УДК 514.18

РІВНЯННЯ КРИВИХ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Кусков М.С., Парафіло В.Є., студенти гр. Ен1/2

Миколаївський національний аграрний університет
Науковий керівник ст. викл. Цепуріт О.В.

Анотація

Виконано огляд літератури, що містить опис завдання кривих у полярній системі координат, з метою оцінки можливості застосування при визначенні довжин кривих, площ фігур, обсягів і площ поверхонь тіл обертання, а також в задачах на визначення центру мас і моменту інерції тіла.

Annotation

The review of literature that contains job of curves definition in the arctic system of coordinates is executed, with the aim of estimation of possibility of application at determination of lengths crooked, areas of figures, volumes and areas of surfaces of bodies of rotation, and also in tasks on determination of centre-of-mass and moment of inertia of body..

Полярна система координат на площині визначається завданням точки O (полюс), променя Ox (полярна вісь) і одиничного відрізка т. Крім того, має бути вказаний поворот променя Ox, званий позитивним. Нехай це буде поворот у напрямку проти руху годинникової стрілки. Повороти променя, що здійснюються в напрямку, протилежному позитивному, будемо називати негативними.

Нехай M - довільна точка площини, не збігається з полюсом. Позначимо через ρ довжину відрізка OM, а через φ- величину кута, утвореного променями Ox і OM. Числа ρ і φ такі, що $p > 0$ і $0 \leq ф < 2\pi$, іменують полярними координатами точки M. Число ρ називають першою полярної координатою, або полярним радіусом, число φ - другий полярної координатою, або полярним кутом . Якщо точка M збігається з полюсом, то $\rho = 0$, а полярний кут φ вважаємо рівним нулю. Зауважимо, що при заданих нами умовах $\rho > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, полярні координати будь-якої точки визначаються однозначно.

Спіраль Архімеда $\rho = \varphi$.

Помістимо точку на секундну стрілку годинника і будемо перемішати точку вздовж секундної стрілки з постійною швидкістю, не звертаючи уваги на рівномірний рух стрілки годинника по колу. Тоді точка опише криву, звану спіраллю Архімеда. В області техніки спіраль Архімеда знаходить застосування в так званих кулачкових механізмах, які перетворять обертальний рух шайби в поступальний рух стержня. У деяких механізмах (наприклад, в годинах) потрібно, щоб стрижень рухався рівномірно. Забезпечити це можна, окресливши профіль шестерінки по спіралі Архімеда.

В якості другого об'єкта для застосування спіралі Архімеда в техніці можна привести самоцентруючийся патрон, направляючі канавки якого виконані по спіралі Архімеда. При одному повороті диска цього патрона кулачки переміщаються на величину радіального відстані суміжних канавок.

Крім того, форму спіралі Архімеда мають звукова доріжка на грамплатівці і одна з деталей швейних машин - механізм для рівномірного намотування ниток на шпульку. Логарифмічна спіраль $\lg\rho = \varphi$. При $\varphi = 0$ отримуємо $\rho = 1$. При $\varphi \to +\infty$ видно, що $\rho \to +\infty$ і спіраль розгортається проти ходу годинникової стрілки Логарифмічну спіраль описує точка, що рухається по секундної стрілкою ні з постійною швидкістю (як у випадку Архімедової спіралі), а зі зростаючою, причому це зростання пропорційно відстані від центру годин.

Логарифмічна спіраль часто зустрічається в природі і пов'язана з певними видами зростання. У дуже багатьох молюсків послідовні витки раковини не однакові, а все більш і більш товщають. У багатьох випадках наближені значення товщини послідовних витків утворюють геометричну прогресію. Хоча саму раковину молюска не можна назвати живою, вона утворюється зростаючим організмом. Один з найпростіших способів нарощування нової речовини автоматично призводить до утворення деякої фігури, дуже близькою до логарифмічною спіралі. У багатьох раковинах виявляється вражаюче близький збіг між результатами вимірювань і теоретичними значеннями, очікуваними для точної логарифмічною спіралі. У соняшнику насіння розташовані за характерними дуг, близьким, як показують відповідні вимірювання, до дуг логарифмічною спіралі. У зв'язку з подібними фактами деякі вчені вважають логарифмічну спіраль кривої, що є одним з виразів законів органічного зростання.

Застосування логарифмічною спіралі в техніці засновані на властивості цієї кривої перетинати всі свої радіус-вектори під тим самим кутом. На цій властивості засновані застосування логарифмічною спіралі в техніці. Так, обертові ножі в різних ріжучих машинах мають профіль, окреслений по дузі спіралі, завдяки чому кут різання (кут між лезом ножа і напрямком його швидкості обертання) залишається постійним уздовж всієї кромки рухомого ножа, що забезпечує менший його знос.

Труба, що підводить струмінь води до лопат турбінного колеса гідроелектростанції, має профіль, окреслений по дузі логарифмічною спіралі. Це дозволяє забезпечити мінімальні втрати енергії на зміну напрямку течії, і, отже, напір води використовується з максимальною продуктивністю.

Далі розглянемо кілька прикладів кривих, полярні рівняння яких містять тригонометричні функції. Побудова цих кривих можна виконати по точках, де φ приймає значення від 0 до 2π.

Лемніската $p = 2\cos 2\varphi$.

З виду рівняння кривої випливає, що крива складається з двох симетричних пелюсток (за зовнішнім виглядом ця крива нагадує перевернуту вісімку або бантик). Для точок лемніскати повинно виконуватися нерівність $\cos 2\varphi \geq 0$, тому вона розташована між прямими $y = \pm x$. Відзначимо також, що $\rho = \sqrt{2}$ при $\varphi = 0$.

У техніці лемніската використовується, зокрема, в якості перехідної кривої на заокругленні малого радіусу, як це має місце на залізничних лініях в гірській місцевості і на трамвайних шляхах. Таким чином вона забезпечує плавність заокруглення, без якої відцентрова сила, що діє на потяг, зростала б різко, доставляючи незручність пасажирам.

Як приклад застосування лемніскати в галузі фізики можна вказати, що лінія поля, створюваного двома паралельними струмами, поточними по нескінченно довгим провідникам у площині, до них перпендикулярної, є лемніската.

Кардіоїда $\rho = 2\,(1 - \cos\varphi)$.

Поспостерігаємо за будь-якою точкою кола, коли остання котиться по зовнішній стороні нерухомою окружності такого ж радіуса. Траєкторією точки буде кардіоїда. Кардіоїда використовується як лінія для креслення профілів, якщо потрібно, щоб ковзаючи й за профілем стрижень здійснював гармонійні коливання. При цьому швидкість поступального руху стрижня буде змінюватися без стрибків. Цією властивістю вона вигідно відрізняється від спіралі Архімеда, у якої, завдяки постійності швидкості стержня, в кінці кожного ходу стрижня відбуваються удари (швидкість стрибком змінює значення швидкості з v на -v), що викликає швидке зношування механізму.

Одна із складових частин в механізмі для підняття і опускання семафора окреслена по кардіоїд. При цьому швидкість підняття або опускання досягає максимального значення в середині ходу семафора, що дуже важливо.

Кардіоїда також добре знайома конструкторам і виникає при зворотно-поступальних рухах стрижнів в двигунах.

У техніці часто застосовують обертові ножі. Сила, з якою вони тиснуть на розрізається матеріал, залежить від кута різання, тобто кута між лезом ножа і напрямом швидкості обертання. Для сталості тиску потрібно, щоб кут різання зберігав постійне значенням, а це буде в тому випадку, якщо леза ножів окреслені по дузі логарифмічною спіралі. Величина кута різання залежить від оброблюваного матеріалу.

У гідротехніки за логарифмічною спіралі згинають трубу, що підводить потік води до лопат турбіни. Завдяки такій формі труби втрати енергії на зміну напрямку течії в трубі виявляються мінімальними, і натиск води використовується з максимальною продуктивністю.

Пропорційність довжини дуги спіралі радіус-вектору використовують при проектуванні зубчастих коліс із змінним передавальним числом. Ставлення кутових швидкостей цих коліс, буде безупинно змінюватися, досягаючи протягом одного обороту колеса чотири рази максимального значення і чотири рази за мінімальний.

Живі істоти зазвичай ростуть, зберігаючи загальне накреслення своєї форми. При цьому найчастіше вони ростуть у всіх напрямках - доросле істота і вище і товщі дитинча. Але раковини морських тварин можуть рости лише в одному напрямку. Щоб не надто витягатися в довжину, їм доводиться скручуватися, причому зростання відбувається так, що зберігається подобу раковини з її первинною формою. А таке зростання може відбуватися лише за логарифмічною спіралі або її деяким просторовим аналогам. Тому раковини багатьох молюсків, равликів, а також роги таких ссавців, як архари (гірські козли), закручені за логарифмічною спіралі.

На закінчення зазначимо, що полярні координати широко застосовуються при визначенні довжин кривих, площ фігур, обсягів і площ поверхонь тіл обертання, а також в задачах на визначення центру мас і моменту інерції тіла.

Література:

1. Збірник задач з аналітичної геометрії / За ред. В. В. Кириченка. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005. — 228 с.
2. В. В. Кириченко, Н. Ю. Петкевич, А. П. Петравчук. Аналітична геометрія. — Київ: ВПЦ «Київський університет», 2003. — 192 с.
3. П. С. Александров. Лекции по аналитической геометрии. — Москва: Наука, 1968. — 912 с.
4. М. М. Постников. Аналитическая геометрия. — Москва: Наука, 1973. — 752 с.
5. П. С. Моденов. Аналитическая геометрия. — Москва: МГУ, 1969. — 700 с.

УДК 519.21

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ПОВСЯКДЕННОМУ ЖИТТІ.

Мудрий О.А. студент гр. М2/2

Миколаївський національний аграрний університет
Науковий керівник ас. Євстрат'єв С.В.

Анотація

У досліджені використані розрахунки ймовірностей різних випадків з якими люди стикаються у повсякденному житті. Методи розрахунків не представляють великої