 | 10 | - | - | - | - | C | 45 | 16 | 75 | 15 |
| 110 | 20 | 15 | 12 | - | - | A | L | 20 | 45 | 0 | 12 | K | 140 | 25 | 14 | C | 50 | 22 | 10 | - | - | - | - | - |
| 111 | 21 | 16 | 13 | - | - | A | - | - | - | - | - | E | 60 | 22 | 17 | B | 60 | 23 | 17 | - | - | - | - | - |
| 112 | 22 | 18 | 14 | - | - | A | - | - | - | - | - | K | 160 | 23 | 18 | B | 72 | 24 | 19 | D | 60 | 17 | 20 | 21 |
| 113 | 23 | 17 | 14 | - | - | A | C | 23 | 35 | 0 | 13 | - | - | - | - | L | 30 | 25 | 14 | K | 90 | 18 | 130 | 16 |
| 114 | 11 | 18 | 10 | - | - | A | D | 14 | 32 | 0 | 10 | - | - | - | - | B | 90 | 15 | 12 | E | 0 | 19 | 120 | 10 |
| 115 | 12 | 13 | 14 | K | A | - | B | 12 | 30 | 1.4 | ? | E | 48 | 16 | 11 | C | 70 | 16 | 13 | - | - | - | - | - |
| 116 | 14 | 15 | 16 | E | A | - | - | - | - | - | - | B | 160 | 18 | 16 | E | 40 | 20 | 18 | D | 30 | 25 | 70 | ? |
| 117 | 16 | 15 | 14 | L | A | - | B | 18 | 35 | 0.8 | 28 | - | - | - | - | K | 65 | 30 | 19 | C | 20 | 20 | 40 | ? |
| 118 | 13 | 12 | 14 | - | - | A | - | - | - | - | - | C | 145 | 20 | 15 | L | 35 | 25 | 11 | D | 60 | 22 | 115 | 20 |
| 119 | 30 | 40 | 20 | B | A | - | - | - | - | - | - | D | 120 | 40 | ? | L | 60 | 30 | 18 | K | 45 | 30 | 90 | 22 |
| 120 | 20 | 30 | 15 | - | - | A | B | 20 | 30 | 0.7 | ? | - | - | - | - | E | 45 | 25 | 20 | D | 60 | 30 | 120 | 16 |

Приклад виконання задачі

$G = 4\text{кН}$

$F = 2\text{кН}$

$S_1=?$

$S_6=?$

Однорідна квадратна плита вагою G утримується в горизонтальному положенні за допомогою шести стержнів. Знайти зусилля в стержнях, якщо в точці D вдовж діагоналі DB діє сила F . Стержні невагомi, на кінцях мають шарнірні з'єднання (рис.7).

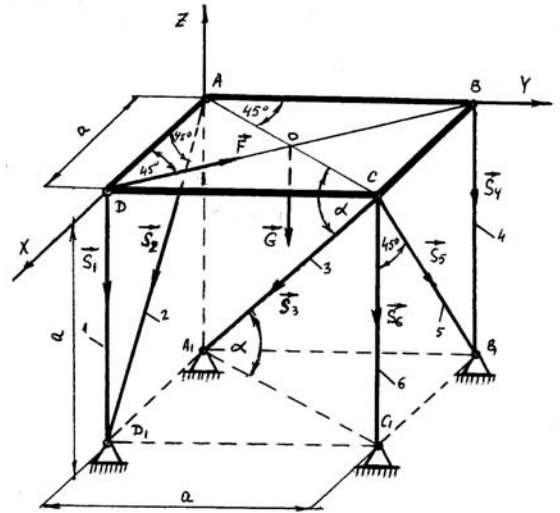


Рис. 7

Розглянемо рівновагу плити $ABCD$. Для неї в'язями є стержні 1-6. Реакції цих стержнів напрямлені по стержням. Напрями дії реакцій стержнів показані на рис. 7. Початок координат виберемо в точці A . Маємо довільну просторову систему сил. Перед тим, як записати рівняння рівноваги, знайдемо деякі кути.

Діагональ $A_1C = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$.

Діагональ $A_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$.

$\sin \alpha = \frac{a}{A_1C} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$; $\cos \alpha = \frac{A_1C_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = 0,816$

$\sin \alpha = 0,577$; $\cos \alpha = 0,816$; $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707$.

Запишемо рівняння рівноваги:

$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$; $S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos \alpha \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ - F \cos 45^\circ = 0$; (1)

$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0$; $F \sin 45^\circ - S_3 \cos \alpha \cos 45^\circ = 0$; (2)

$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$; $-S_1 - S_2 \sin 45^\circ - S_3 \sin \alpha - S_4 - S_5 \cos 45^\circ - S_6 - G = 0$; (3)

$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0$; $-S_3 \sin \alpha \cdot a - G \frac{a}{2} - S_4 a - S_5 \cos 45^\circ \cdot a - S_6 a = 0$; (4)

$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0$; $S_1 a + G \frac{a}{2} + S_3 \sin \alpha \cdot a + S_5 \cos 45^\circ \cdot a + S_6 a = 0$; (5)

$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0$ $F \sin 45^\circ \cdot a + S_5 \sin 45^\circ \cdot a = 0$. (6)

З рівнянь (6) і (2) маємо: $S_5 = -F = -2\text{кН}$, $S_3 = F / \cos \alpha = 2,45\text{кН}$;

З рівняння (1): $S_2 = F = 2\text{кН}$;

З рівняння (3): $S_1 + S_4 + S_6 = -5,41\text{кН}$ (7)

З рівняння (4): $S_4 + S_6 = -2\text{кН}$ (8)

З рівняння (5): $S_1 + S_6 = -2\text{кН}$ (9)

Підставимо вираз (8) в вираз (7). Маємо $S_1 = -3,41$ кН. Тоді з виразу (9) $S_6 = 1,41$ кН, а з виразу (7) $S_4 = -3,82$ кН.

Зробимо перевірку: запишемо суму моментів сил відносно осі OX_1 :

$$\sum M_{X_1} = S_1 \frac{a}{2} + S_2 \sin 45^\circ \cdot \frac{a}{2} - S_3 \sin \alpha \cdot \frac{a}{2} - S_4 \frac{a}{2} - S_5 \cos 45^\circ \cdot \frac{a}{2} - S_6 \frac{a}{2}$$

Підставивши числові значення зусиль, маємо, що ця сума дорівнює нулю.

Приклад виконання задачі

$a = 0,5$ м
 $T_1 = 2$ кН
 $T_2 = 3$ кН
 $G = 2$ кН
 $\alpha = 45^\circ$
 $R_1 = 0,5$ м
 $R_2 = 0,2$ м
 $b = 0,3$ м

$X_A = ?$,
 $Y_A = ?$, $Z_A = ?$,
 $X_B = ?$, $Y_B = ?$,
 $P = ?$

Вертикальний вал вагою G в точці A має підп'ятник, а в точці B – підшипник. Паралельні горизонтальні гілки пасу, що накинута на шків, мають сили натягу T_1 і T_2 . Вони складають з горизонтальною віссю CY кут α . Вал знаходиться в рівновазі завдяки дії вантажу вагою P . Знайти реакції підшипника і підп'ятника, а також силу P (рис. 8).

Розглянемо рівновагу вертикального вала ABC . Для нього в'язями є підшипник в точці B (складові реакції X_B , Y_B) і підп'ятник A (складові реакції X_A , Y_A , Z_A).

Запишемо рівняння рівноваги

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha + X_B + X_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad (T_1 + T_2) \cos \alpha + Y_B + Y_A + P = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A - G = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Y_B \cdot a + P \cdot (a+b) + Y_A \cdot (a+b+a) = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -X_B \cdot a - X_A \cdot (a+b+a) = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0 \quad (T_2 - T_1) R_1 - P \cdot R_2 = 0 \quad (6)$$

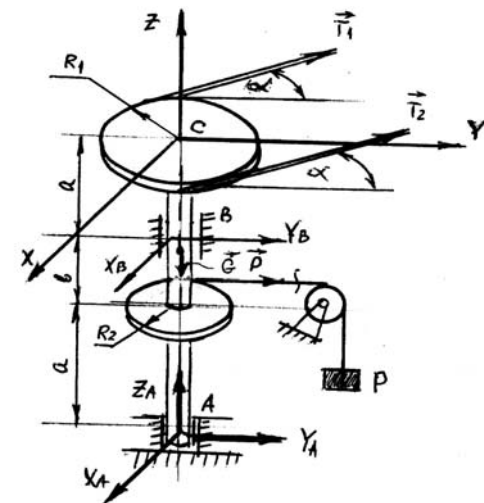


Рис. 8

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо:

$X_A = -2,21$ кН, $X_B = 5,74$ кН, $P = 2,5$ кН,
 $Y_A = 1,28$ кН, $Y_B = -7,3$ кН, $Z_A = 2$ кН.

Приклад виконання задачі

$\alpha=30^\circ$
 $F=20 \text{ кН}$
 $R=0.2\text{м}$
 $ED=0.15\text{м}$
 $a=0.15\text{м}$
 $b=0.2\text{м}$
 $c=0.25\text{м}$
 $Q = ?$
 $Y_A = ?$
 $Z_A = ?$
 $Y_B = ?$
 $Z_B = ?$

Колінчатий вал може обертатись в підшипниках А і В. На кінці вала насаджена шестірня радіусом 0,2м. В точці D коліна під кутом α до вертикалі діє сила \vec{F} . Коліно розміщене в горизонтальній площині. Знайти величину сили \vec{Q} , яка прикладена до шестірні паралельно осі АУ при рівновазі вала, і реакції підшипників (рис. 9).

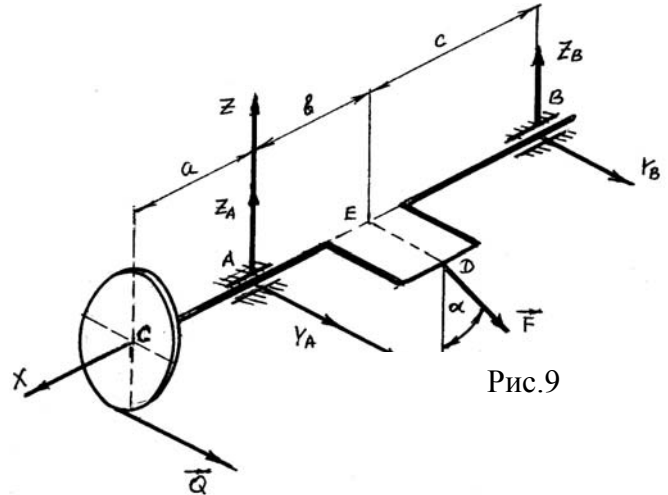


Рис.9

$\vec{F} \parallel YAZ$.

Розглянемо рівновагу вала САВ. В точках А і В знаходяться підшипники. Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Q + Y_A + Y_B + F \sin \alpha = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - F \cos \alpha = 0; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot R - F \cos \alpha \cdot ED = 0; \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad -F \cos \alpha \cdot b + Z_B \cdot (b+c) = 0; \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot a - F \sin \alpha \cdot b - Y_B \cdot (b+c) = 0. \tag{6}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, маємо:

$Y_A = -22,9 \text{ кН}$; $Z_A = 9,62 \text{ кН}$; $Y_B = -0,11 \text{ кН}$; $Z_B = 7,70 \text{ кН}$; $Q = 12,99 \text{ кН}$.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 4

«Знаходження швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху» КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

1. Основні відомості з кінематики точки

1.1. Предмет кінематики

Кінематикою називається розділ механіки, в якому визначається рух тіл без врахування їх маси і діючих на них сил.

Коли кажуть про рух тіла, то розуміють під цим зміну його положення з бігом часу по відношенню до якого-небудь другого тіла. Це означає, що при вивченні руху тіла ми завжди повинні вказувати, відносно якого другого тіла розглядається цей рух і на цьому другому тілі потрібно вибрати початок відліку (тобто вибрати систему координат). У кінематиці рух вважається заданим, якщо задані як функції часу параметри, які визначають положення тіла по відношенню до вибраної системи відліку.

При вивченні руху завжди встановлюється початок відліку часу $t = t_0 = 0$.

Під проміжком часу Δt (розуміють різницю між значеннями часу в який-небудь момент t_2 і момент t_1 ($\Delta t = t_2 - t_1$)).

Якщо розміри тіла малі по відношенню до тих відстаней, які воно проходить, то це тіло називають точкою. Наприклад, планету Земля можна розглядати як точку, якщо вивчати її рух навколо Сонця. Неперервну криву, яку описує точка при своєму русі, називають *траєкторією* точки. Якщо траєкторією точки є пряма лінія, то рух точки називають *прямолінійним*, якщо траєкторією є крива лінія, то рух точки називають *криволінійним*.

Основна задача кінематики полягає в тому, щоб, знаючи закон руху даного тіла (точки), визначити всі кінематичні величини (траєкторію, швидкість, прискорення). Для розв'язання цієї задачі необхідно, щоб був заданий закон руху даного тіла (точки). Існує і обернена задача: по відомим швидкостям і прискоренням знайти закон руху точки.

В модулі 3 ми будемо розглядати тільки рух точки.

1.2. Способи визначення руху точки

Щоб описати рух точки, потрібно для кожного моменту часу задати її положення по відношенню до вибраної системи відліку. Для визначення криволінійного руху точки можна використати один із слідуєчих трьох способів:

1) векторний, 2) координатний, 3) натуральний.

1.2.1. Векторний спосіб визначення руху точки

Нехай точка M рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо

в просторі довільну точку O (рис. 1.1). Положення точки M в довільний момент часу можна визначити, якщо задати вектор \vec{r} , проведений з точки O в точку M . Вектор \vec{r} називається *радіусом-вектором* точки M , а крива, яку описує кінець вектора \vec{r} називається *годографом радіуса-вектора*.

При русі точки M її радіус \vec{r} неперервно змінюється (в загальному випадку і по модулю і по напрямку), тобто є функцією часу.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називається *векторним рівнянням руху точки*.

1.2.2. Координатний спосіб визначення руху точки

а) Декартова система координат

Нехай точка M рухається в просторі по деякій траєкторії. Виберемо в просторі довільну точку O і приймемо її за початок декартової системи координат $OXYZ$ (рис. 1.2).

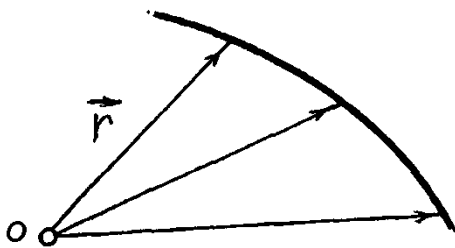


Рис. 1.1

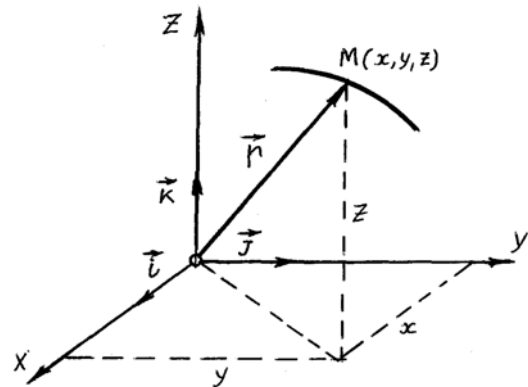


Рис. 1.2

Положення точки M по відношенню до даної системи відліку $OXYZ$ можна визначити її декартовими координатами x, y, z . При русі точки M її координати змінюються з бігом часу, тобто є функціями часу t .

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t); \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рівняння (1.2) називаються *рівняннями руху точки в декартових координатах*.

Якщо під час руху точка M залишається в одній площині, то доцільно систему координат OXY розмістити в цій площині. Тоді плоский рух точки визначається двома рівняннями руху в прямокутних координатах

$$\begin{aligned} x &= f_1(t); \\ y &= f_2(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Якщо точка M здійснює прямолінійний рух, то зручно прийняти пряму, по якій рухається точка, за одну із координатних осей, наприклад, за вісь x . Положення точки M на цій осі визначається однією координатою $OM = x$

$$x = f_1(t). \quad (1.4)$$

Між координатним і векторним способами існує зв'язок (див. рис. 1.2).

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.5)$$

де \vec{r} — радіус-вектор точки M ; x, y, z — координати точки M ;
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні орти, тобто вектори, які чисельно дорівнюють одиниці і напрямлені відповідно вздовж осей x, y, z .

Рівняння (1.2), (1.3) одночасно представляють і рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметра відіграє час t . Щоб знайти рівняння траєкторії точки в координатній формі, необхідно з рівнянь руху виключити час t .

б) Полярна система координат (рис. 1.5)

Коли точка M весь час рухається в одній і тій же площині, то її положення можна визначити полярними координатами r і φ , де r — відстань від полюса O до точки M , φ — кут, який утворюється радіусом-вектором \vec{OM} точки M з горизонтальною прямою Ox -віссю полярних

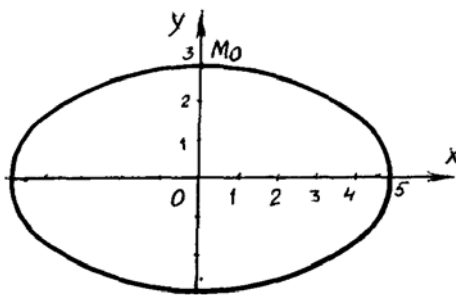


Рис. 1.4

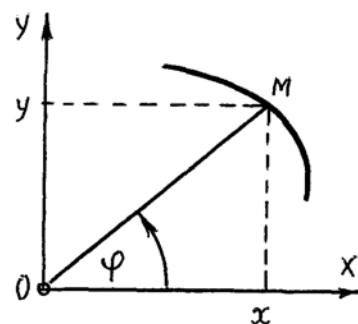


Рис. 1.5

координат.

Під час руху точки M полярні координати r і φ будуть змінюватись. Закон руху точки в полярних координатах буде визначатись рівняннями:

$$r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t) \quad (1.6)$$

Між полярними координатами r і φ та декартовими координатами x і y існує зв'язок:

$$x = r \cos \varphi ; \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.7)$$

1.2.3. Натуральна форма рівнянь руху

Цей спосіб можна використовувати тоді, коли наперед відома траєкторія руху точки.

Нехай траєкторія руху точки M відома (це може бути дуга кола, параболи, еліпса та ін.) (рис. 1.6).

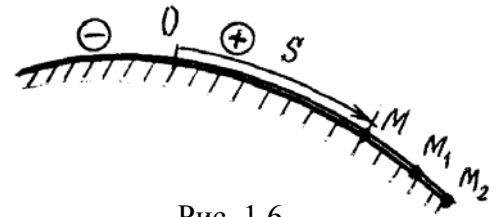


Рис. 1.6

Виберемо на цій лінії довільну точку відліку O . Положення точки M на траєкторії будемо визначати дуговою координатою (тобто довжиною дуги OM). Знак дугової координати визначаємо самостійно. Нехай зліва від точки O дугова координата буде від'ємна, праворуч від точки O — додатня. При русі точки M в положення M_1, M_2 дугова координата буде змінюватись, тобто буде залежати від часу. Щоб знайти положення точки M на траєкторії в будь-який момент часу необхідно знати залежність:

$$S = f(t). \quad (1.8)$$

Рівняння (1.8) і виражає закон руху точки M вздовж траєкторії.

Примітка 1. У рівнянні (1.8) величина S визначає положення точки M на дуговій координаті, а не пройдений нею шлях. Наприклад, точка, рухаючись із точки відліку O , попадає в положення M_1 (рис. 1.6), а потім переміщуючись у зворотному напрямі попадає в положення M , то в цей момент її дугова координата $S = \overset{\frown}{OM}$, а пройдений шлях буде $\overset{\frown}{OM} = 2\overset{\frown}{M_1M}$, тобто не дорівнює S .

У випадку прямолінійного руху, якщо вісь Ox няпрямити вздовж траєкторії точки, будемо мати $S = x$ і закон прямолінійного руху точки буде:

$$x = f(t) \quad (1.9)$$

Примітка 2. Традиційно прийнято пройдений точкою шлях позначити буквою S . Від цього і ми не будемо відступати. А щоб відрізнити дугову координату точки і шлях, пройдений нею, то зробимо такі позначення: S — дугова координата, s — шлях, пройдений точкою.

Вектором переміщення \vec{l} називають відрізок прямої, який проведений з початкового положення в кінцеве положення переміщуваної точки (рис. 1.7).

При прямолінійному русі точки вектор переміщення \vec{l} являється відрізком траєкторії, при криволінійному русі — він замикає розглядувану частину траєкторії.

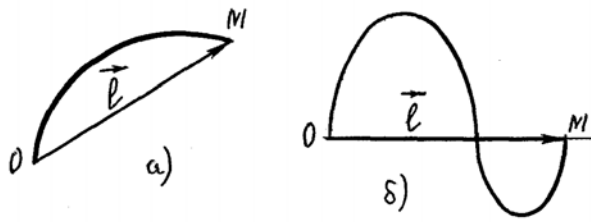


Рис. 1.7

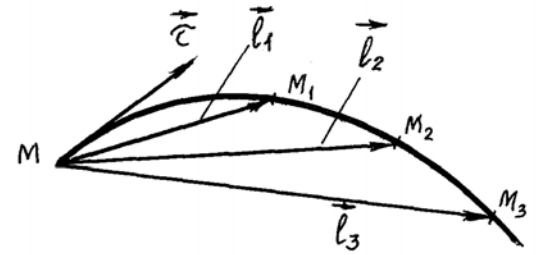


Рис. 1.8

Для різних проміжків часу вектори переміщень \vec{l}_1 , \vec{l}_2 , \vec{l}_3 мають різну величину і напрям (рис. 1.8). Для нескінченно малого проміжку часу вектор переміщення при криволінійному русі співпадає по напрямку з напрямком дотичної \vec{c} до траєкторії руху (мова йде про дотичну до траєкторії), де в даний момент часу знаходиться рухома точка М.

5.2. Вказівки до виконання РГР № 5

Завдання: Знайти траєкторію руху, швидкість, повне, дотичне, нормальне прискорення точки, а також радіус кривини лінії, якщо точка рухається згідно рівнянь, які наведено в додатку № 6.

Розрахунки провести для моменту часу t_1 і t_2 .

Побудувати траєкторію руху і показати вектори швидкості і прискорення точки для заданих моментів часу.

Приклад виконання:

Знайти траєкторію руху, швидкість, повне, дотичне і нормальне прискорення точки, а також радіус кривини лінії, якщо точка рухається згідно рівнянь:

$$x = 4 \cos t - 2 \cos 2t \quad (\text{м}); \quad (1)$$

$$y = 4 \sin t - 2 \sin 2t \quad (\text{м}).$$

Розрахунки провести для моменту часу $t_0 = 0$ і $t_1 = \frac{\pi}{2} c$.

1. Знайдемо траєкторію руху. Для цього необхідно з рівнянь руху виключити час t . Для кожного з рівнянь руху треба шукати свої способи виключення часу t . В даному випадку зробимо наступне.

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь руху (1) і почленно додамо:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4(\cos^2 2t + \sin^2 2t) - 16(\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t) = \\ &= 4 + 16[1 - (\cos t \cdot \cos 2t + \sin t \cdot \sin 2t)] = 4 + 16[1 - \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t + 2 \sin^2 t)]; \end{aligned}$$

Маємо:
$$x^2 + y^2 - 4 = 16(1 - \cos t). \quad (2)$$

Знову звернемося до рівнянь руху (1) і перепишемо їх в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos t - 2(2 \cos^2 t - 1) = 4(1 - \cos t) \cdot \cos 2t + 2; \\ y &= 4(1 - \cos t) \cdot \sin t. \end{aligned} \quad (3)$$

Піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь (3) і почленно додамо

$$(x - y)^2 + y^2 = 16(1 - \cos t)^2 \cos^2 t + 16(1 - \cos t)^2 \sin^2 t = 16(1 - \cos t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t).$$

Маємо: $(x - y)^2 + y^2 = 16(1 - \cos t)^2.$ (4)

Використовуючи вирази (2) і (4), отримаємо рівняння траєкторії руху точки:

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 = 16[(x - 2)^2 + y^2]. \quad (5)$$

Траєкторією руху точки є кардіоїда.

На рис. 29 зображена траєкторія руху точки і показано на ній положення точки в початковий момент часу і в момент часу $t_1 = \frac{\pi}{2} c$.

Побудова цієї лінії та багато інших приводиться в книзі М.Я. Выгодский «Справочник по высшей математике», Москва, 1963 г. стр., 751- 834.

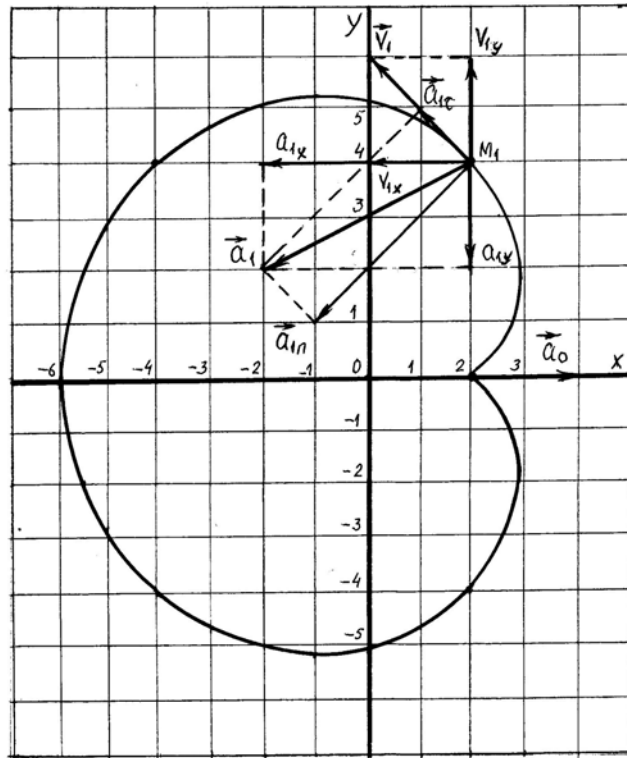


Рисунок – 29

2. Знайдемо швидкість точки.

Рух точки заданий в координатній формі.

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі.

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -4 \sin t + 4 \sin 2t;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 4 \cos t - 4 \cos 2t.$$

Повна швидкість $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$

Після перетворень маємо

$$V = 4\sqrt{2(1 - \cos t)}. \quad (6)$$

Напрямок швидкості знайдемо через напрямні косинуси

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}.$$

Знайдемо величину і напрям швидкості для заданих моментів часу.

$$t_0 = 0, \quad V_{0x} = 0, \quad V_{0y} = 0, \quad V_0 = 0.$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad V_{1x} = -4, \quad V_{1y} = 4, \quad V = 4\sqrt{2} \text{ м/с}.$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Напрямок швидкості показаний на рис. 5.1.

3. Знайдемо прискорення точки.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -4 \cos t + 8 \cos 2t;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -4 \sin t + 8 \sin 2t.$$

Повне прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Після перетворень маємо

$$a = 4\sqrt{1 + 4(1 - \cos t)}. \quad (7)$$

Напрямок прискорення знайдемо через напрямні косинуси

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}.$$

Знайдемо величину і напрям прискорення для заданих моментів часу.

$$t_0 = 0, \quad a_{0x} = 4, \quad a_{0y} = 0, \quad a = 4 \text{ м/с}^2.$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad a_{1x} = -8, \quad a_{1y} = -4, \quad a = 4\sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{-8}{4\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{-4}{4\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Напрямок прискорення показаний на рис. 5.1.

4. Знайдемо дотичне прискорення.

Візьмемо похідну по часу від виразу (6). Остаточно маємо

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{4 \sin t}{\sqrt{2(1 - \cos 2t)}};$$

При $t_0 = 0$, $a_{0\tau} = 0$. При $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_{1\tau} = 2\sqrt{2} = 2,82 \text{ м/с}^2$.

Дотичне прискорення напрямлене по дотичній до траєкторії руху і для часу $t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ с}$ воно є додатнім. Це означає, що рух точки М є прискореним в

точці M_1 і дотичне прискорення $\vec{a}_{1\tau}$ напрямлене в ту ж сторону, що і швидкість \vec{V}_1 (рис. 29).

В нашому випадку для часу $t_1 = \frac{\pi}{2}c$ розрахунки показують

$$a_{1\tau} = \frac{V_{1x}a_{1x} + V_{1y}a_{1y}}{V_1} = \frac{(-4)(-8) + 4(-4)}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2,82 \text{ м/с}^2.$$

Цей розрахунок співпадає з раніше отриманим результатом для дотичного прискорення.

5. Знайдемо нормальне прискорення точки М.

Використаємо формулу, з якої

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

При $t_0 = 0$, $a_{0n} = a_0 = 4$; $a_{0n} = 4 \text{ м/с}^2$

При $t_1 = \frac{\pi}{2}c$, $a_{1n} = \sqrt{80 - 8} = 8,48$, $a_{1n} = 8,48 \text{ м/с}^2$.

Вектори дотичного і нормального прискорення складають вектор повного прискорення \vec{a} точки. Побудова цих векторів показана на рис. 29.

б) Знайдемо радіус кривини лінії.

Радіус кривини лінії знаходиться з формули для нормального прискорення.

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При $t_0 = 0$, $\rho_0 = \frac{V_0^2}{a_{0n}} = \frac{0}{4} = 0$, $\rho_0 = 0$.

При $t_1 = \frac{\pi}{2}c$, $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{8,48} = 3,78$; $\rho_1 = 3,78 \text{ і}$.

Варіанти завдань для виконання розрахунково-графічної роботи № 4
«Знаходження швидкості і прискорення точки по заданим рівнянням її руху»

Таблиця 6

| Варіант | Рівняння руху | | Час | |
|---------|------------------------------|------------------------------|---------------|-----------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| | См | См | с | С |
| 1 | $\sin \frac{\pi}{2} t$ | $\sin \frac{\pi}{2} t - 3$ | 0 | 1 |
| 2 | $4 \cos 2t$ | $2 - 5 \sin 2t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 3 | $2t$ | $5 - 2t^2$ | 0 | 1 |
| 4 | $2 \sin t^2$ | $4 \cos t^2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 5 | $t^2 + 4$ | $5 - t^2$ | 0 | 0 |
| 6 | $3t^2$ | $5 - t$ | 0 | 1 |
| 7 | $8t^2 - 2$ | $4t$ | 0 | 2 |
| 8 | $3 \cos \frac{\pi}{2} t$ | $3 \sin \frac{\pi}{2} t - 2$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 9 | $4t$ | $2 + \sin \pi t$ | 0 | 1 |
| 10 | $1 - 2 \cos \frac{\pi}{2} t$ | $3 \sin \frac{\pi}{2} t + 2$ | 0 | 1 |
| 11 | $\frac{1}{2} t^2$ | $3 - t$ | 1 | 3 |
| 12 | $2 \sin \frac{\pi}{2} t$ | $3 \cos \pi t$ | 0 | 2 |
| 13 | $3 \cos t$ | $4 \sin \frac{t}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 14 | $3 \sin \pi t$ | $4 \cos 2\pi t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 15 | $4t^2$ | $2t - 1$ | 0 | 1 |
| 16 | $3 \sin \frac{\pi}{2} t$ | $\cos \frac{\pi}{2} t$ | 0 | 2 |
| 17 | $4t^2 - 1$ | $t - 2$ | 0 | 1 |
| 18 | $\frac{3}{2} \cos \pi t$ | $\frac{1}{2} \sin \pi t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |

| Варіант τ | Рівняння руху | | Час | |
|-------------------|---------------------------------|---------------------------------|-----------------|-----------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| 19 | $\frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-3t})$ | $\frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-3t})$ | 0 | 2 |
| 20 | $\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ | $\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ | 0 | 1 |
| 21 | $3 \cos \frac{\pi}{t} t^2 - 1$ | $-3 \sin \frac{\pi}{t} t^2 + 2$ | 0 | 2 |
| 22 | $2 + 3 \cos t^2$ | $3 \sin t^2$ | 0 | 2 |
| 23 | $4 + 3 \cos \pi t$ | $2 \sin \pi t + 3$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 24 | $3 \sin \frac{\pi}{t} t^2$ | $2 + \cos \frac{\pi}{3} t^2$ | 0 | 1 |
| 25 | $3 \cos 2t$ | $6 \sin t$ | 0 | 1 |
| 26 | $3 \sin 2t$ | $6 \cos t$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
| 27 | \sqrt{t} | e^{-1} | 0 | 1 |
| 28 | $2t^2$ | $2t - 1$ | 0 | 2 |
| 29 | $\sin \pi t + 3$ | $\cos \pi t - 1$ | 0 | 1 |
| 30 | $5 \cos \frac{\pi}{2} t \pi$ | $-3 \sin \frac{\pi}{2} t$ | 0 | 2 |
| 31 | $2 \sin^2 t$ | $2 \cos^2 t$ | 0 | 1 |
| 32 | $4t^2$ | $5t - 2$ | 1 | 2 |
| 33 | $3t - 1$ | $2t^2$ | 1 | 2 |
| 34 | $\cos^2 t$ | $5 - \sin t$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 35 | $\sin t$ | $1 - \cos^2 t$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 36 | $8t^2 - 1$ | $2t + 3$ | 1 | 2 |
| 37 | $t - 1$ | $1 - 2t^2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 38 | $t^3 - 3$ | $5 - t^3$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| 39 | $tg \frac{1}{2}$ | $2 \sin t$ | 0 | 2 |
| 40 | $-5t$ | $-2t^2 + 3$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

| Варіант τ | Рівняння руху | | Час | |
|-------------------|--|--|---------------|---------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| 41 | $2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ | $2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ | 0 | 2 |
| 42 | $\cos\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) + 2$ | $\sin\left(\frac{\pi t^2}{3}\right) - 2$ | 0 | 2 |
| 43 | $2t + 2$ | $\frac{-2}{t+1}$ | 0 | 2 |
| 44 | $3 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | $2 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ | 0 | 3 |
| 45 | $2t^2 + 1$ | $-2t$ | $\frac{1}{2}$ | 2 |
| 46 | $-\frac{3}{t+3}$ | $3t + 9$ | 0 | 1 |
| 47 | $\cos \frac{\pi}{2}t - 1$ | $\sin \frac{\pi}{2}t + 3$ | 1 | 2 |
| 48 | $2 \cos^2 t$ | $\sin t + 1$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 49 | $7t$ | $3 - 2t^2$ | 1 | 2 |
| 50 | $3 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ | $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ | 0 | 1 |
| 51 | $2t^2 + 2t - 3$ | $3t^2 + 3t + 2$ | 0 | 1 |
| 52 | $3t + 3$ | $\frac{3}{t+1}$ | 0 | 1 |
| 53 | $2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ | $4 \cos n\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ | 0 | 3 |
| 54 | $\cos \pi t$ | $3 \sin \frac{\pi}{2}t$ | 0 | 1 |
| 55 | $2t$ | $3 - \frac{1}{2}t^2$ | 1 | 2 |
| 56 | $2t^2 - 3$ | $-2t$ | 0 | 3 |
| 57 | $-1 - 2 \sin \frac{\pi}{4}$ | $-2 \cos \frac{\pi}{4}t$ | 0 | 4 |
| 58 | $-4t$ | $-\frac{4}{t}$ | 1 | 4 |
| 59 | $2t^2 - t + 2$ | $3t^2 + 2t + 1$ | 1 | 2 |

| Варіант | Рівняння руху | | Час | |
|---------|---|---|-------|---------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| 60 | $-\frac{3}{t}$ | $3t$ | 1 | 3 |
| 61 | $2 \cos \frac{\pi}{2}t + 4 \sin \frac{\pi}{2}t$ | $3 \cos \frac{\pi}{2}t + 6 \sin \frac{\pi}{2}t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 62 | $4t$ | $8t - 4t^2$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 63 | $2tg \frac{t}{2}$ | $\cos t$ | 0 | 1 |
| 64 | $2 \sin \frac{2\pi}{3}t$ | $3 \cos \frac{2\pi}{3}t$ | 0 | 6 |
| 65 | $3 \sin \frac{\pi}{8}t$ | $3 \cos \frac{\pi}{8}t + 2$ | 0 | 4 |
| 66 | $3^2 - 1$ | $2t$ | 0 | 2 |
| 67 | $2si\pi t$ | $\cos \frac{\pi}{2}t$ | 0 | 1 |
| 68 | $2\sqrt{t}$ | e^{-t} | 0 | 1 |
| 69 | $2t$ | $2t^3$ | 0 | 1 |
| 70 | $2t - 1$ | $2t + 1$ | 1 | 4 |
| 71 | $2 - t$ | $(2 + t)^2$ | 0 | 1 |
| 72 | $t - 4$ | $2 - 3t^2$ | 1 | 2 |
| 73 | $2t$ | $(t + 1)^2$ | 1 | 2 |
| 74 | $8 \cos 2\pi t$ | $8 \sin 2\pi t$ | 0 | 4 |
| 75 | $7e^{3t}$ | $24e^{-3t}$ | 0 | 1 |
| 76 | $3t^2$ | $6t$ | 0 | 2 |
| 77 | $3 \cos \pi t$ | $3 \sin \pi t^2$ | 0 | 2 |
| 78 | $12t - 5$ | $4t + 3$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 79 | $12t^2 + 5$ | $9t^2 - 4$ | 0 | 1 |
| 80 | $1 - 3e^{2t}$ | $2 + 4e^{2t}$ | 0 | 1 |
| 81 | $8 \sin^2 \pi t$ | $5 + 4 \sin 2\pi t$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 82 | $2 \cos^2 \pi t - 3$ | $4 \sin^2 \pi t - 3$ | 0 | $\frac{1}{2}$ |
| 83 | $3t^2 + 1$ | $6t$ | 1 | 2 |

| Варіант τ | Рівняння руху | | Час | |
|-------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------|-----------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| 84 | $\cos^2 t$ | $4 \sin t$ | 0 | 2 |
| 85 | $\sin t$ | $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ | 0 | 2 |
| 86 | $5 - 2 \cos t$ | $-2 + 3 \sin t$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 87 | $2(e^t + e^{-t})$ | $2(e^t - e^{-t})$ | 0 | 1 |
| 88 | $t^3 + 2$ | $3 - t^3$ | 1 | 2 |
| 89 | $2tg \frac{1}{2}$ | $3 \sin t$ | 0 | 2 |
| 90 | $3tg \frac{1}{2}$ | $\cos t$ | 0 | 2 |
| 91 | $3t$ | $6t - 5t^2$ | 0 | 1 |
| 92 | $\sin 2t + \cos$ | $\sin 2t - \cos$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 93 | $2 \sin t^2$ | $3 \cos t^2$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| 94 | $3t^2 - 1$ | $2t + 2$ | 0 | 1 |
| 95 | $2t$ | $1 - 2 \sin t$ | 0 | 1 |
| 96 | t^2 | $1 - 2 \sin t$ | 0 | 1 |
| 97 | $3 \sec t$ | $2tg t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 98 | $3tg t$ | $-4 \sec t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 99 | $2 - 3 \sin 2t$ | $3 + 2 \cos 2t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 100 | $ctgt$ | $-2 \cos ect$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 101 | $3 + 3 \cos 2t$ | $4 - 3 \sin 2t$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 102 | e^{-3t} | $4e^{-3t}$ | 0 | $\frac{1}{3}$ |
| 103 | $2t + 3$ | $2 - 4t$ | 0 | 1 |
| 104 | $\frac{1}{2}t^2 - 2t$ | $3t$ | 0 | 2 |

| Варіант | Рівняння руху | | Час | |
|---------|---|---|-----------------|-----------------|
| | $x = x(t)$ | $y = y(t)$ | t_1 | t_2 |
| 105 | $\frac{1}{4}t^3$ | $\frac{1}{3}t^3$ | 0 | 2 |
| 106 | $2e^t$ | t | 0 | 1 |
| 107 | $t^2 - 3t$ | $-3t$ | 0 | 2 |
| 108 | $2 \cos 2t$ | $3 \sin t$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ |
| 109 | $2 \sin^2 \frac{\pi}{4}t$ | $\cos \frac{\pi}{2}t$ | 0 | 1 |
| 110 | $2 \cos^2 \frac{\pi}{2}t$ | $\sin \pi t$ | 0 | 1 |
| 111 | $3 \cos ect$ | $3ctgt$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| 112 | t | $-2t + tgt$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 113 | $2(e^{2t} - e^{-2t})$ | $3(e^{2t} - e^{-2t})$ | 0 | 2 |
| 114 | $1 + \sec t$ | $-1 + tgt$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
| 115 | $t^2 - 2t + 1$ | $t - 1$ | 0 | 3 |
| 116 | $\frac{3}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ | $\frac{5}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ | 1 | 6 |
| 117 | $1 - 2 \cos ect$ | $-1 + ctgt$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 118 | $2ctg^2t$ | $2ctgt$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 119 | $2ctgt$ | $3 \cos ect$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 120 | 2^{-t} | 2^{2t} | 0 | 1 |

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 5

«Кінематичний аналіз плоского механізму»

ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

Означення плоского руху

Якщо всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних деякій нерухомій площині, то такий рух тіла називається плоскопаралельним (плоским) рухом тіла.

Цей рух тіла в практичній діяльності людини відіграє важливу роль, тому ми приділимо значну кількість часу для вивчення цього руху. Наведемо деякі приклади цього руху (рис. 30, 31). На рис. 30 (а) показано рух круглого циліндричного котка. Проведемо нерухому площину Π , яка перпендикулярна осі обертання O_1O_2 котка. Проведемо площини Π_1, Π_2 і т.д., які паралельні площині Π і перетинають тіло котка. Отримали кругові перерізи S_1, S_2 і т.д. Точки, які знаходяться в цих перерізах, рухаються разом з перерізами паралельно нерухомій площині Π . Якщо при русі котка всі перерізи S_1, S_2 і т.д. будуть залишатись в площинах Π_1, Π_2 і т.д., то в цьому випадку тіло виконує плоский рух. В подальшому площини Π_1, Π_2 будемо суміщати з нерухомою площиною (з площиною рисунка), а замість всього тіла будемо зображати тільки фігуру S (рис. 30 б) і вивчати рух цієї плоскої фігури.

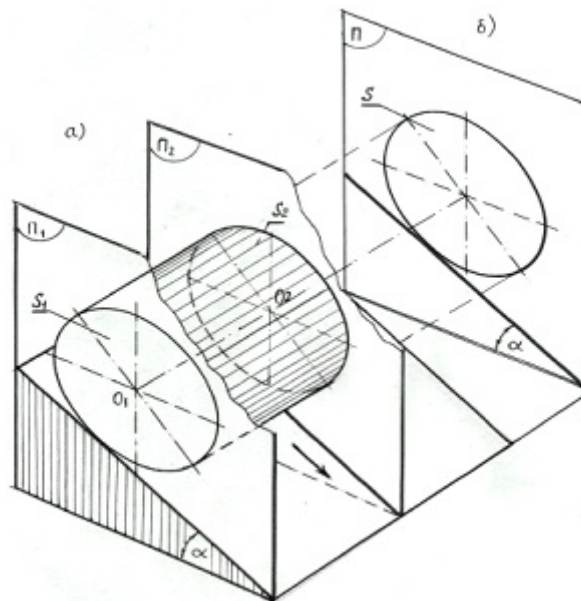


Рисунок – 30

Рух кривошипно-шатунного механізму показано на рис. 31. Всі ланки цього механізму можуть рухатись тільки в одній площині.

Кривошип OA виконує обертальний рух навколо осі, що проходить через точку O ; повзун B виконує поступальний рух. Шатун AB , як видно з рис. 31, виконує складний рух, але всі точки шатуна AB рухаються в одній площині. Шатун AB виконує плоско паралельний (плоский) рух.

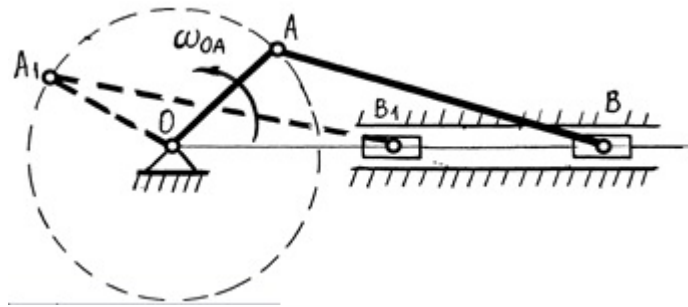


Рисунок – 31

Представлення плоского руху тіла на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса

Нехай тіло виконує плоский рух. Рух цього тіла будемо розглядати як рух відрізка АВ, що з'єднує точки А і В цього тіла (рис. 32).

Нехай в початковий момент часу тіло займало положення I, а через деякий проміжок часу Δt – положення II. В положенні II тіла відрізок АВ зайняв положення A_1B_1 .

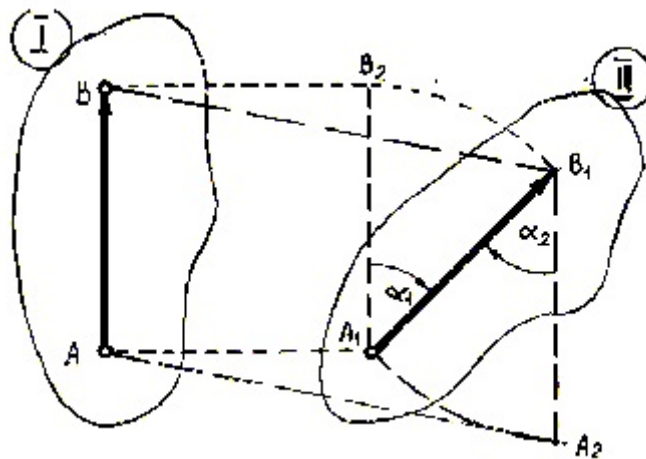


Рисунок – 32

Яким чином відрізок АВ із положення I попав в положення II? Візьмемо за полюс точку А. Нехай тіло рухалось поступально і точка А попала в точку A_1 . Тоді точка В відрізка АВ повинна попасти в точку B_2 . Щоб точка B_2 попала в положення B_1 , необхідно, щоб тіло виконало обертальний рух на кут α_1 навколо точки A_1 (полюса).

Таким чином, плоский рух тіла можна розглядати як суму двох простих рухів: 1) поступального руху тіла разом з полюсом, 2) обертального руху тіла навколо полюса.

Яку ж точку тіла брати за полюс і що зміниться, якщо поміняти полюс?

Візьмемо за полюс точку В, тобто поміняємо полюс (рис. 32). Нехай тіло з положення I рухається поступально і точка В попала в точку B_1 . Тоді точка А попадає в положення A_2 .

Щоб точка A_2 попала в положення A_1 , необхідно тілу зробити обертальний рух на кут α_2 навколо точки B_1 . Проаналізуємо ці два випадки. По-перше при обертальному русі кути $\alpha_1 = \alpha_2$ і, по-друге, напрям обертання однаковий.

Висновок:

1. Вибір полюса не впливає на обертальний рух тіла, а не означає, що значення кутової швидкості ω і кутового прискорення тіла не буде залежати від вибору полюса.

2. Вибір полюса впливає на поступальний рух тіла.

В зв'язку з тим, що плоский рух можна розглядати як поступальний рух тіла разом з полюсом і обертальний навколо полюса, то можна інакше записати рівняння плоского руху тіла.

Нехай тіло виконує плоский рух (рис. 33). Виберемо декартову систему координат в площині руху плоскої фігури S . Виберемо на твердому тілі відрізок AB . Візьмемо за полюс точку A .

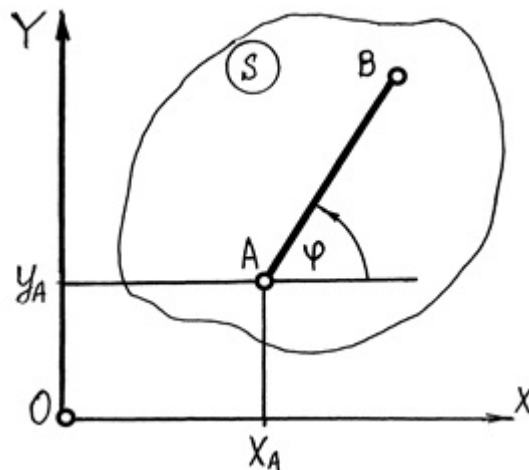


Рисунок – 33

Запишемо такі рівняння руху:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t); \\ y_A &= f_2(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Перші два рівняння виразу (6.1) характеризують рух точки A , тобто характеризують поступальний рух тіла. Третє рівняння виразу (6.1) характеризує обертальний рух тіла навколо полюса A . Таким чином, рівняння (6.1) є рівнянням плоского руху твердого тіла. Рівняння (6.1) і (6.1) разом з (6.1) не суперечать одне одному.

Розглянемо окремі випадки плоского руху тіла.

1. Нехай полюс A не рухається. Тоді тіло буде виконувати обертальний рух навколо точки A . Це означає, що обертальний рух тіла є одним із видів плоского руху.

2. Нехай при плоскому русі тіла кут $\varphi = const$, тобто тіло не обертається навколо полюса А. Це означає, що тіло виконує поступальний рух в одній площині. Треба зазначити, що поступальний рух тіла може бути не тільки в одній площині. Тому не можна говорити, що поступальний рух тіла є завжди частинним випадком плоского руху тіла. На рис. 31 поступальний рух повзуна В є частинним випадком плоского руху, тому що цей рух проходить в одній площині.

Миттєвий центр швидкостей

В попередньому пункті було представлено плоский рух тіла як поступальний рух тіла разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. Але плоский рух тіла можна розглядати як суму миттєво обертальних рухів відносно деякої системи точок. Покажемо, що дійсно існують такі точки фігури, швидкість яких в даний момент часу дорівнює нулю і тіло в цей час виконує миттєво обертальний рух.

Нехай тіло в плоскому русі в даний момент часу має кутову швидкість ω , а точка А - швидкість \vec{V}_A (рис. 34). Проведемо через точку А перпендикуляр до вектора швидкості \vec{V}_A . Візьмемо на цьому перпендикулярі точку Р.

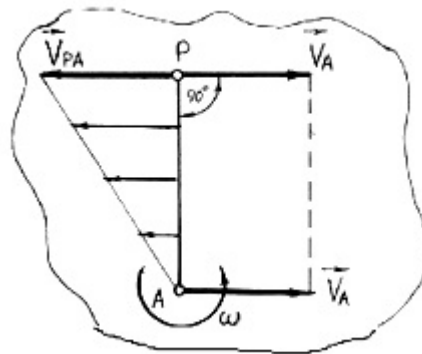


Рисунок – 34

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{V}_{PA}, \quad (a)$$

де швидкість \vec{V}_{PA} перпендикулярна відрізку AP.

Модуль швидкості

$$V_{PA} = \omega \cdot PA \quad (б)$$

Побудуємо векторну рівність (a) в точці Р. В точці Р швидкості \vec{V}_A і \vec{V}_{PA} напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому модуль швидкості точки Р буде $V_P = V_A - V_{PA}$.

З урахуванням виразу (б)

$$V_P = V_A - \omega \cdot AP.$$

Міняючи положення точки Р на перпендикулярі, тобто міняючи відстань АР, можна знайти таке положення точки Р, при якому швидкість $V_P = 0$.

$$0 = V_A - \omega \cdot AP.$$

Звідси

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (6.2).$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається **миттєвим центром швидкостей (м.ц.ш.)**. **Миттєвим центром швидкостей називається така точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.**

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перпендикулярі до вектора

швидкості на відстані $AP = \frac{V_A}{\omega}$

Вивчимо розподіл швидкостей точок плоскої фігури в тому випадку, коли в даний момент часу відомо положення миттєвого центра швидкостей. Нехай це буде точка Р (рис. 35).

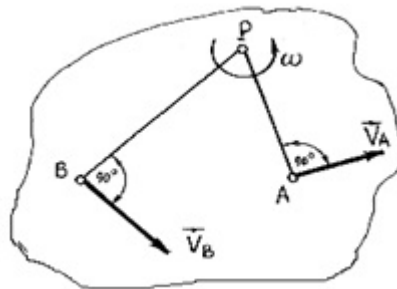


Рисунок – 35

Візьмемо за полюс точку Р. Знайдемо швидкості довільних точок А і В.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP}$$

Але швидкість $V_P = 0$.

$$\text{Тоді } \vec{V}_A = \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}$$

Швидкість $\vec{V}_A \perp AP; \quad \vec{V}_B \perp BP$

Це означає, що

$$\vec{V}_A \perp AP; \quad \vec{V}_B \perp BP. \quad (6.3)$$

$$V_{AP} = \omega \cdot AP; \quad V_{BP} = \omega \cdot BP.$$

Це означає, що

$$V_A = \omega \cdot AP; \quad V_B = \omega \cdot BP. \quad (6.4)$$

АР, ВР - називаються **миттєвими радіусами обертання**.

Візьмемо відношення $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot AP}{\omega \cdot BP}$.

Маємо :

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}.$$

(6.5)

Можна зробити такі висновки:

1. **Швидкості точок плоскої фігури в даний момент часу розподіляються так само, як при обертанні фігури навколо осі, що проходить через миттєвий центр швидкості перпендикулярно площині фігури.**

2. Модуль швидкості довільної точки плоскої фігури в кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості тіла на миттєвий радіус обертання точки. Вектор швидкості перпендикулярний миттєвому радіусу обертання.

3. **Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів до векторів швидкостей в даних точках.**

4. **Відношення швидкостей двох точок плоскої фігури прямо пропорційне відношенню відстаней цих точок до м.ц.ш.**

5. **Кутова швидкість обертання за допомогою м.ц.ш визначається за допомогою формули**

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}. \quad (6.6)$$

Щоб знайти кутову швидкість тіла при його плоскому русі за допомогою м.ц.ш., необхідно швидкість якої-небудь точки тіла розділити на її відстань до м.ц.ш.

Прийоми знаходження миттєвого центра швидкостей

Розглянемо деякі випадки плоского руху тіла і прийоми знаходження м.ц.ш.

1. Нехай відома величина і напрям швидкості точки А. Треба знайти положення м.ц.ш., якщо відомо напрям швидкості точки В (рис. 36).

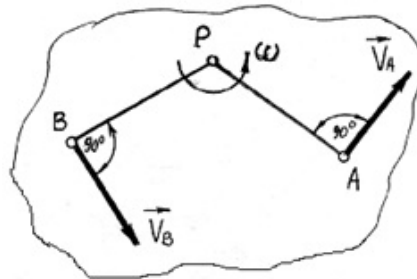


Рисунок – 36

Проведемо через точки А і В перпендикуляри до напрямів швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B . В точці Р, перетину перпендикулярів знаходиться миттєвий центр

швидкостей тіла. Швидкість точки В і кутова швидкість тіла знаходяться за формулами:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}; \quad \omega = \frac{V_A}{AP}.$$

2. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості цих точок паралельні (рис. 37). Проведемо лінію через кінці векторів швидкостей до перетину з спільним перпендикуляром. Точка перетину Р є миттєвим центром швидкостей.

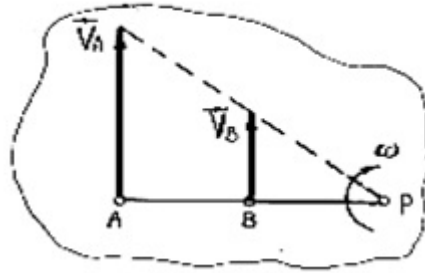


Рисунок – 37

3. Нехай точки лежать на спільному перпендикулярі до швидкостей цих точок, швидкості паралельні, але напрямлені в протилежні сторони (рис. 38). Знаходження положення м.ц.ш. подібне пункту 2.

4. Точки на одному перпендикулярі і, швидкості їх однакові по величині і напрямку (рис. 39). Якщо виконати побудову, аналогічну пункту 2, то отримаємо, що лінії не перетинаються, тобто немає такої точки, відносно якої тіло обертається. Говорять, що м.ц.ш. знаходиться на нескінченності. Це означає, що тіло виконує миттєвий поступальний рух. Швидкості $\vec{V}_A = \vec{V}_B$ і, взагалі, швидкості всіх точок тіла в цей момент часу однакові.

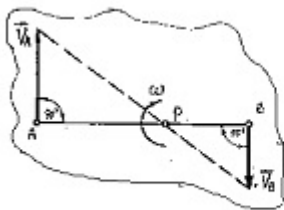


Рисунок – 38

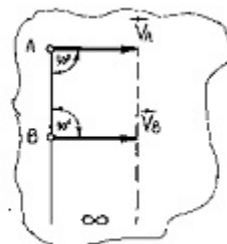


Рисунок – 39

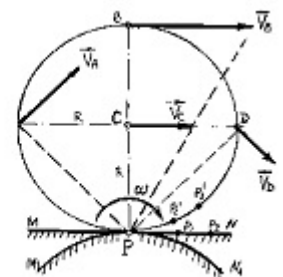


Рисунок – 40

Кутова швидкість
$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0 \quad (6.7)$$

5. Розглянемо рух колеса радіуса R по нерухомій площині (рис. 40). Нехай колесо котиться без ковзання по нерухомій лінії. Нерухома лінія може бути прямолінійною MN, або криволінійною M_1N_1 . Точка Р - точка контакту колеса з нерухомою площиною. Швидкість точки Р, що належить

колесу, повинна бути такою ж самою, як і швидкість точки Р, що належить лінії MN. Але швидкості точок, що належать лінії MN, дорівнюють нулю. Тому швидкість точки Р, що належить колесу, дорівнює нулю.

$$V_P = 0. \quad (6.8)$$

Це означає, що точка контакту Р контура плоскої фігури з нерухомою лінією MN (M_1N_1) є миттєвим центром швидкостей плоскої фігури.

Кутова швидкість колеса знаходиться з формули

$$\omega = \frac{V_C}{CP}. \quad (6.9)$$

Напрями швидкостей точок А, В, D відповідно перпендикулярні до AP, BP, DP. Знайдемо модуль швидкостей точок А, В, D.

$$\frac{V_A}{V_C} = \frac{AP}{CP}, \quad \text{але} \quad \frac{AP}{CP} = \frac{R\sqrt{2}}{R} = \sqrt{2}.$$

Тоді $V_A = V_C \sqrt{2}. \quad (6.10)$

$$\frac{V_B}{V_C} = \frac{BP}{CP}; \quad \frac{BP}{CP} = 2.$$

Тоді $V_B = 2V_C \quad (6.11)$

Швидкість точки D по модулю дорівнює швидкості точки А:

$$V_D = V_C \sqrt{2}. \quad (6.12)$$

Крім миттєвого центра швидкостей Р плоскої фігури можна розглядати збіжну з нею точку Р нерухомої площини. Слід миттєвих центрів швидкостей в нерухомій площині називається **миттєвим центром обертання, плоскої фігури**.

Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання (м.ц.о.) - геометрично одна і та ж точка, з тією тільки різницею, що м.ц.ш. - точка рухомої плоскої фігури, а м.ц.о. - точка нерухомої площини, по якій рухається плоска фігура. Миттєвий центр швидкостей і миттєвий центр обертання з часом міняють своє положення. При цьому кожний з них викреслює деяку криву: миттєвий центр швидкостей в площині фігури, а миттєвий центр обертання - в нерухомій площині.

Геометричне місце миттєвих центрів швидкостей називається **рухомою центроїдою**, а геометричне місце миттєвих центрів обертання називається **нерухомою центроїдою**.

Звернемось до рис. 3.15. Так як площина MN нерухома, то швидкості точок контакту P_1, P_2 дорівнюють нулю, т.б. точки P_1, P_2 - є миттєвими центрами обертання. В розглянутому прикладі лінія MN є нерухомою

центроїдою. Точкам $P_1, P_2 \dots$ відповідають точки $P'_1, P'_2 \dots$ поверхні (кола) колеса. Це означає, що рухомою центроїдою є коло колеса.

Узагальнюючи цей приклад, можна сказати, що при всякому не поступальному русі плоскої фігури рухома центроїда котиться по нерухомій центроїді.

План швидкостей і його властивості

Швидкості точок тіла можна знайти графічно, побудовою плану швидкостей.

Планом швидкостей називається діаграма, на якій від одного центра відкладені вектори швидкостей точок плоскої фігури. Ця діаграма дозволяє знайти швидкість будь-якої точки плоскої фігури.

Нехай в деякій момент часу руху плоскої фігури S швидкості її точок A, B, C і D - відомі (рис. 41 (а)). Відкладемо від довільної точки O (рис. 41 (б)) вектори швидкостей цих точок в вибраному масштабі, так, що

$$\vec{V}_A = \vec{oa}; \quad \vec{V}_B = \vec{ob}; \quad \vec{V}_D = \vec{od}; \quad \vec{V}_C = \vec{oc} \quad (6.13)$$

і з'єднаємо a, b, c, d відрізками прямих.

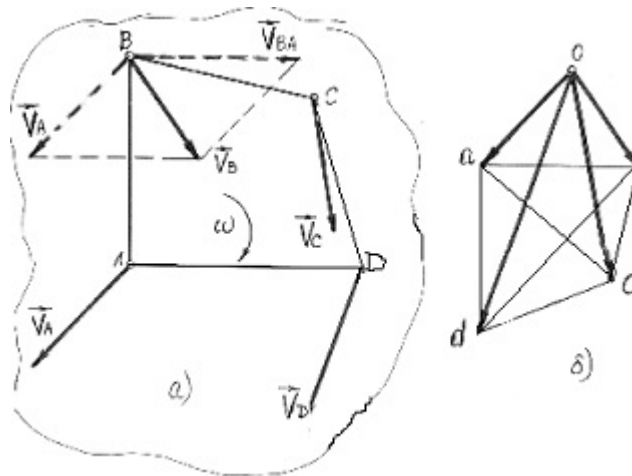


Рисунок – 41

Діаграма, яку отримали, називається **планом швидкостей**.

Відрізки oa, ob, oc, od називаються **променями**, а точки a, b, c, d - **вершинами плану швидкостей**.

Розглянемо властивості плану швидкостей.

З трикутника oab плану швидкостей маємо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{ab}. \quad (a)$$

Якщо взяти точку A за полюс, то швидкість точки B плоскої фігури згідно (3.4) буде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}. \quad (b)$$

Враховуючи позначення (6.13), вираз (b) перепишемо:

$$\vec{ob} = \vec{oa} + \vec{V}_{BA}. \quad (c)$$

З порівняння виразів (а) і (с), маємо:

$$\vec{ab} = \vec{V}_{BA}. \quad (6.14)$$

Виконуючи аналогічні операції по відношенню до других точок плоскої фігури отримаємо:

$$b\vec{c} = \vec{V}_{CB}, \quad c\vec{d} = \vec{V}_{DC}, \quad d\vec{a} = \vec{V}_{AD}, \quad a\vec{c} = \vec{V}_{CA}, \quad b\vec{d} = \vec{V}_{DB}, \quad (6.15)$$

тобто відрізки, що з'єднують вершини плану швидкостей, геометрично рівні обертальній швидкості відповідної точки плоскої фігури навколо другої точки, як навколо полюса.

Тому маємо:

$$\begin{aligned} ab &= AB \cdot \omega \quad \text{і} \quad ab \perp AB \\ bc &= BC \cdot \omega \quad \text{і} \quad bc \perp BC \\ cd &= CD \cdot \omega \quad \text{і} \quad cd \perp CD \\ ad &= AD \cdot \omega \quad \text{і} \quad ad \perp AD \\ bd &= BD \cdot \omega \quad \text{і} \quad bd \perp BD \\ ac &= AC \cdot \omega \quad \text{і} \quad ac \perp AC \end{aligned} \quad (6.16)$$

Крім цього:
$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \dots = \omega. \quad (6.17)$$

Вираз (6.17) дозволяє за допомогою плану швидкостей знайти кутову швидкість плоскої фігури.

Всі відрізки прямих, що з'єднують вершини плану швидкостей, пропорційні відріzkам прямих, що з'єднують відповідні точки плоскої фігури, і повернуті відносно останніх на кут 90^0 в сторону обертального руху плоскої фігури.

План швидкості можна побудувати не тільки для окремої плоскої фігури, але і для плоского механізму, який є сукупністю взаємозалежних плоских фігур. При цьому, формули (6.16), (6.17) справедливі тільки для кожної ланки плоского механізму окремо, але не для всього механізму в цілому.

Побудова плану швидкості

Розв'яжемо графічно слідуючу задачу. Нехай тіло виконує плоский рух. Нехай відома швидкість точки А по модулю і напрямку. В точці В фігури відомо тільки лінія MN, по якій напрямлена швидкість цієї точки, а в других точках фігури невідомі ні модулі, ні напрями швидкостей. Необхідно знайти модуль і напрям швидкості всіх точок плоскої фігури (рис. 42).

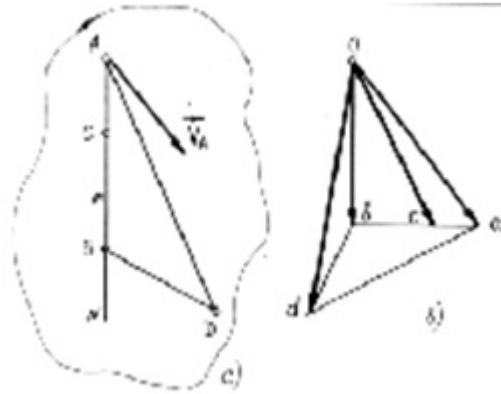


Рисунок – 42

З довільної точки O (рис. 42 (б)), відкладемо відрізок $\vec{oa} = \vec{V}_A$ і проведемо пряму, паралельну MN . З властивостей плану швидкостей випливає, що відрізки, які з'єднують вершини плану швидкостей, перпендикулярні відрізкам, які з'єднують відповідні точки фігури, тобто $ab \perp AB$ і т.д.

Щоб знайти положення вершини b плану швидкостей, проведемо з вершини a пряму, перпендикулярну AB . Точка b знайдеться на перетині цього перпендикуляра і прямої, по якій напрямлена швидкість точки B . Таким чином, промінь \vec{ob} плану швидкостей рівний \vec{V}_B , знайдений.

Швидкість іншої точки, наприклад D , і відповідний їй промінь \vec{od} плану швидкостей можна знайти, з'єднавши цю точку з точками A і B прямими на плоскій фігурі і провівши перпендикуляри з точок a і b плану швидкостей до AD і BD до їх перетину. Так знайдеться положення вершини d плану швидкостей і відрізок od , який визначає швидкість точки D .

Побудова, яка виконана для знаходження \vec{V}_D точки D , ґрунтується на наступному:

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad \vec{V}_D = \vec{V}_B + \vec{V}_{DB},$$

де за полюси взяти точки A і B .

Використовуючи позначення (6.15), маємо :

$$\vec{od} = \vec{oa} + \vec{ad}, \quad \vec{od} = \vec{ob} + \vec{bd},$$

де $\vec{ad} \perp AD, \quad \vec{bd} \perp BD$.

Побудову плану швидкостей можна продовжити для будь-якої кількості точок плоскої фігури.

Якщо промені \vec{oa} і \vec{ob} побудовані і є необхідність знайти швидкість точки C , яка лежить на прямій AB , наприклад, $\frac{1}{3}AB$ від точки A , скористуємося властивістю 2 швидкостей точок фігури.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{ac}{bc}$$

Тому вершина c плану швидкостей буде розміщена на прямій ab в $\frac{1}{3}ab$ від точки a . (рис. 42 (б)).

Побудову плану швидкостей для механізмів ми розглянемо в подальшому при розв'язанні конкретних задач.

Миттєвий центр прискорень

Миттєвим центром прискорень (м.ц.п.) називається точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо, що така точка існує. Нехай відомо прискорення \vec{a}_A точки A і відомі кутова швидкість ω і кутове прискорення ε плоскої фігури (рис. 43).

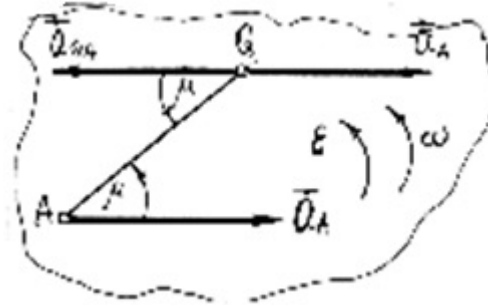


Рисунок – 43

Через точку A проведемо промінь під кутом μ до вектора прискорення. Кут μ будемо відкладати від вектора прискорення в напрямі, що співпадає з напрямом кутового прискорення ε . Значення кута μ знайдемо з виразу $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. На цьому промені візьмемо точку Q . Знайдемо прискорення точки Q . Візьмемо за полюс точку A .

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_A + \vec{a}_{QA}$$

Модуль прискорення $a_{QA} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, а напрям прискорення \vec{a}_{QA} складає кут μ з відрізком AQ

Прискорення \vec{a}_A і \vec{a}_{QA} напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. Тому прискорення точки Q буде $a_Q = a_A - a_{QA}$ або $a_Q = a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

На промені можна підібрати таке положення точки Q , щоб її прискорення було рівним нулю. $a_Q = 0$. Тоді $a_A - AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0$.

$$\text{Маємо} \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (6.18)$$

Таким чином довели, що існує така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Щоб знайти положення миттєвого центра прискорень, необхідно:

1) по формулі $tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$ знайти кут μ ;

2) під кутом μ , що відкладається від відомого вектора \vec{a}_A прискорення точки в сторону прискорення ε , провести промінь;

3) на промені на відстані $AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$ взяти точку Q, яка і буде

миттєвим центром прискорень.

Якщо миттєвий центр прискорень прийняти за полюс, то прискорення довільної точки плоскої фігури в даний момент знаходиться як прискорення цієї точки при її оберտальному русі навколо м.ц.п.

Дійсно, прийнявши за полюс точку Q – миттєвий центр прискорень, для довільних точок A і B плоскої фігури, отримаємо:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_Q + \vec{a}_{AQ}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{a}_{BQ}.$$

Так як $a_Q = 0$, то $\vec{a}_A = \vec{a}_{AQ}$ і $\vec{a}_B = \vec{a}_{BQ}$,

де $\vec{a}_{AQ} = \vec{a}_{AQ}^n + \vec{a}_{AQ}^\tau$, $\vec{a}_{BQ} = \vec{a}_{BQ}^n + \vec{a}_{BQ}^\tau$ – прискорення точок A і B при їх оберտальному русі навколо м.ц.п.

З цих співвідношень випливає, що

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (a)$$

$$a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (б)$$

Розділимо почленно (а) на (б):

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}. \quad (6.16)$$

Модулі прискорень точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням цих точок до м.ц.п., а вектора прискорень утворюють один і той же кут μ з відрізками, що з'єднують ці точки з м.ц.п.

На рис. 44 показані положення Q – миттєвого центра прискорень і напрями прискорень точок A і B плоскої фігури.

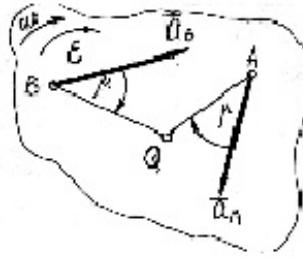


Рисунок – 44

Визначення положення миттєвого центра прискорень

При визначенні положення м.ц.п. плоскої фігури, в залежності від початкових даних, можна використати або умов(6.18), або той факт, що вектори прискорень точок плоскої фігури складають з напрямом на м.ц.п. один і той же кут.

Розглянемо три основні випадки визначення положення миттєвого центра прискорень.

Випадок 1. По умові задачі відомі слідуєчі величини:

1. Модуль і напрям вектора прискорення однієї з точок плоскої фігури.
2. Модуль кутової швидкості плоскої фігури.
3. Модуль і напрям кутового прискорення плоскої фігури.

Знайдемо положення м.ц.п. плоскої фігури якщо відомі, прискорення \vec{a}_A точки A, кутове прискорення ϵ і кутова швидкість ω .

В цьому випадку положення миттєвого центра прискорень можна знайти по формулам:

$$\mu = \arctg \frac{|\epsilon|}{\omega^2}, \quad AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}$$

В залежності від величини і напрямів ω і ϵ розглянемо три окремих варіанта цього випадку:

- а) $\omega \neq 0, \epsilon=0$.

Кутове прискорення ϵ дорівнює нулю або при рівномірному обертанні плоскої фігури навколо полюса, або в той момент часу, коли кутове прискорення ϵ змінює свій знак. В цьому випадку формули (6.18) будуть мати вигляд:

$$\mu = \arctg 0 = 0, \quad AQ = \frac{a_A}{\omega^2}$$

Таким чином, м.ц.п. в даному випадку лежить на продовженні вектора \vec{a}_A і вектори прискорень всіх точок плоскої фігури мають напрям до м.ц.п. Q (рис. 45 а).

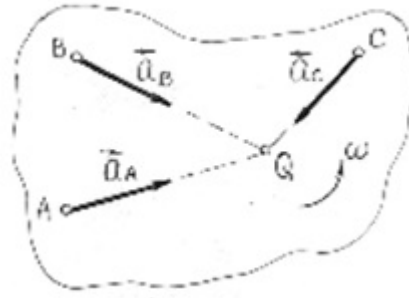


Рисунок – 45. а

б) $\omega=0, \varepsilon \neq 0$.

Такий випадок руху плоскої фігури можливий, якщо кутова швидкість ω змінює свій знак. Для цього випадку положення миттєвого центра прискорень Q знаходиться з виразів:

$$\mu = \arctg \infty = 90^0, \quad AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}$$

Кут μ відкладається в напрямі кутового прискорення. Якщо при русі плоскої фігури $\omega=0, \varepsilon \neq 0$ і відомі прискорення двох її точок, то м.ц.п. знайдеться на перетині перпендикулярів до відомих векторів прискорень (рис. 45 б).

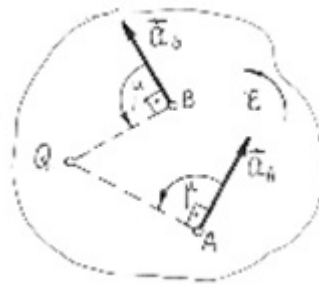


Рисунок – 45. б

в) $\omega=0, \varepsilon=0$.

В цьому випадку прискорення всіх точок плоскої фігури при обертанні їх навколо полюса дорівнюють нулю, отже, прискорення кожної її точки дорівнює прискоренню полюса і миттєвий центр прискорень відсутній.

Випадок 2. По умові задачі відомі модулі і напрямки прискорень двох точок плоскої фігури.

В даному випадку ні величина кута μ , ні напрям кутового прискорення плоскої фігури не відомі. Але і те, і друге можна знайти, якщо знайти прискорення однієї з точок плоскої фігури в її обертальному русі навколо другої точки як навколо полюса.

Нехай прискорення точок A і B плоскої фігури відомі (рис. 46).

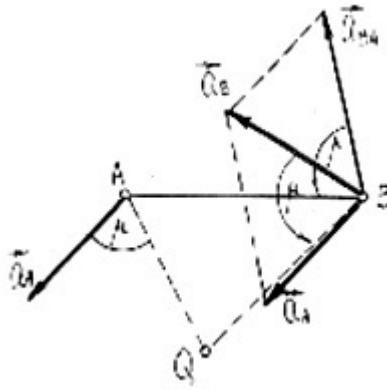


Рисунок – 46

Візьмемо за полюс точку А. Тоді прискорення точки В можна зв'язати з прискоренням точки А виразом $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$.

Побудуємо при точці В у відповідному масштабі паралелограм прискорень по заданій діагоналі \vec{a}_B і одній з сторін \vec{a}_A . Друга сторона паралелограма визначить прискорення \vec{a}_{BA} при обертанні точки В навколо точки А.

Прискорення \vec{a}_{BA} складає кут $\mu = \arctg \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$ з відрізком АВ, який з'єднує точку В з полюсом А. Кут μ відкладається в напрямі від вектора \vec{a}_{BA} до відрізка АВ. Це дає змогу знайти напрям кутового прискорення ϵ . Відкладемо під кутом μ від векторів прискорень точок А і В два промені і продовжимо їх до перетину в точці Q, яка і буде миттєвим центром прискорень.

Якщо прискорення двох точок А і В плоскої фігури паралельні, то спосіб знаходження миттєвого центра прискорень показаний на рис. 47.

В справедливості цієї побудови можна переконатися, порівнюючи пропорцію $\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}$, отриману з подібності трикутників (рис. 47) з аналогічною пропорцією (6.17), яка характеризує властивість миттєвого центра прискорень.

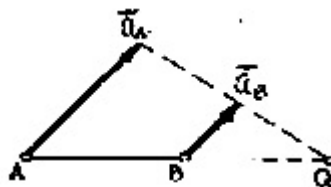


Рисунок – 47

Випадок 3. По умові задачі відома така точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю. Ця точка, якщо вона єдина, і буде миттєвим центром прискорень.

Для ілюстрації розглянемо прямолінійний рух колеса, швидкість V_Q центра Q якого постійна. $V_Q = \text{const}$ (рис. 48).

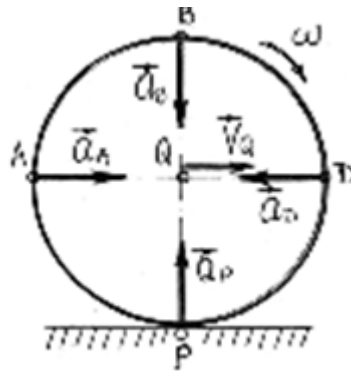


Рисунок – 48

Це означає, що прискорення центра колеса дорівнює нулю. $a_Q = 0$.

Доведемо, що дійсно точка Q є миттєвим центром прискорень.

Точка P – миттєвий центр швидкостей. Кутова швидкість колеса $\omega = \frac{V_Q}{QP}$. Кутове прискорення колеса $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_Q}{QP} \right)$. При русі колеса

відстань QP не змінюється, т.б. $QP = \text{const}$.

$$\text{Тоді } \varepsilon = \frac{1}{QP} \cdot \frac{dV_Q}{dt} = \frac{a_Q}{QP} = 0.$$

Маємо для колеса $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$.

Таким чином, прискорення всіх точок колеса напрямлені до центра колеса, т.б. точка Q є миттєвим центром прискорень.

Примітка. Цей приклад наочно показує, що миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей плоскої фігури не співпадають. Дійсно, миттєвим центром швидкостей колеса є точка P , прискорення якої $a_p = \omega^2 \cdot QP \neq 0$.

Завдання для розрахунково-графічної роботи №5 “Кінематичний аналіз плоского механізму”

1. Варіанти завдань РГР № 5

Стержень 1 обертається з заданою постійною кутовою швидкістю ω_1 . Для заданого положення механізму необхідно:

1. Знайти швидкості точок А, В, С, D за допомогою миттєвих центрів швидкостей (м.ц.ш.) і плану швидкостей;
2. Знайти кутові швидкості стержнів 2, 3, 4 за допомогою м.ц.ш. і плану швидкостей;
3. Знайти прискорення точок А, В аналітичним способом і за допомогою плану прискорень;
4. Знайти кутове прискорення стержня 2.

Необхідні дані приведені в таблицях 6.1 - 6.4, а відповідні схеми на рисунках 6.1 і 6.2.

Стержні з опорами O_1 і O_2 , повзуном і між собою з'єднані шарнірно. Положення механізму визначається кутами φ , α , γ , β , ψ . Значення цих кутів приведені в таблицях для кожного варіанту. Дугові стрілки на рисунках показують, як повинні відкладатись кути при побудові механізму.

Побудову механізму треба починати з стержня 1 і побудови кутів φ і α . Механізм повинен бути побудований в вибраному масштабі. Це дозволить знаходити відстані до м.ц.ш. простим їх заміром на рисунку.

Кутова швидкість ω_1 стержня 1 в усіх варіантах напрямлена проти ходу годинникової стрілки.

Таблиця 7.1

| Варіант | Схема | Геометричні розміри | | | | | Кути між стержнями | | | | | Кутова швидкість |
|---------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-----|--------------------|----------|----------|---------|--------|------------------|
| | | l_1 | l_2 | l_3 | l_4 | АС | Φ | α | Γ | β | Ψ | ω_1 |
| | | м | м | М | М | м | Град | град | град | град | град | Рад/с |
| 1 | 1 | 0,2 | 0,9 | 0,4 | 0,8 | 0,3 | 30 | 120 | 80 | 100 | 60 | 4 |
| 2 | 1 | 0,2 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 0,4 | 60 | 120 | 70 | 110 | 60 | 6 |
| 3 | 1 | 0,3 | 1,2 | 0,5 | 0,5 | 0,6 | 75 | 110 | 90 | 120 | 50 | 8 |
| 4 | 1 | 0,4 | 1,4 | 1,2 | 0,8 | 0,8 | 90 | 80 | 100 | 100 | 40 | 10 |
| 5 | 1 | 0,25 | 1,0 | 0,5 | 0,7 | 0,5 | 120 | 60 | 60 | 90 | 45 | 7 |
| 6 | 1 | 0,35 | 1,1 | 0,6 | 0,7 | 0,6 | 45 | 90 | 120 | 75 | 60 | 10 |
| 7 | 2 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 0,5 | 0,6 | 0 | 90 | 45 | 30 | 60 | 12 |
| 8 | 2 | 0,4 | 1,0 | 0,8 | 0,4 | 0,3 | 30 | 120 | 45 | 60 | 60 | 5 |
| 9 | 2 | 0,3 | 1,2 | 0,9 | 0,4 | 0,5 | 45 | 120 | 60 | 30 | 30 | 14 |
| 10 | 2 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,2 | 0,4 | 60 | 150 | 45 | 60 | 45 | 10 |
| 11 | 2 | 0,2 | 0,7 | 0,8 | 0,3 | 0,3 | 90 | 150 | 60 | 45 | 75 | 8 |
| 12 | 2 | 0,25 | 1,0 | 0,8 | 0,4 | 0,5 | 90 | 210 | 60 | 75 | 60 | 6 |
| 13 | 3 | 0,6 | 1,6 | 0,4 | 0,8 | 0,4 | 30 | 60 | 90 | 100 | 60 | 4 |
| 14 | 3 | 0,6 | 1,7 | 0,5 | 0,6 | 0,3 | 45 | 60 | 120 | 60 | 45 | 6 |
| 15 | 3 | 0,5 | 1,2 | 0,5 | 0,6 | 0,2 | 60 | 75 | 90 | 60 | 30 | 8 |
| 16 | 3 | 0,4 | 1,2 | 0,6 | 0,8 | 0,2 | 90 | 60 | 60 | 150 | 60 | 10 |
| 17 | 3 | 0,4 | 1,2 | 0,4 | 0,6 | 0,2 | 120 | 75 | 60 | 120 | 30 | 12 |
| 18 | 3 | 0,5 | 1,6 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 120 | 90 | 45 | 60 | 40 | 6 |
| 19 | 4 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | - | 0,4 | 0 | 30 | 45 | 60 | 45 | 12 |
| 20 | 4 | 0,2 | 0,7 | 0,7 | - | 0,3 | 30 | 60 | 45 | 30 | 30 | 14 |
| 21 | 4 | 0,2 | 0,6 | 0,6 | - | 0,3 | 60 | 30 | 50 | 30 | 45 | 16 |
| 22 | 4 | 0,3 | 0,8 | 0,7 | - | 0,4 | 75 | 30 | 45 | 30 | 60 | 10 |
| 23 | 4 | 0,3 | 0,8 | 0,6 | - | 0,5 | 90 | 60 | 30 | 45 | 20 | 8 |
| 24 | 4 | 0,25 | 0,8 | 0,6 | - | 0,4 | 45 | 45 | 60 | 75 | 60 | 12 |
| 25 | 5 | 0,3 | 1,2 | 1,0 | 0,4 | 0,5 | 0 | 145 | 95 | 30 | 45 | 16 |
| 26 | 5 | 0,3 | 1,3 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 30 | 75 | 120 | 45 | 30 | 15 |
| 27 | 5 | 0,25 | 1,0 | 0,7 | 0,4 | 0,5 | 45 | 60 | 150 | 60 | 50 | 17 |
| 28 | 5 | 0,4 | 1,3 | 0,9 | 0,3 | 0,6 | 60 | 75 | 150 | 45 | 45 | 18 |
| 29 | 5 | 0,4 | 1,25 | 1,0 | 0,4 | 0,7 | 75 | 80 | 120 | 60 | 30 | 10 |
| 30 | 5 | 0,3 | 1,4 | 1,2 | 0,4 | 0,8 | 90 | 60 | 140 | 80 | 30 | 8 |

Таблиця 7.2

| Варіант | Схема | Геометричні розміри | | | | | Кути між стержнями | | | | | Кутова швидкість |
|---------|-------|---------------------|-------|-------|-------|------|--------------------|----------|------|---------|------|------------------|
| | | l_1 | l_2 | l_3 | l_4 | АС | Ф | α | Г | β | Ψ | ω_1 |
| | | м | м | м | м | м | Град | град | град | град | Град | Рад/с |
| 31 | 6 | 0,3 | 0,8 | 0,4 | 0,9 | 0,4 | 0 | 80 | 45 | 30 | 60 | 12 |
| 32 | 6 | 0,3 | 0,9 | 0,4 | 0,8 | 0,4 | 30 | 90 | 30 | 60 | 120 | 10 |
| 33 | 6 | 0,2 | 0,8 | 0,3 | 0,6 | 0,6 | 45 | 30 | 60 | 120 | 75 | 8 |
| 34 | 6 | 0,4 | 1,2 | 0,4 | 1,2 | 0,6 | 60 | 45 | 75 | 45 | 80 | 14 |
| 35 | 6 | 0,4 | 1,4 | 0,5 | 1,2 | 0,5 | 75 | 60 | 30 | 90 | 90 | 16 |
| 36 | 6 | 0,35 | 1,2 | 0,6 | 1,3 | 0,4 | 90 | 45 | 60 | 80 | 120 | 15 |
| 37 | 7 | 0,5 | 1,5 | 1,1 | 0,6 | 0,8 | 0 | 130 | 90 | 45 | 30 | 10 |
| 38 | 7 | 0,45 | 1,5 | 1,0 | 0,5 | 0,7 | 30 | 120 | 75 | 60 | 65 | 8 |
| 39 | 7 | 0,3 | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 45 | 90 | 60 | 40 | 60 | 12 |
| 40 | 7 | 0,35 | 1,2 | 0,9 | 0,5 | 0,6 | 60 | 100 | 75 | 45 | 90 | 6 |
| 41 | 7 | 0,25 | 0,9 | 0,8 | 0,4 | 0,4 | 75 | 120 | 60 | 50 | 30 | 4 |
| 42 | 7 | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 0,3 | 0,4 | 90 | 150 | 90 | 30 | 80 | 9 |
| 43 | 8 | 0,4 | 1,4 | 1,2 | 0,6 | 0,6 | 120 | 30 | 90 | 150 | 60 | 2 |
| 44 | 8 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 0,5 | 0,5 | 90 | 30 | 120 | 120 | 60 | 4 |
| 45 | 8 | 0,3 | 0,9 | 0,9 | 0,4 | 0,4 | 75 | 100 | 120 | 90 | 45 | 6 |
| 46 | 8 | 0,3 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 60 | 120 | 60 | 120 | 45 | 8 |
| 47 | 8 | 0,25 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 45 | 120 | 75 | 90 | 60 | 10 |
| 48 | 8 | 0,25 | 0,6 | 0,6 | 0,3 | 0,3 | 30 | 150 | 60 | 135 | 45 | 12 |
| 49 | 9 | 0,3 | 1,2 | 1,0 | 0,6 | 0,6 | 0 | 120 | 90 | 100 | 45 | 6 |
| 50 | 9 | 0,3 | 1,0 | 0,8 | 0,5 | 0,5 | 30 | 90 | 120 | 90 | 60 | 8 |
| 51 | 9 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 0,6 | 0,5 | 45 | 120 | 80 | 110 | 60 | 10 |
| 52 | 9 | 0,35 | 0,9 | 1,2 | 0,6 | 0,4 | 60 | 100 | 60 | 75 | 50 | 4 |
| 53 | 9 | 0,25 | 0,8 | 1,0 | 0,6 | 0,4 | 75 | 60 | 120 | 90 | 40 | 6 |
| 54 | 9 | 0,2 | 0,7 | 0,9 | 0,6 | 0,35 | 90 | 60 | 120 | 120 | 45 | 8 |
| 55 | 10 | 0,4 | 1,4 | 1,3 | 0,6 | 0,7 | 0 | 60 | 120 | 45 | 45 | 6 |
| 56 | 10 | 0,3 | 1,2 | 1,1 | 0,5 | 0,6 | 30 | 75 | 100 | 60 | 50 | 5 |
| 57 | 10 | 0,35 | 1,2 | 1,2 | 0,6 | 0,5 | 45 | 60 | 120 | 45 | 75 | 8 |
| 58 | 10 | 0,25 | 1,0 | 1,0 | 0,5 | 0,5 | 60 | 80 | 90 | 75 | 30 | 4 |
| 59 | 10 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,4 | 0,4 | 75 | 120 | 60 | 90 | 30 | 5 |
| 60 | 10 | 0,2 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,3 | 90 | 110 | 40 | 60 | 45 | 10 |

Таблиця 7.3.

| Варіант | Схема | Геометричні розміри | | | | | Кути між стержнями | | | | | Кутова швидкість |
|---------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-----|--------------------|----------|------|---------|------|------------------|
| | | l_1 | l_2 | l_3 | l_4 | АС | Ф | α | Г | β | Ψ | ω_1 |
| | | м | м | м | м | м | Град | град | град | град | Град | Рад/с |
| 61 | 11 | 0,4 | 1,2 | 1,4 | - | 0,7 | 0 | 120 | 45 | 60 | 30 | 6 |
| 62 | 11 | 0,35 | 1,1 | 1,3 | - | 0,6 | 30 | 115 | 35 | 45 | 30 | 5 |
| 63 | 11 | 0,3 | 0,9 | 1,1 | - | 0,4 | 45 | 90 | 60 | 40 | 60 | 4 |
| 64 | 11 | 0,25 | 0,8 | 1,0 | - | 0,4 | 60 | 120 | 45 | 75 | 45 | 8 |
| 65 | 11 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | - | 0,3 | 75 | 120 | 60 | 30 | 60 | 9 |
| 66 | 11 | 0,3 | 1,0 | 1,2 | - | 0,5 | 90 | 80 | 75 | 30 | 45 | 10 |
| 67 | 12 | 0,2 | 1,0 | 0,8 | 0,4 | 0,5 | 0 | 30 | 95 | 45 | 30 | 12 |
| 68 | 12 | 0,25 | 0,8 | 0,7 | 0,5 | 0,4 | 30 | 30 | 120 | 60 | 30 | 14 |
| 69 | 12 | 0,3 | 1,0 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 45 | 120 | 90 | 30 | 45 | 9 |
| 70 | 12 | 0,35 | 1,2 | 1,0 | 0,5 | 0,6 | 60 | 90 | 120 | 30 | 30 | 10 |
| 71 | 12 | 0,40 | 1,4 | 1,0 | 0,6 | 0,7 | 75 | 45 | 90 | 60 | 45 | 12 |
| 72 | 12 | 0,4 | 1,4 | 1,2 | 0,5 | 0,6 | 90 | 60 | 120 | 40 | 45 | 14 |
| 73 | 13 | 0,2 | 1,0 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 0 | 60 | 70 | 60 | 135 | 6 |
| 74 | 13 | 0,25 | 1,0 | 0,8 | 0,3 | 0,5 | 30 | 70 | 60 | 60 | 150 | 8 |
| 75 | 13 | 0,3 | 1,2 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 45 | 90 | 30 | 60 | 100 | 9 |
| 76 | 13 | 0,35 | 1,2 | 0,9 | 0,5 | 0,6 | 60 | 45 | 60 | 90 | 60 | 12 |
| 77 | 13 | 0,3 | 1,2 | 0,8 | 0,6 | 0,5 | 75 | 60 | 30 | 60 | 135 | 6 |
| 78 | 13 | 0,4 | 1,2 | 0,9 | 0,4 | 0,6 | 90 | 120 | 30 | 45 | 120 | 4 |
| 79 | 14 | 0,5 | 1,5 | 1,6 | - | 0,6 | 0 | 80 | 60 | 45 | 120 | 2 |
| 80 | 14 | 0,5 | 1,6 | 1,5 | - | 0,8 | 30 | 60 | 45 | 30 | 130 | 4 |
| 81 | 14 | 0,4 | 1,4 | 1,2 | - | 0,7 | 45 | 120 | 30 | 60 | 150 | 6 |
| 82 | 14 | 0,35 | 1,2 | 1,0 | - | 0,6 | 60 | 100 | 45 | 30 | 120 | 8 |
| 83 | 14 | 0,3 | 1,0 | 0,8 | - | 0,4 | 75 | 90 | 60 | 45 | 110 | 10 |
| 84 | 14 | 0,25 | 0,9 | 0,8 | - | 0,4 | 90 | 60 | 30 | 75 | 135 | 9 |
| 85 | 15 | 0,3 | 1,2 | 0,4 | 1,6 | 0,4 | 0 | 60 | 80 | 70 | 45 | 12 |
| 86 | 15 | 0,3 | 1,2 | 0,5 | 1,6 | 0,5 | 30 | 100 | 45 | 60 | 30 | 10 |
| 87 | 15 | 0,25 | 1,1 | 0,4 | 1,5 | 0,4 | 45 | 60 | 45 | 90 | 60 | 12 |
| 88 | 15 | 0,2 | 0,8 | 0,3 | 1,2 | 0,4 | 60 | 90 | 45 | 75 | 40 | 9 |
| 89 | 15 | 0,2 | 0,7 | 0,4 | 1,0 | 0,3 | 75 | 60 | 30 | 30 | 45 | 8 |
| 90 | 15 | 0,2 | 0,7 | 0,4 | 0,8 | 0,5 | 90 | 150 | 60 | 45 | 30 | 7 |

Таблиця 7.4.

| Варіант | Схема | Геометричні розміри | | | | | Кути між стержнями | | | | | Кутова швидкість |
|---------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-----|--------------------|----------|------|---------|------|------------------|
| | | l_1 | l_2 | l_3 | l_4 | АС | Ф | α | Г | β | Ψ | ω_1 |
| | | м | м | м | м | м | Град | град | град | град | Град | Рад/с |
| 91 | 16 | 0,4 | 1,2 | 0,6 | 0,8 | 0,5 | 0 | 60 | 45 | 80 | 120 | 6 |
| 92 | 16 | 0,35 | 1,1 | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 30 | 120 | 60 | 45 | 110 | 8 |
| 93 | 16 | 0,3 | 1,0 | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 45 | 60 | 45 | 75 | 120 | 10 |
| 94 | 16 | 0,25 | 0,8 | 0,5 | 0,7 | 0,4 | 60 | 90 | 30 | 80 | 100 | 12 |
| 95 | 16 | 0,2 | 0,7 | 0,6 | 0,6 | 0,3 | 75 | 60 | 30 | 90 | 60 | 9 |
| 96 | 16 | 0,2 | 0,6 | 0,6 | 0,8 | 0,4 | 90 | 150 | 60 | 30 | 45 | 5 |
| 97 | 17 | 0,25 | 1,0 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 0 | 80 | 120 | 90 | 60 | 6 |
| 98 | 17 | 0,3 | 1,1 | 0,8 | 0,5 | 0,5 | 30 | 110 | 90 | 120 | 45 | 8 |
| 99 | 17 | 0,35 | 1,2 | 0,9 | 0,4 | 0,6 | 45 | 75 | 60 | 120 | 60 | 7 |
| 100 | 17 | 0,4 | 1,2 | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 60 | 60 | 110 | 120 | 45 | 6 |
| 101 | 17 | 0,45 | 1,3 | 0,9 | 0,6 | 0,6 | 75 | 90 | 120 | 100 | 45 | 5 |
| 102 | 17 | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,4 | 90 | 120 | 45 | 150 | 60 | 9 |
| 103 | 18 | 0,2 | 0,8 | 0,8 | 0,4 | 0,6 | 0 | 120 | 45 | 45 | 60 | 12 |
| 104 | 18 | 0,25 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 0,4 | 30 | 100 | 60 | 45 | 45 | 10 |
| 105 | 18 | 0,3 | 1,0 | 0,9 | 0,6 | 0,5 | 45 | 80 | 75 | 60 | 120 | 9 |
| 106 | 18 | 0,35 | 1,2 | 0,9 | 0,7 | 0,6 | 60 | 90 | 45 | 120 | 120 | 8 |
| 107 | 18 | 0,4 | 1,3 | 1,0 | 0,8 | 0,5 | 75 | 60 | 45 | 150 | 135 | 6 |
| 108 | 18 | 0,45 | 1,4 | 1,2 | 1,0 | 0,7 | 90 | 60 | 75 | 30 | 150 | 4 |
| 109 | 19 | 0,4 | 1,3 | 1,2 | 1,0 | 0,6 | 0 | 30 | 45 | 120 | 45 | 6 |
| 110 | 19 | 0,35 | 1,2 | 1,2 | 0,8 | 0,6 | 30 | 45 | 30 | 90 | 60 | 8 |
| 111 | 19 | 0,3 | 1,1 | 1,1 | 0,9 | 0,6 | 45 | 60 | 110 | 135 | 75 | 7 |
| 112 | 19 | 0,25 | 1,0 | 0,9 | 0,8 | 0,5 | 60 | 30 | 45 | 150 | 30 | 6 |
| 113 | 19 | 0,2 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 75 | 60 | 30 | 90 | 45 | 5 |
| 114 | 19 | 0,2 | 0,6 | 0,6 | 0,5 | 0,3 | 90 | 30 | 45 | 120 | 75 | 4 |
| 115 | 20 | 0,25 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0 | 45 | 60 | 110 | 30 | 12 |
| 116 | 20 | 0,3 | 0,9 | 0,8 | 0,8 | 0,6 | 30 | 75 | 30 | 150 | 45 | 10 |
| 117 | 20 | 0,35 | 1,0 | 1,2 | 1,0 | 0,6 | 45 | 60 | 150 | 75 | 30 | 10 |
| 118 | 20 | 0,4 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 0,6 | 60 | 30 | 90 | 120 | 75 | 5 |
| 119 | 20 | 0,35 | 1,1 | 1,4 | 0,9 | 0,5 | 75 | 60 | 120 | 90 | 60 | 4 |
| 120 | 20 | 0,3 | 1,2 | 1,4 | 0,8 | 0,6 | 90 | 45 | 60 | 90 | 75 | 4 |

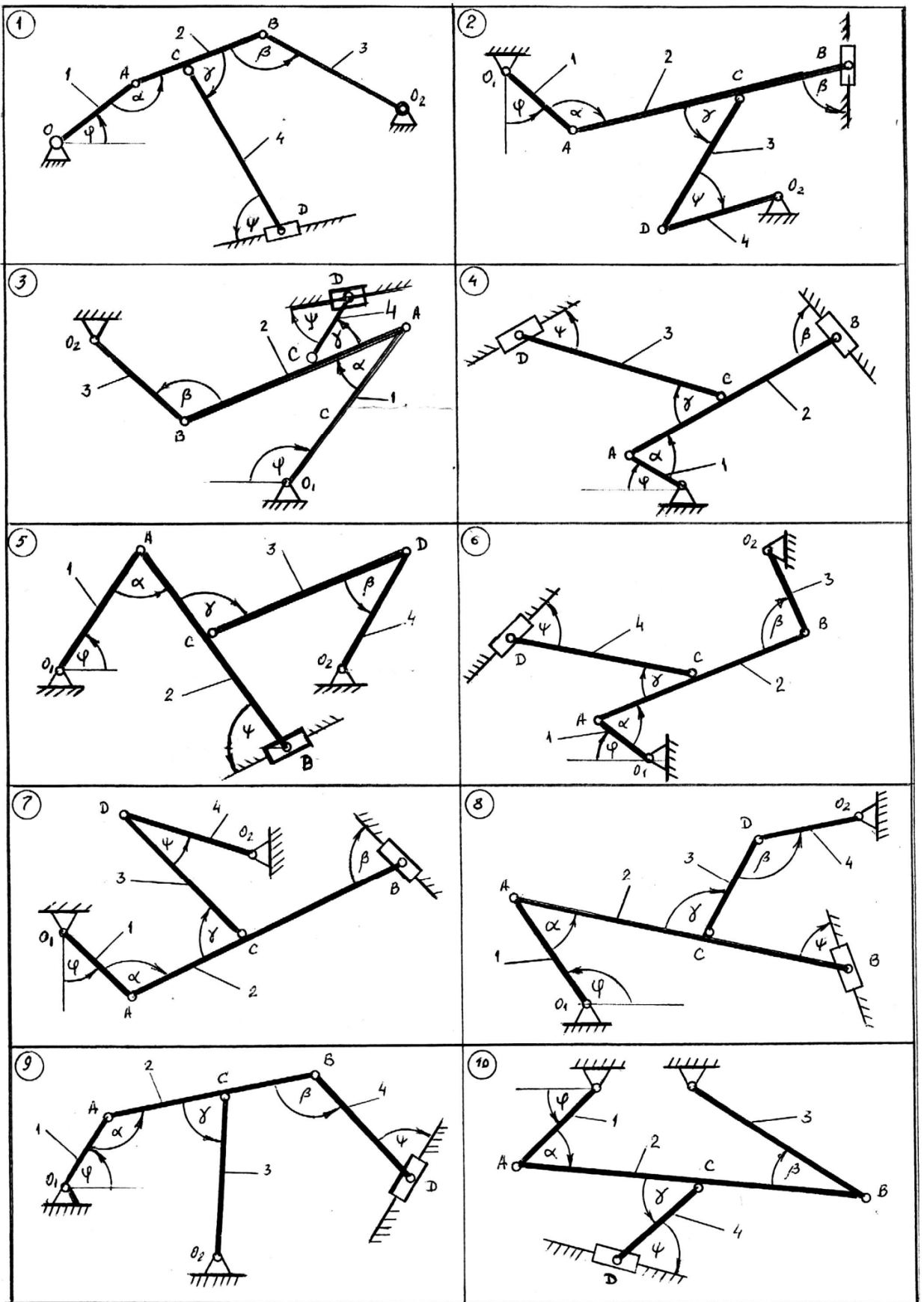
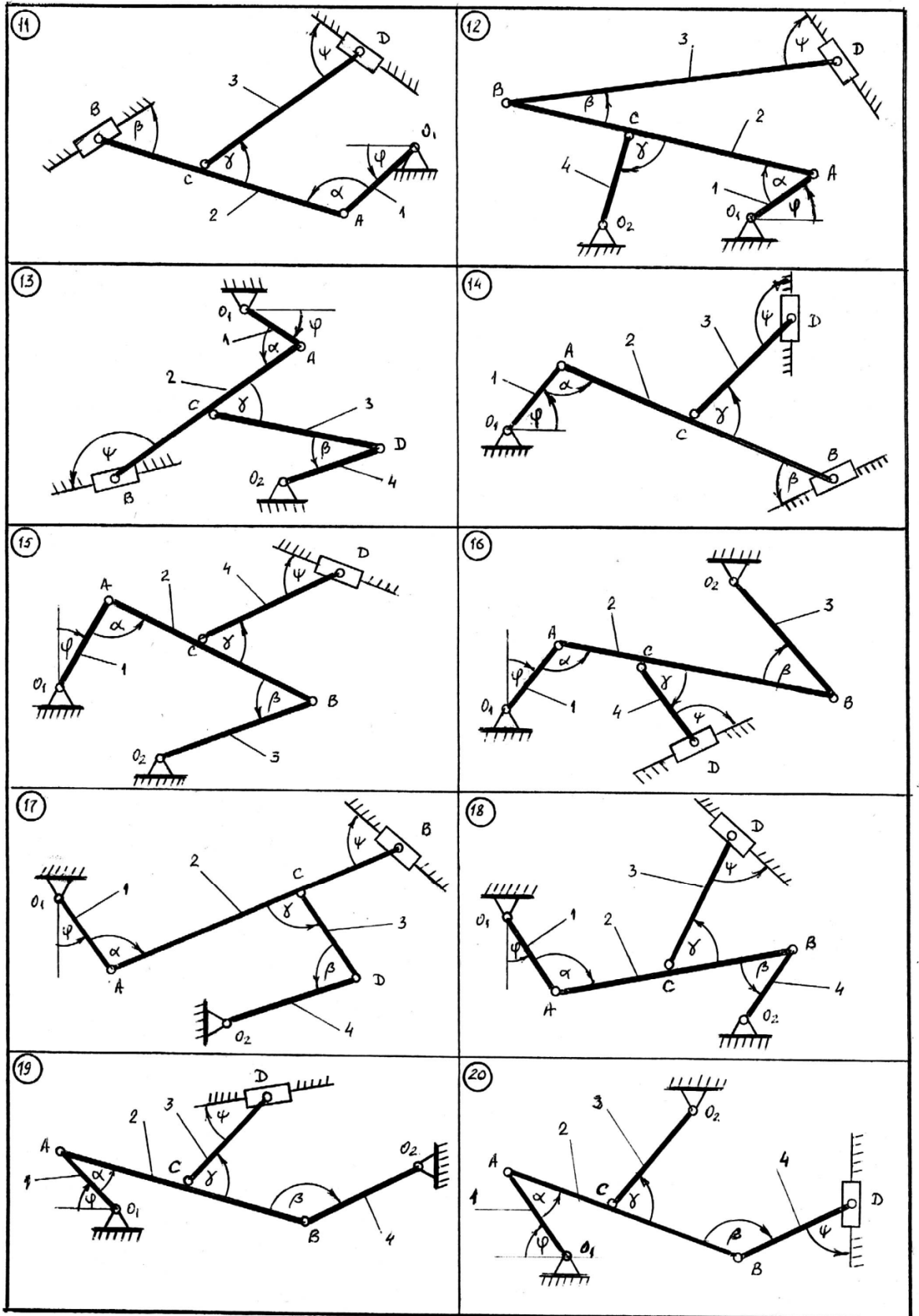


Рис. 7.1

Схеми до варіантів



Вказівки до виконання РГР № 5

Використовуючи відомості, які приведені в розділі 3, проведемо кінематичний аналіз багатоланкового механізму, який наведений на рисунку 6.3.

Геометричні розміри: $O_1A = l_1 = 0,4\text{ м}$, $AB = l_2 = 1,0\text{ м}$, $BO_2 = l_3 = 0,7\text{ м}$, $CD = l_4 = 0,6\text{ м}$, $AC = 0,6 \cdot l_2 = 0,6\text{ м}$. Кути: $\varphi = 150^\circ$, $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $\psi = 45^\circ$

Кривошип O_1A обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega_1 = 5\text{ рад/с}$.

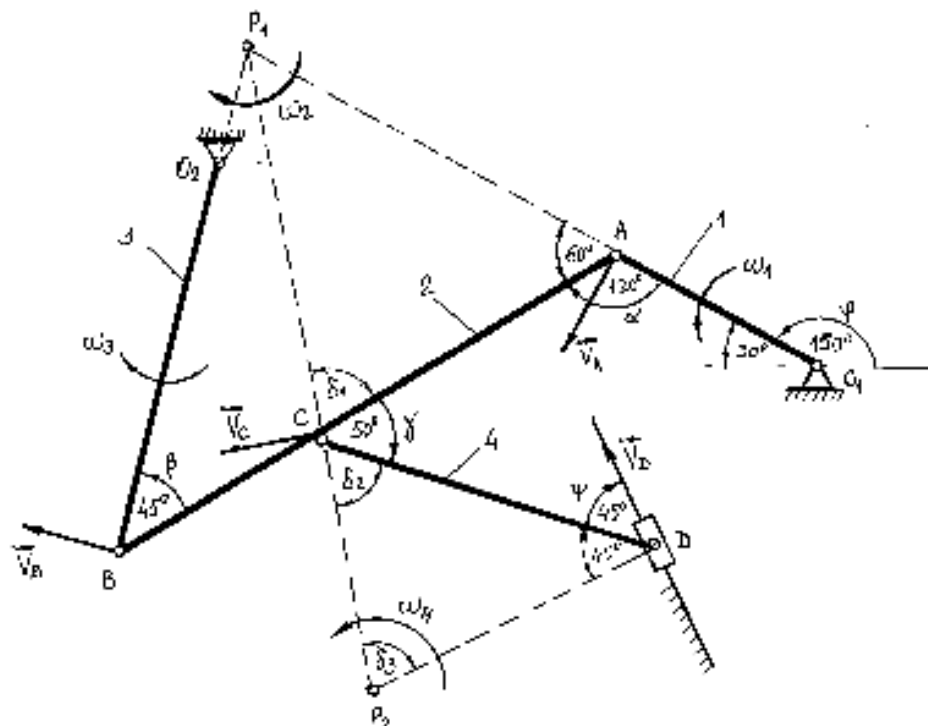


Рис. 6.3

1. Знайдемо швидкості точок A, B, C, D механізму за допомогою миттєвого центра швидкостей і плану швидкостей.

1.1 Знайдемо швидкість точок за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Кривошип O_1A виконує обертальний рух. Тому швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ (м/с)}; \quad V_A = 2 \text{ м/с}; \quad \vec{V}_A \perp O_1A$$

Точка B належить як шатуну AB , так і кривошипу O_2B . Кривошип O_2B виконує обертальний рух навколо центра O_2 . Тому швидкість точки B $\vec{V}_B \perp O_2B$. Провівши з точок A і B перпендикуляри до швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B , знайдемо положення м.ц.ш. P_1 ланки AB . По напрямку вектора \vec{V}_A знаходимо напрям швидкості \vec{V}_B точки B .(рис 4.3)

Складемо відношення $\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP_1}{AP_1}$; $V_B = V_A \frac{BP_1}{AP_1}$

Знайдемо відношення $\frac{BP_1}{AP_1}$. Кут $\angle BAP_1 = 60^\circ$

Тоді по теоремі синусів $\frac{BP_1}{\sin 60^\circ} = \frac{AP_1}{\sin 45^\circ}$;

Маємо: $V_B = 2 \cdot 1,22 = 2,44$ (м/с) ; $V_B = 2,44$ м/с

Знайдемо швидкість точки С, яка належить ланці АВ.

Швидкість \vec{V}_C перпендикулярна відрізку CP_1 , який з'єднує точки С і P_1 , і напрямлена в сторону повороту ланки АВ. Модуль швидкості V_C знайдемо з пропорції

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{CP_1}{AP_1} ; \quad V_C = V_A \frac{CP_1}{AP_1}$$

Щоб знайти швидкість V_C точки С, необхідно знайти відстані CP_1 і AP_1 точок С і А до м.ц.ш P_1 . Якщо при знаходженні цих відстаней виникають певні труднощі, то доцільно механізм побудувати в певному масштабі з точною побудовою заданих кутів. Це дозволить невідомі відстані точок до миттєвого центра швидкостей заміряти безпосередньо з рисунка. Хоч наш механізм і побудований в масштабі, ми ж всі необхідні відстані знайдемо аналітичним шляхом.

$$\angle AP_1B = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

з $\triangle ABP_1$ по теоремі синусів $\frac{AP_1}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ}$; $AP_1 = AB \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 0,74$ (м)

$AP_1 = 0,74$ м

З $\triangle CP_1A$ по теоремі косинусів

$$CP_1 = \sqrt{AC^2 + AP_1^2 - 2 \cdot AC \cdot AP_1 \cos 60^\circ} = 0,68$$
 (м)

$CP_1 = 0,68$ м

Тоді $V_C = 2 \cdot \frac{0,68}{0,74} = 1,84$ (м/с) ; $V_C = 1,84$ м/с

Знайдемо швидкість точки D. Точка належить повзуну, який виконує поступальний рух. Тому швидкість точки D напрямлена по напрямним лініям повзуна. Миттєвий центр швидкостей P_2 ланки 4 знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених з точок С і D до напрямів швидкостей.

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{DP_2}{CP_2}; \quad V_D = V_C \frac{DP_2}{CP_2}$$

Знайдемо відношення $\frac{DP_2}{CP_2}$

Спочатку знайдемо значення кута δ_1

$$3 \quad \Delta ACP_1 \quad \frac{AP_1}{\sin \delta_1} = \frac{CP_1}{\sin 60^\circ}; \quad \sin \delta_1 = \frac{AP_1}{CP_1} \sin 60^\circ = 0,94; \quad \delta_1 = 70^\circ$$

$$\text{Тоді кут } \delta_2 = 180^\circ - (\delta_1 + 50^\circ) = 60^\circ; \quad \delta_2 = 60^\circ$$

$$3 \quad \Delta CDP_2 \quad \frac{DP_2}{\sin \delta_2} = \frac{CP_2}{\sin 45^\circ}; \quad \frac{DP_2}{CP_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin 45^\circ} = 1,22$$

$$\text{Тоді } V_D = 1,84 \cdot 1,22 = 2,24 \text{ (м/с);} \quad \underline{V_D = 2,24 \text{ м/с}}$$

$$\text{Кут } \delta_3 = 180^\circ - (\delta_2 + 45^\circ) = 75^\circ; \quad \delta_3 = 75^\circ$$

$$\frac{CP_2}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin \delta_3}; \quad CP_2 = CD \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 0,44 \text{ (м);} \quad \underline{CP_2 = 0,44 \text{ м}}$$

1.2 . Знайдемо швидкість точок A, B, C, D за допомогою плану швидкостей (рис. 6.4)

План швидкостей і його побудова розглянуті в пунктах 3.8, 3.9.

Знайдемо швидкість точки B . Візьмемо за полюс точку A , швидкість якої відома.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (1)$$

де \vec{V}_{BA} - швидкість точки B при її обертанні навколо точки A .

$$V_{BA} = \omega_2 \cdot AB \quad (2)$$

$$\vec{V}_{BA} \perp AB$$

Розв'яжемо векторне рівняння (1) графічно, вибравши попередньо полюс o і масштаб плану швидкостей. З полюса o проводимо вектор oa , який відповідає вектору швидкості \vec{V}_A точки A (рис. 6.4). З кінця вектора oa проводимо пряму, паралельну вектору швидкості \vec{V}_{BA} (т.б. перпендикулярну AB), а з початку вектора oa - пряму паралельну \vec{V}_B . Перетин цих прямих дає точку b .

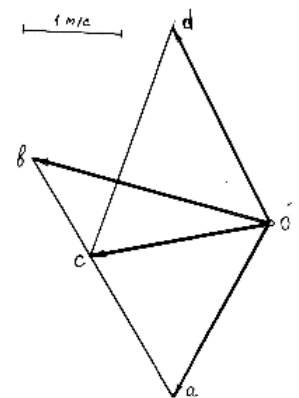


Рис. 6.4

$$ob = \vec{V}_B, \quad ab = \vec{V}_{BA}$$

$$\text{З плану швидкостей маємо:} \quad \underline{V_B = 2,5 \text{ м/с}}, \quad \underline{V_{BA} = 2,8 \text{ м/с}}$$

Знайдемо швидкість точки C . Точка C розміщена на ланці AB і знаходиться на відстані $AC = 0,6AB$. На плані швидкостей точка C буде

знаходиться на відстані $ac = 0,6ab$. З'єднаємо точку O з точкою C і отримаємо вектор $oc = \vec{V}_C$.

З плану швидкостей $V_C = 1,86$ м/с

Знайдемо швидкість точки D . Ланка CD виконує плоский рух. Візьмемо за полюс точку C . Тоді $\vec{V}_D = \vec{V}_C + \vec{V}_{DC}$, (3)

де \vec{V}_{DC} - швидкість точки D при її обертанні навколо точки C .

$$\vec{V}_{DC} \perp CD, \quad V_{DC} = \omega_4 \cdot DC. \quad (4)$$

Розв'яжемо векторне рівняння (3) графічно. На плані швидкостей швидкість $\vec{V}_C = oc$ вже є. Тому з кінця вектора oc проводимо пряму, паралельну вектору швидкості \vec{V}_{DC} (т.б перпендикулярну CD), а з початку вектора oc – пряму, паралельну \vec{V}_D . Перетин цих прямих дає точку d .

$$od = \vec{V}_D; \quad cd = \vec{V}_{DC}$$

З плану швидкостей маємо $V_D = 2,2$ м/с, $V_{DC} = 2,4$ м/с

Значення швидкостей точок, які отримані за допомогою м.ц.ш і за допомогою плану швидкостей, близькі.

2. Знайдемо кутові швидкості стержнів 2,3,4 за допомогою м.ц.ш і плану швидкостей

2.1 Значення кутових швидкостей стержнів, знайдених за допомогою м.ц.ш

Для стержня 2 м.ц.ш. знаходиться в точці P_1

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{2}{0,74} = 2,7 \text{ (рад/с)}; \quad \underline{\omega_2 = 2,7 \text{ рад/с}}$$

Стержень 3 обертається навколо точки O_2

$$\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{2,44}{0,7} = 3,5 \text{ (рад/с)}; \quad \underline{\omega_3 = 3,5 \text{ рад/с}}$$

Для стержня 4 м.ц.ш. знаходиться в точці P_2

$$\omega_4 = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{1,84}{0,44} = 4,18 \text{ (рад/с)}; \quad \omega_4 = 4,18 \text{ рад/с}$$

2.2 Значення кутових швидкостей стержнів, знайдених за допомогою плану швидкостей.

Для стержня 2, використовуючи формулу (2), маємо

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{2,8}{1} = 2,8 \text{ (рад/с)}; \quad \underline{\omega_2 = 2,8 \text{ рад/с}}$$

Для стержня 3 $\omega_3 = \frac{V_B}{l_3} = \frac{2,5}{0,7} = 3,56 \text{ (рад/с)}; \quad \underline{\omega_3 = 3,56 \text{ рад/с}}$

Для стержня 4, використовуючи формулу (4), маємо

$$\omega_4 = \frac{V_{DC}}{DC} = \frac{2,4}{0,6} = 4,0 \text{ (рад/с); } \quad \underline{\omega_4 = 4,0 \text{ рад/с}}$$

3. Знайдемо прискорення точок A і B аналітичним способом і за допомогою плану прискорень

3.1. Знайдемо прискорення точок A і B аналітичним шляхом

Згідно умови задачі, ми можемо знайти прискорення точки A . Точка A належить кривошипу O_1A , який рівномірно обертається навколо точки O_1 , ($\varepsilon_1 = 0$)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$\text{Чисельно } a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = 5^2 \cdot 0,4 = 10 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot O_1A = 0$$

Повне прискорення точки A чисельно дорівнює нормальному прискоренню точки A і напрямлене вздовж кривошипа O_1A до точки O_1 .

$$\underline{a_A = 10 \text{ м/с}^2}.$$

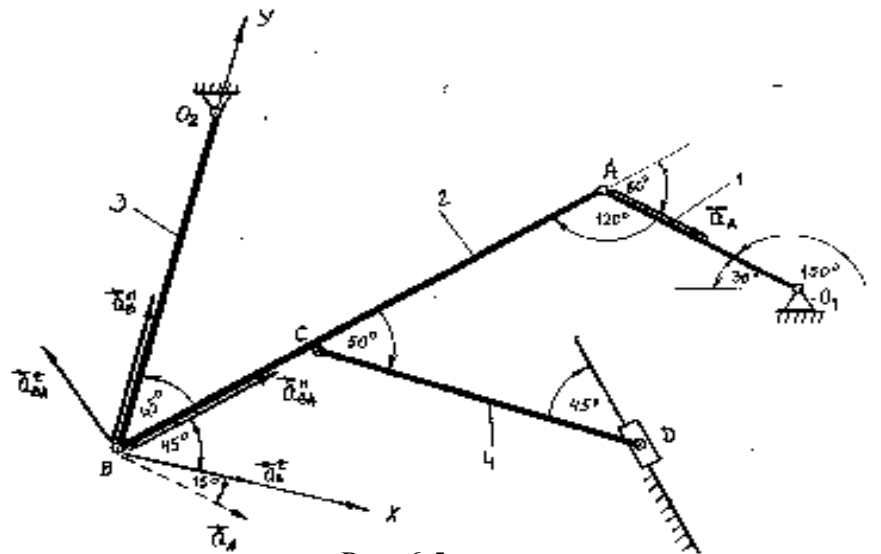


Рис. 6.5

Напрямок прискорення точки A показаний на рис. 6.5.

Знайдемо прискорення \vec{a}_B точки B . Точка B належить стержню 2. Точка A одночасно належить кривошипу 1 і стержню 2. Стержень 2 здійснює плоский рух. Візьмемо за полюс точку A , прискорення якої відоме.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau. \quad (5)$$

Точка B належить і стержню BO_2 , який може обертатись навколо осі, що проходить через точку O_2 . Тому

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau. \quad (6)$$

Підставимо (6) в (5).

$$\underline{\underline{\vec{a}_B^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_B^\tau}} = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{BA}^\tau}}. \quad (7)$$

$$a_B^n = \omega_3^2 \cdot BO_2 = 3,5^2 \cdot 0,7 = 8,6 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot BO_2$$

Прискорення \vec{a}_B^n напрямлене по стержню BO_2 до точки O_2 .

Прискорення $\vec{a}_B^n \perp \vec{a}_B^\tau$. Модуль прискорення \vec{a}_B^τ невідомий, тому що невідоме значення кутового прискорення ε_3 .

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot AB = 2,7^2 \cdot 1 = 7,3 \text{ (м/с}^2\text{)}; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB$$

Прискорення \vec{a}_{BA}^n напрямлене по стержню АВ до точки А.

Прискорення $\vec{a}_{BA}^n \perp \vec{a}_{BA}^\tau$. Модуль прискорення \vec{a}_{BA}^τ невідомий, тому що невідоме значення кутового прискорення ε_2 . Напрями всіх прискорень показані на рис. 6.5

В векторному рівнянні (7) однією рисою підкреслені невідомі величини, а двома рисками – відомі. Спочатку векторне рівняння (7) розв'яжемо аналітичним способом.

Введемо систему координат з початком в точці В. Спроектуємо векторне рівняння (7) на осі координат ХВУ.

$$a_B^\tau = a_A \cos 15^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ - a_{BA}^\tau \sin 45^\circ \quad (8)$$

$$a_B^n = -a_A \sin 15^\circ + a_{BA}^n \sin 45^\circ + a_{BA}^\tau \cos 45^\circ \quad (9)$$

$$\text{З виразу (9)} \quad a_{BA}^\tau = 8,52 \text{ м/с}^2$$

$$\text{З виразу (8)} \quad a_B^\tau = 8,8 \text{ м/с}^2$$

$$\text{Повне прискорення точки В} \quad a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2}; \quad \underline{\underline{a_B = 12,3 \text{ м/с}^2}}.$$

Знаючи прискорення \vec{a}_{BA}^τ , можемо знайти кутове прискорення ε_2 ланки 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^\tau}{AB}; \quad \underline{\underline{\varepsilon_2 = 8,52 \text{ рад/с}^2}}.$$

3.2 Знайдемо прискорення точок А,В,С за допомогою плану прискорень

Виберемо полюс π і масштаб плану прискорень (рис. 6.6).

Відкладемо спочатку відомі вектори правої частини рівняння (7): з полюса π відкладемо вектор \vec{a}_A , а з точки a - вектор \vec{a}_{BA}^n , з точки b' - вектор \vec{a}_{BA}^τ , довжина якого невідома. Звернемося тепер до лівої частини рівняння (7): з полюса π відкладемо вектор \vec{a}_B^n , а з точки b'' - вектор \vec{a}_B^τ . Точка перетину напрямів векторів

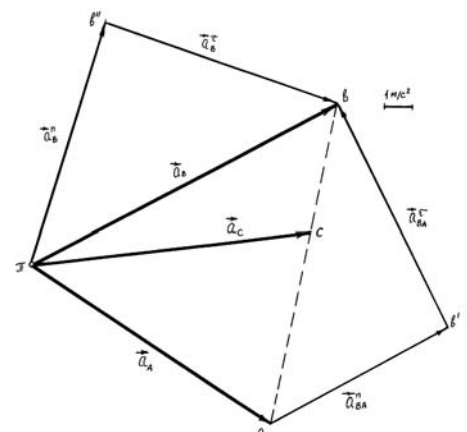


Рис. 6.6

\vec{a}_B^τ і \vec{a}_{BA}^τ дає точку b . Відрізок πb визначає модуль прискорення точки В. Вектор прискорення точки В напрямлений від точки π до точки b .

Безпосередні заміри відрізків з плану прискорень, з урахуванням масштабу, дають слідувачі значення модулів прискорень.

$$\underline{a_B} = 12,2 \text{ м/с}^2 ; \quad \underline{a_{BA}^\tau} = 8,5 \text{ м/с}^2, \quad \underline{a_B^\tau} = 8,7 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо прискорення точки С.

Точка С знаходяться на відстані $AC = 0,6AB$. Це дозволяє знайти прискорення точки С з плану прискорень, якщо на відріжку ab відкласти точку c , яка задовольняє умові $ac = 0,6ab$. З'єднаємо точку π з точкою c . Цим самим ми отримали напрям і модуль прискорення точки С. $a_C = 10 \text{ м/с}^2$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пастушенко С. І. Практикум з теоретичної механіки : навч. посіб. - у 2-х ч. – Ч. І. Статика. Кінематика / С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко. – Вінниця, 2006. – 384 с.
2. Практикум з теоретичної механіки : навч. посіб. - у 2-х ч. – Ч. ІІ. Динаміка / С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В. В. Іщенко, Є. П. Масюткін. – Вінниця, 2007. – 544 с.
3. Теоретична механіка. Частина 1: Статика. Кінематика : метод. реком. тестові завдання для перевірки знань студентів напряму підготовки 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» / уклад. С. І. Пастушенко, П. М. Домчук, О. В. Баранова. - Миколаїв : МДАУ, 2006. – 54 с.

Додаткова

1. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / Мещерский И. В. – М. : Наука, 1972. – 447 с.
2. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. – в 2-х ч. – Ч. 1. Статика, кинематика / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М. : Высшая школа, 1984. – 343 с.
3. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики. – в 2-х т. – Т. I. : Статика и кинематика / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М. : Наука. – 239 с.
4. Стражинский В. М. Теоретическая механика [краткий курс по полной программе ВТУЗов] / В. М. Стражинский/ – М. : Наука. – 1980. – 464 с.
5. Сборник задач по теоретической механике / под ред. К. С. Колесникова. – М. : Наука, 1983. – 318 с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації

Укладачі: **Думенко** Костянтин Миколайович,
Шевченко Катерина Сергіївна

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 5,9

Тираж 100 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету

54020, м. Миколаїв, вул. Паризької Комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.