

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний факультет  
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ:**

методичні рекомендації (модуль IV «Згин») для виконання лабораторних робіт та самоконтролю в умовах інтеграції навчальних тренажерів в інформаційно-освітнє середовище для здобувачів вищої освіти ступеня «бакалавр» спеціальності 208 «Агроінженерія», 015 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробки продуктів сільського господарства)» денної та заочної форм навчання.

Миколаїв  
2018

УДК 539.3/.6

М55

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 27.09.18, протокол №1.

#### **Укладачі:**

Д. В. Бабенко – канд. техн. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.

Н. А. Доценко – канд. техн. наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.

#### **Рецензенти:**

І. П. Атаманюк – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

О. М. Самойленко – доктор пед. наук, доцент кафедри теорії і методики викладання природничо-математичних та технологічних дисциплін, Комунальний вищий навчальний заклад «Херсонська академія неперервної освіти» Херсонської обласної ради.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2018

©Бабенко Д. В., Доценко Н. А., 2018

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1. ВИКОРИСТАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ТРЕНАЖЕРІВ В УМОВАХ НАВЧАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....	5
1.1. Методика користування навчальними тренажерами для здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей при вивченні курсу «Механіка матеріалів і конструкцій».....	12
2. ЗГИН. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ.....	26
2.1. Плоский згин.....	26
2.2. Чистий згин.....	34
2.3. Поперечний згин.....	39
2.4. Міцність балок при згині.....	46
2.5. Приклад розрахунку статично визначеної балки на згинання.....	50
2.6. Переміщення при згині.....	54
2.7. Визначення переміщень при згині.....	57
2.8. Метод Мора для визначення переміщень.....	62
2.9. Приклад розрахунку на згинання плоских стрижнів.....	69
2.10. Навчальні тренажери для здійснення самоконтролю.....	78
ЛІТЕРАТУРА.....	79

## ВСТУП

Механіка матеріалів і конструкцій є однією із важливих загальнотехнічних дисциплін, які вивчаються на інженерних спеціальностях Вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю III і IV рівнів акредитації. Використовуючи методи теоретичної механіки і математичного аналізу, знання з фізики аналітичної геометрії і вивчивши фізико-механічні властивості матеріалів, механіка матеріалів і конструкцій вирішує питання розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин та елементів конструкцій.

Ринкова економіка в сільському господарстві країни поставила перед аграріями конкретні задачі, виконання яких вимагають від інженерних кадрів серйозного і глибокого знання розрахунків на міцність машин і інженерних споруд і накладають на вивчення курсу механіки матеріалів і конструкцій нові підвищені і відповідальні вимоги. Створюються нові види і типи машин, споруд, агрегатів.

Застосування комп'ютерних технологій у навчанні є необхідною умовою досягнення цілей інформатизації освіти. Пріоритетом для розвитку системи освіти нині є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, котрі забезпечують доступ до мережі високоякісних баз даних, розширюють можливості здобувачів вищої освіти щодо сприйняття складної інформації.

Електронні освітні ресурси і створене на їх базі інформаційно-освітнє середовище мають чималий потенціал для підвищення якості навчання. Інформаційне освітнє середовище (ІОС) поєднує широкий вибір навчального програмного забезпечення та мережних технологій, включаючи електронну пошту, форуми, програмне забезпечення колективного використання, чати, відео конференції, записи аудіо та відео, та широке коло навчальних інструментів, що базуються на використанні Веб-технологій.

Мета створення ІОС у навчальних закладах – формування успішної інтелектуальної і творчої розвиненої особистості, яка володіє високою інформаційною культурою.

# 1. ВИКОРИСТАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ТРЕНАЖЕРІВ В УМОВАХ НАВЧАННЯ В ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Найхарактернішою ознакою сучасного етапу розвитку освіти в розвинених країнах світу є інтенсивна комп'ютеризація та інформатизація освіти. Комп'ютеризація дозволяє зробити викладача і студента рівноправними партнерами в процесі навчання. При цьому можливі два шляхи здійснення навчання.

Розгляньмо шляхи, за якими відбувається навчання у ВНЗ з використанням ІОС: перший - за умови збереження традиційної форми навчання нові інформаційні ресурси (комп'ютер, Інтернет) використовуються лише як засоби забезпечення більш ефективного одержання професійних знань. За їх допомогою здобувачі вищої освіти знайомляться з навчальними програмами курсів, з літературою, яку необхідно опрацювати під час вивчення конкретних курсів; їм пропонують тестові завдання для перевірки засвоєння матеріалу; збірники задач, вправ, теми дискусій і т. ін. Тобто комп'ютер та Інтернет виконують роль чинника з поліпшення засобів зв'язку між викладачами й здобувачами вищої освіти.

Для одержання ефективного результату необхідно підготувати цілий комплекс матеріалів, що складають «кейси» студента та викладача. В процесі формування таких кейсів все більшої популярності набуває мультимедіа-підхід, коли студент забезпечується електронними навчально-методичними комплексами.

Реалізація основних задумів викладачів стосовно структури і подання навчального матеріалу можлива лише за умов їхньої участі в створенні ІОС. Така спільна робота викладача і групи розробників найбільш ефективна, вона дозволяє включати окремі готові фрагменти в навчальний процес, здійснювати коригування.

**Інформаційне освітнє середовище (ІОС)** поєднує широкий вибір навчального програмного забезпечення та мережних технологій, включаючи електронну пошту, форуми, програмне забезпечення колективного використання, чати, відео конференції, записи аудіо та відео, та широке коло навчальних інструментів, що

базуються на використанні Веб-технологій. Ключовим компонентом в ІОС є комп'ютер. Він є засобом обробки інформації, комунікації, оновлення знань, самореалізації здобувачів вищої освіти. В той самий час він є інструментом для проведення навчальних експериментів, проектування і конструювання. Включення комп'ютерів у навчальний процес змінює роль засобів навчання, які використовуються в процесі викладання різних дисциплін, змінюючи навчальне середовище. Ми пропонуємо використовувати наступну модель навчання здобувачів вищої освіти в умовах інформаційно-освітнього середовища.

### **Тренінг в навчальній аудиторії → самостійне вивчення на основі ІКТ → перевірка отриманих результатів**

Розглянемо відповідні складові:

– під час проведення тренінгу в навчальній аудиторії здійснюється відпрацювання певних ситуацій, які використовуються викладачем або виконуються практичні завдання, лабораторні роботи, лекції та інше.

– подальше навчання здійснюється самостійно в режимі он-лайн на більш високому та широкому обсязі навчального матеріалу, виконанні завдань, а також здійснюється спілкування з викладачем та іншими здобувачами вищої освіти. В умовах інформаційно-освітнього середовища це можуть бути *інтерактивні мультимедійні лекції, вебінари, мультимедійні презентації до практичних робіт, відео конференції, форуми, онлайн глосарій, онлайн лабораторні роботи з мультимедійним супроводом, електронні тестові навчальні тренажери тощо.*

В наведеній схемі здійснюється поєднання самостійного та аудиторного навчання, що дає можливість кожному проявити себе відповідно до тих можливостей, якими він володіє.

Упродовж багатьох років навчальні тренажери використовувались у навчальному процесі для тих фахівців, робота яких була пов'язана з професійним ризиком або потребувала значних витрат, а тому для здешевлення та досягнення високого професіоналізму використовуються тренажери та імітатори. Принцип їхньої дії полягає в тому, що в комп'ютері створюється модель, робота якою максимально наближена до реального

устаткування, процесу. Здобувач вищої освіти виконує певні операції та одержує відгук комп'ютерної системи.

На сучасному етапі в навчальній роботі набули поширення використання навчальних тренажерів галузях, що не потребують приладів та устаткування (складання проектів, розрахунки схем, виконання певних операцій і т.ін.). При цьому використання імітаційного моделювання має суттєве значення в навчальному процесі.

1. За допомогою навчальних тренажерів можна відтворювати практично будь-яку ситуацію, моделювати пристрої, виробничі процеси. Кожний учень навчається в ситуації, наближеній до реальної.

2. Використання навчальних тренажерів, що базуються на персональних комп'ютерах, дозволяє уніфікувати навчальний процес.

Для виконання всіх функцій інформаційно-освітнього середовища, що пов'язані із взаємодією в мережі, є домовленість в єдиному підході до стандартів на оформлення даних, обміну інформації, проведення занять та екзаменів, тестування і т.ін.

Під **навчальним тренажером** розуміється комп'ютерна навчальна програма для розвитку у здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей умінь та навичок певної діяльності, а також розвитку пов'язаних з нею здібностей. В основу навчальних тренажерів покладено використання певного тренувального завдання. Його суть полягає у тому, що за короткий проміжок часу, використовуючи різні прийоми роботи з навчальним матеріалом, можна швидше навчити майбутніх інженерів його запам'ятовувати. Поряд із такими завданнями доцільно використовувати навчальні комп'ютерні інтерактивні тренажери, які призначені для напрацювання практичних прийомів і отримання міцних навичок у конкретній сфері знань. Такі тренажери покликані вирішити наступні завдання в процесі підготовки здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей:

- ознайомити з будовою інженерних, графічних об'єктів і їх елементами;

- сформувати стійкі навички виконання, як окремих інженерних операцій, так і повного їх циклу;
- вивчити технологічну схему і отримати уявлення про етапи технологічного процесу;
- вивчити інструмент і технологічне оснащення, необхідні для проведення робіт, ознайомитися з вимогами техніки безпеки;
- навчитися виявляти дефекти в роботі інженерного устаткування і його окремих механічних вузлів; закріпити вміння правильної послідовності оформлення документації.

Застосування навчальних комп'ютерних тренажерів здобувачами вищої освіти інженерних спеціальностей має наступні переваги:

- враховується індивідуальний темп роботи здобувача вищої освіти, який сам управляє навчальним процесом за інженерним фахом;
- скорочується час вироблення необхідних інженерних навичок;
- збільшується кількість тренувальних завдань за фахом;
- легко досягається рівнева диференціація;
- підвищується мотивація навчальної діяльності здобувачів вищої освіти.

В сучасному світі навчальні тренажери займають провідне місце. Адже саме в даному виді тренажера модель об'єкта управління, робоче місце здобувачів вищої освіти і викладача реалізовано на базі комп'ютерних програмних засобів. По суті справи, це програма, призначена для вироблення у здобувачів вищої освіти стійких навичок дій і забезпечує виконання необхідних для цього функцій викладача. Якщо оформлення і модель поведінки тренажера відображає елементи ігрової форми, то такі тренажери називають навчальними комп'ютерними іграми.

Ефективне застосування навчальних тренажерів в навчальному процесі дозволяє значно зменшити число помилок, збільшити швидкість маніпуляції і прийняття рішень, скоротити час навчання, більш адекватно оцінювати рівень отриманих знань і набутих навичок, індивідуалізувати навчання, формувати висновки щодо дій здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей.



При розробці навчально-тренажерних комплексів використовують ряд методичних прийомів: ознайомлення з порядком операцій, наявність зворотного зв'язку, послідовність освоєння матеріалу (виконання спочатку простих операцій, а потім перехід до складних процесів), можливість багаторазового повторення, отримання додаткових пояснень при виконанні операцій.

**Навчальний тренажер** - це програма, призначена для самостійного вивчення (або повторення) з одночасним контролем знань з певної теми. Всі інтерактивні завдання в такому тренажері повинні припускати наявність зворотного зв'язку, можливості корекції дій і можливості здійснювати практичні дії. До інтерактивних завдань в тренажері можна віднести послідовності питань і інтерактивними підказками і практикуми. Навчальні тренажери можна використовувати на різних етапах підготовки здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей: актуалізація знань, вивчення і закріплення нового матеріалу, домашні завдання, самостійна робота, перевірка знань.

Завдяки доступності засобів створення тренажерів, великого вибору програмних комплексів, тренажери в сучасній освіті займають важливе місце при формуванні та закріпленні знань, умінь і навичок того, хто навчається і виконують роль педагогічного інструменту дозволяє підвищити якість освітнього процесу.

Так як більшість існуючих лабораторних стендів і майстерень недостатньо оснащені сучасними приладами, пристроями та апаратами, впровадження навчальних комп'ютерних інтерактивнихдань навчального контенту, а саме:

- сучасні комп'ютерні технології дозволяють поспостерігати процеси, які важко розрізняються в реальних умовах без застосування додаткової техніки, наприклад, через малі розміри спостережуваних частинок;
- навчальні комп'ютерні інтерактивні тренажери дають можливість моделювання процесів, протікання яких принципово неможливо в лабораторних умовах;

- навчальні комп'ютерні інтерактивні тренажери дають можливість проникнення в тонкощі процесів і спостереження того, що відбувається в іншому масштабі часу, що актуально для процесів, що протікають за частки секунди або, навпаки, тривають протягом декількох років;

- навчальні комп'ютерні інтерактивних тренажери є високоєфективним методом навчання, так як вони в умовах інформаційно-освітнього середовища можуть імітувати реальні умови.

Впровадження навчальних комп'ютерних інтерактивних тренажерів сприяє оптимальному вирішенню вищезгаданих завдань і усунення ряду недоліків традиційного способу навчання, а саме:

- ініціювати чималий інтерес у здобувачів вищої освіти поряд з доступністю для них, тим самим підвищити активність і самостійність їх навчальної роботи;

- привернути увагу здобувачів вищої освіти, враховуючи їх психологічні особливості поліпшити сприйняття навчального матеріалу за рахунок його мультимедійності;

- забезпечити повний контроль засвоєння матеріалу кожним здобувачем вищої освіти;

- полегшити процес повторення і тренінгу при підготовці до іспитів та інших форм контролю знань;

- розвантажити викладачів від рутини контролю і консультування;

- використовувати позааудиторний час для вивчення конструкцій у вигляді домашніх завдань;

- поліпшити дистанційні форми навчальної роботи.

Ці питання у всій повноті можна вирішувати за допомогою навчальних тренажерів, створюваних на комп'ютерах в умовах інформаційно-освітнього середовища.

Навчання в інформаційно-освітньому середовищі сприяє логічному впорядкуванню інформації, її систематизації і структуруванню, створює передумови для здійснення ефективної самостійної діяльності здобувачів вищої освіти. Використання електронної навчальної інформації та правильне методичне

насичення навчальних дисциплін дозволяє зробити навчальний процес більш інтенсивним та сприяє саморозвитку та самовдосконаленню здобувачів вищої освіти. Однією з ефективних форм контролю отриманих знань є тестування. **Навчальний тестовий тренажер** - сукупність завдань, розташованих у певному порядку. Його завдання - оцінити певні знання і навички здобувачів вищої освіти. Для навчання здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей в умовах інформаційно-освітнього середовища є доцільним використання навчальних тестових тренажерів, які пропонується **розміщувати на платформах дистанційного навчання**, тому що вони мають в своєму складі інструментарій для створення різноманітних завдань. Частіше всього викладачі використовують для перевірки знань тестові питання типу «Множинний вибір». Але не для всіх типів питань така форма є оптимальною. Тому платформи дистанційного навчання пропонують досить широкий спектр питань для створення тестових завдань. До них відносяться: **множинний вибір; вірно/невірно; коротка відповідь; числова відповідь; розрахунковий; есе; на відповідність; випадкове питання на відповідність; вкладені відповіді; вибір пропущених слів; множинний розрахунковий; перетягування в текст; перетягування маркерів; перетягнути на зображення; простий розрахунковий**. Під час створення навчального тестового тренажеру доцільно використати декілька типів тестових завдань, які в основному направлені на формування зорової та звичайної пам'яті здобувачів вищої освіти. Тест типу коротка відповідь ускладнює задачу тим, що неможливий випадковий вибір правильної відповіді як у випадку з множинним вибором. За допомогою тестового питання з вибором пропущених слів передбачається тренування зорової пам'яті. Не дивлячись на досить просту форму, тестове питання, створене за допомогою опції вірно/невірно змушує здобувача вищої освіти замислитися над питанням, адже вірогідність як правильного, так і неправильного питання 50%. Запитання розрахункового типу передбачає використання та програмну обробку розрахунків. Перед тим, як вводити числове значення, необхідно провести розрахунок, адже

варіант випадкового введення правильної відповіді виключається. При відповіді на питання, створене за допомогою опції перетягування в текст неправильно вибрані відповіді виділяються червоним кольором, правильні – зеленим. Тестові завдання доцільно формувати з різнопланових завдань, які б відповідали всім рівням складності.

Одним з напрямів контролю в умовах інформаційно-освітнього середовища також може бути **комп'ютерний навчальний тестовий тренажер**. Це комп'ютерна навчальна програма для розвитку у здобувачів вищої освіти умінь та навичок певної діяльності, а також розвитку пов'язаних з нею здібностей. В основу навчальних тренажерів покладено використання певного тренувального завдання. Його суть полягає у тому, що за короткий проміжок часу, використовуючи різні прийоми роботи з навчальним матеріалом, можна швидше навчити здобувачів вищої освіти його запам'ятовувати. Поряд із тестовими завданнями використовуються електронні навчальні тренажери, призначені для напрацювання практичних прийомів і отримання міцних навичок у конкретній сфері знань. Особливо ефективним є їх використання для здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей.

### **1.1. Методика користування навчальними тренажерами для здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей при вивченні курсу «Механіка матеріалів і конструкцій»**

Для переходу до навчального тренажеру, доцільно спочатку представити мультимедійну презентацію в умовах інформаційно-освітнього середовища (рис.1.1).

Для кращого засвоєння матеріалу з теми доцільно створити мультимедійну презентацію з аудіо супроводом, після ознайомлення з інформацією відповіді на питання (рис.1.2). Також доцільно поставити заборону для переходу на наступне питання без правильної відповіді на поточне питання, таким чином здобувач вищої освіти пропрацює теоретичний матеріал більш ретельно.

Також для пояснення деяких явищ доцільно використовувати відеоролики, анімовані пояснення (рис.1.3).

# Презентація "Згин"

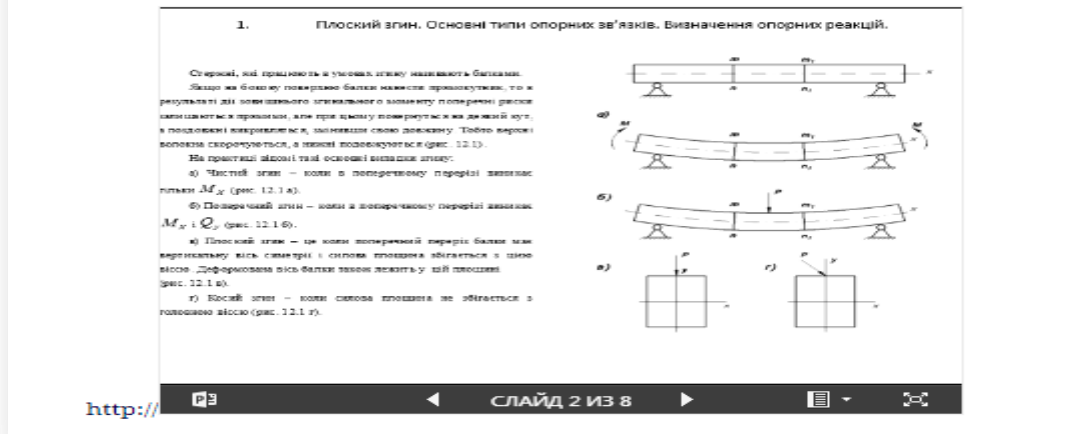


Рисунок 1.1. Мультимедійна презентація до теми «Згин»

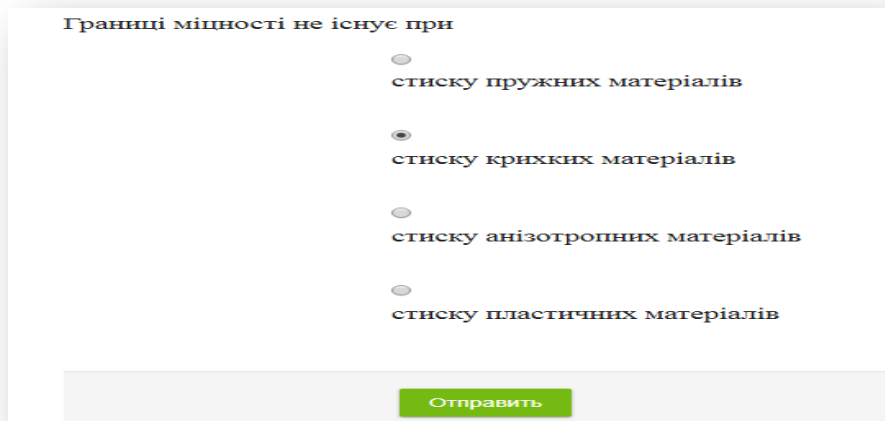


Рисунок 1.2. Питання для самоконтролю після теми

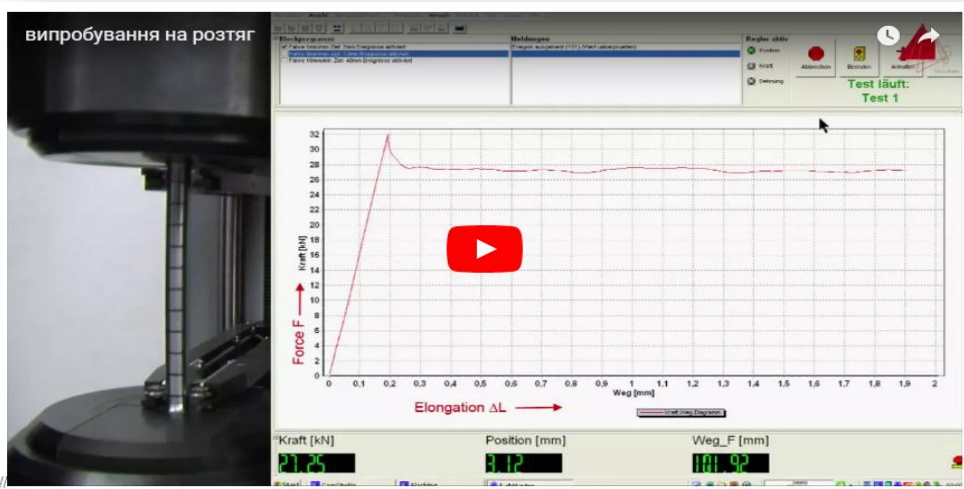


Рисунок 1.3. Відео до мультимедійної презентації

Та звіт до виконаної роботи також представляється у вигляді надсилання відповіді на завдання в інформаційно-освітньому середовищі (рис.1.4).

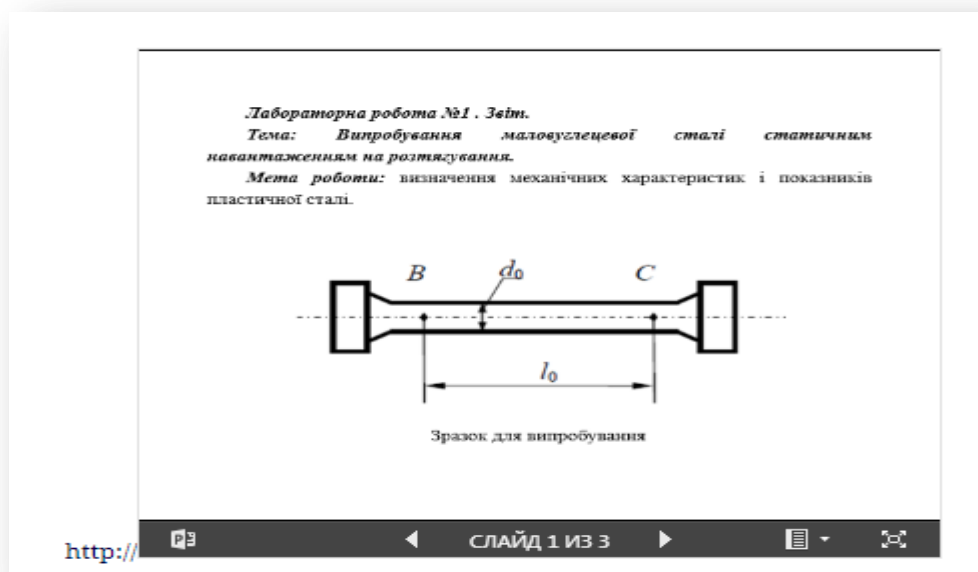


Рисунок 1.4. Звіт до виконання лабораторної роботи

В умовах інформаційно-освітнього середовища є декілька типів тестових навчальних тренажерів. Найпростішим варіантом питання в тестовому навчальному тренажері є відповідь при множинному виборі. Такий тип питань можна використовувати для позначення критичних точок при заданій дії сили на балку (рис.5).

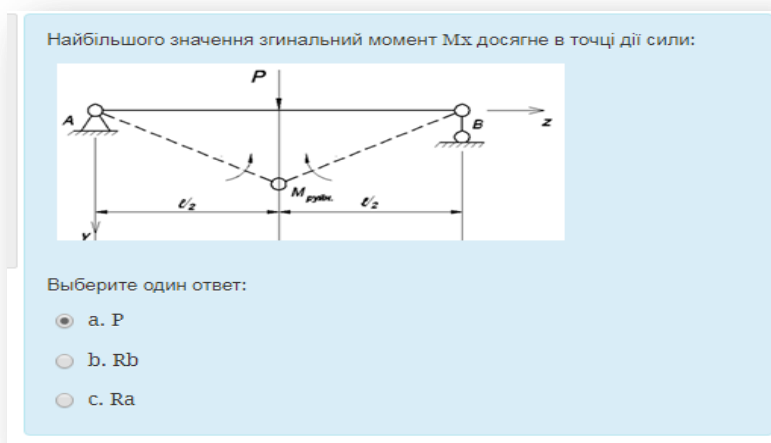
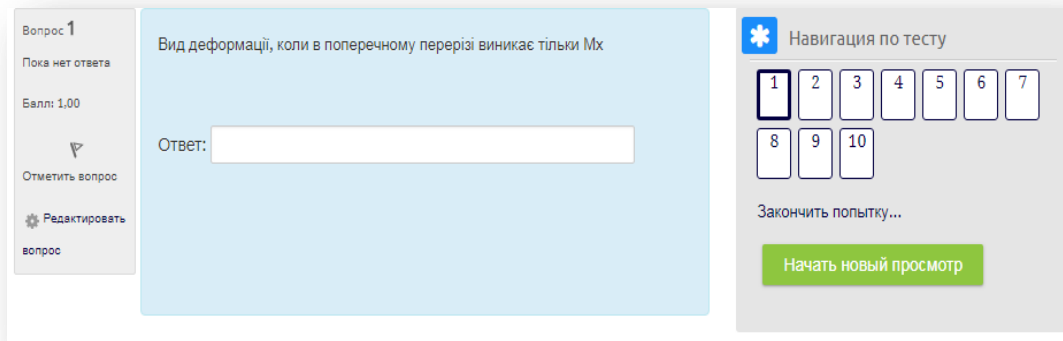


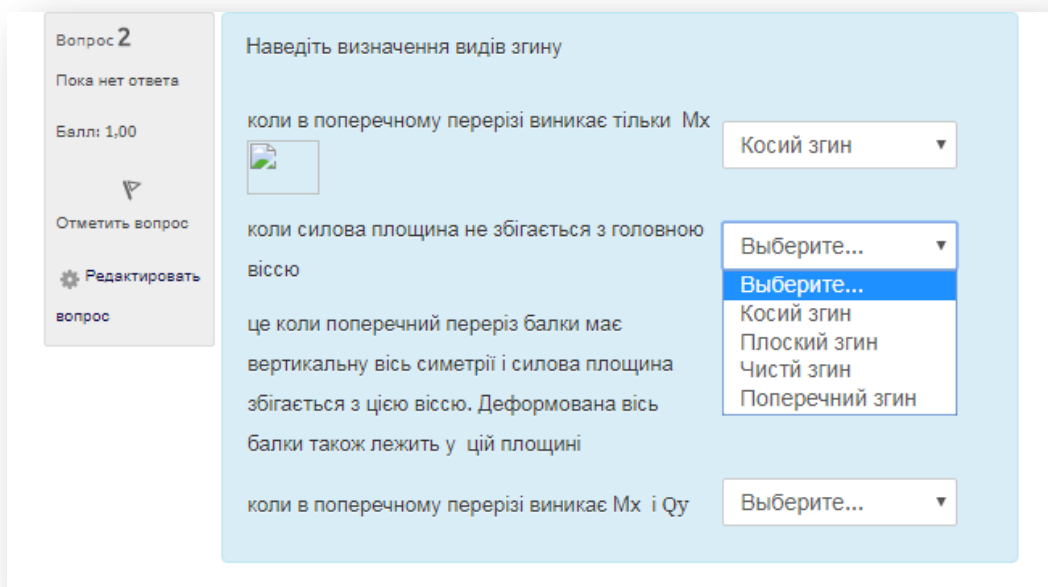
Рисунок 1.5. Тестовий навчальний тренажер та відповідь при множинному виборі

Ще одним з варіантів питань є відповідь, що вводиться вручну. Такий вид питання запропоновано, коли треба визначити певне поняття чи ввести відповідь на задачу, яку вирішували шляхом короткого розрахунку (рис.1.6).



*Рисунок 1.6. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді вручну*

Також є опція введення правильної відповіді шляхом вибору з випадючого списку. Такий тип питання можна використовувати при вивченні формул, при вивченні понять та правил(рис.1.7, 1.8).



*Рисунок 1.7. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору з випадючого списку.*

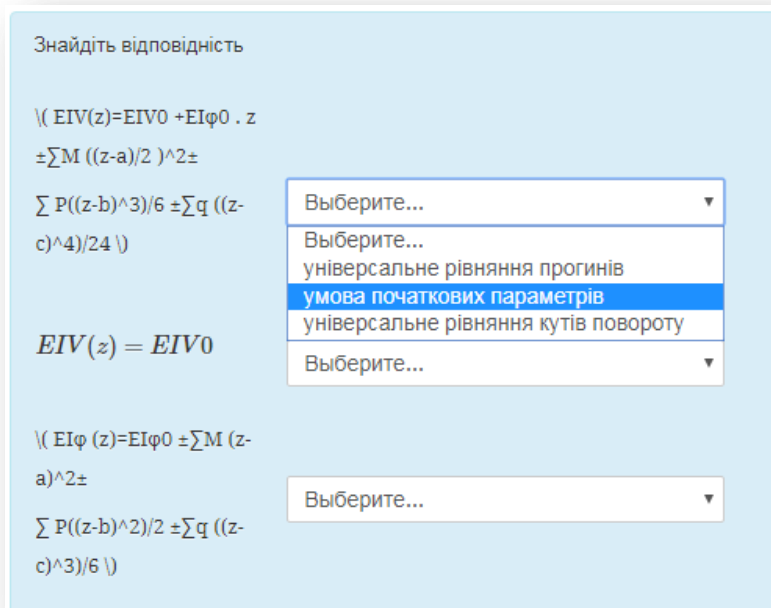


Рисунок 1.8. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору з випадваючого списку при вивченні формул для розрахунку

Для кращого вивчення теми доцільно вставляти пропущені слова у текст. Це можуть бути не тільки слова, що означають певні поняття для заучування, а й цифри для розрахунку (рис.1.9,1.10).

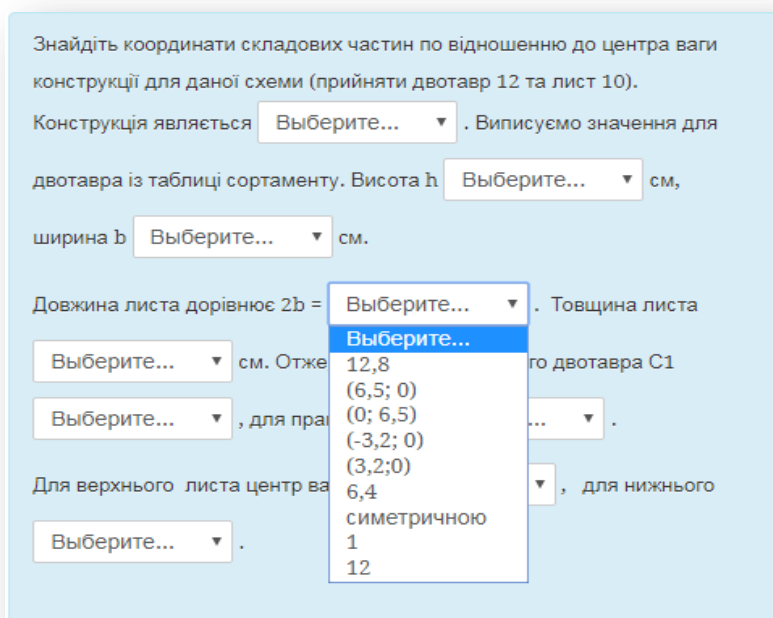


Рисунок 1.9. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору вставлянням в текст для розрахунку прикладу



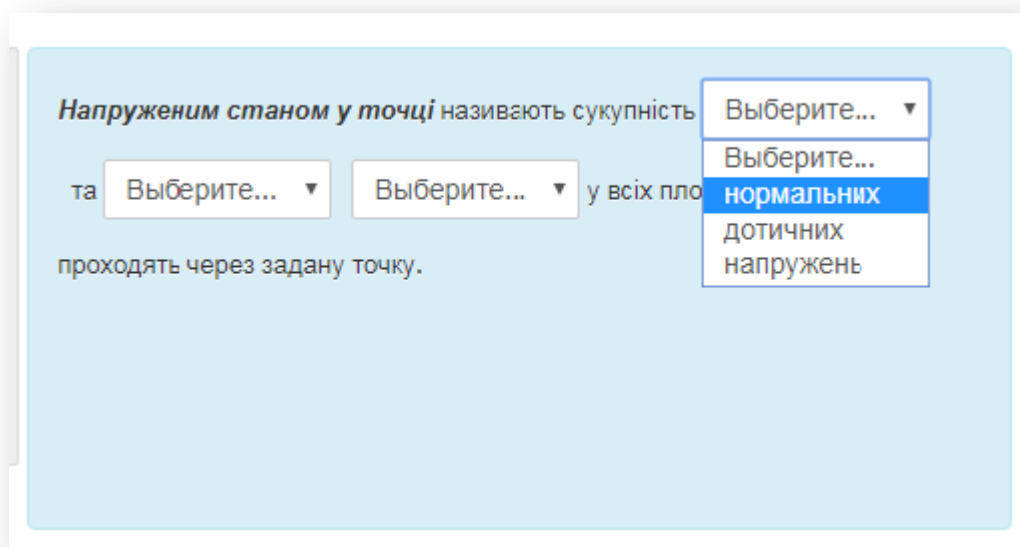


Рисунок 1.10. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору вставлянням в текст для вивчення понять теми

Тестовий навчальний тренажер пропонує навігацію по тесту з метою визначення питань, що вже пророблені та питань, що потребують доопрацювання (рис.1.11).

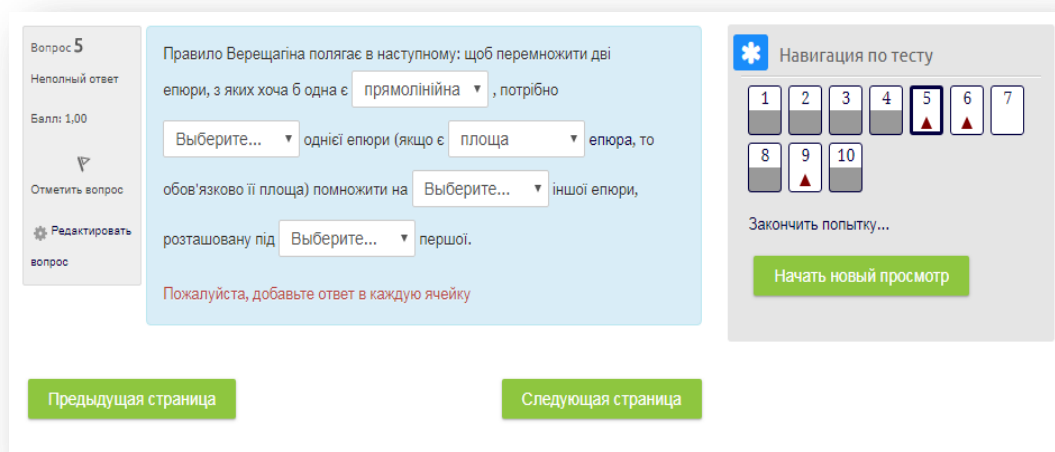


Рисунок 1.11. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору вставлянням в текст для вивчення правил

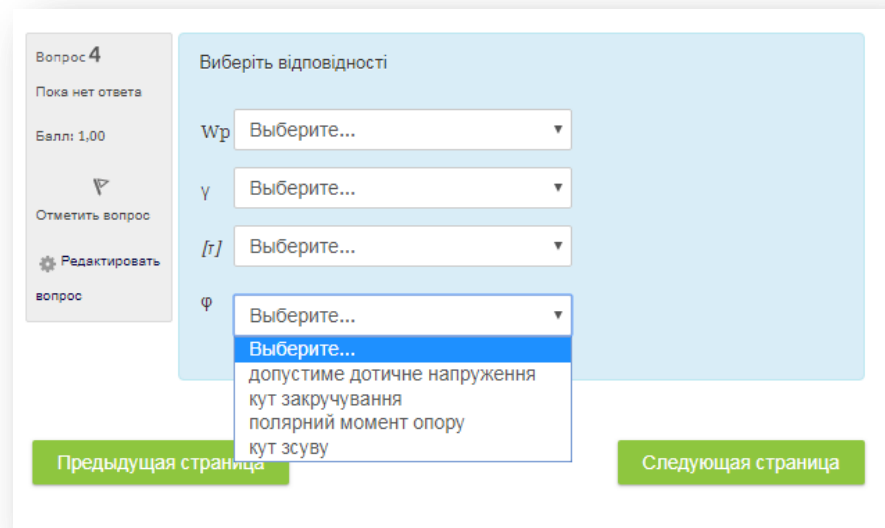


Рисунок 1.12. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору відповідності поняття і символу позначення

Для вивчення методики розрахунку перед вирішенням практичних робіт, доцільно проробити етапи розрахунку за допомогою обирання вставлення відповіді в текст. Таким чином, методика розрахунку певних видів задач у здобувачів вищої освіти може бути доведена до автоматизму (рис.1.13).

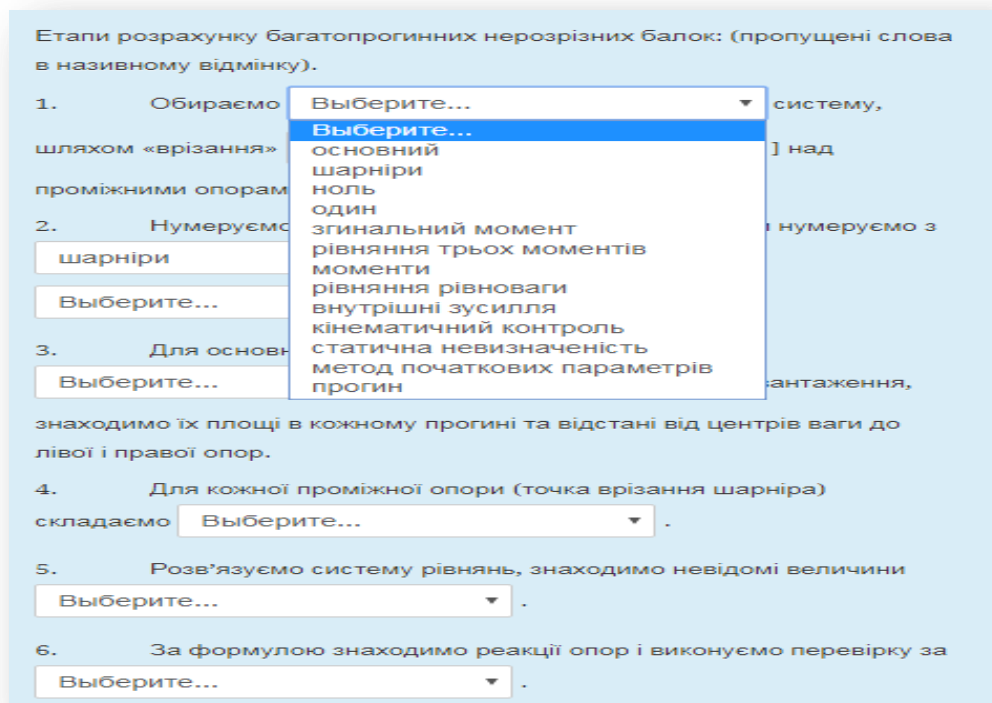
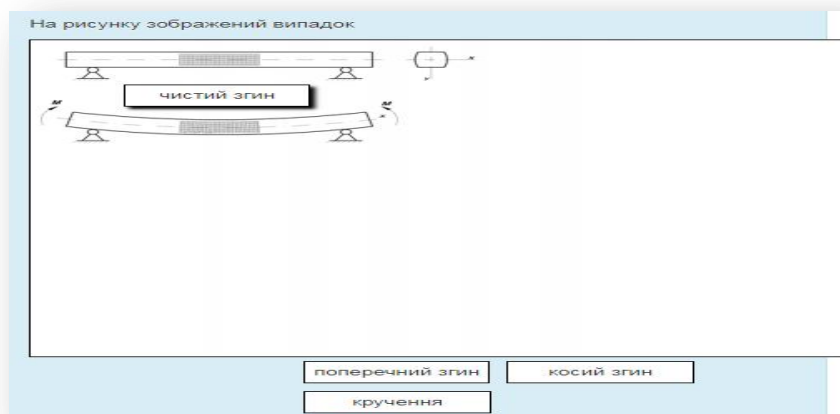


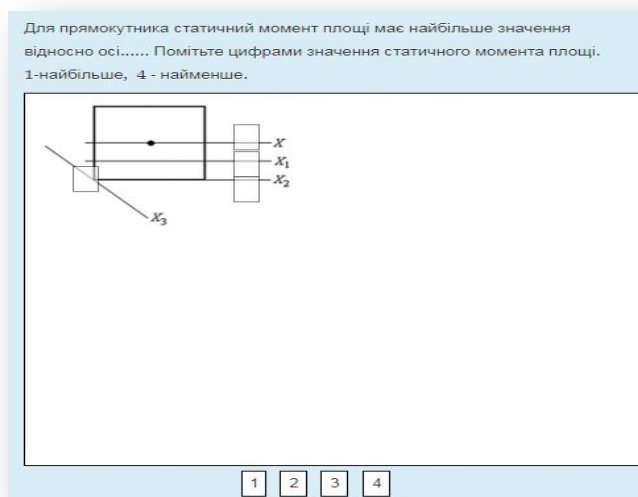
Рисунок 1.13. Тестовий навчальний тренажер з введенням правильної відповіді шляхом вибору вставлянням в текст для вивчення правил

В умовах інформаційно-освітнього середовища навчальні тренажери пропонують питання, відповіді на які реалізуються за допомогою перетягування тексту на зображення та перетягування зображення на зображення. Перший випадок застосовують при описуванні явищ.



*Рисунок 1.14. Навчальний тренажер для позначення певного виду деформації*

Також для вирішення завдань на логіку. Наприклад, визначення статичного моменту площі відносно певної осі, яку треба обрати шляхом перетягування правильної відповіді (рис.1.15).



*Рисунок 1.15. Навчальний тренажер для обрання осі симетрії*

Для пояснення явищ та пошуку відповідності в графічних зображеннях. Наприклад, вказати на діаграмі розтягу та стиску границю пружності, пропорційності, тощо (рис.1.16, 1.17).

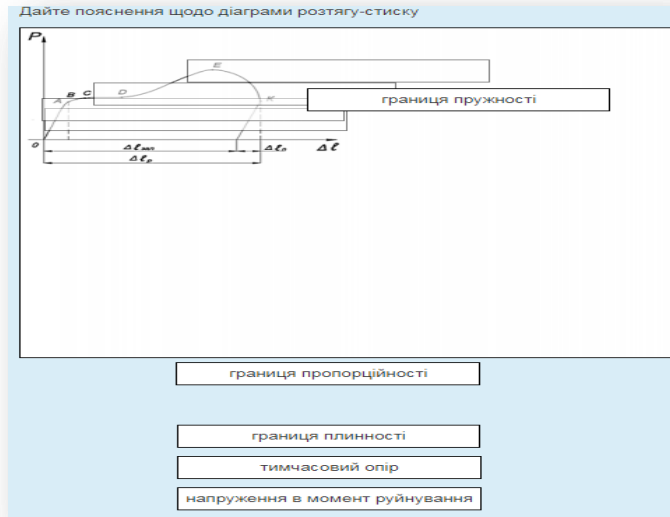


Рисунок 1.16. Навчальний тренажер для пояснення діаграми

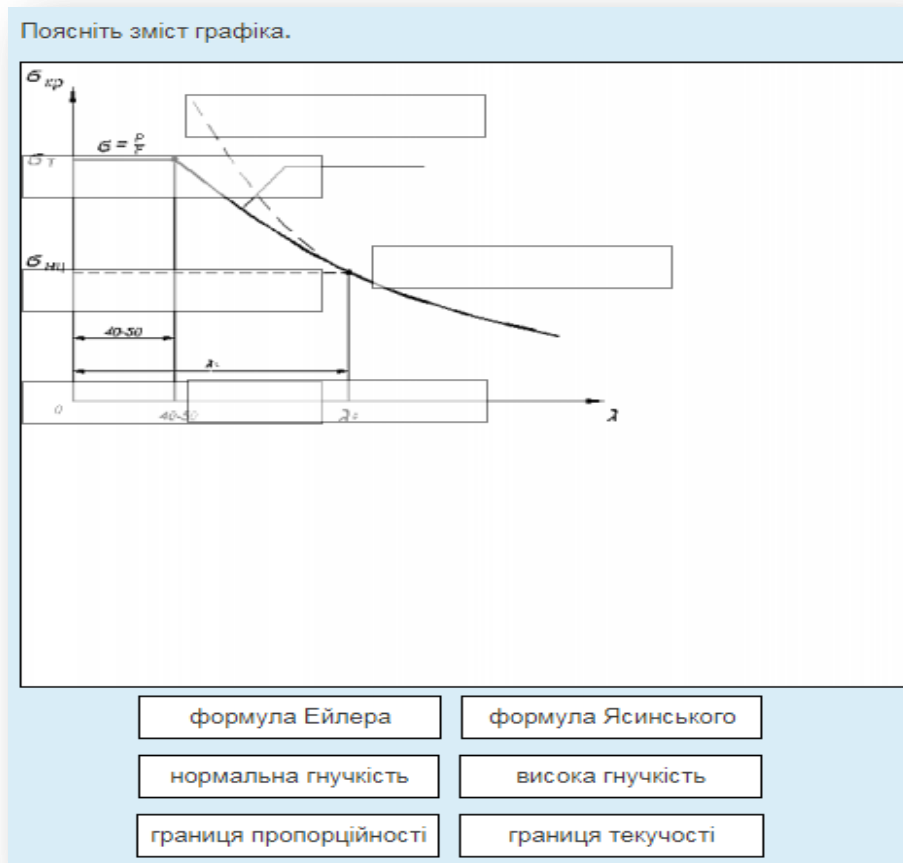
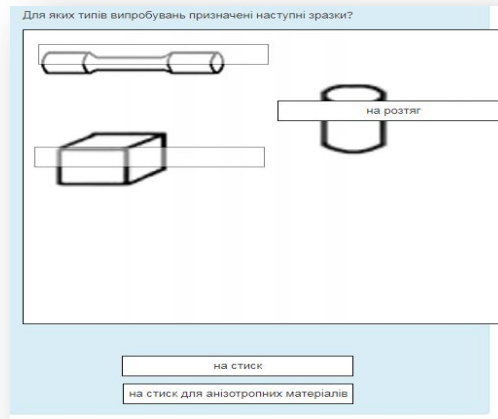


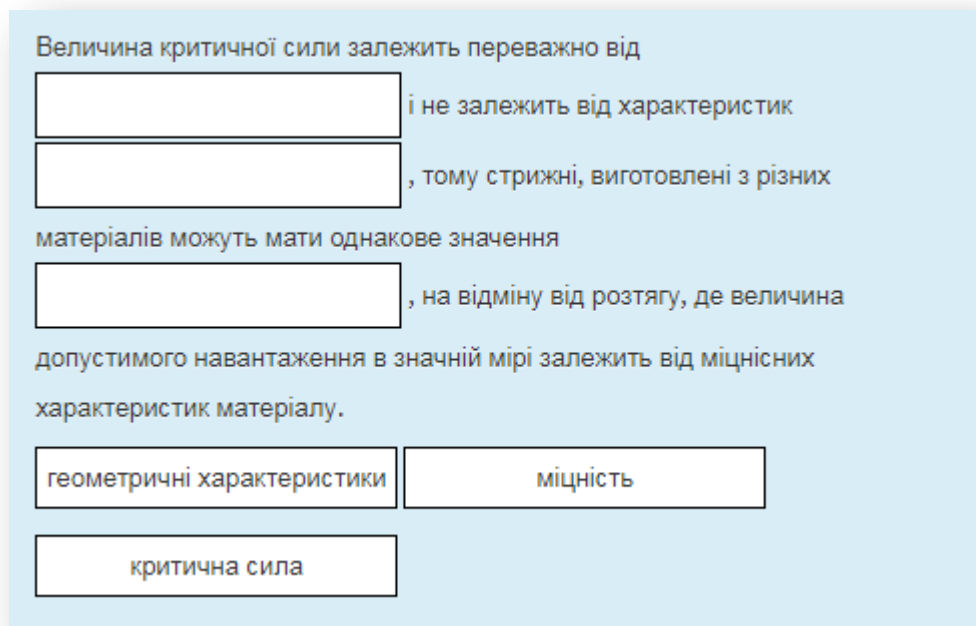
Рисунок 1.17. Навчальний тренажер для пояснення графіка

Для позначення вихідних умов при виконанні лабораторних робіт. Наприклад, для якого виду досліду необхідно обрати який зразок (рис.1.18).



*Рисунок 1.18. Навчальний тренажер для обрання певного виду зразка для досліджу*

Також можна перетягувати блоки в текст. Цей тип навчального тренажера використовується для вивчення явищ та понять (рис.1.19).



*Рисунок 1.19. Навчальний тренажер для вивчення правил в механіці матеріалів і конструкції*

Також при побудові епюр за методом перерізів є певний порядок: виконання нумерації перерізів з вільного кінця, зміна номеру перерізу за певних умов, розтяг при розрахунку має додатній знак, а стиск навпаки, тощо. Щоб вивчити методику

виконання таких задач, перетягують текст на відповідні кроки побудови епюр (рис.1.20-1.23).

Поясніть епюру. Розмістіть порядок побудови епюри знизу вгору.

розрахунок відносного видовження або вкорочення на кожному перерізі

побудова епюри згідно методу перерізів

зміна номеру перерізу при зміні площі поперечного перерізу або зміні дії навантаження

нумерація перерізів з вільного кінця

Навігація по тесту

1 2 3 4 5 6 7

8 9 10

Закончить попытку...

Начать новый просмотр

Рисунок 1.20. Навчальний тренажер для позначення етапів побудови епюр поздовжньої сили та загальної деформації

Позначте на рисунку правила побудови епюр при крученні круглого вала. Відповіді вкажіть згідно з послідовністю виконання.

нумерація перерізів з вільного кінця

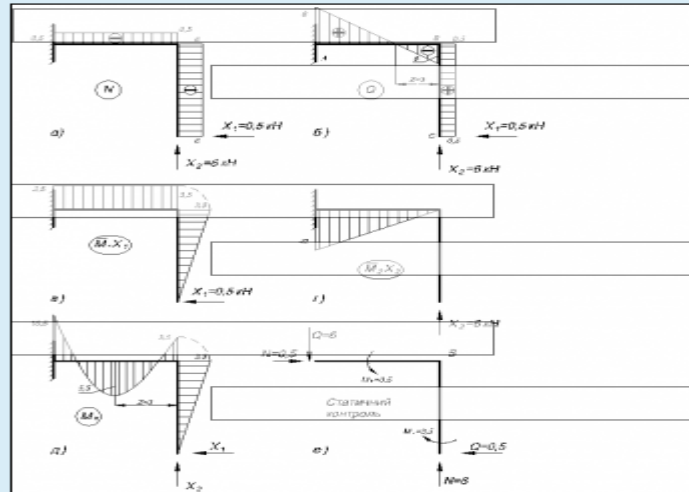
крутний момент вважається додатним, якщо при погляді на поперечний переріз він повертає його в напрямку годинникової стрілки

епюра кутів закручування будується від жорсткого зацмлення

загальний кут закручування рівний сумі кутів закручування на ділянках

Рисунок 1.21. Навчальний тренажер для позначення етапів побудови епюр крутного моменту та кута закручування

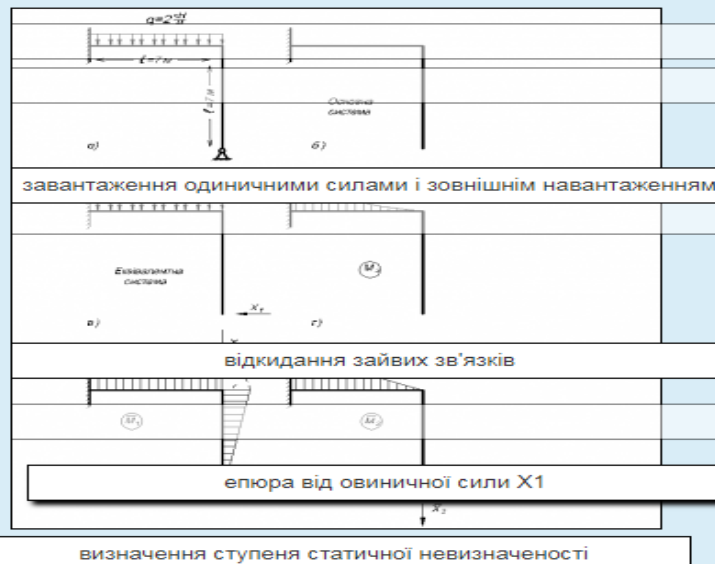
На прикладі епюр вкажіть етапи розрахунку



- визначення поздовжньої сили
- визначення поперечної сили
- виправлена епюра одиничної сили  $X_1$
- виправлена епюра одиничної сили  $X_2$
- виправлена епюра моменту
- контроль

Рисунок 1.22. Навчальний тренажер для позначення етапів побудови виправлених епюр одиничного стану

На прикладі епюр вкажіть етапи розрахунку статично невизначених систем



- завантаження одиничними силами і зовнішнім навантаженням
- відкидання зайвих зв'язків
- епюра від одиничної сили  $X_1$
- визначення ступеня статичної невизначеності

Рисунок 1.23. Навчальний тренажер для позначення етапів побудови епюр при розрахунку статично невизначених систем

При вивченні механіки матеріалів і конструкцій, багато явищ треба вміти описувати графічно та знаходити тотожності між зображенням на рисунку, епюрі тощо. Це також можна зробити за допомогою перетягування тексту на рисунку у відповідні ділянки, що співставляються з явищами (рис.1.24).

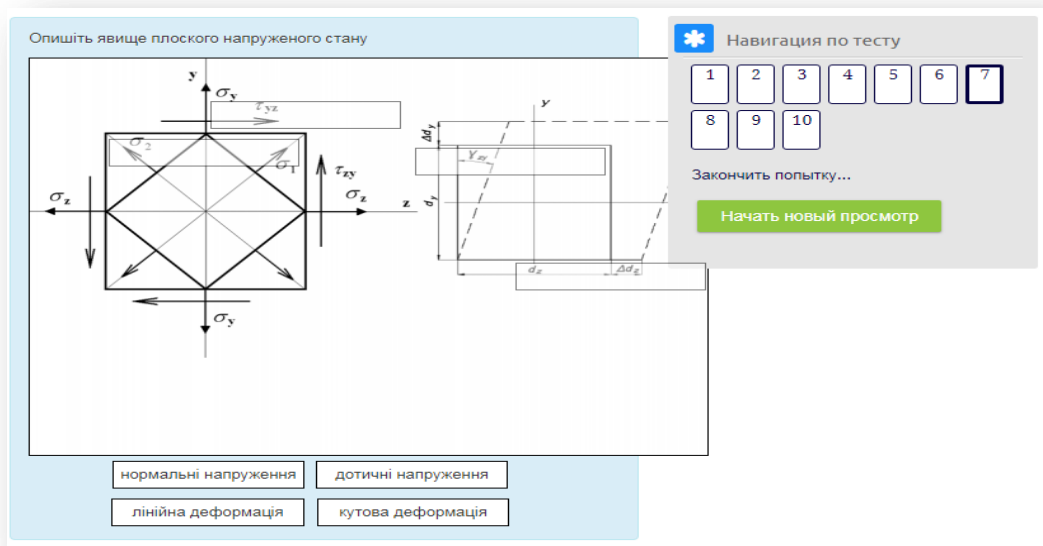


Рисунок 1.24. Навчальний тренажер для описання явища плоского напруженого стану

Також навчальні тренажери доцільно використовувати при розрахунку. Наприклад, для визначення значення моменту на кожній ділянці (рис.1.25, 1.26).

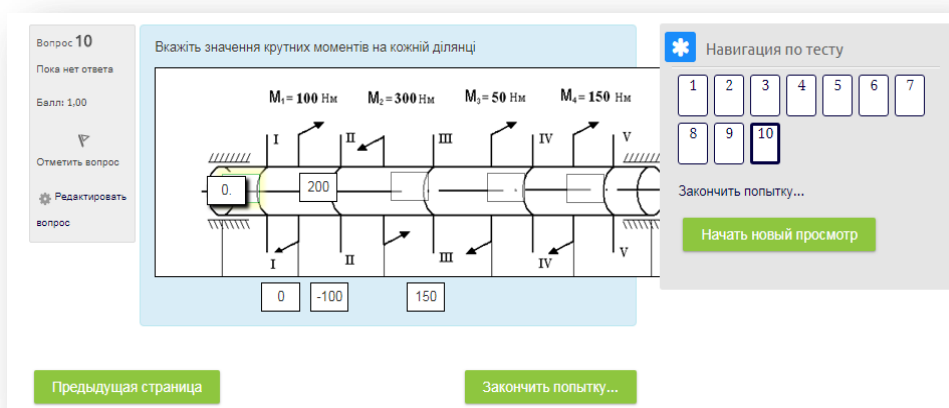


Рисунок 1.25. Навчальний тренажер для визначення значення крутного моменту на кожній ділянці



Вкажіть значення моментів згинання при  $P = 20 \text{ кН}$ ;  $l = 2 \text{ м}$ ;  $h/b = 1,5$ ;  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .

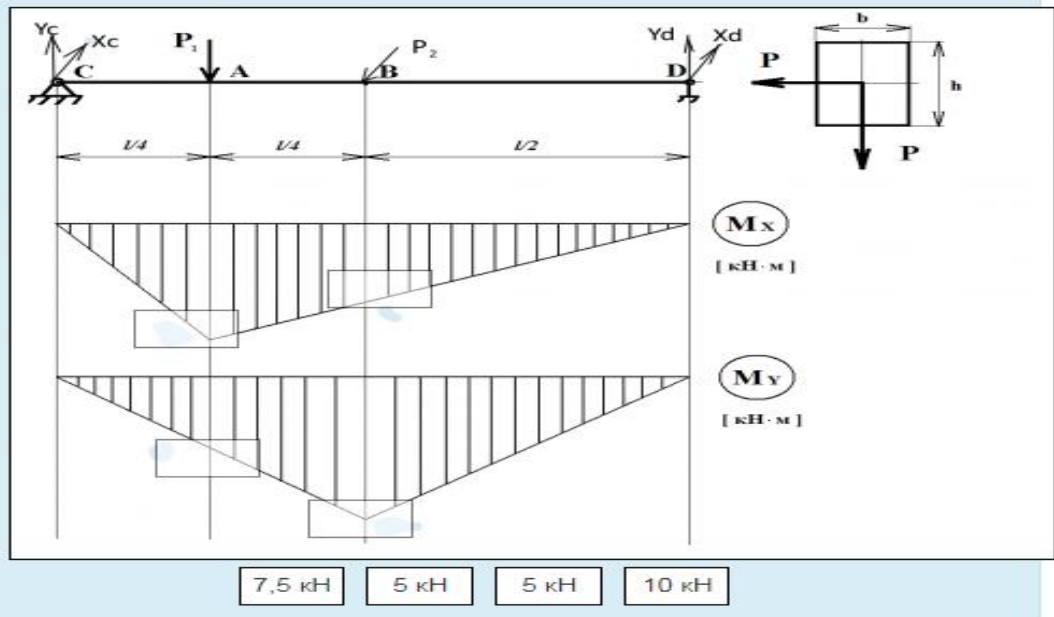


Рисунок 1.26. Навчальний тренажер для визначення значення моменту згину на кожній ділянці

Також можна перетягувати зображення на зображення для визначення відповідності, так як це вказано для визначення формули для знаходження критичної сили кожного із стрижнів (рис.1.27).

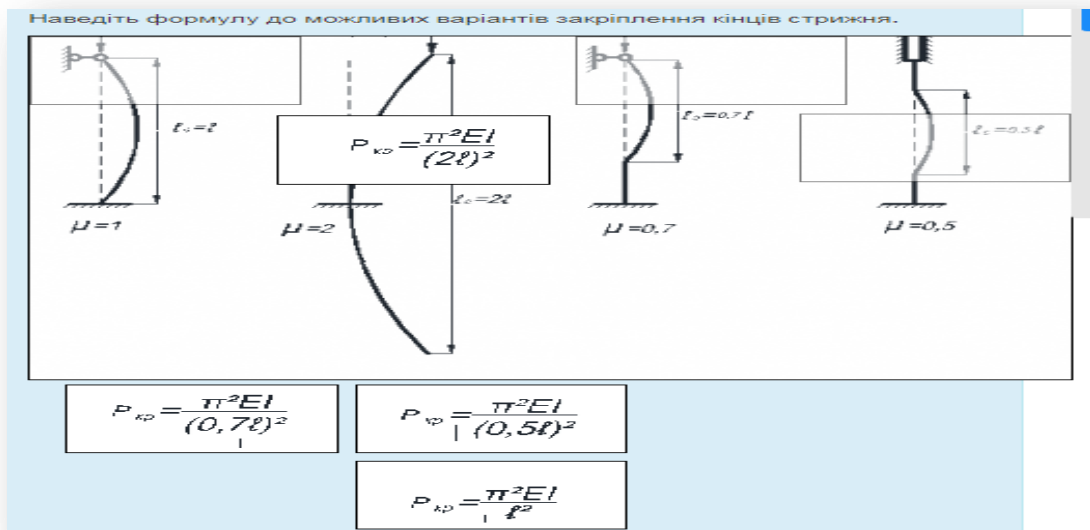


Рисунок 1.27. Навчальний тренажер для визначення відповідності типу стрижня і формули для знаходження критичної сили

## 2. ЗГИН. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

### 2.1. Плоский згин

#### 2.1.1. Основні типи опорних в'язей. Визначення опорних реакцій

Стрижні, які працюють в умовах згину називають балками.

Якщо на бокову поверхню балки нанести прямокутник, то в результаті дії зовнішнього згинального моменту поперечні риси залишаються прямими, але при цьому повернуться на деякий кут, а поздовжні викривляться, змінивши свою довжину. Тобто верхні волокна скорочуються, а нижні подовжуються (рис. 2.1).

На практиці відомі такі основні випадки згину:

а) чистий згин – коли в поперечному перерізі виникає тільки згинальний момент  $M_x$  (рис. 2.1 а).

б) поперечний згин – коли в поперечному перерізі виникає згинальний момент  $M_x$  і поперечна сила  $Q_y$  (рис. 2.1 б).

в) плоский згин – це коли поперечний переріз балки має вертикальну вісь симетрії і силова площина збігається з цією віссю. Деформована вісь балки також лежить у цій площині (рис. 2.1 в).

г) косий згин – коли силова площина не збігається з головною віссю (рис. 2.1 г).

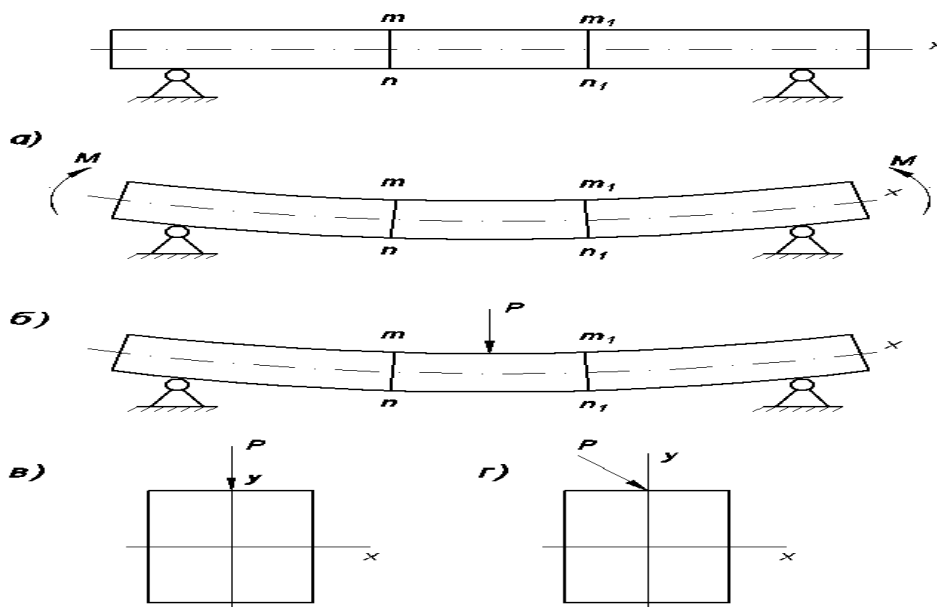


Рисунок 2.1. Випадки згину.

Для того, щоб балка могла сприймати зовнішнє навантаження і передавати його на основу, вона повинна бути закріплена за допомогою опорних в'язей (опор). Існують три види опор (рис. 2.2):

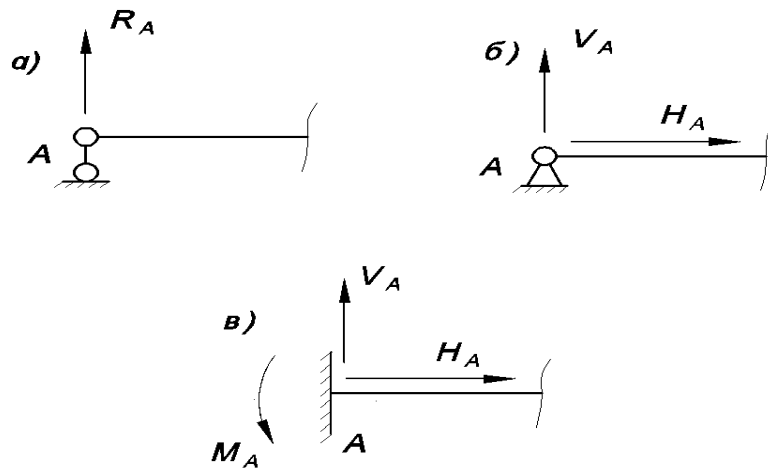


Рисунок 2.2. Види опор:

- а) шарнірно рухома опора; б) шарнірно нерухома опора;  
 г) жорстке затиснення (защемлення).

Відповідно до умов закріплення, виділяють такі основні види балок (рис. 2.3):

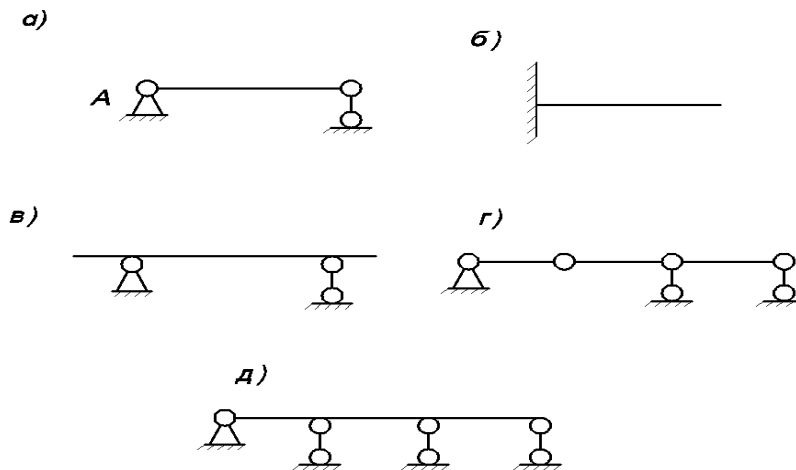


Рис. 2.3. Види балок:

- а) проста однопрогінна балка; б) консольна балка;  
 в) двохопорна балка з консолями; г) розрізна багатопрогінна балка; д) нерозрізна багатопрогінна балка.

### 2.1.2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між $M_x$ , $Q_y$ та $q$ . Правила спрощеної побудови епюр $M_x$ та $Q_y$ .

Для визначення внутрішніх зусиль при згині використовують **метод перерізів**, згідно з яким балку розтинають на дві частини і «працюють» з однією із них, а дію відкинутої частини замінюють внутрішніми зусиллями, які при згині зводять до поперечної сили  $Q_y$  і згинального моменту  $M_x$  (рис. 2.4).

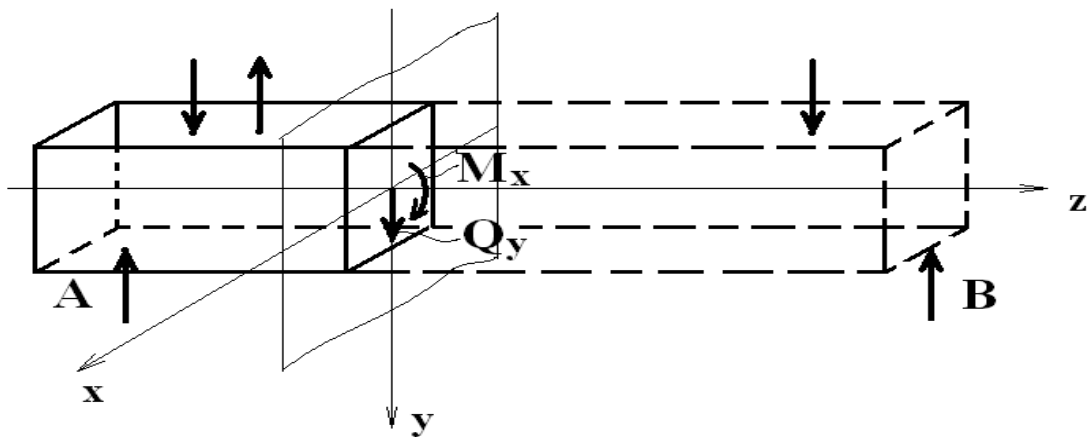


Рис. 2.4. Метод перерізів у графічному відображенні при визначенні  $Q_y$  і  $M_x$ .

Величина поперечної сили  $Q_y$  і згинального моменту  $M_x$  обчислюються за такими робочими правилами:

– поперечна сила  $Q_y$  дорівнює сумі проєкцій всіх зовнішніх сил на площину перерізу і обирається із знаком «+», якщо вона повертає відсічену частину відносно перерізу за годинниковою стрілкою, і навпаки;

– згинальний момент  $M_x$  дорівнює сумі моментів зовнішніх зусиль відносно центру ваги перерізу і обирається із знаком «+», якщо розтягуються нижні волокна, і навпаки.

Розглянемо ділянку балки довжиною  $dz$  і завантажимо її зовнішнім розподіленим навантаженням інтенсивності  $q$  (Н/м). Дію розподіленого навантаження на ділянці довжиною  $l$  можна замінити зосередженою силою  $Q=q \cdot l$ . Знайдемо внутрішні зусилля (рис. 2.5).

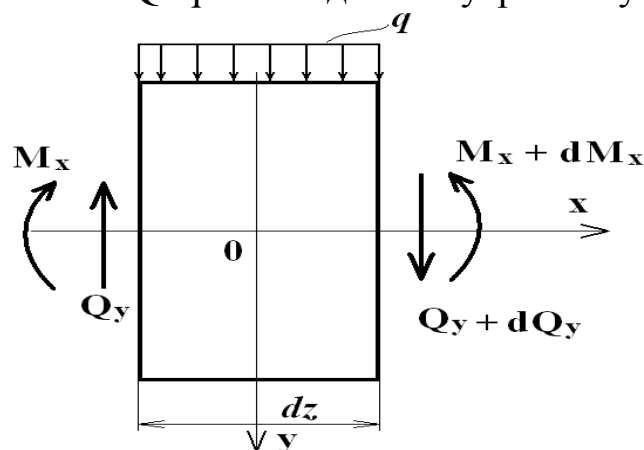


Рис. 2.5. Завантаження ділянки балки із зображенням внутрішніх зусиль.

Із умов рівноваги маємо:

$$1. \quad \sum y = 0.$$

$$q \cdot dz - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{dQ_y}{dz} = -q. \quad (2.1)$$

$$2. \quad \sum M_0 = 0.$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot \frac{1}{2} dz + (Q + dQ_y) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = 0;$$

Величина  $dQ_y \cdot \frac{1}{2} \cdot dz$  прямує до нуля, тому нею можна нехтувати.

Кінцево отримуємо:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (2.2)$$

Проаналізувавши вирази (2.1) та (2.2), можна отримати третю залежність:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q. \quad (2.3)$$

Для того щоб розв'язувати задачі міцності та жорсткості при згині необхідно знати  $M_x^{\max}$  та  $Q_y^{\max}$ , тобто виникає необхідність побудувати епюри  $M_x$  та  $Q_y$ , що будуються за допомогою правил спрощення побудови, які випливають із диференційної залежності між  $M_x$ ,  $Q_y$  і  $Q$  (6.2; 6.3).

#### **Правила спрощення побудови епюр $M_x$ та $Q_y$ .**

1. На ділянці балки, вільної від розподіленого навантаження ( $q = 0$ ), поперечна сила постійна ( $Q_y = \text{const}$ ) згинальний момент  $M_x$  змінюється за лінійним законом.

2. На ділянці балки, що завантажена рівномірно – розподіленим навантаженням ( $q = \text{const}$ ):

а)  $Q_y$  змінюється за лінійним законом;

б)  $M_x$  змінюється за законом квадратної параболи.

3. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ( $q > 0$ ), поперечна сила  $Q_y$  зменшується із зростанням  $Z$  на величину рівнодіючої цієї ділянки.

4. На ділянці балки, де поперечна сила більша за нуль ( $Q_y > 0$ ) із збільшенням  $Z$ , епюра  $M_x$  зростає на величину площі епюри  $Q_y$  цієї ділянки.

5. На ділянці балки, де поперечна сила  $Q_y$  змінюється за лінійним законом та в деякій точці дорівнює нулю, на епюрі згинального моменту  $M_x$  у тій же точці будемо мати екстремальне значення  $M_x$ , причому максимальне значення згинального моменту  $M_x$  буде тоді, коли  $Q_y$  змінюється з «+» на «-».

6. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ( $q > 0$ ), епюра  $M_x$  має випуклість у бік додатних координат.

7. У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі поперечних сил  $Q_y$  буде стрибок на величину цієї сили.

8. У точках прикладання зовнішніх зосереджених моментів згинання на епюрі згинальних моментів  $M_x$  буде стрибок на величину цього зовнішнього моменту.

Розв'язання задач з побудови епюр  $Q_y$  та  $M_x$  поділяють на 4 етапи:

1. Визначення опорних реакцій. Вважаючи балку абсолютно жорстким тілом, замінюючи опори відповідними реакціями і складаючи рівняння рівноваги, визначаємо їх. Обов'язково здійснювати контроль правильності знаходження опорних реакцій.

2. Розбивають балку на ділянки. Границями ділянок є: початок і кінець балки; точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження  $q$  та його закінчення.

3. Визначаємо величину поперечної сили  $Q_y$  в характерних перерізах і будуємо її епюру.

4. Визначаємо величини згинальних моментів  $M_x$  в характерних перерізах і будуємо його епюру.

### **2.1.3. Приклади побудови епюр $M_x$ і $Q_y$**

Приклади для правил спрощення побудови епюр (рис. 2.6 – 2.10).

Розглянемо більш складний приклад розв'язання задачі розрахунку балки на згин.

Побудувати епюри  $M_x$  та  $Q_y$  для заданої балки (рис. 2.11). Розв'язання задачі поділяємо на чотири етапи:

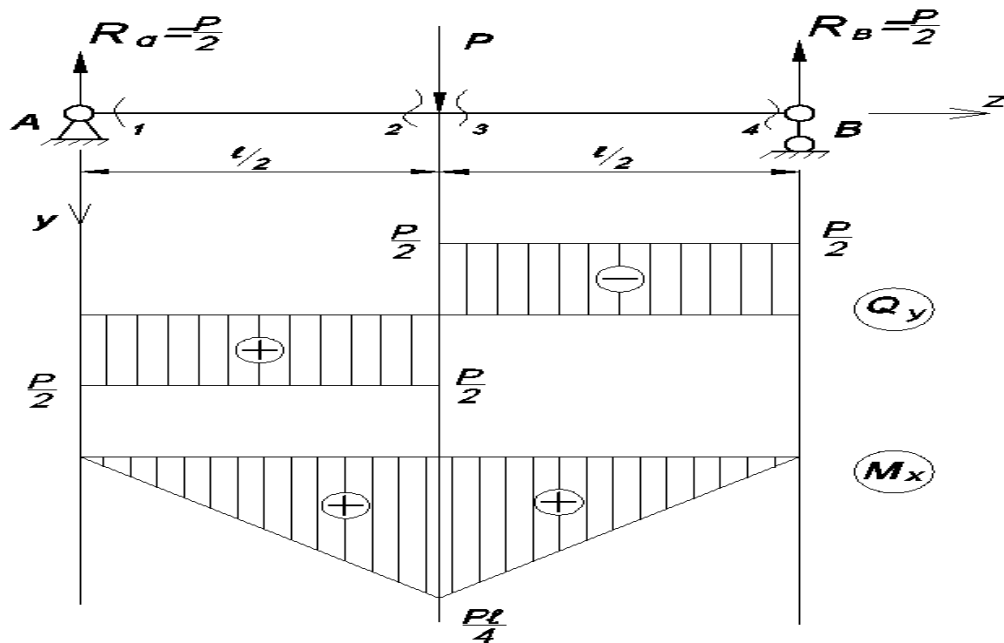


Рис. 2.6. Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$ .

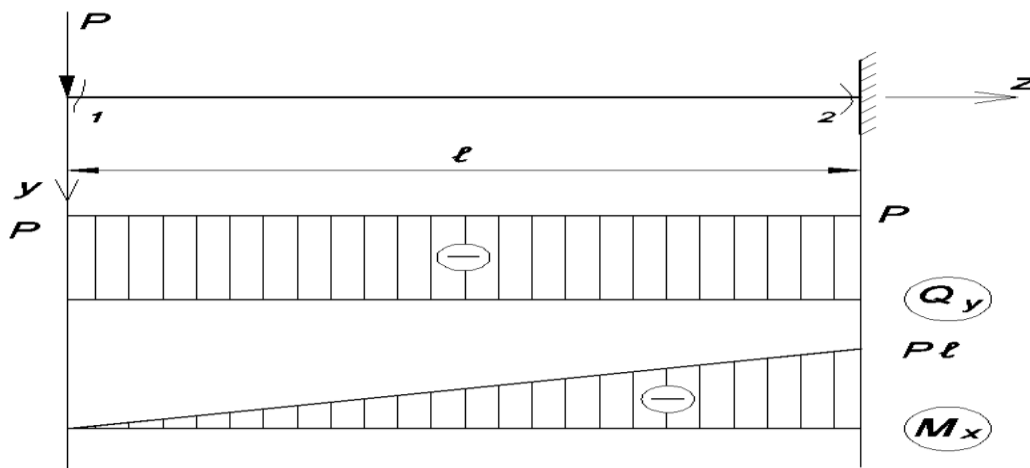


Рис. 2.7. Побудова епюр  $Q_y$  і  $M_x$ .

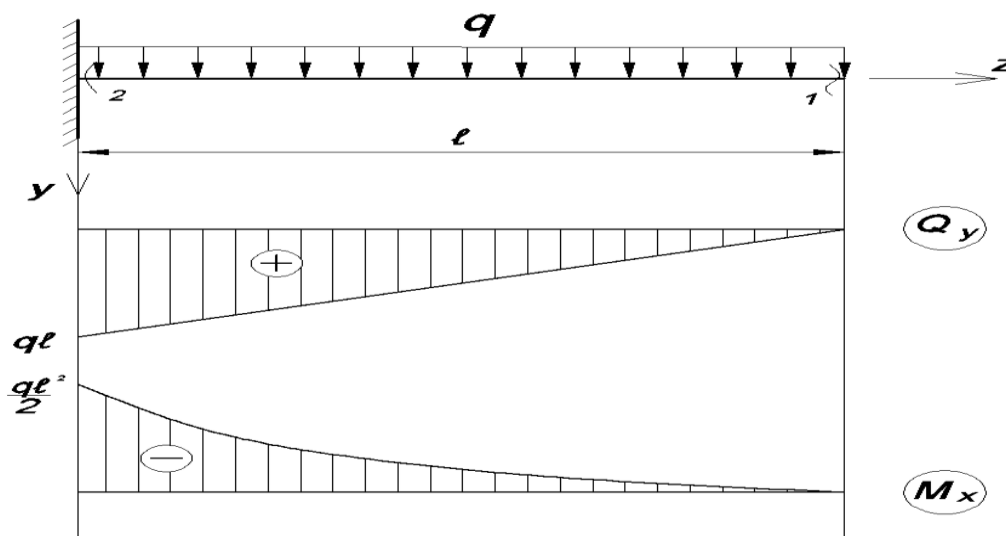


Рис. 2.8. Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$ .

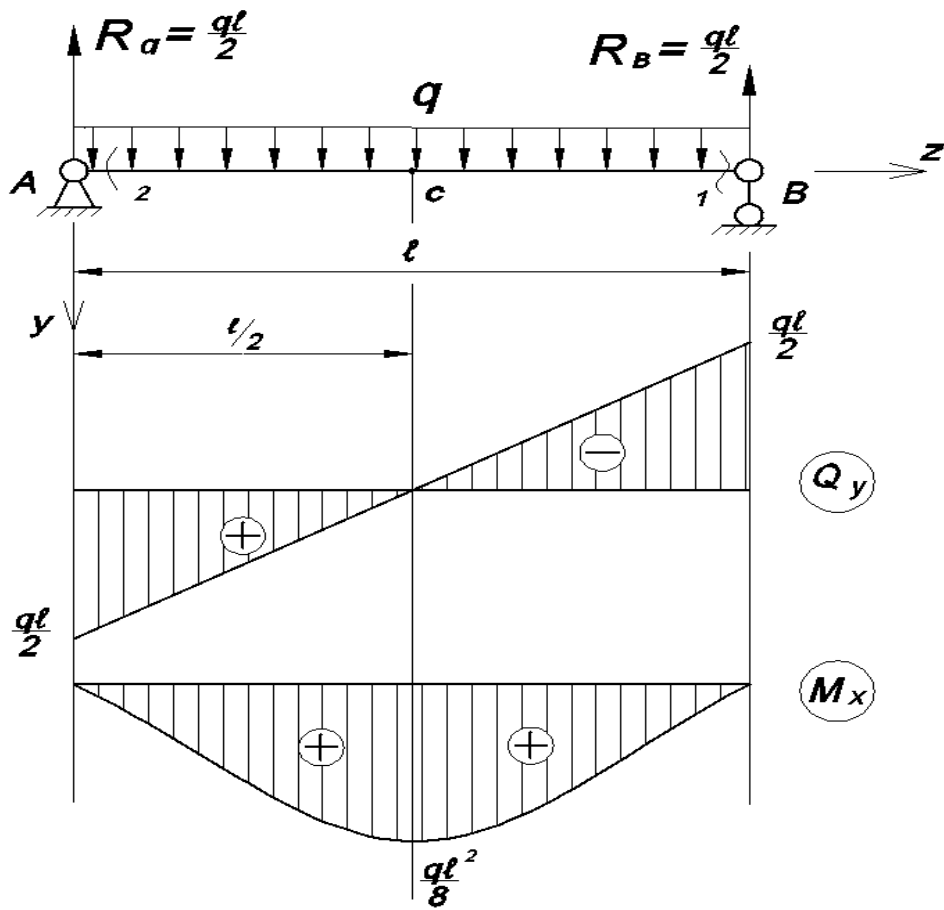


Рис. 2.9. Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$ .

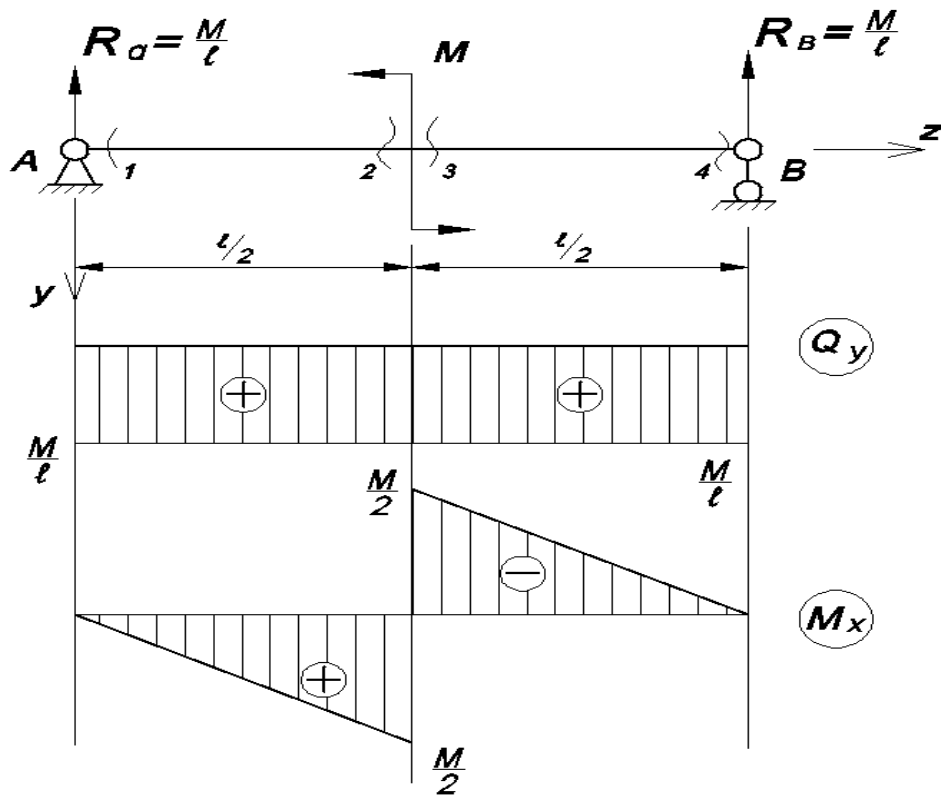


Рис. 2.10. Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$ .



1) Визначаємо опорні реакції. Вважаємо, що балка – абсолютно тверде тіло, складаємо для неї рівняння рівноваги, розв’язуючи які, знаходимо опорні реакції (рис. 2.11).

$$\sum M_B = 0;$$

$$10 \cdot P_1 + q \cdot 4 \cdot 8 - R_A \cdot 8 + P_2 \cdot 3 - M = 0;$$

$$R_A = 177,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$2 \cdot P_1 - 5 \cdot P_2 + 8 \cdot R_B - M = 0;$$

$$R_B = 102,5 \text{ кН.}$$

Перевірка (спроєктуємо всі сили на вісь Y):  $\sum Y = 0;$

$$P_1 + q \cdot 4 - R_A + P_2 - R_B = 0; \quad 40 + 80 - 177,5 + 160 - 102,5 = 0$$

2) Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження  $q$  та його закінчення.

Умовно балку поділено хвилястими перерізами, які відмічені на схемі (рис. 2.11) цифрами вздовж балки.

3) Визначаємо величину поперечної сили  $Q_y$  в характерних перерізах і будуємо її епюру (рис. 2.11).

$$Q_{y(1)} = -P_1 = -40 \text{ кН}; \quad Q_{y(2)} = -P_1 - 2 \cdot q = -80 \text{ кН};$$

$$Q_{y(3)} = -P_1 - 2 \cdot q + R_A = 97,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(4)} = Q_{y(5)} = -P_1 - 4 \cdot q + R_A = 57,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(6)}^{np} = -R_B + P_2 = 57,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(7)}^{np} = Q_{y(8)}^{np} = -R_B = -102,5 \text{ кН}; \quad Q_{y(9)}^{np} = Q_{y(10)}^{np} = 0$$

4) Визначаємо величини згинальних моментів  $M_x$  в характерних перерізах і будуємо епюру (рис. 2.11).

$$M_{x(1)} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x(2)} = M_{x(3)} = -2 \cdot P_1 - 2 \cdot q = -120 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(4)} = M_{x(5)} = -4 \cdot P_1 - 4 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot R_A = 35 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(6)} = M_{x(7)} = -M + 3 \cdot R_B = 207,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(8)} = M_{x(9)} = M_{x(10)} = -M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

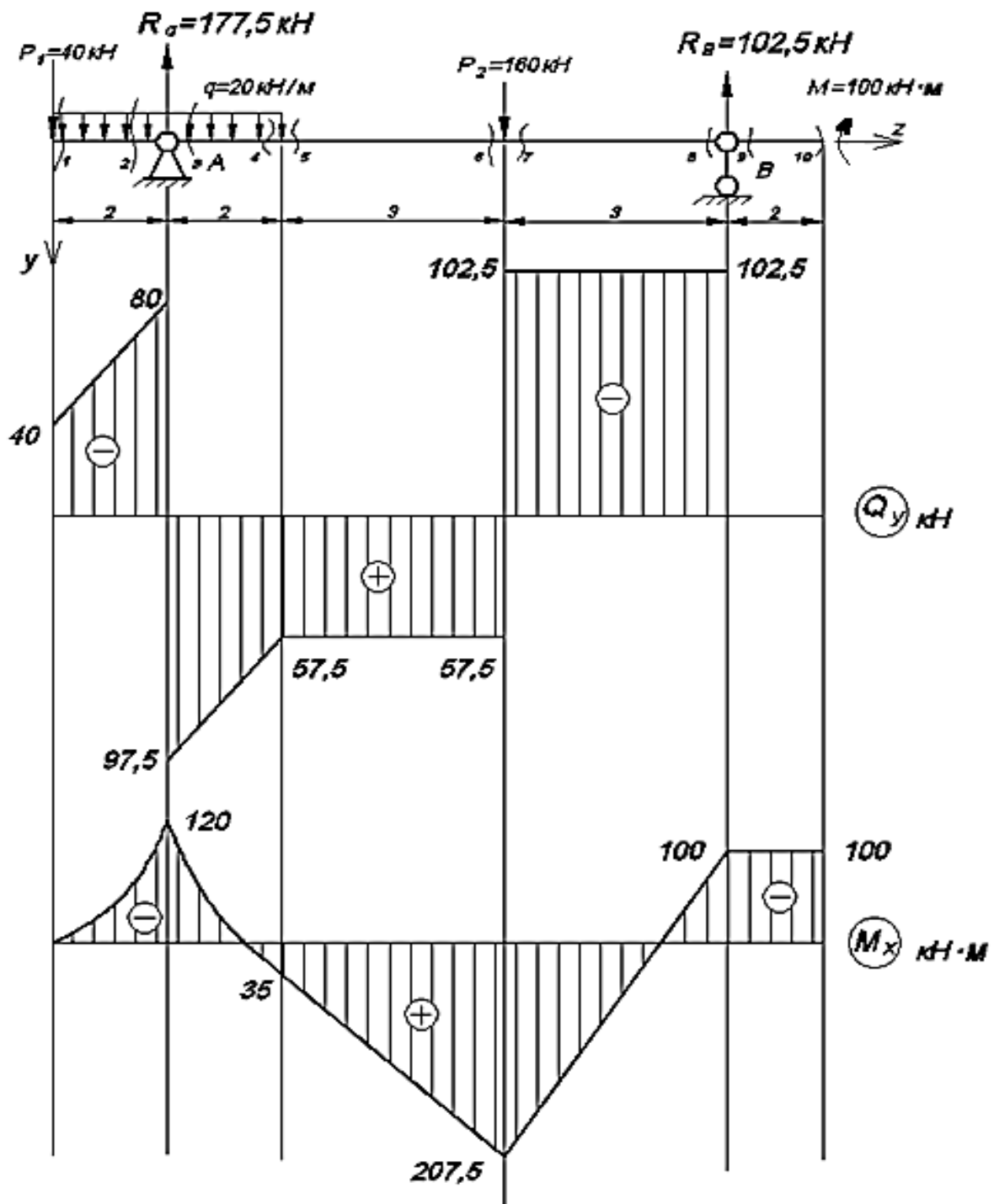


Рис. 2.11. Схема балки до задачі з поетапним розв'язанням її.

## 2.2. Чистий згин

### 2.2.1. Загальні поняття про чистий згин

У цілому при плоскому згині в поперечному перерізі балки виникають поперечна сила  $Q_y$  та згинальний момент  $M_x$ . Якщо в поперечному перерізі балки відсутня поперечна сила  $Q_y$ , а діє тільки згинальний момент  $M_x$ , то балка знаходиться в умовах чистого згину (рис. 2.12).

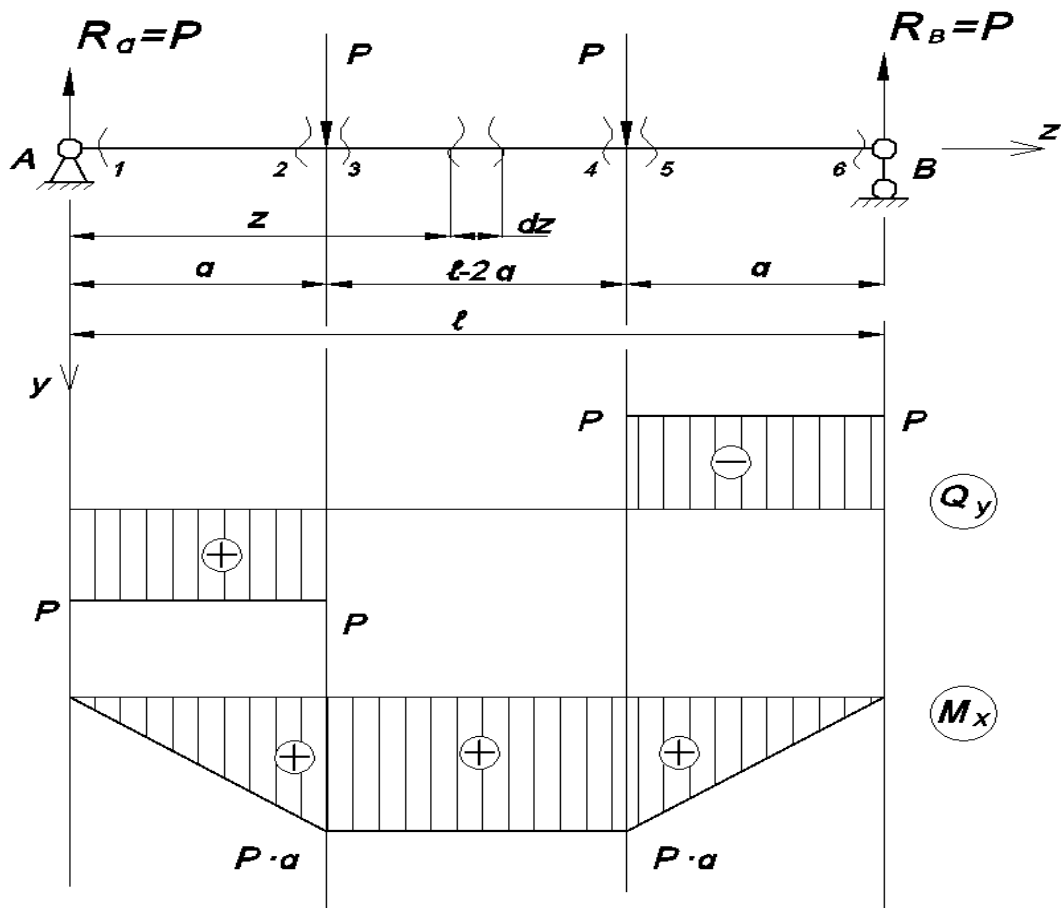


Рис. 2.12. Схема балки.

Середня ділянка балки знаходиться в умовах чистого згини.

### 2.2.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині

Для спрощення розглянемо балку, яка має вертикальну вісь симетрії. При визначенні характеру (закону) розподілу напружень за поперечним перерізом балки недостатньо рівнянь статички. Розглядають деформований стан балки із нанесеною на її бічну поверхню сіткою із поздовжніх і поперечних ліній (рис. 2.13, 2.14).

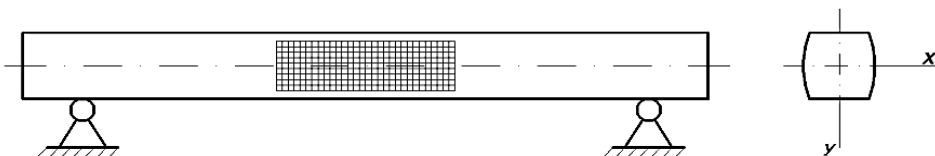


Рис. 2.13. Деформація волокон балки при чистому згині.

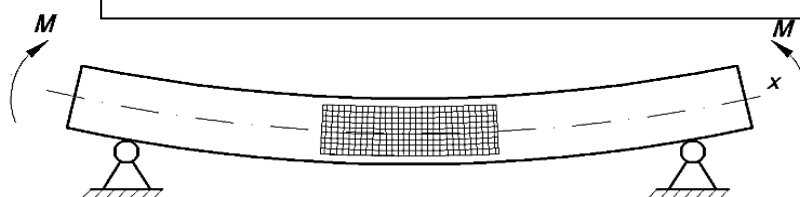


Рис. 2.14. Деформація волокон балки при чистому згині.

При деформації поздовжні риски викривляються і змінюють довжину, а поперечні повертаються на деякий кут, залишаючись при цьому прямими. Тобто при чистому згині справедливою є гіпотеза плоских перерізів, яка разом із рівняннями статки дає можливість визначити закон зміни напруження за поперечним перерізом балки. Розглянемо ділянку балки довжиною  $dz$  (рис. 2.14), та відтворимо його в збільшеному вигляді (рис. 2.15).

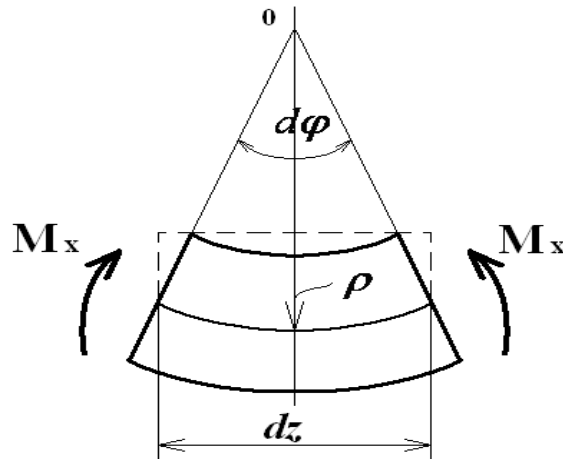


Рис. 2.15. Деформація ділянки балки довжиною  $dz$ .

За такої дії на ділянку балки  $dz$  зовнішнього навантаження видно, що два суміжних перерізи повертаються на кут  $d\varphi$ . При цьому верхні волокна скорочуються, а нижні – подовжуються. Деяке волокно залишається недеформованим – нейтральна лінія. А це, в свою чергу, говорить про те, що в поперечному перерізі виникають тільки нормальні напруження  $\sigma$ .

Для простоти розглянемо ділянку балки з прямими поздовжніми волокнами (рис. 2.16). Розглядатимемо деформацію волокна на відстані  $y$  від нульової лінії, яка складається з двох відрізків АВ, кожен з яких дорівнює:

$$AB = y \cdot \frac{d\varphi}{2}. \quad (2.4)$$

$$dz = \rho \cdot d\varphi. \quad (2.5)$$

$$\Delta dz = y \cdot d\varphi. \quad (2.6)$$

де:  $\rho$  – радіус кривизни.

Відносна деформація дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{1}{\rho} \cdot y. \quad (2.7)$$

Використовуючи закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon : \text{маємо } \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad (2.8)$$

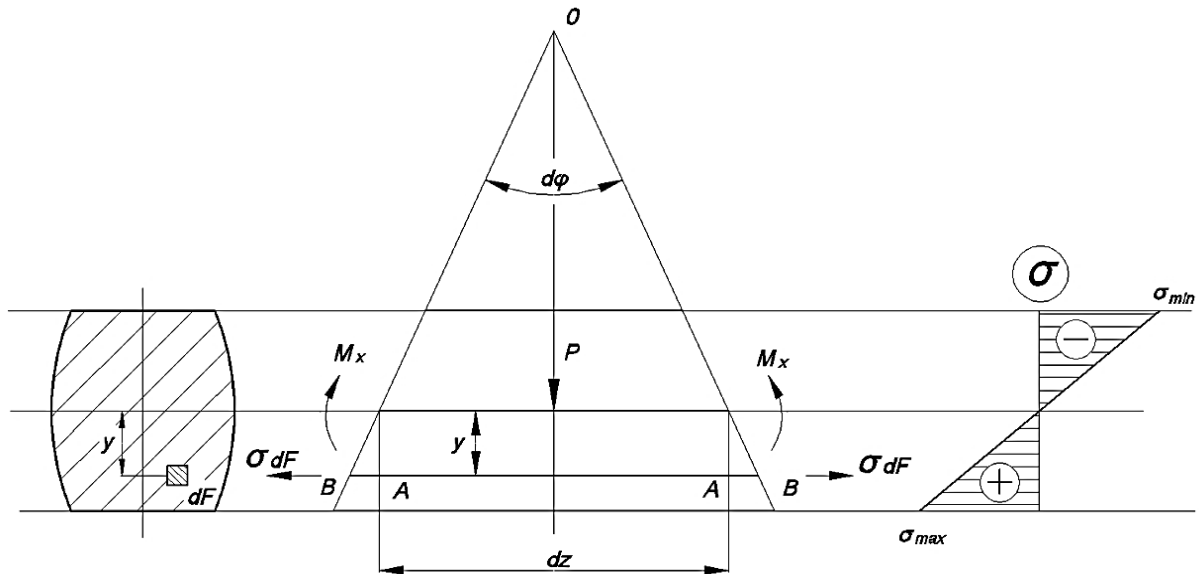


Рис. 2.16. Наближений розгляд деформації волокон.

Очевидно, що поздовжня сила при чистому згинанні дорівнює нулю:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF = 0. \quad (2.9)$$

Підставивши вираз (2.8) в (2.9) будемо мати:

$$N_z = \int_F \frac{E}{\rho} y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot dF = 0. \quad (2.10)$$

При цьому  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ .

$$\text{Відповідно: } \int_F y \cdot dF = S_x = 0. \quad (2.11)$$

Це означає, що при чистому згині нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу. Сумарний згинальний момент у поперечному перерізі балки  $M_x$  відносно нейтральної вісі визначається:

$$M_x = \int_F (\sigma dF) \cdot y \quad (2.12)$$

Замість  $\sigma$  підставимо його значення із (6.8), й отримаємо:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF \quad (2.13)$$

Враховуючи, що  $\int_F y^2 dF = I_x$ , маємо:

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}, \quad (2.14)$$

Порівнявши (2.14) з (2.8), отримаємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (2.15)$$

Із виразу (2.15) видно, що змінною є тільки ордината  $y$ , а значить нормальні напруження по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. Графічне відображення закону зміни нормальних напружень  $\sigma$  по висоті перерізу називають епюрою нормальних напружень (рис. 6.15). Очевидно, що максимальні напруження виникають у найбільш віддалених волокнах і визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{\underbrace{I_x}_{W_x}} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (2.16)$$

Формула (2.16) виведена для перерізів, що мають вертикальну вісь симетрії. Доведемо, що вона є справедливою і для будь-яких поперечних перерізів, але при цьому силова площа повинна збігати з однією із головних осей симетрії. Очевидно, що загальний вид епюри  $\sigma$  не залежить від форми поперечного перерізу балки.

Для доведення порівняємо до нуля згинальний момент  $M_y$ :

$$M_y = \int_F \sigma \cdot dF \cdot x = \int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF \cdot x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0. \quad (2.17),$$

При цьому  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ . Значить відцентровий момент інерції:

$$\int_F x \cdot y \cdot dF = I_{xy} = 0 \quad (2.18)$$

Відцентровий момент інерції дорівнює нулю лише тоді коли ці осі будуть головними.

## 2.3. Поперечний згин

### 2.3.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Етюра дотичних напружень при поперечному згині

На відміну від чистого згину, при поперечному згині в перерізі балки поряд з моментом згинання  $M_x$  виникає поперечна сила  $Q_y$  (рис. 2.17).

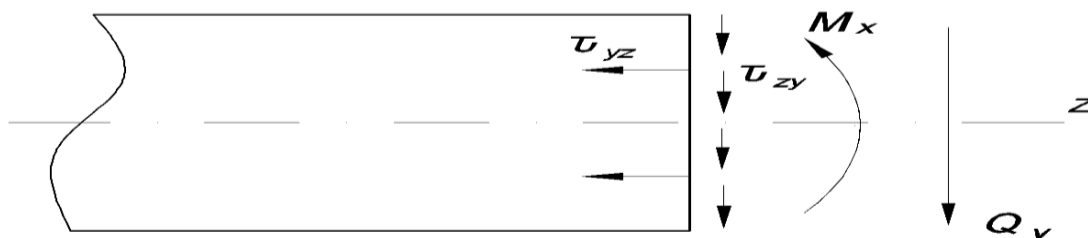


Рис. 2.17. Дотичні напруження при поперечному згині.

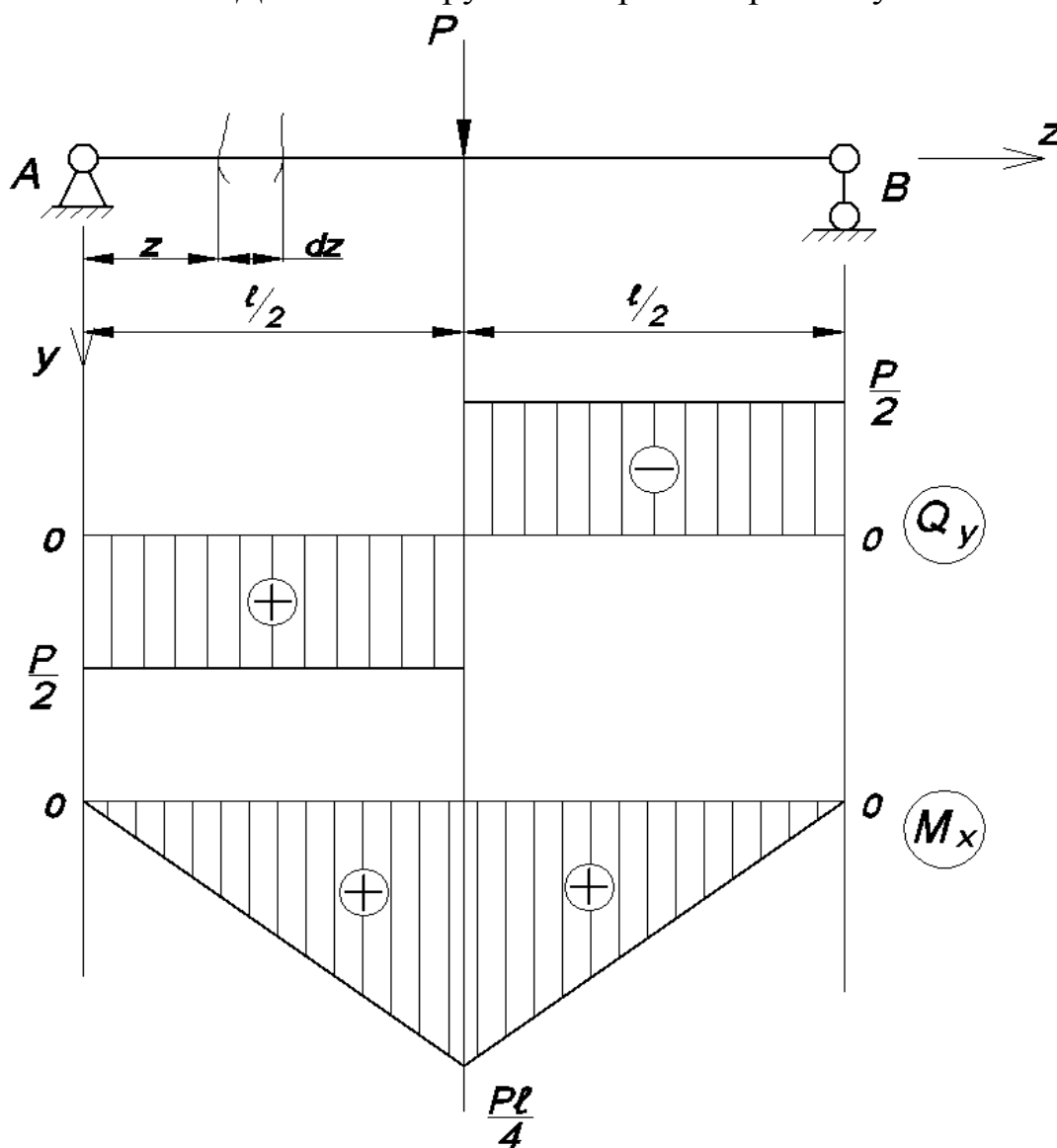


Рис. 2.18. Схема балки.

Поперечна сила  $Q_y$  викликає дію дотичних напружень  $\tau$  у поперечному перерізі, які згідно із законом парності дотичних напружень виникають і в поздовжніх перерізах, викликаючи зсув поздовжніх волокон і порушуючи гіпотезу плоских перерізів, що покладена в основу виведення формули  $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ . Експериментальні й теоретичні дослідження цього питання довели, що зсув незначно впливає на порушення гіпотези плоских перерізів, тому для поперечного згину користуються формулою:  $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ , як і для чистого згину.

Розглянемо ділянку балки (рис. 2.18) довжиною  $dz$ , яку розітнемо поздовжнім перерізом і розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 2.19).

Поперечний переріз балки

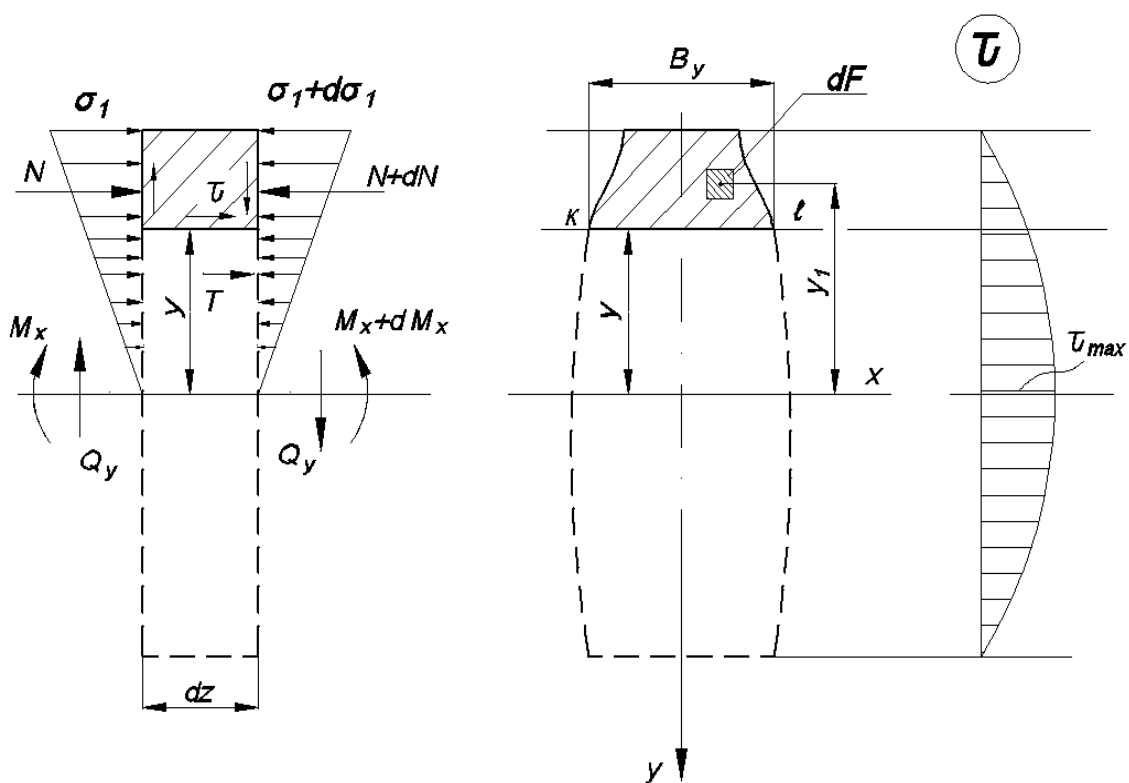


Рис. 2.19. Ділянка балки довжиною  $dz$ .

Оскільки на правому перерізі ділянки балки діє більший згинальний момент, ніж на лівому, то відповідно будуть більшими і напруження:

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{I_x} \cdot y_1. \quad (2.18)$$



Відповідно, і стискаюча сила на правому перерізі буде більшою, ніж на лівому на величину:

$$\begin{aligned} dN_z &= \int_{F_{\text{відсіч}}} d\sigma_1 \cdot dF = \int_{F_{\text{відсіч}}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 \cdot dF = \\ &= \frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{\text{відсіч}}} y_1 \cdot dF. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = \int_{F_{\text{відсіч}}} y_1 \cdot dF \quad (6.20)$$

де  $S_x^{\text{відсіч}}$  - статичний момент відносно нейтральної осі відсіченої частини перерізу.

З врахуванням виразу (2.20) формула (2.19) набуде вигляду:

$$dN_z = \frac{dM_x}{I_x} \cdot S_x^{\text{відсіч}}. \quad (2.21)$$

Сила зсуву в поздовжньому перерізі визначається:

$$T = \tau \cdot dz \cdot \epsilon_y. \quad (2.22)$$

Із умов рівноваги очевидно, що сума проєкцій усіх сил на вісь  $z$  рівна нулю, отже, матимемо:

$$T = dN. \quad (2.23)$$

Підставивши (2.21) та (2.22) в (2.23), матимемо рівність:

$$\tau_x = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \epsilon_y}. \quad (2.24)$$

А так як  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$  та  $\tau_x = \tau_y$ , матимемо:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \epsilon_y}, \quad (2.25)$$

де  $I_x$  - момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу. Формулу (2.25) отримав Д.І. Журавський.

Із аналізу формули (2.25) зрозуміло, що  $\tau = 0$  у крайніх точках, а  $\tau_{\text{max}}$  буде в точках, розташованих на нульовій лінії.  $\tau_y$

змінюється, як відношення  $S_x^{відсіч} / \vartheta_y$ . Для прямокутного перерізу, де  $\vartheta_y = const$  то  $\tau_y$  по висоті перерізу змінюється по кривій 3-го ступеню. Побудуємо епюри  $\tau$  для деяких перерізів.

Прямокутний переріз (рис. 2.20).

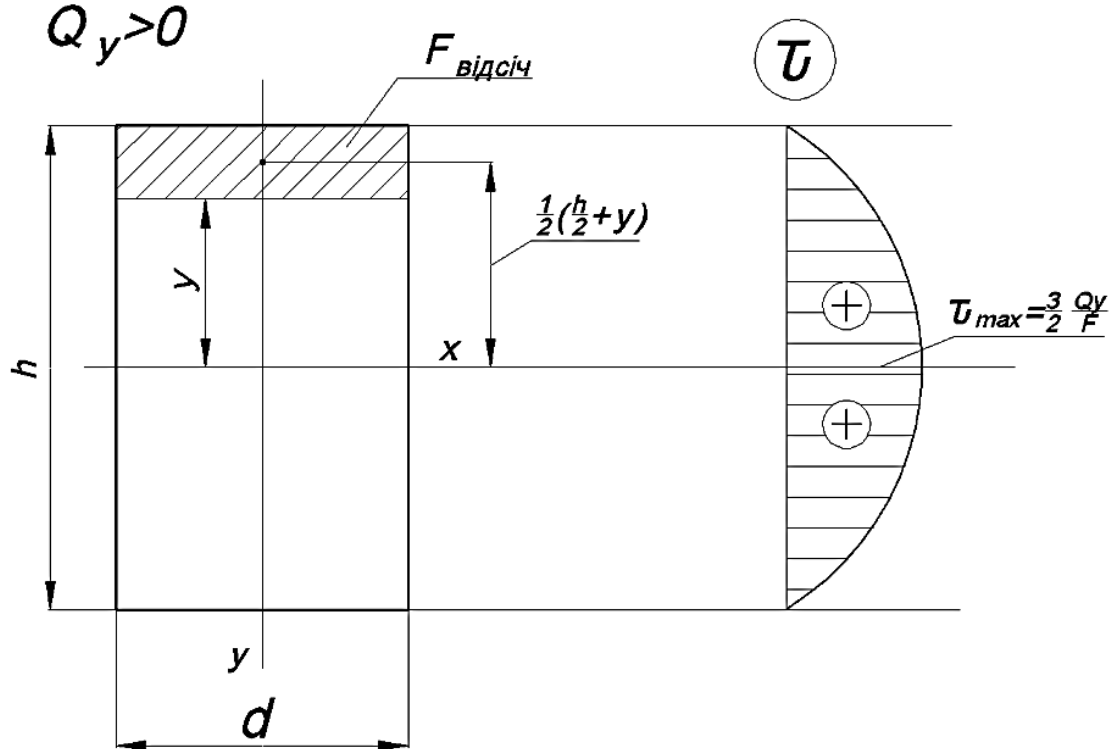


Рис. 2.20. Дотичні напруження в прямокутному поперечному перерізі.

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \vartheta_y},$$

$$S_x^{відсіч} = F^{відсіч} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = \vartheta \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right). \quad (2.26)$$

Застосувавши формули скороченого множення, отримаємо:

$$S_x^{відсіч} = \frac{\vartheta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (2.27)$$

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot \frac{\vartheta}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{\vartheta \cdot h^3}{12} \cdot \vartheta}. \quad (2.28)$$

Коли  $y = \frac{h}{2}$  або  $y = -\frac{h}{2}$ , то  $\tau_y = 0$ .

При  $y = 0$  будемо мати формулу:

$$\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} \cdot y \quad (2.29)$$

Круглий поперечний переріз (рис. 2.21).

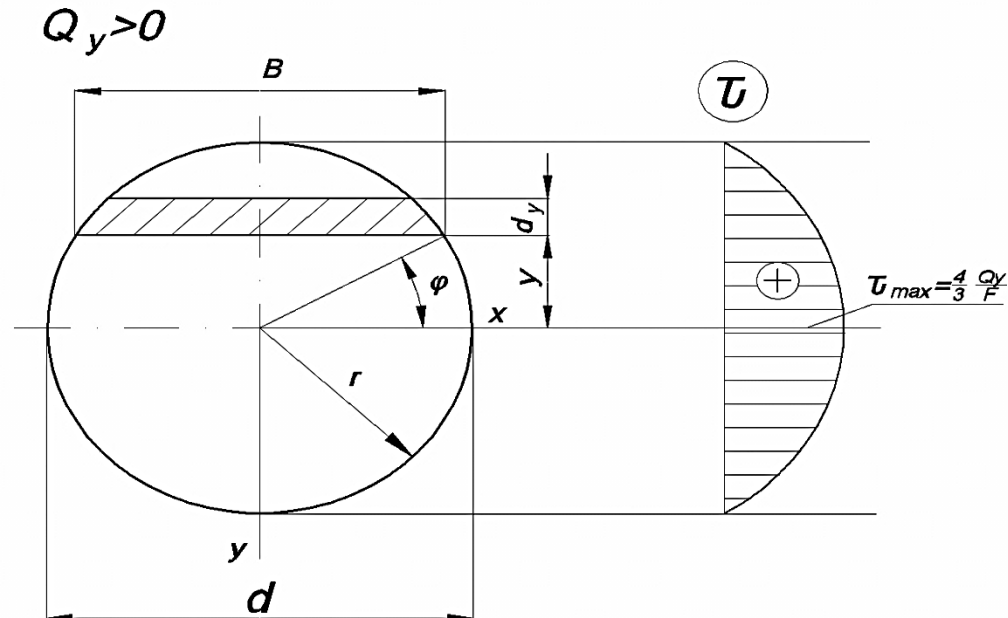


Рис. 2.21. Дотичні напруження в круглому поперечному перерізі.

$$e = 2 \cdot r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi; \quad dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{\text{відсічу}} = \int_F y \cdot dF; \quad dF = e \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{\text{відсічу}} = \int_F y \cdot dF = \int_F 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3} \quad (2.30)$$

Коли  $y = r$  або  $y = -r$ , то  $\tau_y = 0$ .

При  $y = 0$ , використавши формулу (2.25) і використовуючи формулу для моменту інерції круга  $I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$  будемо мати формулу для обчислення дотичних напружень:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot 2 \cdot r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \cdot r^2} \cdot y \quad \tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \cdot y \quad (2.31)$$

де  $F = \pi \cdot r^2$

Двотавровий переріз (рис. 2.22) характерний різкою зміною ширини в місцях з'єднання полиці та стійки.

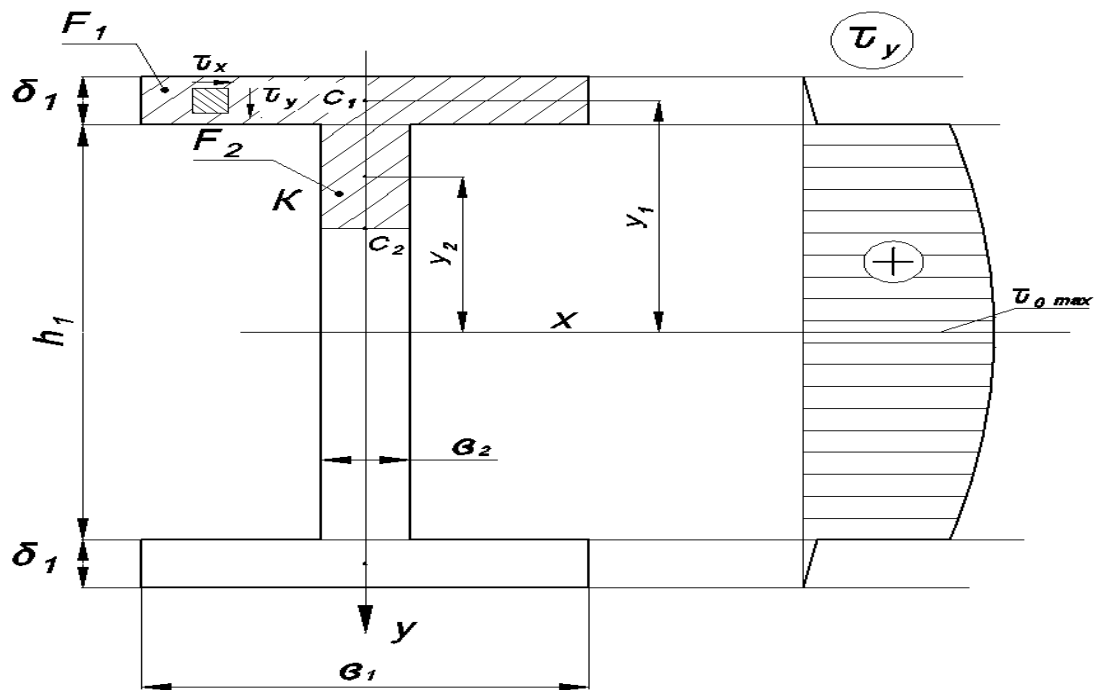


Рис. 2.22. Дотичні напруження двотаврового перерізу.

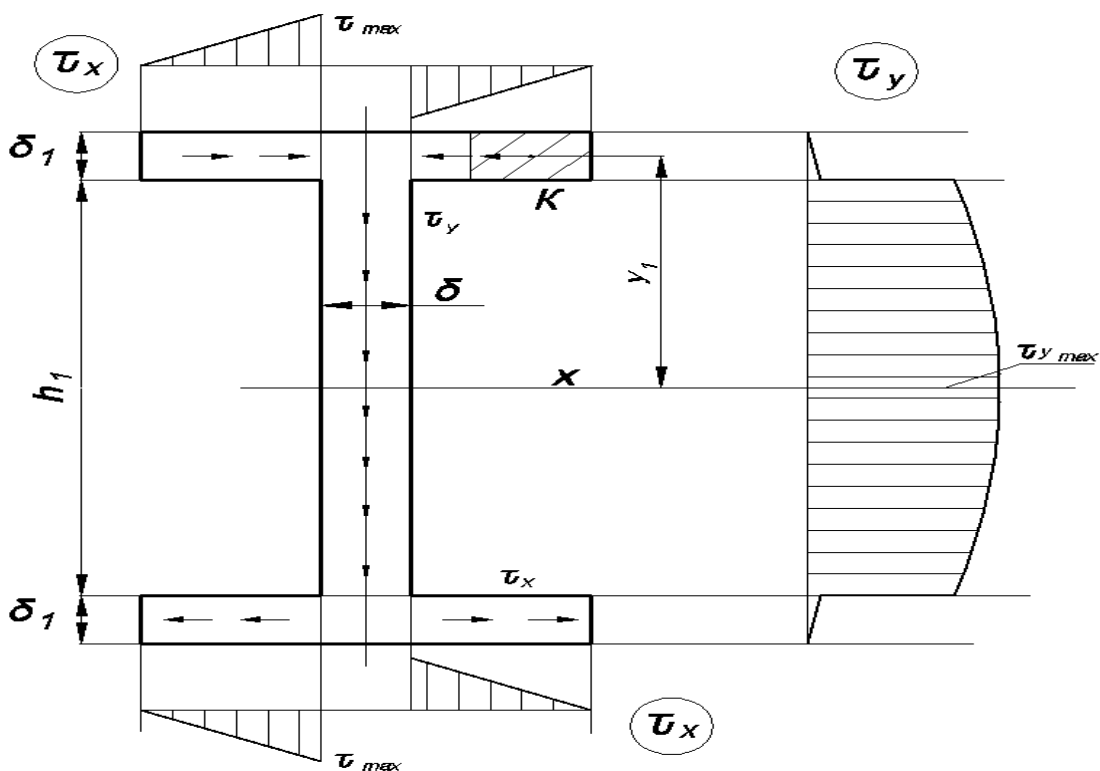


Рис. 2.23. Дотичні напруження  $\tau_x$  та  $\tau_y$ .

Для точки К  $S_x^{\text{відсіч}} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$ ;

Через значну ширину полиці  $\tau_y$  розподіляється нерівномірно, тому для полиці користуватися формулою (2.31) не коректно, її застосовують лише, коли  $y \leq \pm \frac{h}{2}$ .

Тому в цьому разі роблять двояко:

1. Не враховують  $\tau_y$  в поличках (через незначність);

2. Обчислюють за формулою:  $\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1}$ , при цьому на епюрі в точках переходу поличці у стійку є суттєві стрибки.

У двотавровому перерізі в поличці також виникають напруження  $\tau_x$ , які визначаються за формулою:

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1} \quad (2.32)$$

$$S_x^{відсіч} = F^{відсіч} \cdot y_1.$$

Використовуючи методику побудови епюр  $\tau_x$  та  $\tau_y$  для двотавра, побудуємо їх для швелера, завантаженого в центрі ваги зосередженою силою на кінці консолі (рис. 2.24, 2.25).

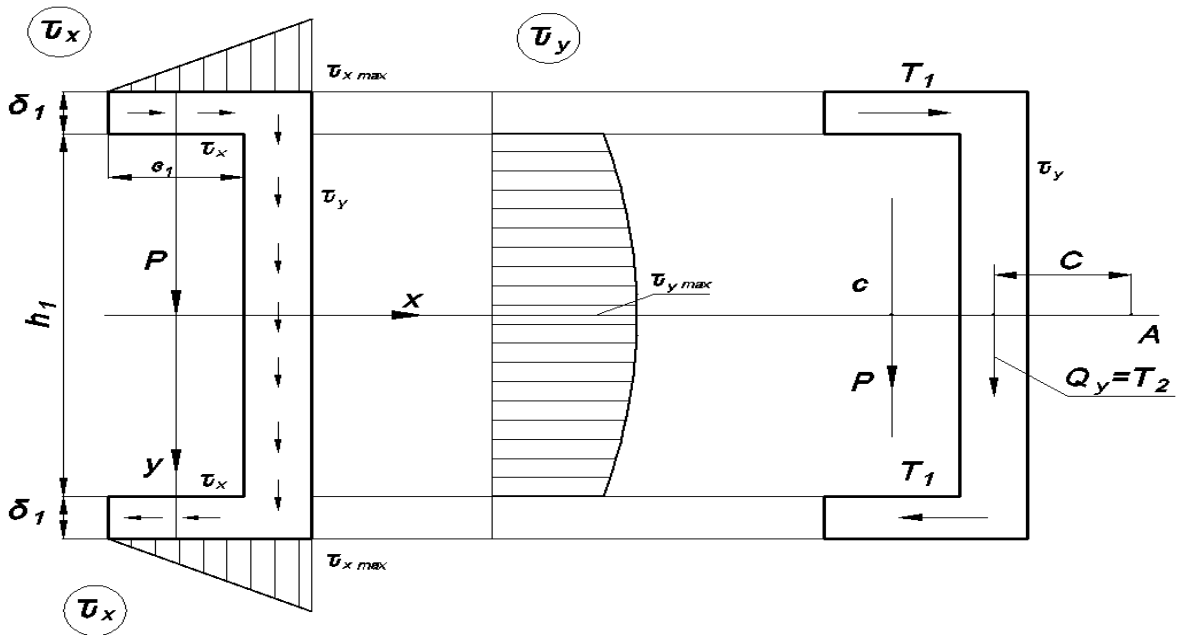


Рис. 2.24. Дотичні напруження в швелері.

Рис. 2.25. Центр згину

Найбільш дотичні напруження в поличці швелера дорівнюють:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1}; \quad (2.33)$$

$$\text{де: } S_x^{відсіч} = \frac{\delta_1 \cdot h_1 \cdot \delta_1}{2}. \quad (2.34)$$

Підставивши вираз (6.34) в (6.33), отримаємо:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot e_1 \cdot \delta_1 \frac{h}{2}}{I_x \delta_1} = \frac{Q_y}{2I_x} b_1 h_1. \quad (2.35)$$

Сумарна горизонтальна сила зсуву  $T_1$  дорівнює:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau_x^{\max} \cdot \delta_1 \cdot e_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1 \cdot e_1^2. \quad (2.36)$$

Дві сили  $T_1$  призводять до виникнення моменту, який визначають:

$$M_1 = T_1 \cdot h_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1^2 \cdot e_1^2. \quad (2.37)$$

Звідси очевидно, що поряд із згином відбувається і закручування поперечного перерізу, що знижує міцність. Очевидно, що на осі  $x$  є така точка  $A$ , відносно якої момент закручування дорівнює нулю. Цю точку називають *центром згину*. Відповідно, необхідно намагатися прикладати зосереджену силу в цій точці, яка визначається:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad M_1 - Q_y \cdot c = 0. \\ c = \frac{M_1}{Q_y} = \frac{\delta_1 \cdot h_1^2 \cdot e_1^2}{4I_x}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

## 2.4. Міцність балок при згині

### 2.4.1. Аналіз напруженого стану при згині

У загальному випадку плоского поперечного згину в поперечному перерізі балки виникають нормальні та дотичні напруження, які визначаються за формулами:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відс.}}{I_x \cdot e_y}.$$

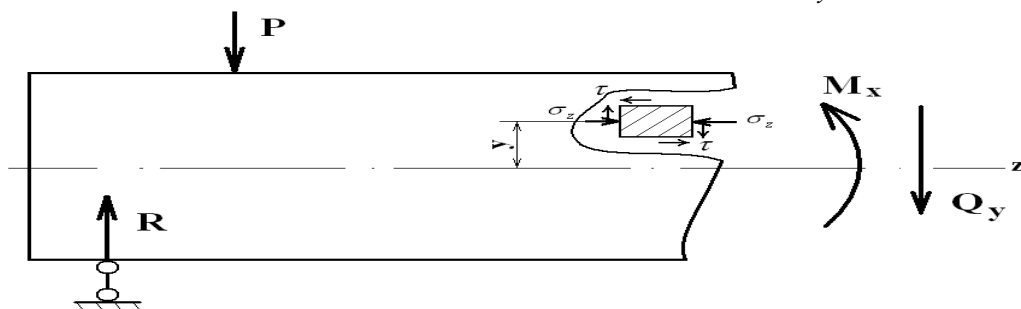


Рис. 2.26. Загальний випадок плоского напруженого стану при згині.

При цьому в будь-якій точці має місце плоский напружений стан, для якого головні напруження і головні площадки визначаємо за формулами (рис. 2.26):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z + \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}; \quad (2.39)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (2.40)$$

У нашому випадку, враховуючи, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне  $\sigma_y = 0$  і  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$  то формули будуть такими:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (2.41)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}. \quad (2.42)$$

При цьому дослідимо напружений стан у трьох точках по висоті перерізу балки; у верхньому стиснутому волокні; у нижньому розтягнутому волокні; на нейтральній лінії (рис. 2.27).

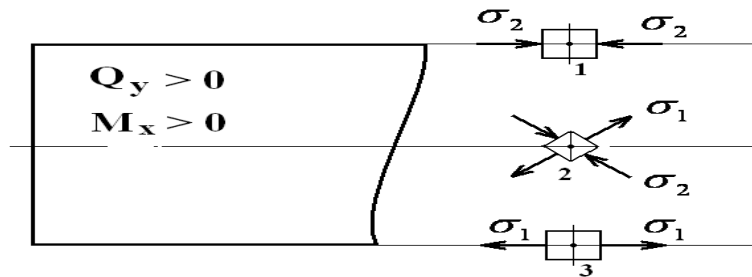


Рис. 2.27. Дослідження напруженого стану по висоті перерізу.

$$\text{Точка 1: } \tau = 0; \sigma_z = -\sigma. \quad \sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma; \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha'_0 = 90^\circ; \alpha''_0 = 0^\circ.$$

$$\text{Точка 2: } \tau = \tau_{\max}; \sigma_z = 0. \quad \sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = \tau_{\max};$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = -\tau_{\max}; \quad \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{\max}}{0} = \infty; \Rightarrow \alpha'_0 = 45^\circ; \alpha''_0 = 135^\circ.$$

Точка 3:  $\tau = 0$ ;  $\sigma_z = \sigma$ .  $\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = \sigma$ ;

$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2} = 0$ ;  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0$ ;  $\Rightarrow \alpha'_0 = 0^\circ$ ;  $\alpha''_0 = 90^\circ$ .

При цьому максимальні та мінімальні дотичні напруження виникають у площинах нахилених до головних площин під кутом  $45^\circ$  і визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (2.43)$$

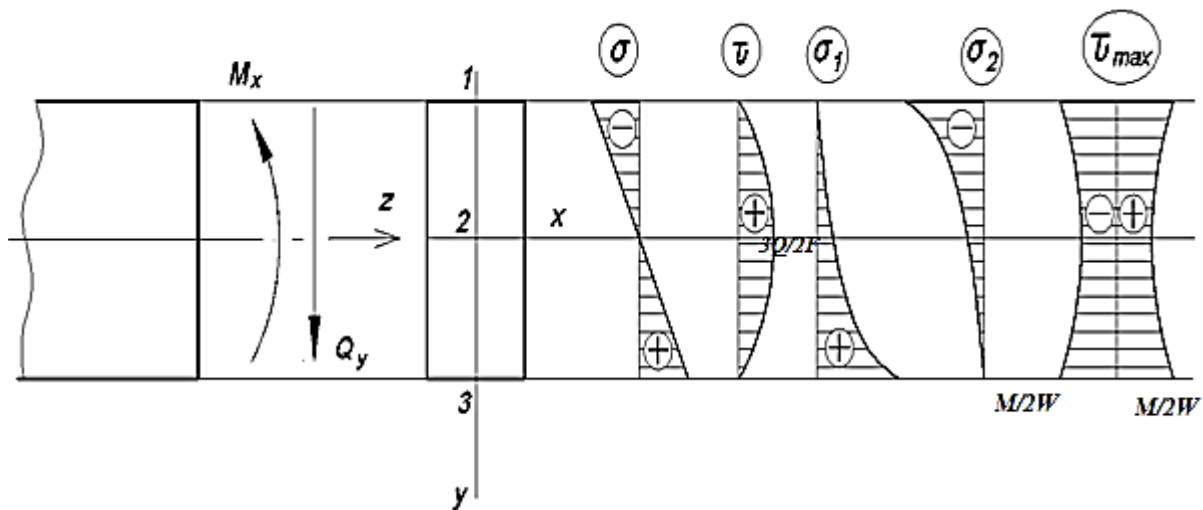


Рис. 2.27. Епюри напружень у прямокутному поперечному перерізі.

Таким чином, побудуємо для прямокутного поперечному перерізу епюри нормальних  $\sigma$ , дотичних  $\tau$ , головних нормальних  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  та максимальних дотичних  $\tau_{\max}$  напружень, які виникають площинах, нахилених до головних під кутом  $45^\circ$  (рис. 2.27). Зробимо аналогічні побудови також для балки двотаврового поперечного перерізу (рис. 2.28).

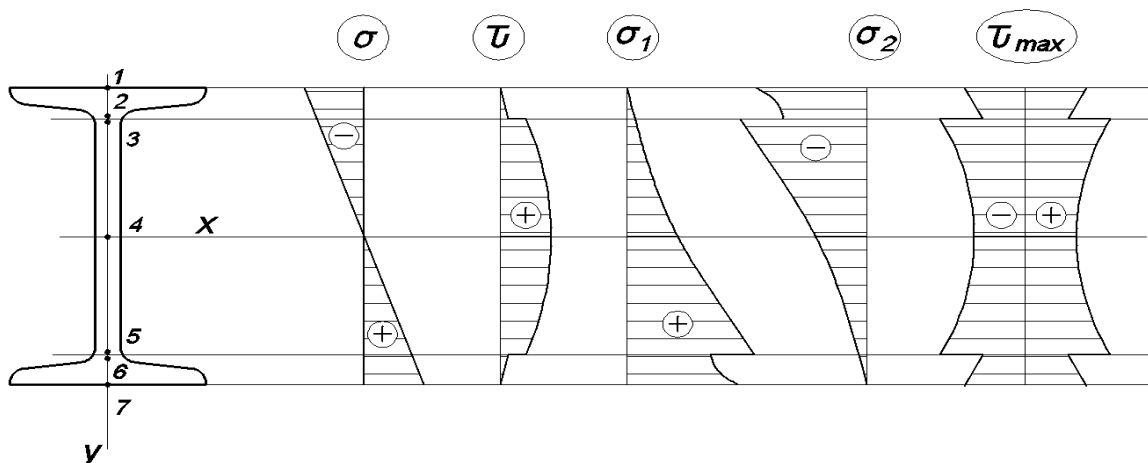


Рис. 2.28. Напруження в двотавровому поперечному перерізі.



### 2.4.2. Перевірка міцності балок при згині

Очевидно, що максимальні нормальні напруження  $\sigma$  виникають у крайніх волокнах, і не враховуючи знаку визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (2.44)$$

де:  $W_x$  – момент опору, що характеризує опір поперечного перерізу.

При цьому знаючи максимальний згинальний момент  $M_x$ , а також розмір поперечного перерізу, можна перевірити умову міцності балки за нормальними напруженнями. Вона має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (2.45)$$

Із виразу (2.45) можна розв'язати і зворотну задачу, тобто при заданому навантаженні і знаючи матеріал, визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]} \quad (2.46)$$

$Q_y > 0, M_x > 0$

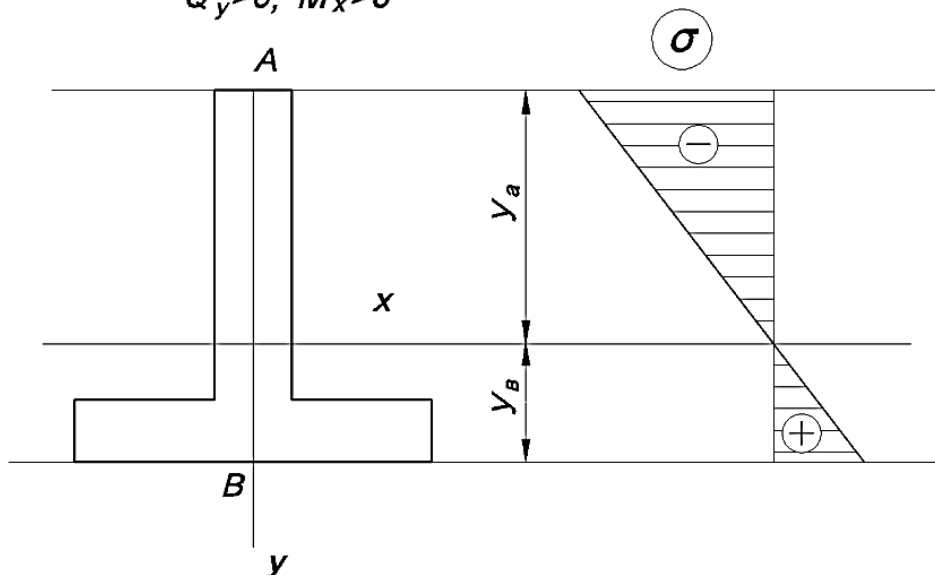


Рис. 2.29. Переріз, що не має горизонтальної вісі симетрії.

Для перерізу, який не має горизонтальної вісі симетрії, виразом (2.46) можна користуватися лише для найбільш віддалених волокон (рис. 2.29). При цьому, якщо балку виготовлено із

крихкого матеріалу, то перевіряють умови міцності як на стиск, так і розтяг:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A \leq [\sigma]_{стиск}; \quad (2.47)$$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B \leq [\sigma]_{розтяг}. \quad (2.48)$$

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконують перевірку умов міцності (рис. 2.29): для точки 1 перевіряють умову міцності нормальними напруженнями (формула 2.25); для точки 4 перевірку міцності здійснюють за дотичними напруженнями (формула Журавського 2.25); для точок з'єднання полиці і стійки (але належить стійці (точка 3)) перевіряють міцність за головними нормальними напруженнями:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (2.49)$$

або для цих точок виконують перевірку міцності, за 4 енергетичною теорією міцності, тобто:

$$\sigma_{еквівал}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.50)$$

## 2.5. Приклад розрахунку статично визначеної балки на згинання

Для консольної балки необхідно:

- визначити опорні реакції;
- побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання;
- із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати:

а) діаметр  $d$  круглого поперечного перерізу;

б) висоту  $h$  і ширину  $b$  прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b = 0,5h$ ;

в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами  $a_1=1,5\text{м}$ ;  $a_2=2\text{м}$ ;  $l=5,5\text{м}$ ;

$P=5\text{кН}$ ;  $q=15\text{кН/м}$ ;  $[\sigma]=10\text{МПа}$

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке защемлення. В точці жорсткого защемлення маємо три складові реакції  $R_a$ ,  $Z_a$  і пару сил з моментом защемлення  $M_a$  (реактивний момент).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma \Sigma M_{iA} = 0; \quad -q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{array} \right.$$

Звідси визначаємо реакції:  $R_A = 25 \text{ кН}; M_A = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$Q_{(Y)1} = Q_{(Y)2} = Q_{(Y)3} = 0; \quad Q_{(Y)4} = q \cdot 0,5 = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ кН};$$

$$Q_{(Y)5} = Q_{(Y)4} - P = 7,5 - 5 = 2,5 \text{ кН}; \quad Q_{(Y)6} = q \cdot 2 - P = 15 \cdot 2 - 5 = 25 \text{ кН}.$$

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$M_{(X)1} = M_{(X)2} = M_{(X)3} = 0;$$

$$M_{(X)4} = M_{(X)5} = - \left( q \cdot \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{8} \right) = - (15 \cdot 0,5 \cdot 0,25) = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(X)6} = - \left( q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} \right) + P \cdot a_1 = - (15 \cdot 2 \cdot 1) + 0,5 \cdot 1,5 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

А) балку круглого перерізу з діаметром  $d$ .

$$W_{кр} = \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2250 \text{ см}^3;$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3; \quad W_{кр} = 2250 = W = 0,1 \cdot d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{2250}{0,1}} = \sqrt[3]{22500} = 28,2 \text{ см}$$

Б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b=0,4 \cdot h$ .

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,4 \cdot h^3}{6}; \quad W_{кр} = 2250 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_{кр} \cdot 6}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2250 \cdot 6}{0,4}} = 32,3 \text{ см}$$

4. Будемо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту  $M_{\max}$  і максимальним значенням поперечної сили  $Q_{\max}$ . Таким перерізом виявився переріз в точці б.

А) для круглого поперечного перерізу:

-нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = 0; \quad \sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}.$$

-дотичні напруження:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$$

$$\tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y \max}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,282)^2} = 0,53 \text{ МПа}$$

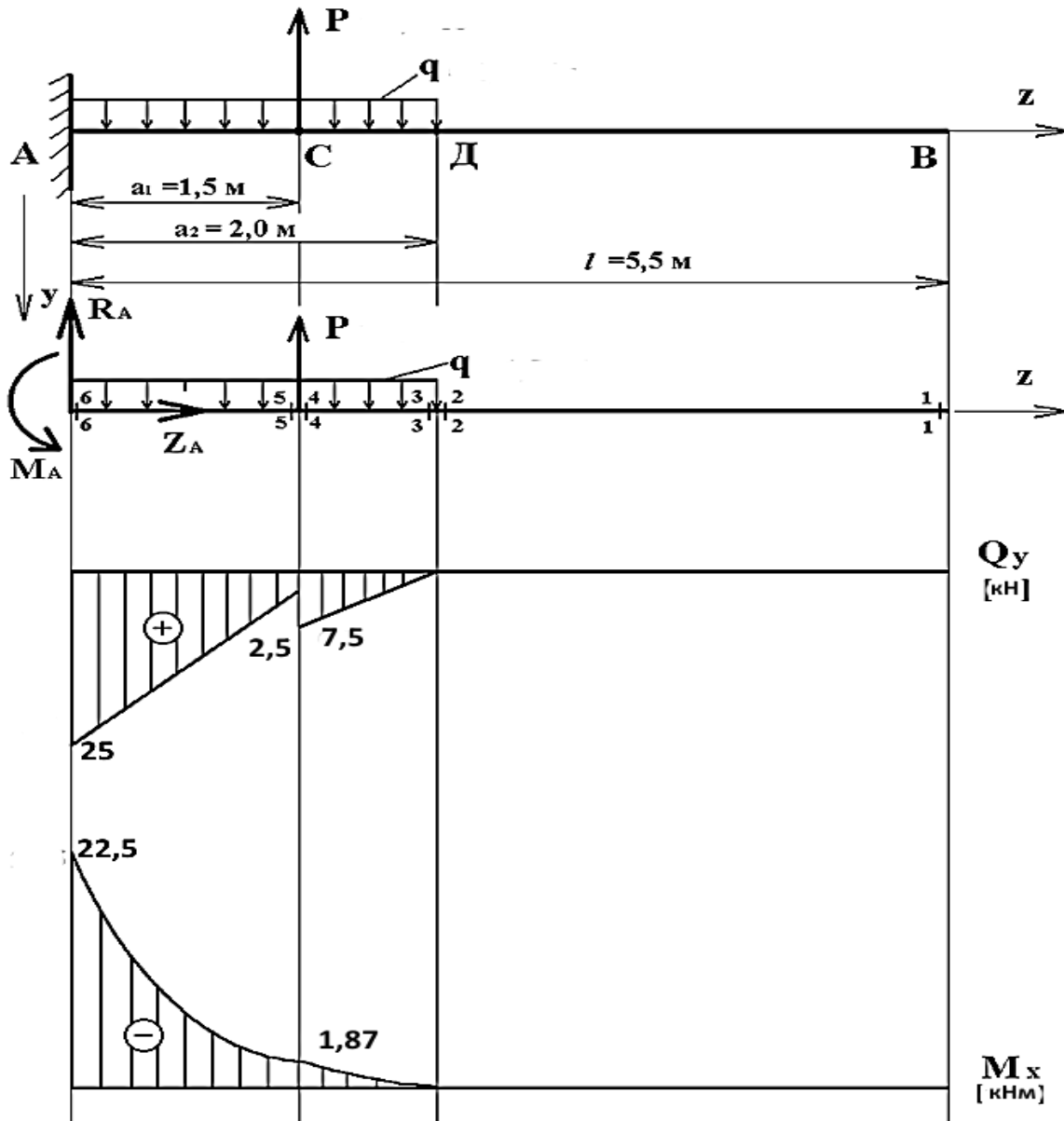


Рис. 2.30. Побудова епюр

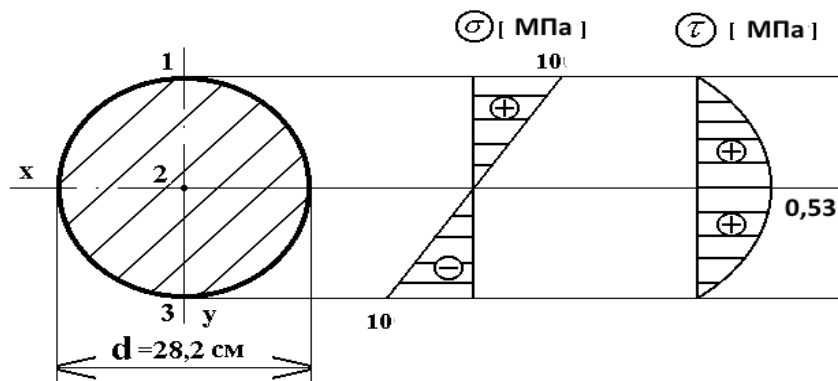


Рис.2.31.а. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу

Б) для квадратного поперечного перерізу:

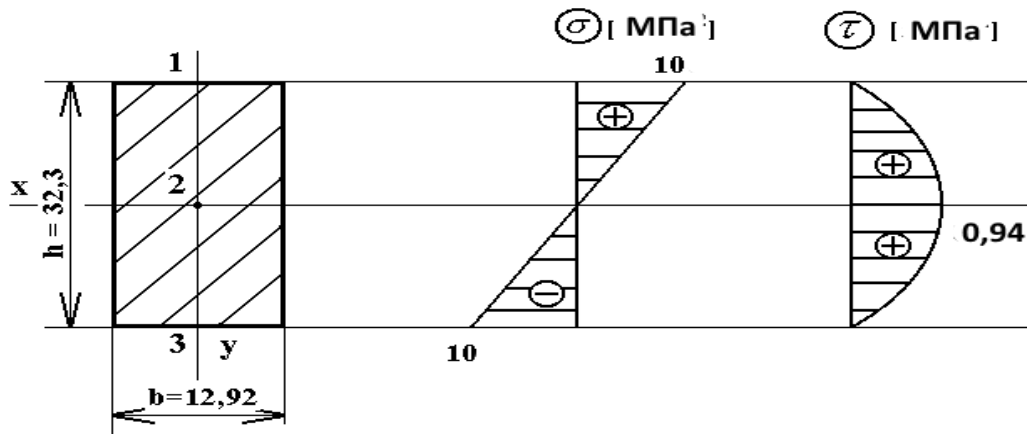


Рис.2.31.б. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу

Нормальні напруження :

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа}; \quad \sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}$$

Дотичні напруження :  $\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{Y max}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,1292 \cdot 0,323} = 0,94 \text{ МПа}$$

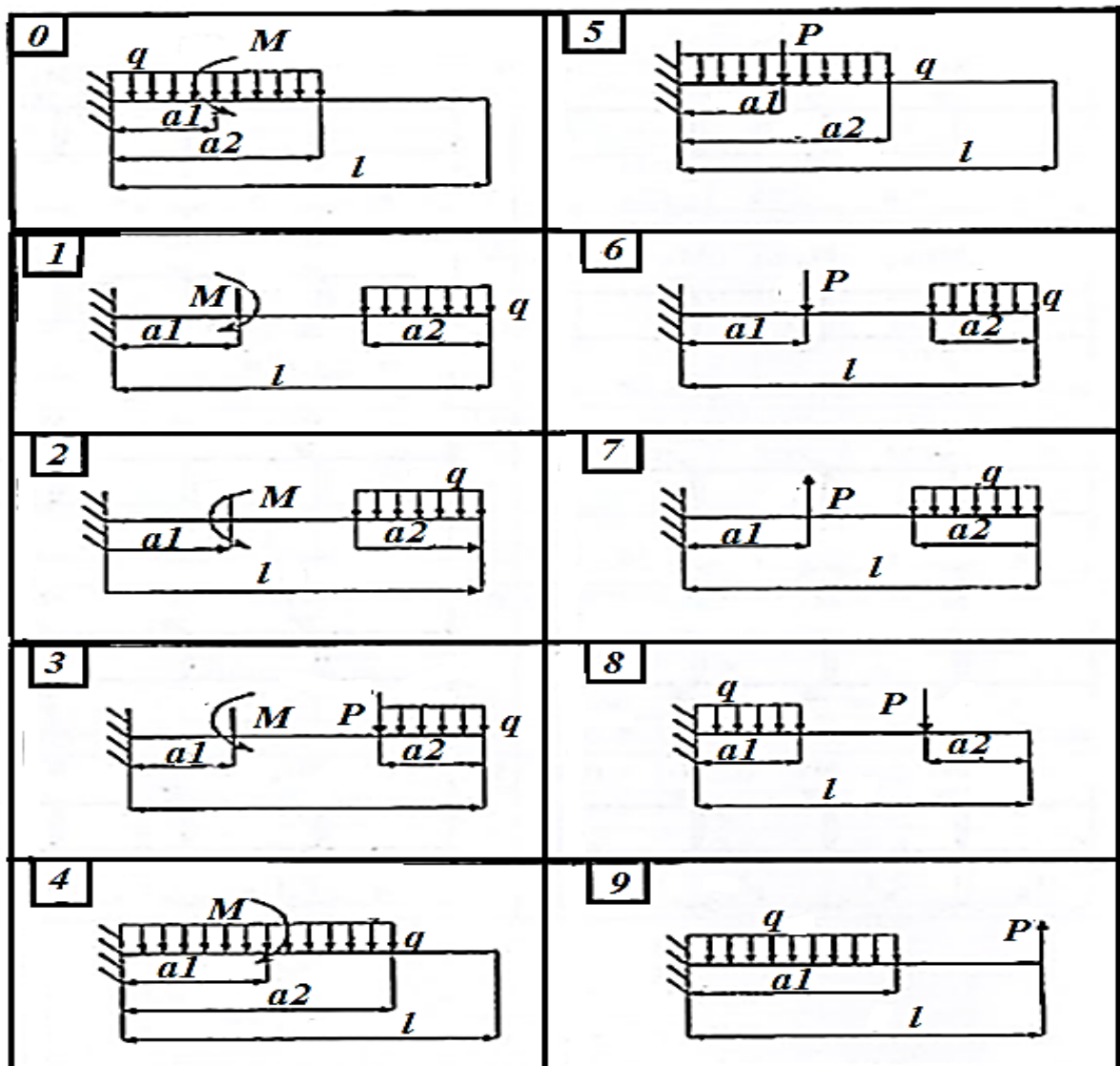
### 2.5.1. Завдання для самостійного виконання

Таблиця 2.1.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L, m	a <sub>1</sub> , m	a <sub>2</sub> , m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	[σ], МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

Таблиця 2.2.



## 2.6. Переміщення при згині

2.6.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки, визначення прогинів та кутів повороту шляхом його інтегрування. Розв'язання прикладів

У результаті дії зовнішнього навантаження вісь балки викривляється, набуваючи форму кривої, яка називається **пружною лінією** (**пружна вісь балки**).

Деформації при згині характеризуються двома величинами:

$V_{(z)}$  – прогин (переміщення центру ваги поперечного перерізу по вертикалі або **лінійна деформація**);

$\varphi_{(z)}$  – кут повороту перерізу (кут нахилу поперечного перерізу відносно свого попереднього положення, або кут нахилу дотичної

до деформованої вісі в цьому перерізі до горизонтальної координатної вісі  $z$ ). Її ще називають **кутовою деформацією**.

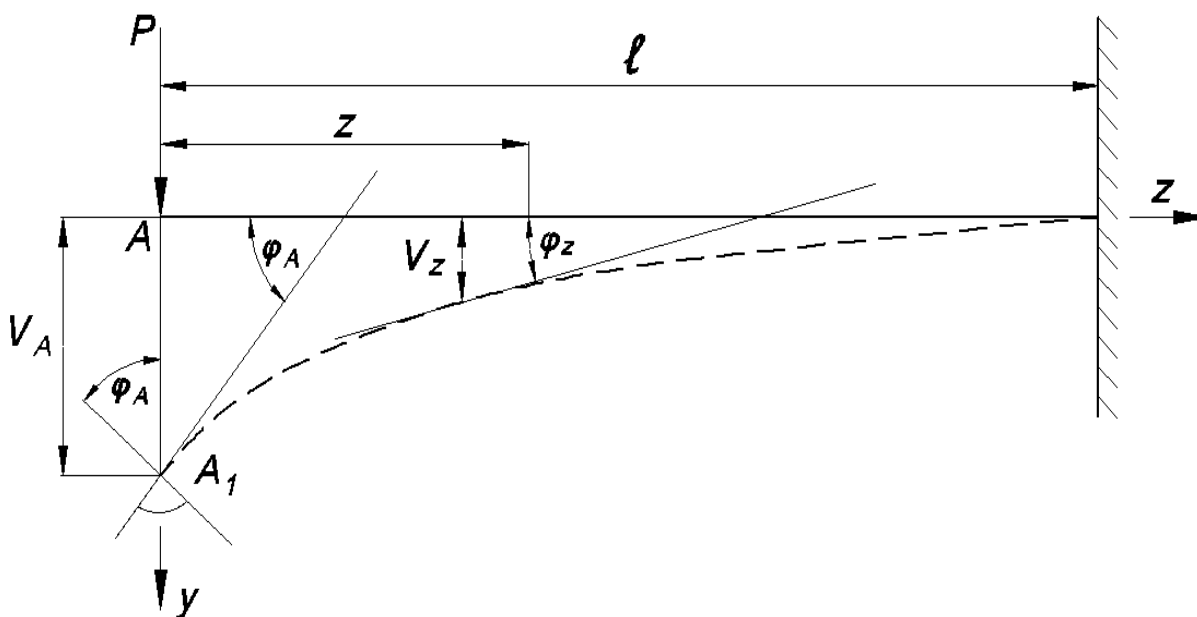


Рис. 2.32. Деформації при згині.

Враховуючи, що в зоні пружної деформації  $\varphi(z) \leq 0,017 \text{ рад}$ , то:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dV}{dz} \approx \varphi. \quad (2.51)$$

Переміщення при згині  $V_{(z)}$  та  $\varphi_{(z)}$  можуть бути знайдені, коли буде відомо рівняння пружної лінії:

$$V_{(z)} = f(z). \quad (2.52)$$

У разі чистого згину рівняння кривизни набуває вигляду:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}. \quad (2.53)$$

З курсу математичного аналізу відомо, що кривизна плоскої кривої знаходиться за формулою:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}}. \quad (2.54)$$

Знехтувавши виразом  $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \approx 0$ , вираз (6.54) набуде вигляду:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2V}{dz^2}. \quad (2.55)$$

Прирівнявши праві частини виразів (6.53) і (6.54), отримаємо:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \pm \frac{M}{E \cdot I} \quad (2.56)$$

Вираз (2.56) є диференціальним рівнянням зігнутої вісі балки. Знаки в правій частині виразу (2.59) залежать від вибору системи координат (рис. 2.33).

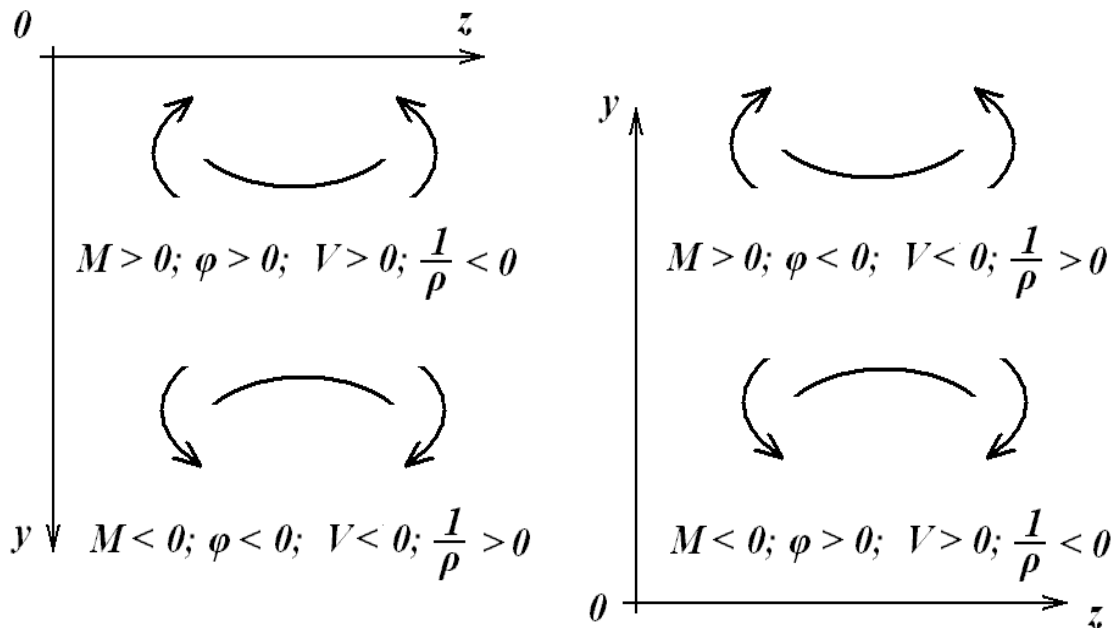


Рис. 2.33. Залежність знаку у виразі (2.56) від вибору системи координат.

Правило знаків для кута повороту  $\varphi_{(z)}$ :

$\varphi_{(z)} > 0$ , якщо він відповідає коротшому шляху повороту вісь  $z$  до  $y$ .

Враховуючи викладене, очевидно, що у разі, коли вісь  $y$  напрямлена вниз в рівнянні (2.56) буде знак «мінус», тобто:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I}. \quad (2.57)$$

Для визначення кута повороту та прогину проінтегруємо вираз (2.57) по  $z$ :

$$\frac{dV}{dz} = \varphi(z) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \int M_x \cdot dz + C \right] \quad (2.58)$$

В результаті другого інтегрування:



$$V(z) = -\frac{1}{EI} \left[ \int dz \int M_x \cdot dz + Cz + D \right] \quad (2.59)$$

При цьому отримуємо сталі інтегрування  $C$  і  $D$ , які визначаються із граничних умов на кінцях ділянки балки. Кожен випадок матиме свої граничні умови.

### **2.6.2. Перевірка жорсткості балки при згині**

В інженерній практиці відомі випадки, коли для балки, поперечний переріз якої підібрано із умов міцності, переміщення досягають значної величини і не дають можливість нормально експлуатувати таку конструкцію. При цьому величина максимального прогину  $f$  (стріла прогину) не повинна перевищувати допустиме значення  $[f]$ , що приводиться в нормах:

$$V_{\max} = f \leq [f] \quad (2.60)$$

Величина допустимого значення  $[f]$ , залежить від призначення конструкції і може коливатись:

$$[f] = \left( \frac{1}{150} \div \frac{1}{1000} \right) \cdot l. \quad (2.61)$$

## **2.7. Визначення переміщень при згині**

### **2.7.1. Метод початкових параметрів**

Застосування методу безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі для балок з кількістю ділянок навантаження  $m > 3$ , пов'язана із труднощами, викликаними знаходженням  $2m$  постійних інтегрувань. Але для будь-якої балки кількість постійних інтегрувань можливо звести до двох, якщо враховувати нижче наведені для складання та інтегрування виразу моменту.

1. Початок координат суміщають з лівим кінцем балки і вважають постійною величиною для всіх ділянок балки.

2. У рівняння моментів включають тільки силові фактори, розташовані ліворуч від перерізу.

3. Зосереджений момент приймаємо із множником:

$$(z-a)^0 = 1.$$

4. Розподілене навантаження розповсюджують до правого кінця балки, а для встановлення дійсної рівноваги докладають

компенсуюче навантаження такої ж інтенсивності, але зворотного напрямку.

5. Вираз моменту інтегрують без розкриття дужок.

Розглянемо балку, яка має 5 ділянок завантаження:

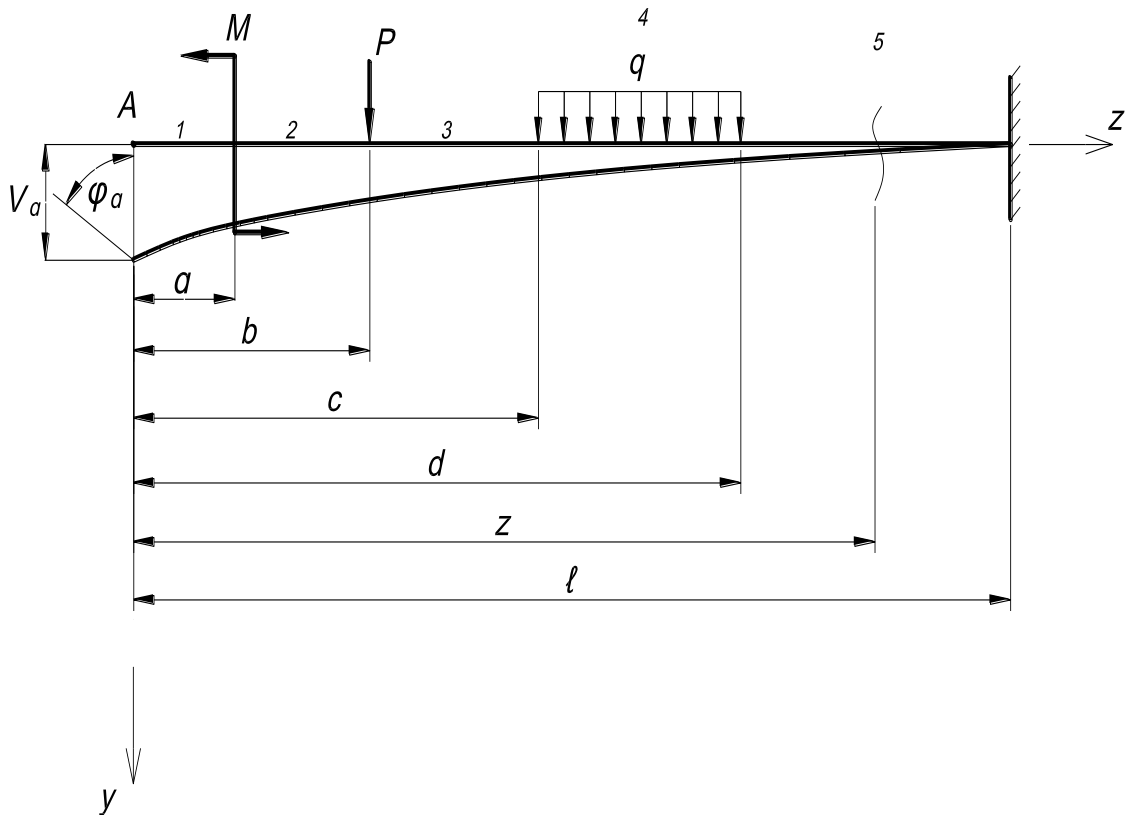


Рис. 2.34. Схема балки, яка має п'ять ділянок завантаження.

Початок координат виберемо в точці А. Диференціальне рівняння зігнутої вісі балки має вигляд:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I}.$$

Запишемо вираз для згинаючого моменту в поперечному перерізі на п'ятій ділянці:

$$M_5 = -\left[ M(z - a)^0 + P(z - b) + q \frac{(z - c)^2}{2} - q \frac{(z - d)^2}{2} \right] \quad (2.62)$$

Диференційне рівняння має вигляд:

$$EI \frac{d^2V}{dz^2} = M(z - a)^0 + P(z - b) + q \frac{(z - c)^2}{2} - q \frac{(z - d)^2}{2}.$$

Проінтегрувавши один та два рази вираз (2.62), отримаємо вирази для кута повороту і прогину п'ятої ділянки балки, відповідно:

$$EI\varphi_{(z)} = EI \frac{dv}{dz} = M(z-a) + \frac{P(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{6} - q \frac{(z-d)^3}{6} + C_5; \quad (2.63)$$

$$EIV_{(z)} = \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^3}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} - q \frac{(z-d)^4}{24} + C_5 \cdot z + D_5. \quad (2.64)$$

Аналогічно для четвертої ділянки:

$$EI\varphi_{(z)} = EI \frac{dv}{dz} = M(z-a) + \frac{P(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{6} + C_4; \quad (2.65)$$

$$EIV_{(z)} = \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^3}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} + C_4 \cdot z + D_4. \quad (2.66)$$

Застосувавши вказані вище правила, отримаємо рівність сталих інтегрувань, що впливає з плавності з'єднання ділянок балки:

$$C_1=C_2=C_3=C_4=C_5; \quad D_1=D_2=D_3=D_4=D_5$$

Геометричне тлумачення сталих інтегрувань з'ясуємо під час розгляду першої ділянки:

$$EI\varphi_{(0)} = C_1$$

$$EIV_{(0)} = C_1 \cdot z + D_1$$

Враховуючи, що  $z = 0$ , маємо:

$$C = EI\varphi_{(0)}; \quad D = EIV_{(0)}$$

Таким чином, для балки з будь-якою кількістю ділянок завантаження сталих інтегрувань буде дві:  $V_0$  та  $\varphi_0$ , де:  $V_0$  – прогин, а  $\varphi_0$  – кут повороту лівого кінця балки.

Враховуючи викладене, вираз для прогинів запишеться:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z + \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^2}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} - q \frac{(z-d)^4}{24}. \quad (2.67)$$

Рівняння (6.67) називають **універсальним рівнянням зігнутої вісі балки**.

У разі, коли до лівого кінця балки докласти зосереджені  $M_0$  і  $P_0$ , (статичні початкові параметри), то рівняння зігнутої осі балки набуде вигляду:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm M_0 \frac{z^2}{2} \pm P_0 \frac{z^3}{6} \pm \Sigma M \frac{(z-a)^2}{2} \pm \Sigma P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \Sigma q \frac{(z-c)^4}{24} \pm \Sigma q \frac{(z-d)^4}{24} \quad (2.68)$$

Вираз (2.68) – **універсальне рівняння прогинів балки**.

Взявши похідну із виразу (2.69), можемо отримати **універсальне рівняння кутів повороту**:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \pm M_0 z \pm P_0 \frac{z^2}{2} + \sum M(z-a) \pm \Sigma P \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q \frac{(z-d)^3}{6} \quad (2.69)$$

### 2.7.2. Приклади розрахунку балок на жорсткість

Для заданої балки знайти прогини і кути повороту в характерних точках і побудувати їх епюри (рис. 2.35).

#### Етапи розрахунку:

1. Визначаємо опорні реакції  $R_A$  і  $R_B$  (визначення опущено). Контроль:  $\Sigma y = 0$ ;  $R_A + q \frac{l}{2} - R_B = 0$ ;

2. Визначаємо величини поперечних сил  $Q_y$  та згинаючих моментів  $M_x$  і будуємо їх епюри (рис. 6.37) (обчислення опущено).

3. Для третьої ділянки балки, коли  $z$  знаходиться в межах від  $l$  до  $5/4 \cdot l$ , записуємо універсальне рівняння зігнутої осі балки:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 z + R_a \frac{z^3}{6} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z-l)^4}{24} - R_b \frac{(z-l)^3}{6}$$

Вираз для кута повороту має вигляд:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_a \frac{z^2}{2} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{6} - q \frac{(z-l)^3}{6} - R_b \frac{(z-l)^2}{2}$$

Початкові параметри знаходяться із граничних умов:

$$1) z = 0$$

$$EIV_{(z=0)} = EIV_0 = 0.$$

$$2) z = l$$

$$EIV_{(z=l)} = EI\varphi_0 \cdot l + R_a \frac{l^3}{6} + q \frac{(l - \frac{l}{2})^4}{24} = 0, EI\varphi_0 = \frac{57}{384} ql^3;$$

З урахуванням вищенаведеного універсальні рівняння запишуться:

$$EIV_{(z)} = -\frac{57}{384} ql^3 \cdot z + \frac{7}{8} ql \frac{z^3}{6} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z-l)^4}{24} - \frac{11}{8} ql \frac{(z-l)^3}{6}; \quad (2.70)$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384} ql^3 + \frac{7}{8} ql \frac{z^2}{2} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{6} - q \frac{(z-l)^3}{6} - \frac{11}{8} ql \frac{(z-l)^2}{6}. \quad (2.71)$$

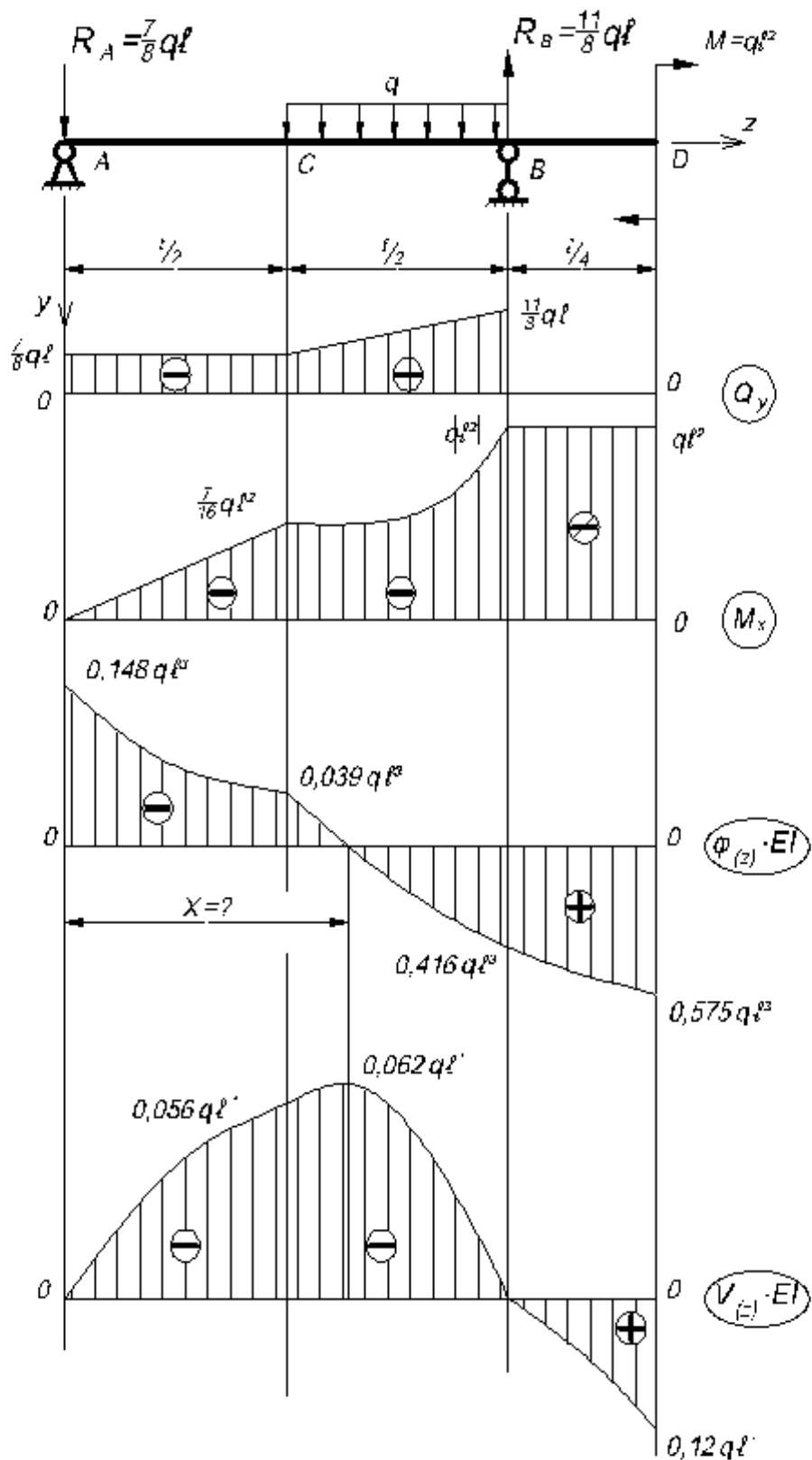


Рис. 6.35. Схема балки.

Підставивши у вирази (2.70) та (2.71) координати характерних перерізів балки, знайдемо прогини і кути повороту в них та побудуємо їх епюри, враховуючи диференційні залежності між  $q$ ;  $Q_y$ ;  $M_x$ ;  $\varphi(z)$ ;  $v(z)$ :

$$\text{точка А } \underline{z=0}; \quad EIV_{(z=0)} = 0; \quad EI\varphi_{(z=0)} = -\frac{57}{384}ql^3 = -0,148ql^3$$

$$\text{точка С } \underline{z = \frac{l}{2}}; \quad EIV_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{57}{384}ql^3 \cdot \frac{l}{2} + \frac{7}{8}ql \frac{(l/2)^3}{6} = 0,056ql^3;$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql \frac{l/2}{2} = -0,039ql^3.$$

$$\text{точка В } \underline{z=l}; \quad EIV_{(z=l)} = -\frac{57}{384}ql^4 + \frac{7}{8}ql \frac{l^3}{6} + q \frac{(l - l/2)^4}{24} = 0;$$

$$EI\varphi_{(z=l)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql \frac{l^2}{2} + q \frac{(l - l/2)^3}{6} = 0,416ql^3$$

$$EIV_{(l=5/4l)} = 0,12ql^4;$$

$$\text{точка D } \underline{z = \frac{5}{4}l} \quad EI\varphi_{(l=5/4l)} = 0,575ql^3.$$

## 2.8. Метод Мора для визначення переміщень

### 2.8.1. Застосування принципу можливих переміщень для пружних систем

Застосування методу початкових параметрів при визначенні переміщень для стрижня з ломаною віссю викликає деякі труднощі. Більш універсальним є метод Мора, який базується на застосуванні відомого з курсу теоретичної механіки принципу можливих переміщень.

Для зручності вважатимемо, що переміщення як кутове так і лінійне позначатимемо літерами  $\Delta, \delta$  з двома індексами перший із яких, означатиме точку і напрямок переміщення, а другий – причину, що викликала переміщення. Проілюструємо це на рис. 6.36.

Загальне переміщення  $\Delta$  визначатиметься за формулою:

$$\Delta = \Delta_{pp} + \Delta_{pm}. \quad (6.72)$$

де  $\Delta_{pp}$  – переміщення точки прикладання сили  $P_B$  напрямку її дії, викликане цією ж силою;

$\Delta_{pm}$  – переміщення точки прикладання сили  $P_B$  у напрямі її дії, викликане згинальним моментом  $M$ .

Прогин, викликаний одиничною силою, називається *питомий* і позначається знаком  $\delta$  або  $\delta_{pp}$  ( $p = 1$ )

Згідно із закону Гука можемо мати рівність:

$$\Delta_{pp} = \delta_{pp} \cdot P. \quad (6.73)$$

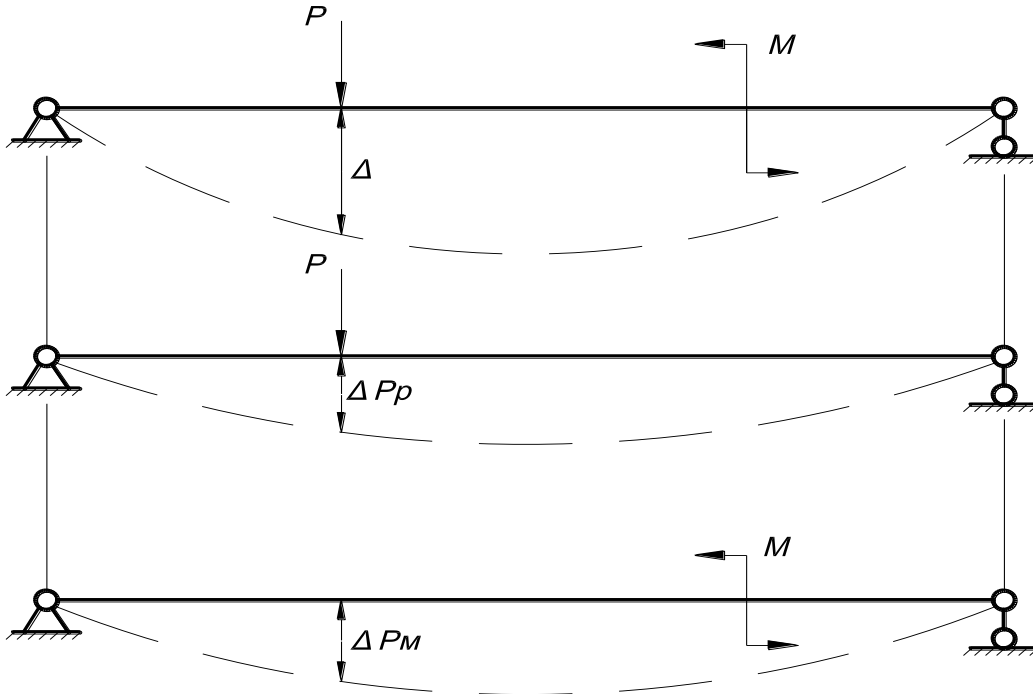


Рис. 2.36. Зображення переміщень.

Принцип можливих переміщень застосовується в теоретичній механіці для абсолютно твердих недеформованих тіл, згідно з яким у стані рівноваги робота всіх зовнішніх сил на можливі переміщення дорівнює нулю.

Рівняння принципу можливих переміщень має вигляд:

$$\sum P_k \cdot \Delta_{kn} = 0. \quad (2.74)$$

де  $\Delta_{kn}$  – можливе переміщення точки прикладання сили  $P_k$  в її напрямі від  $n$ -го збудження.

Для реальних (деформованих тіл) внутрішні зусилля теж виконують роботу на викликаних деформаціях і рівняння (2.74) має вигляд:

$$\sum P_k \cdot \Delta_{kn} + \sum W_{kn} = 0 \quad (2.75)$$

де  $\sum P_k \cdot \Delta_{kn}$  – робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях, а  $\sum W_{kn}$  – робота внутрішніх сил на можливих переміщеннях внутрішніх частин тіла.

### 2.8.2. Формула Мора для визначення переміщень

Розглянемо ламаний стрижень, який знаходиться під дією одиничної сили (рис. 2.37). В якості можливих переміщень точки  $K$  прикладання сили  $\overline{P}_k = 1$  візьмемо переміщення, викликане внаслідок деформації ділянки  $dS$ , розташованої у межах вертикальної частини стрижня.

Очевидно, що переміщення  $d\Delta_{kp}$  є проекція відрізка  $KK_1$  на лінію дії сили  $\overline{P}_k = 1$ .

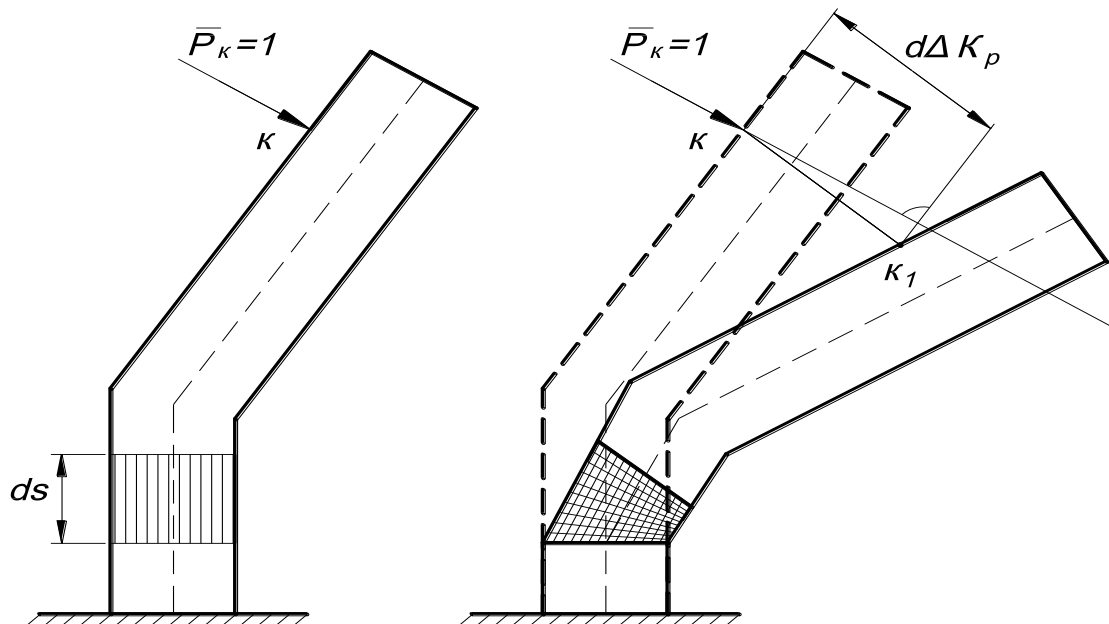


Рис. 2.37. Ламаний стрижень, завантажений одиничною силою.

Відповідно до цього рівняння (2.76) набуде вигляду:

$$1 \cdot d\Delta_{kp} + dW_{kp} = 0. \quad (2.77)$$

де  $dW_{kp}$  – елементарна робота внутрішніх зусиль  $\overline{N}_k$ ,  $\overline{M}_k$  і  $\overline{Q}_k$  на відповідних викликаних переміщеннях  $\Delta ds_p$ ,  $d\varphi_p$  і  $\gamma_p$ , що виникли внаслідок деформації елемента  $dS$  (рис. 2.38).

Поздовжня сила  $\overline{N}_k$  і згинаючий момент  $\overline{M}_k$  виконують роботу:



$$\overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p. \quad (2.77)$$

Оскільки дотичні напруження по поперечному перерізу розподілені за складним законом, то поперечна сила  $\overline{Q}_k$  виконує таку роботу:

$$\int_s \overline{\tau}_k \cdot dF \cdot \gamma_p \cdot dS = dS \int_s \overline{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF. \quad (2.78)$$

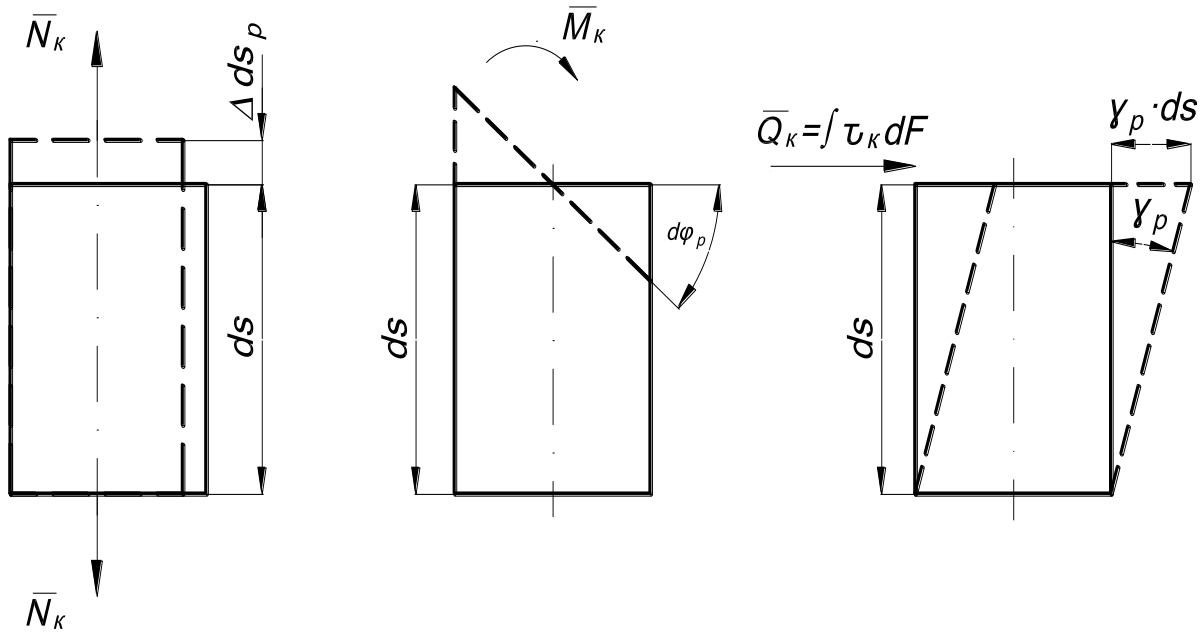


Рис. 2.38. Переміщення, викликані внутрішніми зусиллями.

Відповідно до цього, сумарна робота внутрішніх зусиль рівняється:

$$dW_{kp} = - \left[ \overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p + dS \int_s \overline{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF \right]. \quad (2.79)$$

Знак « $-$ » у виразі (2.79) тому, що  $\overline{N}_k$ ,  $\overline{M}_k$  і  $\overline{Q}_k$  показані, як «зовнішні». Відповідно до цього перетворимо вираз (2.79) з урахуванням виразу (2.79):

$$d\Delta_{kp} = \overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p + dS \int_s \overline{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF. \quad (2.80)$$

Знайдемо інтеграл виразу (2.80):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y}; \quad \gamma_p = \frac{\tau_p}{G};$$

$$\int \overline{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF = \int \frac{\overline{Q}_k \cdot S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{Q_p \cdot S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} dF =$$

$$= \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_k}{G} \cdot \int_s \left( \frac{S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \right)^2 dF. \quad (2.81)$$

Позначимо:

$$F \cdot \int_s \left( \frac{S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \right)^2 dF = k, \quad (2.82)$$

Тоді загальний вигляд виразу (2.81) буде таким:

$$d\Delta_{kp} = \overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p + k \cdot \frac{\overline{Q}_p \overline{Q}_k}{G} \cdot dS. \quad (2.83)$$

Враховуючи, що:

$$\Delta dS_p = \frac{N_p dS}{EF} \text{ – закон Гука; } \Delta \varphi_p = \frac{M_p \cdot dS}{E \cdot I};$$

маємо:

$$d\Delta_{kp} = \frac{\overline{N}_k \cdot N_p}{E \cdot F} \cdot dS + \frac{\overline{M}_k \cdot M_p}{E \cdot I} \cdot dS + k \cdot \frac{\overline{Q}_k \cdot Q_p}{G \cdot F} \cdot dS \quad (2.84)$$

Вираз (2.84) відображає переміщення в точці  $K$  за напрямком дії сили  $\overline{P}_k = 1$  від деформації тільки ділянки  $dS$ .

Для врахування деформації всього стрижня на переміщення точки  $K$  необхідно проінтегрувати вираз (2.84) по всій довжині стрижня:

$$\Delta_{kp} = \int \frac{\overline{N}_k \cdot N_p}{E \cdot F} \cdot dS + \int \frac{\overline{M}_k \cdot M_p}{E \cdot I} \cdot dS + k \cdot \int \frac{\overline{Q}_k \cdot Q_p}{G \cdot F} \cdot dS. \quad (2.85)$$

Вираз (2.85) носить назву **інтеграл Мора**.

При центральному розтягу-стиску інтеграл Мора набуває вигляду:

$$M_p = 0, \quad Q_p = 0, \quad \overline{N_k} = 1.$$

$$\Delta_{кр} = \int_l \frac{N_p}{E \cdot F} \cdot dS = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}.$$
(2.86)

Вираз (2.86) це закон Гука при розтягу-стиску.

### 2.8.3. Обчислення інтеграла Мора за способом Верещазіна

Коли на ділянці балки одна із епюр є лінійною, то переміщення або інтеграл Максвелла-Мора дорівнює добутку площі криволінійної епюри на ординату лінійної епюри, що знаходиться під центром ваги криволінійної епюри.

Будь-який із інтегралів Мора має вигляд:

$$\Delta_{кр} = \int f(S) \cdot \varphi(S) \cdot dS$$
(2.87)

і є добуток двох функцій.

Уявімо, що одна із функцій  $f(S)$  є лінійною, а інша  $\varphi(S)$  – будь-яка довільна (рис. 2.39).

$$\text{Враховуючи, що: } f(S) \cdot dS = d\Omega,$$
(2.88)

$$\text{а } \varphi(S) = S \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$
(2.89)

Підставимо вираз (2.88) та (2.89) у формулу (2.87), отримаємо:

$$\Delta_{кр} = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot S \cdot d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \int S \cdot d\Omega.$$
(2.90)

Очевидно, що інтеграл та  $\operatorname{tg} \alpha$  у виразі (2.90) можна перетворити:

$$\int S \cdot d\Omega = \Omega \cdot S_0; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot S_0 = \varphi_0.$$

Матимемо перетворений вираз:

$$\Delta = \Omega \cdot \varphi_0.$$
(2.91)

Тобто в межах будь-якої ділянки балки, де обидві епюри є неперервними й одна із них криволінійна, будь-який із інтегралів Мора це добуток площі криволінійної епюри на ординату лінійної епюри, яка знаходиться під центром ваги криволінійної епюри.

Довідковий матеріал необхідний при перемноженні епюр.

При перемноженні двох епюр, які мають форму трапецій (рис. 2.40 а) інтеграл Мора дорівнює:

$$\Delta = \frac{l}{6 \cdot EI} (2ac + 2bd + ad + bc).$$
(6.92)

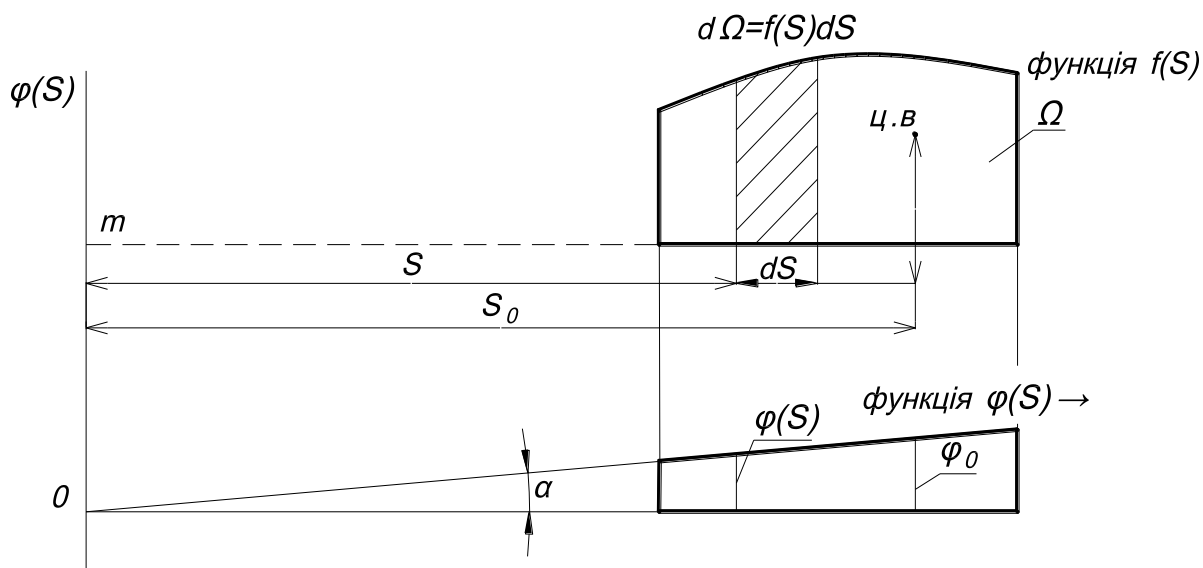


Рис. 2.39. Графічне пояснення до формули (2.87).

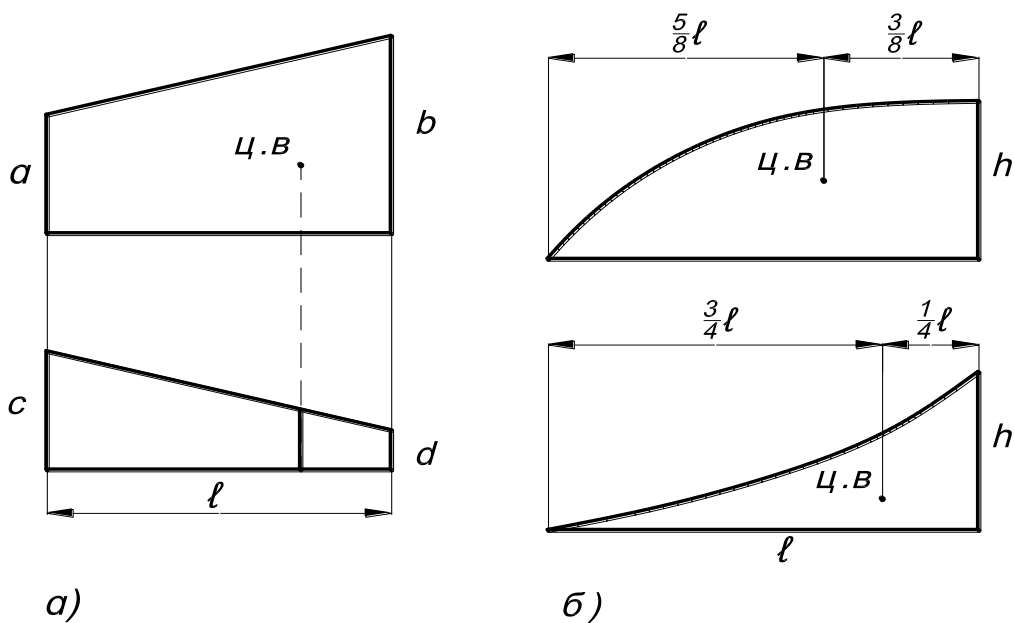


Рис. 2.40. Довідкові параметри по епюрах.

Площа опуклої параболи другого ступеня дорівнює (рис. 2.40 б):

$$F = \frac{2}{3} l \cdot h \quad (6.93)$$

Площа ввігнутої параболи другого ступеню рівна (рис. 2.40 б):

$$F = \frac{1}{3} l \cdot h \quad (6.94)$$

## 2.9. Приклад розрахунку на згинання плоских стрижнів

*Аналіз напруженого стану та повний розрахунок на міцність. Визначення переміщень та розрахунок на жорсткість при поперечному згинанні.*

### Частина 1

Підібрати переріз балки, що складається з двох двотаврів, а також круглий та квадратний переріз і вибрати найбільш раціональний варіант. Схема розміщення навантаження показана на рисунку.

*Дано:*

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; [\tau] = 100 \text{ МПа}; l = 2 \text{ м}; q = 40 \text{ кН/м}; M = 40 \text{ кН}.$

*Знайти:  $W_{\max}$  -?  $M_x$  -?  $Q_y$  -?*

#### 1. Визначення опорних реакцій.

Вважаємо балку абсолютно жорсткою. Знайдемо суму моментів сил відносно опор А і В та прирівняємо її до нуля. Момент сили, який здійснює обертання проти годинникової стрілки будемо враховувати зі знаком «+».

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивності  $q$  замінимо зосередженою силою  $Q$ . Точка прикладання сили  $Q$  знаходиться на відстані  $l/2 = 1 \text{ м}$  від точки А.

$$Q = q \cdot l = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; -Q \cdot 1 + R_B \cdot 4 + M = 0 = -80 + 4 R_B + 40 = 0$$

$$\text{Звідси } R_B = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 4 + 3Q + M = -4R_A + 240 + 40 = 0$$

$$4R_A = -280; \text{ звідси } R_A = 70 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum F_y = 0; -R_A + q \cdot 2 - R_B = -70 + 80 - 10 = 0$$

#### 2. Намічаємо ділянки балки та вибираємо характерні

*перерізи.*

① - Ділянка  $0 \leq z \leq 2 \text{ м}$  (1,2 переріз)

② - Ділянка  $0 \leq z \leq 4 \text{ м}$  (3,4 переріз)

③ - Ділянка  $0 \leq z \leq 5 \text{ м}$  (5,6 переріз)

#### 3. Побудова епюр поперечних сил, враховуючи лінійний закон:

$q_z = \text{const}$  :

$$Q_{z1} = R_A = 70 \text{ кН}; \quad Q_{z2} = R_A - q \cdot 2 = 70 - 2 \cdot 40 = -10 \text{ кН};$$

$$Q_{z3} = -R_B = -10 \text{ кН} = Q_{z4}; \quad Q_{z5} = 0 = Q_{z6}.$$

4. Побудова епюри моментів згинання  $M_z$  на 1 ділянці, де розташоване рівномірно розподілене навантаження, має вигляд квадратної параболи. Знайдемо найвищу точку параболи:

$$Z_c = \frac{Q_y}{q} = \frac{70 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 1,75 \text{ м}$$

Обчислюємо момент згинання:

$$M_{z1} = 0; \quad M_{z2} = R_A \cdot 2 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 70 \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z3} = R_A l - \frac{q l^2}{2} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{zzc} (1,75) = 70 \cdot 1,75 - 40 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = 61,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z4} = M_{z5} = M_{z6} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

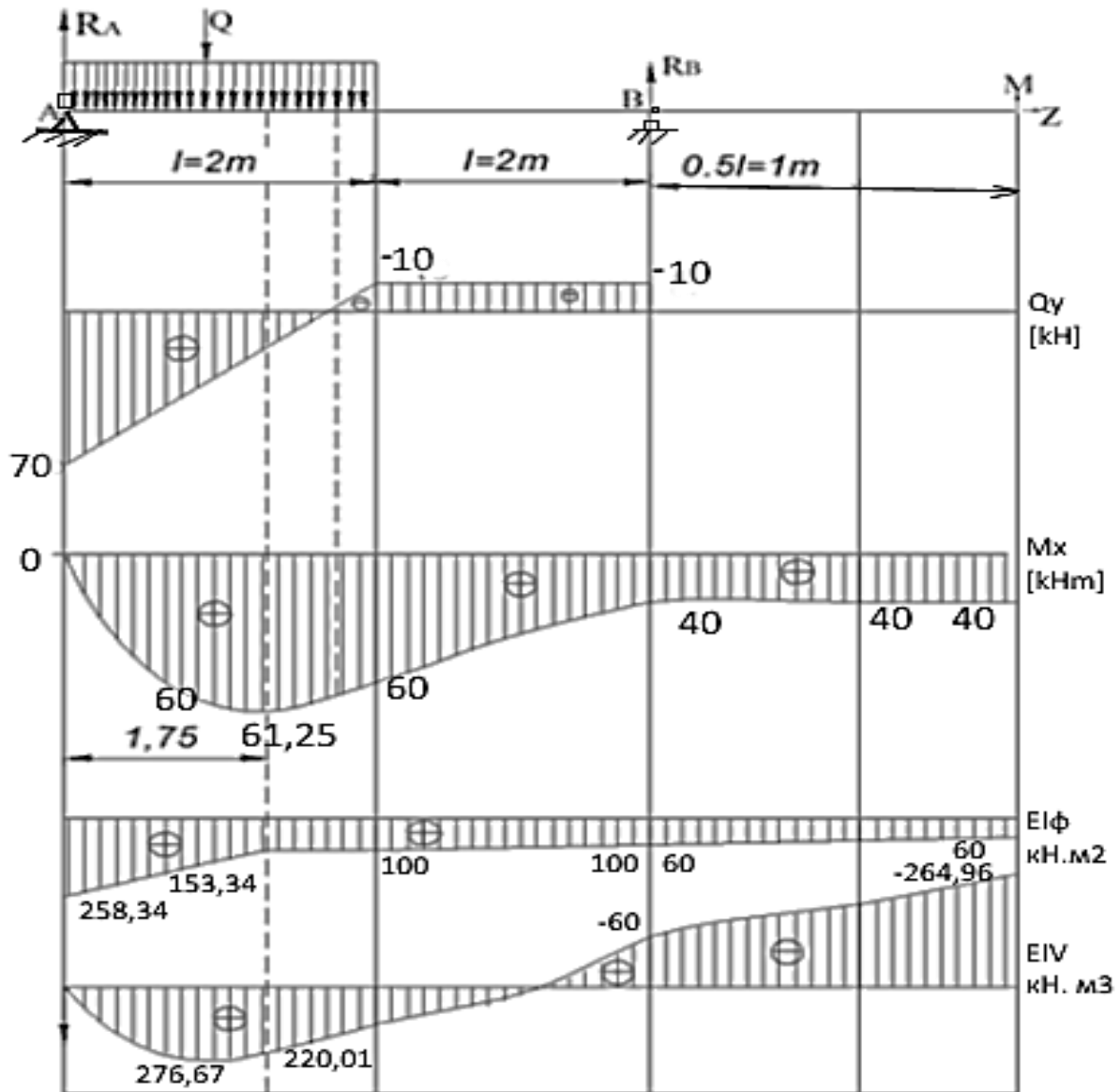


Рис.2.41. Розрахункова схема до задачі

5. Підбір перерізу. Із побудованих епюр  $M_z$  і  $Q_y$  вибираємо максимальні значення.

$$Q_{y \max} = 70 \text{ кН}; \quad M_{z \max} = 61,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Визначаємо необхідний момент опору перерізу:

$$W_{\text{необх}} = \frac{M_{z \max}}{[\delta]} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = \frac{0,0383}{10^3} = 383 \text{ см}^3$$

Поперечний переріз складається з двох двотаврів, то для 1 двотавра:

$$W_{\text{необх}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{2} = \frac{383}{2} = 191 \text{ см}^3$$

По сортаменту вибираємо двотавр 20А, для якого  $W_x > W_{\text{необх}}$ :  
 $W_x = 203 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 2030 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 114 \text{ см}^3$ ;  $d = 0,52 \text{ см}$

Оскільки  $W_x$  підбраного двотавра більше, ніж  $W_{\text{необх}}$ , то умова міцності за нормальними напруженнями виконується.

$$\delta_{z\text{max}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{W_x} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{2 \cdot 203 \cdot 10^{-6}} = 150,9 \text{ МПа} < [\sigma]$$

Перевіряємо умову міцності по дотичних напруженнях:

$$\tau_{y\text{max}} \frac{Q_{y\text{max}} \cdot S_x}{I_x \cdot b_y} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2030 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 3,57 \text{ МПа} < [\tau]$$

Підібраний переріз задовольняє умови міцності.

6. Підберемо круглий переріз балки діаметром "d":

$$W_{\text{необх}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{[\delta]} = 383 \text{ см}^3$$

Для круглого прерізу:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1 d^3; \quad \text{звідси} \quad d = \sqrt[3]{\frac{383}{0,1}} = 157 \text{ см}$$

Перевіримо умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{z\text{max}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{W_{\text{необх}}} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{383 \cdot 10^{-6}} = 159,9 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

Перевіримо умови міцності за дотичними напруженнями.

$$\tau_{z\text{max}} = \frac{4}{3} \frac{Q_{y\text{max}}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{70 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (15,7 \cdot 10^{-2})^2} = 4,8 \text{ МПа} < [\tau]$$

Круглий переріз  $d=15,7 \text{ см}$  задовольняє умови міцності.

7. Підбираємо квадратний переріз із стороною "a"

$$W_{\text{max}} = 383 \text{ см}^3; \quad W_x = \frac{a^3}{6}; \quad 383 = \frac{a^3}{6};$$

$$a = \sqrt[3]{383 \cdot 6} = 13,4 \text{ см}$$

Перевіримо умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{z\text{max}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{W_x} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{383 \cdot 10^{-6}} = 160 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

Перевіримо умови міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Q_{y\text{max}}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{70 \cdot 10^3}{(13,4 \cdot 10^{-2})^2} = 5,8 \text{ МПа} < [\tau]$$

Квадратний переріз із сторонами  $a=13,4 \text{ см}$  задовольняє умови міцності.

Вибираємо найбільш раціональний варіант перерізу балки і порівнюємо площі підібраних перерізів балок:

$$F_{II} = 2 \cdot 28,9 = 57,8 \text{ см}^2; \quad F_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (15,7)^2}{4} = 194 \text{ см}^2;$$

$$F_{\blacksquare} = a^2 = (13,4)^2 = 180 \text{ см}^2$$

Найбільш раціональним є складовий переріз балки, що складається з двох двотаврів.

## Частина 2.

За знайденими значеннями необхідно побудувати епюри нормальних, дотичних та головних нормальних і дотичних напружень

$$h = 200 \text{ мм} = 0,2 \text{ м};$$

$$S_x = 203 \text{ см}^3 = 2,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}^6;$$

$$b = 110 \text{ мм} = 0,11 \text{ м};$$

$$I_x = 2030 \text{ см}^4 = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$d = 5,2 \text{ мм} = 0,0052 \text{ м};$$

$$W_z = 203 \text{ см}^3 = 2,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$t = 86 \text{ мм} = 0,0086 \text{ м};$$

$$M_{\max} = 61,25 \cdot 10^3 \text{ Нм};$$

$$F = 28,9 \text{ см}^2 = 0,00289 \text{ м}^2;$$

$$Q_{\max} = 70 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

### 1. Знаходимо координати в точках

$$Y_1 = \frac{h}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ м}; \quad Y_2 = Y_3 = h/2 - t = 0,1 - 0,0086 = 0,0914 \text{ м};$$

$$Y_4 = 0; \quad Y_5 = Y_6 = -0,0914 \text{ м}; \quad Y_7 = -0,1 \text{ м}$$

2. Будуємо епюру нормальних напружень  $\sigma_z$ , для цього знайдемо їх значення в точках. Пам'ятаємо, що за умовою в конструкції 2 двотаври.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{2W_x} = \frac{M \cdot y_i}{2I_x}$$

$$\sigma_{z1} = \frac{61,25 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{2 \cdot 2,003 \cdot 10^{-5}} = 150,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z2} = \sigma_{z3} = \frac{61,25 \cdot 10^3 \cdot 0,0914}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5}} = 137,89 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z4} = 0; \quad \sigma_{z5} = \sigma_{z6} = -137,89 \text{ МПа}; \quad \sigma_{z7} = -150,9 \text{ МПа}$$

3. Визначаємо значення дотичних напружень з врахуванням подвійної жорсткості та побудуємо епюру.

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_i}$$

Спочатку знаходимо статичні моменти площі кожної ділянки перерізу.

$$S_{x1} = F \cdot x_1 = 0;$$



$$S_{x2} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = S_{x3} = 0,11 \cdot 0,0086 \cdot \left(\frac{0,2}{2} - \frac{0,0086}{2}\right) = \\ 0,000946 \cdot 0,0957 = \\ = 0,000091 = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$S_{x4} = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = (0,11 \cdot 0,0086) \cdot \left(\frac{0,2}{2} - \frac{0,0086}{2}\right) \\ = 0,000091 + (0,1 - 0,0086) \cdot 0,0052 \cdot \left(\frac{0,1 - 0,0086}{2}\right) = \\ 0,000091 + 0,0914 \cdot 0,0052 \cdot 0,045 = \\ 0,000091 + 0,0000217 = 0,000113 \text{ м}^3 = 11,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$$

$$\tau_{zy1} = \frac{Qy \cdot Sx}{2 \cdot Ix \cdot b_i} = 0;$$

$$\tau_2 = \tau_6 = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,11} = 1426 \cdot 10^3 \text{ Па} = 1,43 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \tau_5 = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0052} = 30,17 \text{ МПа};$$

$$\tau_{z4} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 11,3 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0052} = 37,47 \text{ МПа}$$

4. Будемо епюри головних нормальних напружень.

$$\sigma_{1/3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$$

Точка 1

$$\sigma_1 = \frac{150,9}{2} + \sqrt{\left(\frac{150,9}{2}\right)^2 + 0^2} = 75,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{150,9}{2} - \sqrt{\left(\frac{150,9}{2}\right)^2 + 0^2} = 0 \text{ МПа};$$

Точка 2

$$\sigma_1 = \frac{137,89}{2} + \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 1,43^2} = 131,91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{137,89}{2} - \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 1,43^2} = -0,1 \text{ МПа};$$

Точка 3

$$\sigma_1 = \frac{137,89}{2} + \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 30,17^2} = 144,21 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{137,89}{2} - \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 30,17^2} = -6,31 \text{ МПа};$$

Точка 4

$$\sigma_1 = \frac{0}{2} + \sqrt{0^2 + 37,47^2} = 37,47 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{0}{2} - \sqrt{0^2 + 37,47^2} = -37,47 \text{ МПа};$$

Точка 5

$$\sigma_1 = 6,31;$$

Точка 6

$$\sigma_1 = 0,1;$$

Точка 7

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_3 = -144,21; \quad \sigma_3 = -131,91; \quad \sigma_3 = -75,45$$

5. Знайдемо максимальні значення напружень:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Точка 1:  $\tau_{max1} = \frac{75,45 + 0}{2} = 37,73$  МПа;

Точка 2:  $\tau_{max2} = \frac{131,91 - (-0,1)}{2} = 65,96$  МПа;

Точка 3:  $\tau_{max3} = \frac{144,21 - (-6,31)}{2} = 75,26$  МПа;

Точка 4:  $\tau_{max4} = \frac{37,47 - (-37,47)}{2} = 37,47$  МПа;

Точка 5:  $\tau_{max5} = \frac{6,31 - (-144,21)}{2} = 75,26$  МПа;

Точка 6:  $\tau_{max6} = \frac{0,1 - (-131,91)}{2} = 65,96$  МПа;

Точка 7:  $\tau_{max7} = \frac{0 - (-75,45)}{2} = 37,73$  МПа

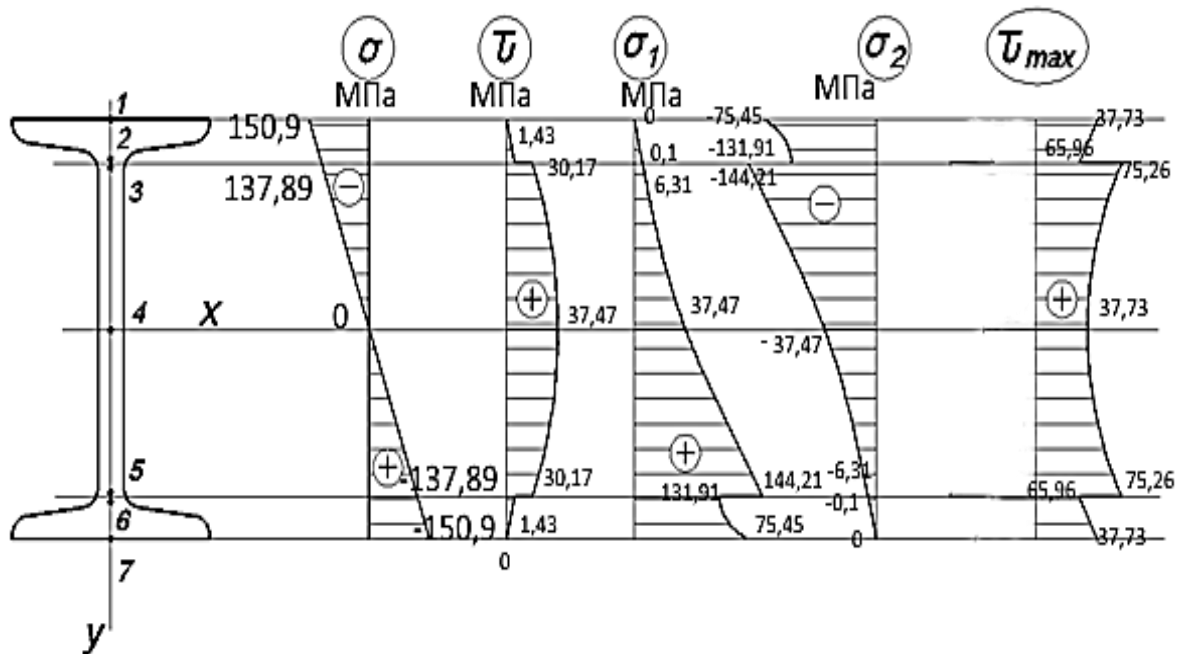


Рис. 6.42. Епюри до частини 2

### Частина 3.

Необхідно побудувати епюри кута повороту та прогину. Розрахункові дані вибвємо з частини 1, 2.

Дано:

$$R_B = 10 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н};$$

$$q = 40 \text{ кН/м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН/м};$$

$$M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$R_A = 70 \text{ кН} = 70 \cdot 10^3;$$

$$I_x = 2030 \text{ см}^4 = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$\left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100}$$

1. Запишемо універсальне рівняння прогинів

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24}$$

Використовуємо початкові умови прогин в опорах:  $V(A) = 0$ ;  $V(B) = 0$ .

Запишемо рівняння для визначення початкових параметрів:  $EIV_0$ ;  $EI\varphi_0$ :

$$EIV(A) = EIV(0) = EIV_0 = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_{A(0-0)^3}}{6} = 0; \quad EIV_0 = 0;$$

$$EIV(B) = EIV(4) = EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 0;$$

$$0 + EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{70 \cdot 4^3}{6} + \frac{(4-0)^4}{24} - 4 \frac{(4-2)^4}{24} = 0;$$

$$EI\varphi_0 \cdot 4 = 746,67 + 26,67 - 426,67; \quad EI\varphi_0 = 286,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$$

2. Знайдемо кути поворотів за допомогою універсального рівняння кутів повороту:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \pm \sum M(z-a) \pm \sum P \frac{(z-b)^2}{2} \pm \sum q \frac{(z-c)^3}{6}$$

$$EI\varphi(1) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (1-0)^2}{2} + \frac{q(1-0)^3}{6} - \frac{q(1-1)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 1}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 258,34 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(2) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (2-0)^2}{2} + q \frac{(2-0)^3}{6} - \frac{q(2-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 2^2}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 153,34 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(4) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (4-0)^2}{2} + q \frac{(4-0)^3}{6} - q \frac{(4-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 4^2}{2} + \frac{40 \cdot 4^3}{6} - \frac{40(2)^3}{6} = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(5) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot 5^2}{2} + q \frac{(5-0)^3}{6} - q \frac{(5-0)^3}{6} - \frac{R_B (5-4)^2}{2} + M(5-5) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$$

3. Знайдемо прогини за допомогою універсального рівняння прогинів:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24}$$

$$EIV(1) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A \cdot (1-0)}{6} + q \frac{(1-0)^4}{24} - q \frac{(1-1)^4}{24} = 286,67 - \frac{70}{6} + \frac{40}{24} = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(2) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A \cdot 2^3}{6} + q \frac{(2-0)^4}{24} - q \frac{(2-2)^4}{24} = 286,67 - 93,34 + 26,67 = 220,01 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

$$EIV(4) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 286,67 - 746,67 + 426,67 - 26,67 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(5) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A \cdot 5^3}{6} + q \frac{(5-0)^4}{24} - q \frac{(5-2)^4}{24} + M \frac{(5-5)^2}{2} = 286,67 - 1458,34 + 1041,67 - 135 + 0 = -264,96 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

4. Визначимо, чи забезпечена жорсткість.

Прольот, де прогин максимальний ( $EIV(1) = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ ) має довжину 4 м.

$$\left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{100} = \frac{f}{4} \Rightarrow [f] = 0,04$$

$$f_{\text{розр.}} = \frac{V_{\text{max}}}{EI} = \frac{276,67 \cdot 10^3}{2 \cdot (2 \cdot 10^{11} \cdot 2,03 \cdot 10^{-5})} = 0,034$$

$$[f] > f; \quad 0,04 > 0,034$$

*Умова жорсткості забезпечена*

### **2.9. 1. Завдання для самостійного виконання**

Виконати аналіз напруженого стану та повний розрахунок на міцність. Визначити переміщення та провести розрахунок на жорсткість при поперечному згинанні.

Таблиця 2.3

Варіанти завдань для самостійного виконання

№ Вар.	№ Сх.	№ Рядка	Довжина, l (м)	P, МН	Навантаження q, МН/м	M, МН·м	1:(f/l)
1	1	1	3,0	0,010	0,005	0,004	1:500
2	2	2	3,2	0,011	0,006	0,005	1:520
3	3	3	3,4	0,012	0,007	0,006	1:540
4	4	4	3,6	0,013	0,008	0,007	1:560
5	5	5	3,8	0,014	0,009	0,008	1:580
6	6	1	4,0	0,015	0,010	0,009	1:600
7	7	2	4,2	0,016	0,011	0,010	1:620
8	8	3	4,4	0,017	0,012	0,011	1:640
9	9	4	4,6	0,018	0,013	0,012	1:660
10	0	5	4,8	0,019	0,014	0,013	1:680

Таблица 2.4.

<p><b>1.</b></p>	<p><b>2.</b></p>
<p><b>3.</b></p>	<p><b>4.</b></p>
<p><b>5.</b></p>	<p><b>6.</b></p>
<p><b>7.</b></p>	<p><b>8.</b></p>
<p><b>9.</b></p>	<p><b>10.</b></p>

## 2.10. Навчальні тренажери для здійснення самоконтролю

*Підготуватися до виконання завдань з теми згин допоможе мультимедійна презентація.*

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38120>



*Мультимедійна презентація «Згин»*

*Нижче наведено посилання для використання електронного тестового навчального тренажера до теми «Згин»*

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=37456>



*Електронний тестовий навчальний тренажер до теми «Згин»*

## ЛІТЕРАТУРА

1. Цурпал І. А. Механіка матеріалів і конструкцій / І. А. Цурпал. – К. : Вища школа, 2005. – 367 с.
2. Ройзман В. П. Опір матеріалів: навчальний посібник / В. П. Ройзман. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 124 с.
3. Агамиров Л. В. Сопротивление материалов: краткий курс для студентов вузов / Л. В. Агамиров. – М.: ООО «Издательство АСТ»: 2003. – 256 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко – К. : Вища школа, 1993. – 460 с.
5. Цурпал І. А. Краткий курс сопротивления материалов / І. А. Цурпал. – К. : Вища школа, 1989. – 331 с.
6. Королев П. Г. Сборник задач по сопротивлению материалов / П. Г. Королев. – К. : Вища школа, 1997. – 288 с.
7. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – 560 с.
8. Александров А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
9. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов / Ф. З. Алмаметов, С. И. Арсеньев, Н. А. Курицын, А. М. Мишин. – М.: Высшая школа, 2003. – 367 с.
10. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: конспект лекцій. Ч. 1. / Д. В. Бабенко. – Миколаїв.: МДАУ, 2011. – 148 с.
11. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: конспект лекцій. Ч. 2. / Д. В. Бабенко. – Миколаїв. : МДАУ, 2011. – 168 с.
12. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: практикум / Д. В. Бабенко, О. А. Горбенко, Н. А. Доценко. – Миколаїв. : МНАУ, 2017. – 384 с.
13. Технологія розробки дистанційного курсу: навчальний посібник / Биков В. Ю., Кухаренко В. М., Сиротинко Н. Г., Рибалко О. В.; за ред. В. Ю. Бикова та В. М. Кухаренка. – К.: Міленіум, 2008. – 324 с.

Навчальне видання

## **МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ**

### **Методичні рекомендації**

Укладачі: **Бабенко** Дмитро Володимирович  
**Доценко** Наталія Андріївна

Відповідальний за випуск: Д. В. Бабенко

Редактори: Д. В. Бабенко

Н. А. Доценко

Комп'ютерний набір: Н. А. Доценко

Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 5,0

Тираж 50 прим. Зам. №\_

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету.

54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК№4490 від 20.02.2013р.