МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Фінансова математика

Контрольні завдання та методичні рекомендації до самостійної роботи для здобувачів вищої освіти ступеня „Бакалавр” спеціальності 072 „Фінанси, банківська справа та страхування” денної форми навчання

Миколаїв
2020

УДК 330.4:336.01
Ф59

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 24.11.2020 р. , протокол № 3

Укладачі:

В.С. Шебанін – д-р. техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, декан факультету менеджменту, Миколаївського національного аграрного університету;
І.П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.І. Влосов – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензент:
В.Д.Будак – д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О.Сухомлинського.

Зміст

Вступ

Актуальним завданням сьогодні є розвиток інвестиційної діяльності, спрямований на створення привабливого інвестиційного середовища. суттєвого нарощування обсягів інвестицій. Фундаментальні праці в області інвестування, наукова й навчальна література дозволяють зрозуміти процеси прийняття відповідних рішень.

Успіхи в інвестуванні передбачають знання і творче використання кількісних методів в управлінні інвестиціями.

Головною метою даних методичних рекомендацій є формування у здобувачів вищої освіти вмінь та навичок при застосуванні методів фінансової математики для розв’язання типових задач вартісної оцінки параметрів фінансових угод.

Тема1. Концептуальні засади фінансової математики. Правило простих процентів.

Основні теоретичні відомості

Майбутня вартість грошей (***Future value***, FV) – це вартість інвестованої у теперішньому часі суми грошей PV, у яку вони перетворяться через певний період часу з урахуванням певної процентної ставки дохідності $FV = PV(1+r)$, де $r -$ ставка нарощування (наявна на ринку норма доходності); $(1+r) -$ множник нарощування вартості.

Отже, майбутню вартість обчислюють через ***операцію нарощування*** відомої початкової суми за відомою нормою дохідності, яку в цьому разі називають ***ставкою нарощування***.

Теперішня вартість грошей (***Present value***, PV) – це вартість майбутніх грошових надходжень, приведених з урахуванням певної процентної ставки дохідності до теперішнього часу $PV = \dfrac{FV}{1+r}$,

де $r -$ ставка дисконтування (наявна на ринку норма доходності); $\dfrac{1}{1+r} -$ множник дисконтування (приведення) вартості.

Отже, величину теперішньої вартості обчислюють через ***операцію дисконтування*** (приведення) відомої кінцевої суми за відомою нормою дохідності, яку в цьому разі називають ***ставкою дисконтування.***

Теперішню вартість відомої майбутньої суми грошей при операції утримання коштів розраховують за формулою $PV = FV(1-d)$, де $d-$ ставка утримання (облікова ставка); $(1-d)-$ множник утримання вартості.

Ставка дисконтування (ставка відсотка) r (англ. – interest rate) вимірює рівень дохідності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу до початкової суми капіталовкладень $r = \frac{FV-PV}{PV} = \frac{FV}{PV} - 1$

Облікова ставка d (англ. – discount rate) вимірює рівень доходності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу не до початкової, а до кінцевої суми капіталовкладень $d = \frac{FV-PV}{FV} = 1 - \frac{PV}{FV}$.

Таким чином, справедливі формули $r = \frac{d}{1-d}$, *або* $d = \frac{r}{1+r}$.

Правило простих процентів (simple interest) застосовують у *короткострокових* фінансових угодах (строк існування менший від одного року) та у випадках, коли проценти не додають до основної суми боргу, а періодично виплачують. Цей метод не передбачає ***реінвестування***, отже — й ***капіталізації процентів.***

Формула нарощення за простими процентами*:*

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n = PV(1+rn),$$

де $FV-$кінцева сума (майбутня величина); $PV-$ початкова сума (теперішня величина); $r-$ставка дохідності; $n-$строк фінансової операції (кількість періодів нарахувань); $(1+rn)-$ *множник нарощування простих процентів.*

За простими процентами можна виконувати й обернену до нарощування операцію –***операцію дисконтування*** $PV = \frac{FV}{1 + rn}$, де

$\frac{1}{1 + rn}$ – ***множник дисконтування простих процентів.***

З формули простих процентів $FV = PV + PV \cdot rn$ випливає, що кінцева сума FV складається з двох величин – *початкової суми* PV та *нарощеної суми* $IS = PV \cdot rn$, яку називають ***величиною простого проценту*** і яка за сталої ставки нарощення r, буде зростати відповідно до збільшення строку нарощення n.

Тоді $FV = PV + IS$ *і р*озмір простого проценту – це різниця між номінальними величинами кінцевої та початкової вартості $IS = FV - PV$.

Розраховуючи за правилом простих процентів необхідно пам'ятати, що строк фінансової операції n зазвичай є меншим від одного року, проте ставку дохідності r як правило вказують у відсотках річних. За річної ставки дохідності, якщо строк нарощення вимірюється в частках року, нарощену суму обчислюють за формулою $IS = PV \cdot rn$. Якщо ж, наприклад, термін угоди вказаний у місяцях, то $IS = PV \cdot r\frac{m}{12}$, де m – кількість місяців тощо.

Утримання коштів за правилом простих процентів

Іноді його застосовують у короткострокових банківських операціях (наприклад, банківський облік векселів), тому *просту* *облікову ставку* d називають ще ***банківським дисконтом (bank rate).***

Теперішню вартість із використанням облікової ставки d обчислюють за формулою $PV = FV \cdot (1 - d \cdot n)$, де $(1 - d \cdot n)$ – **множник утримання** *простих процентів;* d – показник дохідності (облікова ставка d), отримала назву ***«проста ставка дисконту»*** або ***«проста дисконтна дохідність» (simple discount yield).***

З виразів $PV = \dfrac{FV}{1 + r \cdot n}$ та $PV = FV \cdot (1 - d \cdot n)$ можна знайти наступне співвідношення між простою ставкою дисконтування r та простою обліковою ставкою d:

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot n}, \text{ або } d = \frac{r}{1 + r \cdot n}$$

Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів

Для коректних обчислень необхідно повний термін дії угоди поділити на проміжки, протягом яких розмір цієї ставки не змінювався. Тоді формулу нарощування простих процентів можна записати так:

$$FV = PV(1 + r_1 n_1 + r_2 n_2 + \ldots r_T n_T) = PV\left(1 + \sum_{t=1}^{T} r_t n_t\right),$$

де T – загальна кількість періодів нарощування; r_t – ставка дохідності у періоді t; n_t – тривалість періоду t, у якому ставка дохідності не змінюється.

При аналізі параметрів фінансових угод зі змінною нормою дохідності може виникнути питання оцінювання ***середнього темпу приросту вартості*** та ***середньої ставки дохідності простих процентів*** за весь термін дії угоди.

Середню ставку простих процентів $\bar{r}$ за повний строк N фінансової операції визначають з рівняння:

$$1+\bar{r}N = 1+\sum_{t=1}^{T} r_t n_t \,,$$

де права частина – множник нарощування *змінних* простих процентів.

Звідси середня ставки дохідності простих процентів $\bar{r} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} r_t n_t}{N}$ – є ***зважена середня арифметична величина.***

Розглянемо операцію нарощування коштів за простими процентами у разі плаваючої (змінної) бази нарахування простих процентів (наприклад, сума на поточному рахунку в банку, на яку нараховують проценти, може змінюватись у разі поповнення рахунку або зняття грошей).

У цьому разі розмір простого проценту обчислюють так $IS = \sum_{t=1}^{T} P_t r_t n_t$, де P_t – залишок грошей на рахунку в момент часу t після чергового списання або поповнення коштів; n_t – строк зберігання грошей на рахунку до нової зміни залишку грошей на ньому; r_t – ставка дохідності у періоді t.

Поняття часової бази розрахунків. Комерційні та точні прості проценти

передбачатиме вираження строку фінансової угоди $\boldsymbol{n}$ у частках року $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{B}}$, де $\boldsymbol{t}$ – кількість днів, які залишилися до кінця фінансової операції; $\boldsymbol{B}$ – кількість днів у році (***часова база розрахунків***).

Тоді класичну формулу для нарощування вартості за правилом простих процентів, можна записати так $\boldsymbol{FV = PV\left(1 + r\dfrac{t}{B}\right)}$.

У фінансових обчисленнях застосовують два варіанти ***часової бази розрахунків:***

1. $\boldsymbol{B = 360}$ днів (тобто вважають, що у році 12 місяців по 30 днів – так званий ***«фінансовий рік»***) – ***комерційні проценти.***

2. $\boldsymbol{B = 365}$ *або* $\boldsymbol{B = 366}$ днів (визначають точну кількість днів у році) – ***точні проценти.***

Нарощуваним за ***точними процентами*** (точне врахування часової бази), за інших рівних умов, завжди зумовлює менше зростання теперішньої вартості, ніж за ***комерційними*** процентами.

Таким чином, мають економічний сенс та застосовуються на практиці три варіанти розрахунків за простими процентами:

1. ***Математичний метод:*** $\boldsymbol{\dfrac{ACT}{ACT}}$ *або* $\boldsymbol{\dfrac{365}{365}}$ – ***точні проценти з точною кількістю днів угоди.*** Використовують, зокрема, банки Англії та США, тому іноді його ще називають ***англійським підходом.***

2. ***Банківський метод:*** $\boldsymbol{\frac{ACT}{360}}$ або $\boldsymbol{\frac{365}{360}}$ – ***комерційні проценти з точною кількістю днів угоди***. Поширений у Франції, Бельгії, Швейцарії, тому іноді його ще називають ***французьким підходом.***

3. $\boldsymbol{\frac{360}{360}}$ – ***комерційні проценти з наближеною кількістю днів угоди***. Поширений у Німеччині, Швеції, Данії, тому іноді його ще називають ***німецьким підходом.***

Індивідуальне завдання №1

Прості відсотки

№1. Скільки отримано коштів через рік, якщо на депозит у банк покладено A тис. грн. під B% річних, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку?

№2. Під який річний відсоток було покладено C тис. грн. на депозит у банк, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку, якщо в кінці року було отримано D тис. грн.?

№3. Скільки коштів було покладено під E% річних, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку, якщо в кінці року було отримано F тис. грн.?

Варіант	A	B	C	D	E	F
1	4	11	4	5	4	5
2	5	12	5	6	5	6
3	6	13	6	7	3	7
4	7	14	7	8	6	8
5	8	15	8	9	7	9
6	9	16	9	10	8	10
7	8	17	8	10	9	10
8	7	18	7	11	10	11
9	6	19	6	12	11	12
10	5	20	5	13	12	13
11	4	21	4	14	13	14
12	11	3	11	15	14	15
13	12	4	12	16	13	16
14	13	5	13	17	12	17
15	14	6	14	18	11	18
16	15	7	15	19	10	19
17	16	8	16	20	9	20
18	17	9	17	21	8	21
19	18	10	18	22	7	22
20	19	11	19	23	6	23
21	20	12	20	24	5	24
22	19	13	19	25	6	25
23	18	14	18	26	7	26
24	17	15	17	27	8	27
25	16	16	16	28	9	28
26	11	14	18	22	5	16
27	12	15	19	23	3	17
28	13	16	20	24	6	18

29	14	17	19	25	7	19
30	15	18	18	26	8	20
31	16	19	17	27	9	21
32	17	20	16	28	10	22

№ 4. Яку суму позичає кредитор позичальнику, якщо за облікової ставки А% по закінченню періоду позичальник повинен повернути В тис. грн.?

№ 5. Чому дорівнює облікова ставка, якщо позичальник отримав на початку періоду С тис. грн., а віддав D тис. грн.?

Варіант	**A**	**B**	**C**	**D**
1	4	11	4	5
2	5	12	5	6
3	6	13	6	7
4	7	14	7	8
5	8	15	8	9
6	9	16	9	10
7	8	17	8	10
8	7	18	7	11
9	6	19	6	12
10	5	20	5	13
11	4	21	4	14
12	11	3	11	15
13	12	4	12	16
14	13	5	13	17
15	14	6	14	18

16	15	7	15	19
17	16	8	16	20
18	17	9	17	21
19	18	10	18	22
20	19	11	19	23
21	20	12	20	24
22	19	13	19	25
23	18	14	18	26
24	17	15	17	27
25	16	16	16	28
26	6	10	6	10
27	7	11	7	11
28	8	12	8	12
29	9	13	9	13
30	8	14	8	14
31	7	15	7	15
32	6	16	6	16

№ 6. Знайти кінцеву суму за С місяців якщо теперішня вартість дорівнює А тис. грн., а ставка дохідності складає В% за місяць.

№ 7. Чому дорівнює початкова сума, якщо ставка дохідності дорівнює D% за місяць, а кінцева сума має дорівнювати Е тис. грн. при терміні дії угоди F місяців?

№ 8. Чому дорівнює ставка дохідності за місяць, якщо початкова сума складає G тис. грн., кінцева – Н тис. грн., а термін дії угоди – I місяців?

Варіант	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	4	11	5	11	5	5	12	15	6
2	5	12	6	12	6	6	13	14	7
3	6	13	7	13	7	7	14	16	8
4	7	14	8	14	8	8	15	20	5
5	8	15	5	15	9	4	16	21	6
6	9	16	6	16	10	6	17	22	7
7	8	17	7	17	10	7	18	20	8
8	7	18	8	18	11	8	19	25	5
9	6	19	5	19	12	5	20	26	6
10	5	20	6	20	13	6	21	27	7
11	4	21	7	21	14	7	3	6	8
12	11	3	8	3	15	4	4	5	5
13	12	4	5	4	16	5	5	8	6
14	13	5	6	5	17	6	6	9	7
15	14	6	7	6	18	7	7	9	8
16	15	7	8	7	19	8	8	11	5
17	16	8	5	8	20	5	9	13	6
18	17	9	6	9	21	6	10	15	7
19	18	10	7	10	22	7	11	19	8
20	19	11	8	11	23	4	12	20	5
21	20	12	5	12	24	5	13	19	6
22	19	13	6	13	25	6	14	16	7
23	18	14	7	14	26	4	15	18	8
24	17	15	8	15	27	8	16	17	9
25	16	16	9	16	28	9	11	13	4
26	7	15	6	13	9	8	12	15	8
27	8	16	7	14	10	5	13	14	5
28	9	17	8	15	10	6	14	18	6

29	8	18	5	16	11	7	15	18	7
30	7	19	6	17	12	4	16	19	8
31	6	20	7	18	13	5	17	21	5
32	5	21	8	19	14	6	18	22	6

№ 9. Знайти кінцеву суму за C місяців якщо теперішня вартість дорівнює A тис. грн., а ставка дохідності складає B% річних.

№ 10. Чому дорівнює початкова сума, якщо ставка дохідності дорівнює D% річних, а кінцева сума має дорівнювати E тис. грн. при терміні дії угоди F місяців?

№ 11. Чому дорівнює річна ставка дохідності, якщо початкова сума складає G тис. грн., кінцева – H тис. грн., а термін дії угоди – I місяців?

Варіант	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	6	13	7	13	7	7	14	16	8
2	7	14	8	14	8	8	15	20	5
3	8	15	5	15	9	4	16	21	6
4	9	16	6	16	10	6	17	22	7
5	8	17	7	17	10	7	18	20	8
6	7	18	8	18	11	8	19	25	5
7	6	19	5	19	12	5	20	26	6
8	5	20	6	20	13	6	21	27	7
9	4	21	7	21	14	7	3	6	8
10	11	3	8	3	15	4	4	5	5

11	12	4	5	4	16	5	5	8	6
12	13	5	6	5	17	6	6	9	7
13	14	6	7	6	18	7	7	9	8
14	15	7	8	7	19	8	8	11	5
15	16	8	5	8	20	5	9	13	6
16	17	9	6	9	21	6	10	15	7
17	18	10	7	10	22	7	11	19	8
18	19	11	8	11	23	4	12	20	5
19	20	12	5	12	24	5	13	19	6
20	19	13	6	13	25	6	14	16	7
21	18	14	7	14	26	4	15	18	8
22	17	15	8	15	27	8	16	17	9
23	16	16	9	16	28	9	11	13	4
24	4	11	5	11	5	5	12	15	6
25	5	12	6	12	6	6	13	14	7
26	7	17	8	13	13	6	14	16	8
27	8	18	5	14	14	7	15	20	5
28	9	19	6	15	15	8	16	21	6
29	8	20	7	16	16	5	17	22	7
30	7	21	8	17	17	6	18	20	8
31	6	3	5	18	18	7	19	25	9
32	5	4	6	19	19	4	20	26	4

Задача 12. (варіант1-16)

За фінансовою угодою, укладеної на 1 рік початкова вартість складає А тис. грн.. Передбачено таке нарахування простих процентів: перший квартал В% річних, за кожний наступний, до закінчення періоду угоди, на С% більше. Знайти майбутню вартість грошей.

№	A	B	C
1	30	16	8
2	50	20	4
3	120	24	2
4	16	21	3
5	70	25	1
6	45	18	2
7	60	26	4
8	300	18	4
9	40	16	5
10	80	18	4
11	30	20	2
12	50	24	3
13	120	21	1
14	16	25	2
15	70	18	4
16	45	26	4

Варіант 17-32

Фінансову угоду укладено на пів року, початкова вартість становить A тис. грн.. Передбачено таке нарахування простих процентів: перші B місяців C% річних, за кожний наступний місяць, до закінчення періоду угоди, на D% більше. Знайти майбутню вартість грошей.

№	A	B	C	D

17	120	2	20	1
18	150	3	21	2
19	130	2	22	3
20	160	3	18	4
21	70	2	26	1
22	145	3	24	2
23	140	2	22	3
24	300	3	18	4
25	400	2	26	5
26	180	3	24	2
27	120	3	22	4
28	150	2	18	1
29	130	3	26	2
30	160	2	24	3
31	70	3	22	4
32	145	2	18	5

Задача 13.

Початкову суму А тис. грн.. було покладено під В% річних. Дата укладання угоди С, угода діє до D (рік не високосний). Обчислити на яку суму може розраховувати вкладник по закінченні строку депозитної угоди за різними методиками нарахування простих процентів.

№	A	B	C	D	E
1	120	12	16 січня	17 липня	125
2	125	13	9 січня	10 липня	128

3	215	14	24 січня	1 серпня	220
4	134	15	6 лютого	7 серпня	139
5	128	16	14 лютого	15 серпня	135
6	136	17	20 лютого	1 вересня	138
7	145	18	27 лютого	4 вересня	147
8	140	19	6 березня	11 вересня	144
9	148	20	14 березня	2 жовтня	152
10	150	21	21 березня	10 жовтня	154
11	165	22	27 березня	12 жовтня	169
12	170	23	3 квітня	16 жовтня	173
13	176	24	14 квітня	23 жовтня	178
14	185	18	18 квітня	1листопада	188
15	188	19	20 квітня	6 листопада	194
16	190	20	15 травня	15 листопада	196
17	191	21	23 травня	21 листопада	195
18	198	22	25 травня	1 грудня	201
19	200	23	2 червня	4 грудня	205
20	210	24	4 червня	11 грудня	214
21	150	12	6 лютого	7 серпня	156
22	120	13	14 лютого	15 серпня	123
23	234	14	20 лютого	1 вересня	138
24	450	15	27 лютого	4 вересня	459
25	220	16	6 березня	11 вересня	227
26	310	17	14 березня	2 жовтня	319
27	56	18	21 березня	10 жовтня	58

28	185	19	27 березня	12 жовтня	189
29	235	20	3 квітня	16 жовтня	239
30	160	21	14 квітня	23 жовтня	163
31	27	22	18 квітня	1листопада	29
32	130	23	20 квітня	6 листопада	132

Задача 14.

На банківський депозит поклали А тис.грн строком на півроку під В% річних з щомісячною виплатою процентів. Який прибуток отримає власник коштів?

Задача 15

Через скільки років капітал збільшиться в 4 рази, якщо річна ставка складає В%? Проаналізувати випадок нарахування відсотків за простою відсотковою ставкою.

Задача 16

Суму в А тис. грн поклали під простий відсоток В% річних на 2,5 року. Потім накопичену суму поклали під простий відсоток (В+5)% річних на наступні Т місяців. Наприкінці терміну одержали накопичену суму в 3,5А тис. грн. Чому дорівнює час Т?

Задача 17

Вексель номіналом А тис грн облікований на момент С року з погашенням в момент D під облікову ставку 5,25% річних.

Визначте суму, отриману векселеутримувачем, та норму доходності банка. Спосіб обчислення: фактичний/360, рік не високосний.

Задача 18

Визначте величину простої облікової ставки, якщо вексель обліковується в момент С на суму А тис грн. з погашенням в момент D суми боргу Е тис грн. Спосіб обчислення: фактичний/фактичний? Рік високосний.

Задача 19

Яка доходність по ставці простих відсотків операції обліку векселя по обліковій ставці (В-6)% якщо термін сплати А днів?

Приклади розв'язання типових задач

№1. Скільки отримано коштів через рік, якщо на депозит у банк покладено 12 тис. грн. під 14% річних, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку?

Розв'язання:

За формулою нарощування: $FV = PV(1+r) = 12(1+0,14) = 13,68$ тис.грн.

Відповідь: 13,68 тис.грн.

№2. Під який річний відсоток було покладено 15 тис. грн. на депозит у банк, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку, якщо в кінці року було отримано 17 тис. грн.?

Розв'язання:

З формули нарощування виразимо невідомий параметр – відсоткову ставку: $r = \frac{FV}{PV} - 1 = \frac{17}{15} - 1 = 0,133$

Відповідь: 13,3%

№3. Скільки коштів було покладено під 12% річних, за умови відсутності проміжних надходжень та витрат на цьому депозитному рахунку, якщо в кінці року було отримано 34 тис. грн.?

Розв'язання:

З формулою нарощування: $FV = PV(1+r)$ виразимо початкову суму: $PV = \dfrac{FV}{1+r} = \dfrac{34}{1+0,12} = 30,36$ тис.грн.

Відповідь: 30,36 тис.грн.

№ 4. Яку суму позичає кредитор позичальнику, якщо за облікової ставки 7% по закінченню періоду позичальник повинен повернути 16 тис. грн.?

Розв'язання:

За формулою утримання: $PV = FV(1-d) = 16(1-0,07) = 14,88$ тис.грн.

Відповідь: 14,88 тис.грн.

№ 5. Чому дорівнює облікова ставка, якщо позичальник отримав на початку періоду 14 тис. грн., а віддав 18 тис. грн.?

Розв'язання:

З формули утримання виразимо облікову ставку і визначимо її значення : $d = 1 - \dfrac{PV}{FV} = 1 - \dfrac{14}{18} = 0,22$.

Відповідь: 22% тис.грн.

№ 6. Знайти кінцеву суму за 5 місяців якщо теперішня вартість дорівнює 15 тис. грн., а ставка дохідності складає 10% за місяць.

Розв'язання:

За формулою нарощування: $FV = PV(1+r) = 15(1+0,1\cdot\dfrac{5}{12}) = 15,625$ тис.грн.

Відповідь: 15,625 тис.грн.

№ 7. Чому дорівнює початкова сума, якщо ставка дохідності дорівнює 2% за місяць, а кінцева сума має дорівнювати 26 тис. грн. при терміні дії угоди 8 місяців?

Розв'язання:

З формули нарощування виразимо початкову вартість, та одержамо: $PV = \frac{FV}{1+rn} = \frac{26}{1+0,02\cdot 8} = 22,414$ тис.грн.

Відповідь: 22,414 тис.грн.

№ 8. Чому дорівнює ставка дохідності за місяць, якщо початкова сума складає 30 тис. грн., кінцева – 34 тис. грн., а термін дії угоди – 6 місяців?

Розв'язання:

З формули нарощування простих відсотків $FV = PV(1+rn)$, виразимо відсоткову ставку: $r = \frac{FV - PV}{PVn} = \frac{34-30}{30\cdot 6} = 0,022$.

Відповідь: 2,2%.

№ 9. Знайти кінцеву суму за 6 місяців якщо теперішня вартість дорівнює 22 тис. грн., а ставка дохідності складає 24% річних.

Розв'язання:

Відсоткова ставка та час є неузгодженими, тому формула нарощування простих відсотків буде мати вид: $FV = PV(1 + r\frac{n}{12})$.

Отже значення кінцевої вартості буде: $FV = 22(1+0,24\frac{6}{12}) = 24,64$ тис.грн.

Відповідь: 24,64 тис.грн.

№ 10. Чому дорівнює початкова сума, якщо ставка дохідності дорівнює 12% річних, а кінцева сума має дорівнювати 20 тис. грн. при терміні дії угоди 7 місяців?

Розв'язання:

З формули нарощування простих відсотків виразимо початкову суму: $PV = \frac{FV}{\left(1 + r\,{}^{n}\!/_{12}\right)} = \frac{20}{\left(1+0,12\,{}^{7}\!/_{12}\right)} = 18,692$ тис.грн.

Відповідь: 18,692 тис.грн.

№ 11. Чому дорівнює річна ставка дохідності, якщо початкова сума складає 12 тис. грн., кінцева – 15 тис. грн., а термін дії угоди – 5 місяців?

Розв'язання:
З формули нарощування простих відсотків виразимо відсоткову ставку $r = \frac{FV - PV}{PVn} = \frac{15-12}{12 \cdot 5} = 0,05$, одержали 5% за місяць. Річна відсоткова ставка буде становити $12 \cdot 5\% = 60\%$ річних
Відповідь: 60%.

№ 12.

За фінансовою угодою, укладеної на 1 рік початкова вартість складає 18 тис. грн.. Передбачено таке нарахування простих процентів: перший квартал 12% річних, за кожний наступний, до закінчення періоду угоди, на 4% більше. Знайти майбутню вартість грошей.

Розв'язання:

За умовою даної задачі кінцева вартість буде визначатися за формулою $FV = PV\left(1 + r_1n_1 + r_2n_2 + r_3n_3 + r_4n_4\right)$

$$FV = 18\left(1 + 0,12 \cdot \frac{3}{12} + 0,16\frac{3}{12} + 0,2\frac{3}{12} + 0,24\frac{3}{12}\right) = 21,24$$

Відповідь: 21,24 тис.грн.

№ 13.

Початкову суму 130 тис. грн.. було покладено під 12% річних. Дата укладання угоди 20 квітня, угода діє до 6 листопада (рік не високосний). Обчислити на яку суму може розраховувати вкладник по закінченні строку депозитної угоди за різними методиками нарахування простих процентів.

Розв'язання:
Визначимо точну та наближену кількість днів дії угоди:
Точна кількість $n_1 = 11 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 5 = 200$
Наближена кількість $n_2 = 11 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 5 = 196$.
Знайдемо кінцеву вартість за різними методиками:

1. $\frac{365}{365}$ $: FV = PV\left(1 + r\frac{n_1}{365}\right) = 130\left(1 + 0,12\frac{200}{365}\right) = 138,548$ тис.грн.
2. $\frac{360}{360}$: $FV = PV\left(1 + r\frac{n_2}{360}\right) = 130\left(1 + 0,12\frac{196}{360}\right) = 138,493$ тис.грн.
3. $\frac{365}{360}$: $FV = PV\left(1 + r\frac{n_1}{360}\right) = 130\left(1 + 0,12\frac{200}{360}\right) = 138,667$ тис.грн.

Відповідь: 138,548; 138,493; 138,667 тис.грн.

№ 14.

На банківський депозит поклали 30 тис.грн строком на півроку під 16% річних з щомісячною виплатою процентів. Який прибуток отримає власник коштів?

Розв’язання:

За формулою простих відсотків одержамо:

$$FV = PV(1 + r\frac{n}{12}) = 30(1 + 0,16\frac{6}{12}) = 32,4 \text{ тис.грн.}$$

Відповідь: 18,692 тис.грн.

№ 15.

Через скільки років капітал збільшиться в 4 рази, якщо річна ставка складає 12%? Проаналізувати випадок нарахування відсотків за простою відсотковою ставкою.

Розв’язання:

За формулою нарощування простих відсотків, за умовою $FV = 4PV$, маємо: $1 + rn = 4$. Виразимо час та знайдемо його $n = \frac{3}{r} = \frac{3}{0,12} = 25$ років.

Відповідь: 25 років.

№ 16.

Суму в 38 тис. грн поклали під простий відсоток 10% річних на 2,5 року. Потім накопичену суму поклали під простий відсоток 15% річних на наступні Т місяців. Наприкінці терміну одержали накопичену суму в 133 тис. грн. Чому дорівнює час Т?

Розв’язання:

Знайдемо величину наприкінці першого терміну $FV_1 = PV_1\left(1 + r_1 n_1\right)$,

$FV_1 = 38\left(1 + 0,1 \cdot 2,5\right) = 47,5$ тис. грн.

Кінцева вартість для першого періоду є початковою для другого, тобто $PV_2 = FV_1$, тоді нарощування на другому етапі виражатиметься співвідношенням: $FV_2 = PV_2\left(1 + r_2 n_2\right)$, з якого виразимо та знайдемо час.

$$T = n_2 = \frac{FV_2 - PV_2}{r_2 \cdot PV_2} = \frac{133 - 47,5}{0,15 \cdot 47,5} = 12 \text{ лет.}$$

Відповідь: 12 лет.

Тема№2. Правило складних процентів

Короткі теоретичні відомості.

Формула нарощування за складними процентами $FV = PV \cdot (1+r)^n$, де $(1+r)^n$ – множник нарощування складних процентів.

У цій формулі для коректних обчислень за методом складних процентів величини r та n мають бути взаємоузгоджені (зведені до одних величин часу – років, місяців, днів тощо).

Коли відома кінцева (майбутня) вартість, за правилом складних процентів можна обчислити приведену (теперішню) вартість, виконавши операцію ***дисконтування*** за формулою $PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$, де $\frac{1}{(1+r)^n}$ – ***множник дисконтування складних процентів.***

Абсолютна різниця між кінцевою та початковою сумами (нарощена величина) за використання правила складних процентів називається ***розмір складного проценту***:

$$IC = FV - PV = PV \cdot (1+r)^n - PV = PV \cdot \left((1+r)^n - 1\right).$$

Теперішня вартість, з врахуванням складної облікової ставки d, обчислюється за формулою $PV = FV \cdot (1-d)^n$, де $(1-d)^n$ – ***множник утримання складних процентів.***

Для того, щоб початкова сума збільшилась в N разів, потрібно виконати умову $(1+r)^n = N$, звідки $n = \frac{lg\,N}{lg(1+r)}$. Аналогічно отримаємо $r = \sqrt[n]{N} - 1$.

Правило 72-х: Подвоєння капіталу за ставкою a (до 10 %) за складними процентами відбувається приблизно за $\frac{72}{a}$ років.

Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів

Коли впродовж терміну угоди ставки дохідності змінюються в часі, але в певні терміни, то нарощену за складними процентами суму визначають за формулою:

$$FV_n = PV \cdot (1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T} = PV \cdot \prod_{t=1}^{T}(1+r_t)^{n_t},$$

де T – загальна кількість періодів нарощування; r_t – ставка дохідності у періоді t; n_t – тривалість t періоду, у якому ставка дохідності не змінюється.

Для визначення ***середньої ставки дохідності складних процентів*** $\bar{r}$ за повний строк дії фінансової угоди N необхідно розв'язати відносно $\bar{r}$ таке рівняння:

$$(1+\bar{r})^N = (1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T}.$$

Звідси:

$$\bar{r} = \sqrt[N]{(1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T}} - 1 = \sqrt[N]{\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)^{n_t}} - 1.$$

Отже, множник нарощування за середньою ставкою складних процентів $(1+\bar{r})^N$ визначають за формулою ***зваженої середньої геометричної величини.***

У деяких фінансових угодах капіталізація (нарахування) процентів відбувається m разів однаковими частками через однакові проміжки часу протягом кожного періоду часу $t\ (t=\overline{1,n})$.

В такому разі класична формула для обчислення майбутньої вартості за правилом складних процентів, набуде вигляду $FV_n = PV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$, де n – загальний строк угоди (кількість років чи інших періодів часу); m – кількість нарахувань процентів протягом одного періоду часу.

Ефективна ставка r_e визначає, яку річну ставку складних процентів належить встановити, щоб отримати такий самий фінансовий результат, як і за m – разового нарахування процентів за рік за ставкою $\frac{r}{m}$.

Отже, за однакових початкових та кінцевих сум, для визначення залежностей між номінальною та ефективною ставками складних процентів, прирівнявши відповідні множники нарощування, можна записати такий вираз $(1+r_e)^n = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}$,

звідси ефективна ставка складних процентів $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1$

Неперервна складна ставка дохідності –це така ефективна ставка дохідності, за якою проценти виплачують та реінвестують ***неперервно,*** тобто кількість періодів нарахувань процентів прямує до нескінченості $FV = PV \cdot e^{r \cdot n}$.

Індивідуальне завдання №2

1. Знайти нарощену суму боргу, якщо початкова сума А тис грн., термін погашення С років. Складна річна відсоткова ставка (В-8)%.

2. Виплати по двохрічному депозиту становили Е тис. грн. Визначте первинну величину внеску, якщо складна ставка по депозиту В% річних.

3. Підприємство збирається придбати через 3 роки новий верстат вартістю Е тис. грн. Яку суму грошей необхідно вкласти зараз, щоб через 3 роки мати можливість зробити покупку, якщо процентна ставка прибутковості вкладення становила (В-5)%?

4. Вексель виписаний на (С-3) роки. При його обліку власник бажає отримати 80% суми векселя. Якою повинна бути складна облікова ставка?

5. Фінансовий менеджер підприємства запропонував Вам інвестувати А/3 тис грн в його підприємство, пообіцявши повернути Вам А/2 тис грн через (С-3) роки. Маючи інші інвестиційні можливості, Ви повинні з’ясувати, яка процентна ставка прибутковості запронованого Вам варіанта?

6. Розрахуйте майбутню вартість вкладу величиною 1000грн, розміщеного в банк на C років під B% річних, при нарахуванні складних процентів: а) щороку; б) кожні півроку; в) щокварталу.

7. Знайдіть теперішню вартість інвестиції, щоб наприкінці четвертого року сума грошей становила E тис. грн, якщо проценти нараховуються щомісяця за ставкою B% річних.

8. Яка повинна бути ставка складних процентів, щоб первісний капітал збільшився в 3,5 разу за C роки?

9. За який термін (у роках) сума 20000 грн. зросте до 30000 грн. при умові, що на неї нараховуються відсотки за ставкою (B-6)% річних складних раз на рік і щоквартально.

10. Розрахуйте, через скільки років вклад 1 тис. грн досягне величини 1 млн грн, якщо річна ставка процента за вкладом B%, нарахування процентів здійснюється щокварталу.

11. Людина поклала гроші в банк з номінальною відсотковою ставкою B% річних. Через який час гроші подвояться, якщо відсотки нараховуються неперервно?

12. Якщо відсоткова ставка 5%, то через який час грошей стане в C разів більше?

13. Початкова вкладена сума дорівнює A тис грн. Визначити нарощену суму через три роки при використанні простої і складної ставок відсотків у розмірі (B+7)% річних. Вирішити цей приклад також для випадків, коли відсотки нараховуються за півріччям, поквартально, безперервно.

14. Інвестор має A тис грн. Він може вкласти гроші в ощадний сертифікат під 8% річних на 5 років. Інвестор очікує, що відсоткова ставка сертифіката зростатиме на 3% кожні 5 років. Яку суму коштів інвестор отримає через 15 років?

15. Припустимо, що середня вартість будинку в 1980 році була 0,75А тис грн. Який щорічний рівень інфляції має бути, щоб середня вартість будинку була Е тис грн у 2000 році?

16. Власник ферми продав землю за ціною 10*А за 1 га. Він каже, що володів землею 20 років і що вартість землі зростала щорічно на В%. За яку ціну фермер купував землю?

17. Визначте майбутню вартість А тис грн. через С років, якщо:
а) складний процент нараховується щорічно в розмірі 12%;
б) складний процент нараховується раз на півріччя в розмірі 12%;
в) складний процент нараховується щоквартально в розмірі 16%;
г) складний процент нараховується щомісячно в розмірі 24%.

18. Визначити сучасний (поточний, нинішній, наведений) розмір суми Е тис грн., що буде виплачена через С років при використанні ставки складних відсотків В % річних?

№	A	B	C	E
1	120	12	7	125
2	125	13	8	128
3	215	14	5	220
4	134	15	6	139
5	128	16	7	135
6	136	17	8	138
7	145	18	5	147
8	140	19	6	144
9	148	20	7	152
10	150	21	8	154
11	165	22	5	169
12	170	23	6	173
13	176	24	7	178
14	185	18	8	188
15	188	19	5	194
16	190	20	6	196
17	191	21	7	195
18	198	22	8	201
19	200	23	5	205

20	210	24	6	214
21	150	12	7	156
22	120	13	8	123
23	234	14	9	138
24	450	15	5	459
25	220	16	6	227
26	310	17	8	319
27	56	18	5	58
28	185	19	6	189
29	235	20	7	239
30	160	21	8	163
31	27	22	5	29
32	130	23	6	132

Приклади розв’язання типових задач

1. Знайти нарощену суму боргу, якщо початкова сума 120 тис грн., термін погашення 6 років. Складна річна відсоткова ставка 6%.

Розв’язання:

$$FV = PV(1+r)^n = 120(1+0,06)^6 =$$

$$= 120 \times 1,06^6 = 120 \times 1,419 = 170 \textit{тис.грн}$$

Відповідь: 170 тис.грн

2. Виплати по двохрічному депозиту становили 130 тис. грн. Визначте первинну величину внеску, якщо складна ставка по депозиту 12% річних.

Розв’язання:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = \frac{130}{(1+0,12)^2} = \frac{130}{1,12^2} = 103,64 \textit{тис.грн}$$

Відповідь: 103,64 тис.грн.

3. Підприємство збирається придбати через 3 роки новий верстат вартістю 130 тис. грн. Яку суму грошей необхідно вкласти зараз, щоб через 3 роки мати можливість зробити покупку, якщо процентна ставка прибутковості вкладення становила 8%?

Розв’язання:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^r} = \frac{130}{(1+0,08)^3} = \frac{130}{1,08^3} = 103,198 тис.грн$$

Відповідь: 103,198 тис.грн.

4. Вексель виписаний на 3 роки. При його обліку власник бажає отримати 80% суми векселя. Якою повинна бути складна облікова ставка?

Розв'язання:

$$PV = FV(1-d)^n;$$

$$PV = 0,8FV;$$

$$0,8FV = FV(1-d)^n;$$

$$(1-d)^n = 0,8;$$

$$1-d = \sqrt[3]{0,8};$$

$$d = 1-\sqrt[3]{0,8} = 0,072$$

Відповідь: 7,2%

5. Фінансовий менеджер підприємства запропонував Вам інвестувати 40 тис грн в його підприємство, пообіцявши повернути Вам 60 тис грн через 5 роки. Маючи інші інвестиційні можливості, Ви повинні з'ясувати, яка процентна ставка прибутковості запропонованого Вам варіанта?

Розв'язання:

$$PV = FV(1+r)^n;$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[5]{\frac{60}{40}} - 1 = \sqrt[5]{1,5} - 1 = 0,085$$

Відповідь: 8,5%

6. Розрахуйте майбутню вартість вкладу величиною 1000грн, розміщеного в банк на 6 років під 12% річних, при нарахуванні складних процентів: а) щороку; б) кожні півроку; в) щокварталу.

Розв'язання:

$$FV_1 = PV(1+r)^n = 1000 \times (1+0,12)^6 = 1000 \times 1,12^6 = 1974$$

$$FV_2 = PV(1+\frac{r}{m})^{nm} = 1000(1+\frac{0,12}{2})^{6\times 2} = 1000 \times 1,06^{12} = 2012$$

$$FV_3 = PV(1+\frac{r}{m})^{nm} = 1000(1+\frac{0,12}{4})^{6\times 4} = 1000 \times 1,03^{24} = 2033$$

Відповідь: 1974; 2012; 2033 тис.грн.

7. Знайдіть теперішню вартість інвестиції, щоб наприкінці четвертого року сума грошей становила 120 тис. грн, якщо проценти нараховуються щомісяця за ставкою 12% річних.

Розв'язання:

$$FV = PV(1+\frac{r}{m})^{nm};$$

$$PV = \frac{FV}{(1+\frac{r}{m})^{nm}} = \frac{120}{(1+\frac{0,12}{12})^{4\times 12}} = 74,43$$

Відповідь: 74,43 тис.грн.

8. Яка повинна бути ставка складних процентів, щоб первісний капітал збільшився в 3,5 разу за 6 роки?

Розв'язання:

$$FV = PV(1+r)^n;$$

$$FV = 3,5PV;$$

$$(1+r)^n = 3,5;$$

$$1+r = \sqrt[n]{3,5};$$

$$r = \sqrt[6]{3,5} - 1 = 0,23$$

Відповідь: 23%.

9. За який термін (у роках) сума 20000 грн. зросте до 30000 грн. при умові, що на неї нараховуються відсотки за ставкою 8% річних складних раз на рік і щоквартально.

Розв'язання:

$FV = PV(1+r)^n$;

$$n = \frac{Ln\frac{FV}{PV}}{Ln(1+r)} = \frac{Ln\frac{30000}{20000}}{Ln(1+0,08)} = \frac{Ln1,5}{Ln(1,08)} = 5,27$$

$5\,років$

$0,27 \times 12 = 3\,місяця$

$n = 5\,років 3\,місяця$

Відповідь: 5років і 3 місяці.

10. Розрахуйте, через скільки років вклад 1 тис. грн досягне величини 1 млн грн, якщо річна ставка процента за вкладом 12%, нарахування процентів здійснюється щокварталу.

Розв'язання:

$FV = PV(1+r)^n$;

$$n = \frac{Ln\frac{FV}{PV}}{Ln(1+r)} = \frac{Ln\frac{1000000}{1000}}{Ln1,12} = \frac{Ln1000}{Ln1,12} = \frac{6,9}{0,1133} \approx 61р.$$

Відповідь: 61 рік.

11. Людина поклала гроші в банк з номінальною відсотковою ставкою 12% річних. Через який час гроші подвояться, якщо відсотки нараховуються неперервно?

Розв'язання:

$FV = PV \times e^{rn}$;

$rn = Ln\frac{FV}{PV}$;

$$n = \frac{1}{r}Ln\frac{FV}{PV} = \frac{1}{0,12}Ln2 = 5,776$$

$5\,років$

$0,776 \times 12 = 9\,місяців$

$0,315 \times 30 = 9\,днів$

Відповідь: 5 років 9 місяців 9днів.

12. Якщо відсоткова ставка 5%, то через який час грошей стане в 6 разів більше?

Розв'язання:

$$FV = PV(1+r)^n;$$

$$n = \frac{Ln\frac{FV}{PV}}{Ln(1+r)} = \frac{Ln6}{Ln1,05} = 36,7\,\textit{років}$$

Відповідь: 36,7 років

13. Початкова вкладена сума дорівнює 120 тис грн. Визначити нарощену суму через три роки при використанні простої і складної ставок відсотків у розмірі 18% річних. Вирішити цей приклад також для випадків, коли відсотки нараховуються за півріччям, поквартально, безперервно.

Розв'язання:

$$FV_1 = PV(1+r)^n = 120 \times (1+0,18)^3 = 197,16\,\textit{тис.грн}$$

$$FV_2 = PV(1+rn) = 120 \times (1+0,18 \times 3) = 184,8\,\textit{тис.грн}$$

$$FV_3 = PV(1+\frac{r}{m})^{n \times m} = 120(1+\frac{0,18}{2})^{2 \times 3} = 201,25\,\textit{тис.грн}$$

$$FV_4 = PV(1+\frac{r}{4})^{n \times 4} = 120(1+\frac{0,18}{4})^{3 \times 4} = 203,5\,\textit{тис.грн}$$

$$FV_5 = PV \times e^{nr} = 120 \times e^{3 \times 0,18} = 205,92\,\textit{тис.грн}$$

Відповідь:

14. Інвестор має 120 тис грн. Він може вкласти гроші в ощадний сертифікат під 8% річних на 5 років. Інвестор очікує, що відсоткова ставка сертифіката зростатиме на 3% кожні 5 років. Яку суму коштів інвестор отримає через 15 років?

Розв'язання:

$$FV_1 = PV(1+r_1)^{n_1} \times (1+r_2)^{n_2} \times ... \times (1+r_t)^{n_t}$$

$$FV = 120(1+0,08)^5 \times (1+0,11)^5 \times (1+0,14)^5 = 572\,\textit{тис.грн}$$

Відповідь: 572 тис.грн.

15. Припустимо, що середня вартість будинку в 1980 році була 90 тис грн. Який щорічний рівень інфляції має бути, щоб середня вартість будинку була Е тис грн у 2000 році?

Розв'язання:

$$FV = PV(1+r)^n$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \sqrt[20]{\frac{132}{90}} - 1 = 0,019$$

Відповідь: 1,9%

16. Власник ферми продав землю за ціною 1200 за 1 га. Він каже, що володів землею 20 років і що вартість землі зростала щорічно на 12%. За яку ціну фермер купував землю?

Розв'язання:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = \frac{1200}{(1+0,12)^{20}} = 124,4$$

Відповідь: 124,4 тис.грн.

17. Визначте майбутню вартість 120 тис грн. через 6 років, якщо:

а) складний процент нараховується щорічно в розмірі 12%;

б) складний процент нараховується раз на півріччя в розмірі 12%;

в) складний процент нараховується щоквартально в розмірі 16%;

г) складний процент нараховується щомісячно в розмірі 24%.

Розв'язання:

$$FV_1 = PV(1+r)^n = 120 \times (1+0,12)^6 = 237 \textit{тис.грн}$$

$$FV_2 = PV(1+\frac{r}{m})^{n \times m} = 120 \times (1+0,06)^{6 \times 2} = 241,5 \textit{тис.грн}$$

$$FV_3 = PV(1+\frac{r}{m})^{n \times m} = 120 \times (1+\frac{0,16}{4})^{6 \times 4} = 307,6 \textit{тис.грн}$$

$$FV_4 = PV(1+\frac{r}{m})^{n \times m} = 120 \times (1+\frac{0,24}{12})^{6 \times 12} = 499,34 \textit{тис.грн}$$

Відповідь:

18. Визначити сучасний (поточний, нинішній, наведений) розмір суми 130 тис грн., що буде виплачена через 6 років при використанні ставки складних відсотків 12 % річних?

Розв'язання:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = \frac{130}{(1+0,12)^6} = 65,86$$

Відповідь: 65,86 тис.грн.

Тема№3 Фінансова еквівалентність

Короткі теоретичні відомості.

Фінансова еквівалентність – паритет (рівність) різних за номіналом вартісних величин та / або норм дохідностей фінансових угод, які належать до різних моментів часу. Вони залежать від наступних ***базових параметрів***:

– розміру середньоринкової ставки дохідності;
– методики нарахування процентів;
– строку та періодичності нарахування коштів;
– початкової та / або кінцевої суми коштів.

Еквівалентні вартісні величини – це суми коштів, які у разі зведення до одного моменту часу стають однаковими.

Еквівалентні норми дохідності — це ставки дохідності, які, не дивлячись на різні способи та / або строки нарахування чи утримання коштів, у разі зведення до однакових часових одиниць виміру (зазвичай говорять про *річну* дохідність) стають однаковими.

1. Еквівалентність множників нарощування простих та складних процентів

Умову еквівалентності простих та складних множників нарощування процентів можна записати у вигляді:

$$\left(1+r_{ic}\right)^{n}=\left(1+r_{is}\cdot n\right).$$

Звідси, проста ставка за відомої складної ставки дохідності:

$$r_{is}=\frac{\left(1+r_{ic}\right)^{n}-1}{n}\ .$$

Складна ставка за відомої простої ставки дохідності: $r_{is} = \sqrt[n]{1 + r_{is} \cdot n} - 1 = (1 + r_{is} \cdot n)^{\frac{1}{n}} - 1$.

2. Еквівалентність множників утримання простих та складних процентів

Умову еквівалентності простих та складних множників утримання процентів можна записати у вигляді:

$$(1 - d_{ic})^n = (1 - d_{is} \cdot n).$$

Звідси, проста облікова ставка за відомої складної ставки утримання:

$$d_{is} = \frac{1 - (1 - d_{ic})^n}{n} .$$

Складна облікова ставка за відомої простої ставки утримання:

$$d_{is} = 1 - \sqrt[n]{1 - d_{is} \cdot n} - 1 = 1 - (1 - d_{is} \cdot n)^{\frac{1}{n}} .$$

3. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для простих процентів

Умову еквівалентності множників дисконтування та утримання для простих процентів можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{1 + r \cdot n} = 1 - d \cdot n$$

Звідси,

$r = \dfrac{d}{1 - d \cdot n}$, або $d = \dfrac{r}{1 + r \cdot n}$.

4. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для складних процентів

Рівняння еквівалентності множників утримання та дисконтування складних процентів матиме вигляд:

$$\frac{1}{(1 + r)^n} = (1 - d)^n .$$

Звідси,

$r = \dfrac{d}{1 - d}$, або $d = \dfrac{r}{1 + r}$.

5. Еквівалентність множників нарощування складних процентів за номінальними та ефективними ставками дохідності

Нарощення вартості за правилом складних процентів може відбуватися двома способами:

– за канонічною формулою $FV = PV \cdot (1+r)^n$, у разі, коли загальна кількість нарахувань процентів співпадає з кількістю періодів існування угоди (тривалістю угоди), тобто, $m = n$;

– за формулою $FV_n = PV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$, у разі, коли загальна кількість нарахувань процентів є більшою за кількість періодів, тобто, $m > n$.

У разі, коли для двох фінансових угод множники нарощування за річними ***ефективними*** ставками складних процентів є еквівалентними, можна записати рівняння:

$$\left(1+r_{e_1}\right)^{n_1} = \left(1+r_{e_2}\right)^{n_2}.$$

Тоді, враховуючи вираз для ефективної ставки складних процентів $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$, для номінальних ставок дохідності можна записати рівняння:

$$\left(1+\frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1 \cdot n_1} = \left(1+\frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2 \cdot n_2}.$$

Отриманий вираз є загальним випадком рівняння еквівалентності множників нарощування складних процентів.

У разі, коли визначення еквівалентних множників здійснюють в межах однієї фінансової угоди, тобто $n_1 = n_2 = n$, вираз спрощується до:

$$\left(1+\frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1}\left(1+\frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2}.$$

6. Визначення еквівалентної ставки дохідності фінансової операції при утриманні комісійних

Нехай позика в розмірі C надається на строк n під складну річну процентну ставку r. При наданні позики утримуються комісійні у розмірі A, що збільшує дохідність операції для кредитора. В результаті боржник отримує суму, яка дорівнює $(C-A)$.

Для визначення повної дохідності фінансової операції припускають, що нарощення величини $(C-A)$ за ставкою y дасть той самий результат, що і нарощення величини C за ставкою r. Отже, відповідно до введених раніше позначень, рівняння еквівалентності матиме вигляд:

$$(C-A)\cdot(1+y)^n = C\cdot(1+r)^n.$$

Звідси рівняння можна записати у вигляді пропорції;

$$\frac{1+y}{1+r}=\left(\frac{C}{C-A}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Одержаний вираз унаочнює той факт, що приріст дохідності кредитора за наявності початкових комісійних виплат залежить лише від співвідношення між повною та реально виданою сумами боргу та строку, на який надано кредит.

Розв'язавши це рівняння відносно річної ставки дохідності y, отримаємо:

$$y = (1 + r) \cdot \left(\frac{C}{C - A} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 .$$

Індивідуальне завдання №3

1. Знайти значення річної відсоткової ставки, яка еквівалентна простій обліковій ставці А% на рік

2. Яка дохідність векселя за ставкою простих відсотків (K =365) при обліку векселя за обліковою ставкою (А+5)%. Термін сплати за векселем – В днів.

3. Операція обліку повинна принести (А+3)% доходу на рік. Термін позики 60 днів, (K = 365), прості відсотки. Знайти еквівалентну облікову ставку.

4. Позика видана під (А+10)% складних річних. Знайти рівень еквівалентної простої річної ставки при терміні 2 роки. K=365. Те ж саме при терміні 6 місяців.

5. Нехай відсоткова ставка банку дорівнює (А-5)% які нараховуються неперервно протягом року. Обчислити ефективну відсоткову ставку.

6. Визначити ефективну відсоткову ставку, якщо номінальна відсоткова ставка А% річних і складні відсотки нараховуються: а) що півроку; б) щоквартально; в) щомісяця; г) неперервно.

7. Знайти номінальну річну відсоткову ставку відсоткову ставку, що конвертується щоквартально, яка є еквівалентом: 1) номінальної

річної ставки А% річних яка конвертується щомісяця; 2) номінальної відсоткової ставки (А+3)% річних, що конвертується що два роки.

8. Для відсоткової ставки (А+5)% річних, що конвертується щомісяця, знайти: 1) еквівалентну річну ставку відсотка, яка сплачується раз у півроку; 2) еквівалентну річну облікову ставку, яка сплачується щомісяця.

9. Облікова ставка за рік конвертується щоквартально і становить (А+12)%. Знайти: 1) еквівалентну ставку відсотка, яка конвертується що півроку; 2) еквівалентну річну облікову ставку, яка конвертується щомісяця.

10. Два платежі строками В і В+50 днів та сумами С млн. грн. і С+5 млн. грн. замінюється одним платежем строком на В+30 днів. Проста річна відсоткова ставка А%, (К=360). Знайти величину консолідованого платежу.

11. Платежі С млн. грн. і С+5 млн. грн. зі строками погашення 1 і 2 роки замінюють одним платежем через 1,5 роки. Знайти величину консолідованого платежу, якщо відсоткова ставка (А-3)%.

12. Фірма отримала кредит на суму D тис.грн під А% річних (простих). Кредит має гаситися двома платежами 0,6D тис з відсотками через 90 днів, та 0,4D тис.грн з відсотками через 120 днів. Фірма домовилася з кредитором про об'єднання платежів в один зі строком погашення 150 днів. Знайти його величину. (К=360)

13. Фірма для погашення заборгованості за наданий під А% річних кредит, одержаний 01.01., має провести 3 платежі (D-70), D

та (D+50) тис.грн. в строки E, F, G. Фірма запропонувала банку поєднати всі платежі в один з погашенням P Знайти величину консолідованого платежу. (К=365)

14. Фірма має ряд фінансових зобов’язань н суми: 0,7С; 0,8С; 0,9С млн. грн. які мають бути погашені через 40, 70 та 160 днів. За згодою сторін вирішено замінити їх одним платежем сумою 2,8С млн. грн. за ставкою А% річних (К=365). Визначити строк сплати консолідованого платежу.

№	A	B	C	D	E	F	G	P	N
1	12	100	1	500	05.03	10.04	30.04	15.04	
2	13	110	2	530	08.03	12.04	06.05	26.04	
3	14	120	3	560	12.03	17.04	22.05	15.05	
4	15	130	4	590	16.03	18.04	27.05	12.05	
5	16	140	5	620	20.03	27.04	30.05	05.05	
6	17	150	6	650	23.03	30.04	02.06	12.06	
7	18	160	7	680	27.03	06.05	08.06	25.05	
8	19	170	8	710	03.04	12.05	14.06	03.06	
9	20	180	9	740	05.04	15.05	18.06	01.06	
10	21	190	10	770	07.04	19.05	23.06	28.05	
11	22	200	11	800	10.04	25.05	05.07	12.06	
12	23	210	12	830	12.04	27.05	09.07	15.06	
13	24	220	13	860	15.04	30.05	13.07	30.07	
14	18	230	14	890	17.04	17.05	18.07	13.06	
15	19	240	15	920	20.04	23.05	25.07	25.06	
16	20	250	16	950	22.04	27.05	28.09	20.06	
17	21	100	1	500	05.03	10.04	30.04	15.04	
18	22	110	2	530	08.03	12.04	06.05	26.04	
19	23	120	3	560	12.03	17.04	22.05	15.05	
20	24	130	4	590	16.03	18.04	27.05	12.05	
21	12	140	5	620	20.03	27.04	30.05	05.05	
22	13	150	6	650	23.03	30.04	02.06	12.06	
23	14	160	7	680	27.03	06.05	08.06	25.05	
24	15	170	8	710	03.04	12.05	14.06	03.06	

25	16	180	9	740	05.04	15.05	18.06	01.06	
26	17	190	10	770	07.04	19.05	23.06	28.05	
27	18	200	11	800	10.04	25.05	05.07	12.06	
28	19	210	12	830	12.04	27.05	09.07	15.06	
29	20	220	13	860	15.04	30.05	13.07	30.07	
30	21	230	14	890	17.04	17.05	18.07	13.06	
31	22	240	15	920	20.04	23.05	25.07	25.06	
32	23	250	16	950	22.04	27.05	28.09	20.06	

Приклади розв’язання типових задач

1. Знайти значення річної відсоткової ставки, яка еквівалентна простій обліковій ставці 10% на рік

Розв’язання:

Рівняння еквівалентності має вид $1+r=\dfrac{1}{1-d}$, виразимо невідоме, $r=\dfrac{d}{1-d}=\dfrac{0,1}{1-0,1}=0,11$

Відповідь: 11%

2. Яка дохідність векселя за ставкою простих відсотків (K =365) при обліку векселя за обліковою ставкою 15%. Термін сплати за векселем – 60 днів.

Розв’язання:

Рівняння еквівалентності має вид: $1+rn=\dfrac{1}{1-dn}$, виразимо та знайдемо відсоткову ставку, причому час визначається як частина року: $r=\dfrac{d}{1-dn}=\dfrac{d}{1-d\dfrac{t}{K}}=\dfrac{0,15}{1-0,15\dfrac{60}{365}}=0,154$.

Відповідь: 15,4%

3. Операція обліку повинна принести 24% доходу на рік. Термін позики 60 днів, (K = 365), прості відсотки. Знайти еквівалентну облікову ставку.

Розв’язання:

Рівняння еквівалентності має вид: $1+rn=\frac{1}{1-dn}$, виразимо та знайдемо облікову ставку $d=\frac{r}{1+rn}=\frac{d}{1+d\frac{t}{K}}=\frac{0,24}{1-0,24\frac{60}{365}}=0,231$

Відповідь: 23,1%

4. Позика видана під 18% складних річних. Знайти рівень еквівалентної простої річної ставки при терміні 2 роки. K=365. Те ж саме при терміні 6 місяців.

Розв'язання:

$FV=PV\times(1+r)^n;$

$FV=PV(1+rn);$

$1+r_{is}n=(1+r_{ic})^n;$

$r_{is}=\frac{(1+r_{ic})^n-1}{n};$

$r_{is1}=\frac{(1+0,18)^2-1}{2}=0,196$

$r_{is1}=19,6\%$

$r_{is2}=\frac{(1+0,18)^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}}=0,1726$

$r_{is2}=17,26\%$

Відповідь: 17,26%

5. Нехай відсоткова ставка банку дорівнює 8% які нараховуються неперервно протягом року. Обчислити ефективну відсоткову ставку.

Розв'язання:

$$(1+r_e)^n=e^{rn}$$

$r_e=e^r-1=e^{0,08}-1=0,083$

$r_e=8,3\%$

Відповідь: 8,3%.

6. Визначити ефективну відсоткову ставку, якщо номінальна відсоткова ставка 10% річних і складні відсотки нараховуються: а) що півроку; б) щоквартально; в) щомісяця; г) неперервно.

Розв'язання:

$$FV = PV(1+r_e)^n$$

$$FV = PV(1+\frac{r}{m})^{nm}$$

$$1+r_e = (1+\frac{r}{m})^m$$

$$r_e = (1+\frac{r}{m})^m - 1$$

$$а) r_e = (1+\frac{0,1}{2})^2 - 1 = 0,1025;$$

$$r_e = 10,25\%$$

$$б) r_e = (1+\frac{0,1}{4})^4 - 1 = 0,1038;$$

$$r_e = 10,38\%$$

$$в) r_e = (1+\frac{0,1}{12})^{12} - 1 = 0,1047;$$

$$r_e = 10,47\%$$

$$г) r_e = e^r - 1 = e^{0,1} - 1 = 0,1052;$$

$$r_e = 10,52\%$$

Відповідь: 10,25%; 10,38%; 10,47%, 10,52%.

7. Знайти номінальну річну відсоткову ставку, що конвертується щоквартально, яка є еквівалентом: 1) номінальної річної ставки 12% річних яка конвертується щомісяця; 2) номінальної відсоткової ставки 18% річних, що конвертується що два роки.

Розв'язання:

$$(1+\frac{r}{m})^{nm} = (1+\frac{r_1}{m_1})^{nm1}$$

$$r = ((1+\frac{r_1}{m_1})^{\frac{m1}{m}} - 1) \times m$$

$$1) r = ((1+\frac{0,12}{12})^{\frac{12}{4}} - 1) \times 4 = 0,1212$$

$$r = 12,12\%$$

$$2) r = ((1+\frac{0,12}{0,5})^{\frac{0,5}{4}} - 1) \times 4 = ((1+0,24)^{0,125} - 1) \times 4 = 0,109$$

$$r = 10,9\%$$

Відповідь: 12,12%; 10,9%

8. Для відсоткової ставки 14% річних, що конвертується щомісяця, знайти: 1) еквівалентну річну ставку відсотка, яка сплачується раз у півроку; 2) еквівалентну річну облікову ставку, яка сплачується щомісяця.

Розв'язання:

$$1)(1+\frac{r_1}{m_1})^{m_1} = (1+\frac{r_2}{m_2})^{m2} \Rightarrow (1+\frac{0,14}{12})^{12} = (1+\frac{r_2}{2})^2$$

$$1+\frac{r_2}{2} = (1+\frac{0,14}{12})^6 = 1,072$$

$$r_2 = (1,072-1) \times 2 = 0,144$$

$$r_2 = 14,4\%$$

$$2)(1+\frac{d_3}{m_3})^{m3} = \frac{1}{(1+\frac{r_1}{m_1})^{m1}} \Rightarrow 1-\frac{d_3}{m_3} = \frac{1}{1+\frac{r_1}{m_1}}$$

$$d_3 = (1-\frac{1}{1+\frac{r_1}{m_1}})m_3 = (1-\frac{1}{1+\frac{0,14}{12}}) \times 12 = 0,1384$$

$$d_3 = 13,84\%$$

Відповідь: 14,4%; 13,84%.

9. Облікова ставка за рік конвертується щоквартально і становить 20%. Знайти: 1) еквівалентну ставку відсотка, яка конвертується що півроку; 2) еквівалентну річну облікову ставку, яка конвертується щомісяця.

Розв'язання:

$$1)(1-\frac{d_1}{m_1})^{m_1} = \frac{1}{(1+\frac{r_2}{m_2})^{m2}} \Rightarrow (1+\frac{r_2}{m_2})^{m2} = \frac{1}{(1-\frac{d_1}{m_1})^{m_1}} \Rightarrow (1+\frac{r_2}{2})^2 =$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{0,2}{4})^4} \Rightarrow 1+\frac{r_2}{2} = \frac{1}{(1-\frac{0,2}{4})^2} = 1,108$$

$$\frac{r_2}{2} = 0,108 \Rightarrow r_2 = 0,216 \Rightarrow r_2 = 21,6\%$$

$$2)(1-\frac{d_3}{m_3})^{m3} = (1-\frac{d_1}{m_1})^{m1};$$

$$(1-\frac{d_3}{12})^3 = (1-\frac{0,2}{4});$$

$$1-\frac{d_3}{12} = \sqrt[3]{1-\frac{0,2}{4}} = 0,983$$

$$\frac{d_3}{12} = 1-0,983 = 0,017$$

$$d_3 = 0,203$$

Відповідь: 21,6%; 20,3%

10. Два платежі строками 100 і 150 днів та сумами 3 млн. грн. і 5 млн. грн. замінюється одним платежем строком на 130 днів. Проста річна відсоткова ставка 30%. Знайти величину консолідованого платежу.

Розв'язання:

$$100 < n_0 < 150$$

$$1)t_1 = n_0 - n_1 = 30\textit{днів}$$

$$2)t_2 = n_2 - n_0 = 20\textit{днів}$$

$$FV_0 = 3\times(1+r\times\frac{t_1}{360}) + 5\times(1+r\times\frac{t_2}{360})^{-1} =$$

$$= 3\times(1+0,3\times\frac{30}{360}) + 5\times(1+0,3\times\frac{20}{360})^{-1} = 7,99\textit{млн.грн}$$

Відповідь: 7,99 млн.грн.

11. Платежі 1 млн. грн. і 2 млн. грн. зі строками погашення 1 і 2 роки замінюють одним платежем через 1,5 роки. Знайти величину консолідованого платежу.

Розв'язання:

$$FV_0 = FV_1 \times (1+r)^{t1} + FV_2 \times (1+r)^{-t2}$$

$$t_1 = 1,5 \times 1 = 0,5$$

$$t_2 = 2 - 1,5 = 0,5$$

$$FV_0 = 1 \times (1+0,2)^{0,5} + 2 \times (1+0,2)^{0,5} = 2,92 \textit{млн.грн}$$

Відповідь: 2,92 млн.грн.

12. Фірма отримала кредит на суму 900 тис.грн під 10% річних (простих). Кредит має гаситися двома платежами 500 тис з відсотками через 90 днів, та 400 тис.грн з відсотками через 120 днів. Фірма домовилася з кредитором про об'єднання платежів в один зі строком погашення 150 днів. Знайти його величину.

Розв'язання:

$$FV_1 = 500 \times (1 + 0,1 \times \frac{90}{360}) = 512,5 \textit{тис.грн}$$

$$FV_2 = 400 \times (1 + 0,1 \times \frac{120}{360}) = 413,3 \textit{тис.грн}$$

$$t_1 = 150 - 90 = 60 \textit{днів}$$

$$t_2 = 150 - 120 = 30 \textit{днів}$$

$$FV_0 = FV_1 \times (1 + \frac{t_1}{360} \times r) + FV_2 \times (1 + \frac{t_2}{360} \times r) =$$

$$= 512,5 \times (1 + \frac{60}{360} \times 0,1) + 413,3 \times (1 + \frac{30}{360} \times 0,1) = 937,78 \textit{тис.грн}$$

Відповідь: 937,78 тис.грн.

13. Фірма для погашення заборгованості за наданий під 15% річних кредит, одержаний 01.01., має провести 3 платежі 200, 270 та 330 тис.грн. в строки 20.04., 25.05., 15.06. Фірма запропонувала банку поєднати всі платежі в один з погашенням 01.06. Знайти величину консолідованого платежу.

Розв'язання:

$$FV_0 = FV_1(1 + r \times \frac{t_1}{365}) + FV_2(1 + r \times \frac{t_2}{365}) + FV_3(1 + r \times \frac{t_3}{365})^{-1} =$$

$$= 200 \times (1 + 0{,}15 \times \frac{42}{365}) = 270 \times (1 + 0{,}15 \times \frac{7}{365}) + 330(1 + 0{,}15 \times \frac{14}{365})^{-1} =$$

$$= 802{,}32 \textit{тис.грн}$$

Відповідь: 802,32 тис.грн.

14. Фірма має ряд фінансових зобов'язань на суми: 2,5; 3,1; 2,7 млн. грн. які мають бути погашені через 40, 70 та 160 днів. За згодою сторін вирішено замінити їх одним платежем сумою 1,8С млн. грн. за ставкою А% річних (К=360)

Розв'язання:

$$PV_0 = \frac{FV_1}{1 + n_1 r} + \frac{FV_2}{1 + n_2 r} + \frac{FV_3}{1 + n_3 r} =$$

$$= \frac{2{,}5}{1 + \frac{40}{365} \times 0{,}12} + \frac{3{,}1}{1 + \frac{70}{365} \times 0{,}12} + \frac{2{,}7}{1 + \frac{160}{365} \times 0{,}12} =$$

$$= 8{,}062 \textit{млн.грн}$$

$$FV = 9 \textit{млн}$$

$$PV_0 = 8{,}062 \textit{млн.грн}$$

$$FV = PV \times (1 + rn)$$

$$n = \frac{\frac{FV}{PV} - 1}{r} = \frac{\frac{9}{8{,}062} - 1}{0{,}12} = 0{,}9695 \textit{років}$$

$$n_0 = 354 \textit{днів}$$

Відповідь: 354 дні.

Тема№4 Фінансові обчислення для потоків платежів

Короткі теоретичні відомості.

Величиною потоку в момент називають суму платежів $\boldsymbol{T}$ потоку, дисконтованих до цього моменту часу:

$$R(T) = \sum_{k=1}^{T} R_k \cdot (1+r)^{T-t_k} .$$

Якщо відомо величину потоку в якийсь момент T, то завжди можна знайти величину потоку в будь-який інший момент часу T':

$R(T') = R(T) \cdot (1+r)^{T'-T}$.

Фінансова рента – потік послідовних ***додатних*** платежів, здійснюваних через ***однакові проміжки часу.***

Узагальнена класифікація фінансових рент

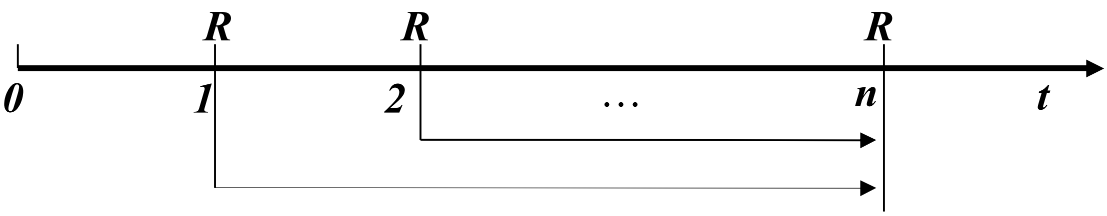
Ознака класифікації	**Вид ренти**
Періодичність платежів	Річні (платіж один раз за рік); $p-$термінові (p платежів за рік)
Частота платежів	Дискретні; Неперервні
Величина членів ренти	Постійні (з однаковими членами); змінні (з різними членами)
Кількість членів	Обмежені (зі скінченою кількістю членів); необмежені (вічні)

Обов'язковість платежу	Умовні (кількість членів наперед невідоме, оплачуються згідно з умовою); безумовні, правильні (обов'язково оплачуються)
Момент платежу	Звичайні – ***постнумерандо*** (платіж в кінці періоду); авансові – ***пренумерандо*** (платіж на початку періоду)

1. Річна рента постнумерандо (звичайний ануїтет)

Річна рента постнумерандо (звичайний ануїтет) передбачає, що всі ***додатні, періодичні*** платежі цього грошового потоку здійснюють ***наприкінці*** року. Досить часто при цьому, ще й розміри періодичних платежів є ***однаковими (рівними),*** тобто рента є ***постійною.***

Для знаходження нарощеної величини ренти постнумерандо необхідно всі періодичні платежі привести (наростити) до останнього періоду часу з урахуванням ставки r (рис. 5.2).



Таким чином, користуючись рівняннями $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ і $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, знаючи три параметри: розмір щорічного платежу R, кількість років n та ставку дохідності r, завжди можна знайти теперішню та майбутню величини звичайного ануїтету.

2. Нескінчена рента постнумерандо (перпетуїтет)

Нескінчена рента (перпетуїтет) – це рента, послідовність платежів за якою нескінчена, тобто вважається що така рента буде виплачуватися необмежено довго.

З рівнянь $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ та $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ за умови, що $n \to \infty$, маємо:

$$S_{post} \to \infty, \; A_{post} = \frac{R}{r}.$$

Отже*, нарощена величина* S_{post} нескінченої ренти теж прямує до нескінченості, а *теперішня вартість* A_{post} нескінченої ренти залежить лише від розміру щорічного платежу та річної ставки дохідності. Причому припускається, що ринкова дохідність r з плином часу залишається незмінною.

3. Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет)

Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет) передбачає, що всі *додатні, періодичні* платежі цього грошового потоку, на відміну від звичайних рент (постнумерандо), здійснюють не наприкінці, а *на початку* року (авансом).

Користуючись рівняннями $S_{pre} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r)$ і $A_{pre} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r)$, знаючи три параметри: розмір щорічного платежу R, кількість років n та ставку дохідності r, завжди можна знайти теперішню та майбутню величини авансового ануїтету.

4. Річна рента з платежами в середині періодів

За аналогією з рівнянням $S_{pre} = S_{post} \cdot (1+r)$ для ренти з платежами в середині періодів можна записати рівняння, що визначає майбутню вартість ануїтету за відомої майбутньої вартості звичайного ануїтету:

$$S_{1/2} = S_{post} \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}},$$

де $S_{1/2}$ – нарощена сума ренти з платежами в середині періодів, S_{post} – нарощена сума ренти постнумерандо.

Для визначення теперішньої вартості ануїтету з платежами в середані періодів, за відомої теперішньої вартості звичайного ануїтету, за аналогією з $A_{pre} = A_{post} \cdot (1+r)$, маємо:

$$A_{1/2} = A_{post} \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}}.$$

5. Інші види фінансових рент

У загальному випадку будь-яка рента може передбачати p платежів за рік, при цьому проценти на них нараховують m разів на рік. Причому періодичність та кількість платежів p не обов'язково збігається з періодичністю та кількістю нарахувань процентів m. Тоді питання оцінювання теперішньої та майбутньої величин таких рент значно ускладнюється.

Розглянемо це питання на прикладі рент постнумерандо. Нехай скінчена рента постнумерандо передбачає p платежів за рік, при цьому проценти, нараховують m разів на рік.

1. Загальний випадок – $m \neq p$.

Нарощена сума ренти:

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}.$$

Знаючи нарощену величину такої ренти, можна знайти її теперішню вартість з рівняння:

$$A=\frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}}.$$

2. Річна рента $(p=1)$ з нарахуванням процентів m разів за рік

Якщо проценти нараховують m разів на рік, а платежі річні, то нарощена сума дорівнює:

$$S=R\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1}.$$

Теперішню величину такої ренти обчислюють за формулою

$$A=\frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}}.$$

3. $p-$термінова рента з нарахуванням процентів один раз за рік $(m=1)$

Якщо платежі здійснюються декілька разів за рік, а проценти нараховують один раз за рік нарощена сума дорівнює:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1}.$$

Теперішню величину такої ренти розраховують за формулою:

$$A = \frac{S}{(1+r)^n}.$$

4. p-- термінова рента з $m = p$

Досить часто у фінансових обчисленнях припускають, що кількість платежів за рік та кількість нарахувань процентів збігаються (тобто $m = p$).

Майбутня сума такої ренти дорівнює:

$$S = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{r}.$$

Даний вираз легко отримати з рівняння $S = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, поклавши, що величина окремого платежу дорівнює $\frac{r}{m}$, а кількість платежів – $n \cdot m$.

Теперішню величину цієї ренти обчислюють за формулою

$$A = \frac{S}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}}.$$

Тоді,

$$A=\frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}}=R\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{r}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}},$$

$$A==\frac{R}{r}\left(1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\cdot n}\right).$$

Аналогічні рівняння можна вивести не лише для рент з платежами наприкінці періоду, а й для рент з платежами в довільний момент часу.

Індивідуальне завдання №4

1. Знайти величину потоку на початковий момент часу, при ставці **А%**. $R=\{(100\alpha;1),(-90\alpha;2),(50\alpha;4),(80\alpha;5),(-500\alpha;7),(400\alpha;10)\}$

2. Маємо звичайний ануїтет з такими параметрами: строк ренти **В** років, річний платіж **С** грн, ставка дисконтування **(А+3)**%. Знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

3. Фірма має погасити борг **D** тис. грн. щорічними внесками по **2Е** тис. грн. Відсоткова ставка (**А+2**)%. Визначити строк за який борг буде погашений.

4. Акціонерне товариство утворює резервний фонд у розмірі **F** млн. грн. Внески у розмірі **G** млн. грн. вносяться наприкінці кожного року під відсоткову ставку (**А+8**)% річних. Визначити час формування фонду.

5. Батьки вирішили накопичити за 18 років на освіту дитини **0,1D** тис.грн. Банк забезпечує **А**% річних за вкладом. Скільки коштів потрібно вносити наприкінці кожного місяця?

6. Яку суму потрібно покласти на банківський рахунок, якщо відсоткова ставка **А**%, а людина бажає знімати по **1,5С** грн. наприкінці кожного з наступних **В** років.

7. Компанія орендує приміщення за **0,2D** тис. грн на рік. Чому дорівнює викупна ціна оренди, якщо річна ставка ринкової дохідності складає (**А+8**)%?

8. Акція приносить сталий прибуток 12 грн щорічно. Яка її теперішня вартість, якщо діюча на ринку ставка по кредитам (А+7)% річних складних?

9. Маємо авансовий ануїтет з такими параметрами: строк ренти **В** років, річний платіж **С** грн, ставка дисконтування (**А+4**)%. Знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

10. Обчислити майбутню вартість авансового ануїтету за умови, що величина надходження **2С** тис грн. якщо відсоткова ставка становить (**А+2**)% річних, а термін дії угоди **В** років.

11. Визначити, при якому значенні щорічних внесків на початку року, через (**В+3**) років матимемо суму **Е** тис грн. при відсоткові ставці (**А-1**)%.

12. За якої відсоткової ставки накопичується сума **1,5Е** тис. грн., якщо на початку кожного з **(В+1)** років на рахунок надходить **2,5С** грн.

13. Студент отримав дворічний грант. Виплати за яким здійснюються так: перший рік – **5000** грн. рівними частинами

щомісяця авансом, другий рік – **5000** грн. рівними частинами що півроку авансом. Визначити сучасну загальну вартість вказаних виплат, пораховану на початок першого року, якщо річна відсоткова ставка **(A-3)**%.

14. Згідно договору фінансового лізингу вартість устаткування розміром **1млн. D тис.** грн. за терміном дії договору повністю відшкодовується за рахунок рівних періодичних амортизаційних відрахувань. Строк дії договору дорівнює строку експлуатації устаткування і становить 5 років. Лізингові платежі здійснюють двічі на рік, а річна лізингова ставка доходності **(A-5)**%. Визначити розмір лізингових платежів у кожному періоді та загальну суму лізингових платежів.

15. За умовою задачі 13 побудувати графік лізингових платежів на основі розрахунків за фінансовими рентами.

α	A%	B	C, грн	D тис.грн.	E	F	G
1	6	4	1000	400	20	400	30
2	7	5	1100	440	25	450	35
3	8	6	1200	470	30	500	40
4	9	7	1300	500	35	550	45
5	10	8	1400	550	40	600	50
6	11	9	1500	600	45	650	55
7	12	10	1600	650	50	700	60
8	13	11	1700	700	55	750	65
9	14	12	1800	750	60	800	70
10	15	13	1900	800	65	850	75
11	16	4	2000	850	70	900	80
12	17	5	500	900	75	400	85
13	18	6	600	950	80	450	90
14	19	7	700	400	85	500	95

15	20	8	800	440	90	550	30
16	6	9	900	470	95	600	35
17	7	10	1000	500	20	650	40
18	8	11	1100	550	25	700	45
19	9	12	1200	600	30	750	50
20	10	13	1300	650	35	800	55
21	11	4	1400	700	40	850	60
22	12	5	1500	750	45	900	65
23	13	6	1600	800	50	400	70
24	14	7	1700	850	55	450	75
25	15	8	1800	900	60	500	80
26	16	9	1900	950	65	550	85
27	17	10	2000	500	70	600	90
28	18	11	500	550	75	650	95
29	19	12	600	600	80	700	80
30	20	13	700	650	85	750	85
31	6	14	800	700	90	800	90
32	7	15	900	750	95	850	95

Приклади розв’язання типових задач

1. Знайти величину потоку на початковий момент часу, при ставці **10%**. $R=\{(100;1),(-90;2),(50;4),(80;5),(-500;7),(400;10)\}$

Розв’язання:

$$A=\sum_{i=1}^{6}\frac{R_1}{(1+r)^{n_i}}=\frac{100}{1+0,1}+\frac{-90}{(1+0,1)^2}+\frac{50}{(1+0,1)^4}+\frac{80}{(1+0,1)^5}+$$

$$+\frac{-500}{(1+0,1)^7}+\frac{400}{(1+0,1)^{10}}=$$

$$=90,9-74,38+34,15+49,67-256,58+154,22=-2,02$$

$$S=A\times(1+r)^n=-2,02(1+0,1)^{10}=-5,24$$

Відповідь: -5,24.

2. Маємо звичайний ануїтет з такими параметрами: строк ренти 5 років, річний платіж 1000 грн, выдсоткова ставка 10%. Знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

Розв’язання:

Розглянемо механізм нараховування ренти по рокам. До суми, що була на рахунку на початок періоду, додаємо річний платіж і отримуємо суму на кінець періоду. Потім на останню нараховуємо складний процент і отримуємо суму на початок наступного періоду. Далі повторюємо цикл до закінчення терміну ренти. Розрахунки наведено в табл.

Періоди (роки)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Сума на початок періоду, грн	0	1100	2310	3641	5105,1
Річні платежі, грн	1000	1000	1000	1000	1000
Сума на кінець періоду, грн	1000	2100	3310	4641	6105,1

Знаючи кінцеву вартість ренти, можемо визначити її початкову вартість.

$S = 6605{,}1$

$$A = \frac{S}{(1+r)^n} = \frac{6605{,}1}{(1+0{,}1)^5} = 3790{,}8$$

Відповідь: 3790,8 грн.

3. Фірма має погасити борг 700 тис. грн. щорічними внесками по 100 тис. грн. Відсоткова ставка (8)%. Визначити строк за який борг буде погашений.

Розв'язання:

$$A_{post} = R \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{r};$$

$$1-(1+r)^{-n} = \frac{A_{post} \times r}{R};$$

$$1-(1+r)^{-4} = 1 - \frac{A_{post} \times r}{R} = \frac{R - A_{post} \times r}{R} \times (1+r)^n = \frac{R}{R - A_{post} \times r}$$

$$n \times Ln(1+r) = Ln\frac{R}{R - A \times r};$$

$$n=\frac{Ln\dfrac{R}{R-A\times r}}{Ln(1+r)};$$

$$n=\frac{Ln\dfrac{100}{100-700\times 0,08}}{Ln(1+0,08)}=\frac{0,821}{0,77}=10,67$$

$$0,67\times 12\approx 8$$

$$n=10\,р.8\,міс.$$

Відповідь: 10 років, 8 місяців.

4. Акціонерне товариство утворює резервний фонд у розмірі **850** млн. грн. Внески у розмірі **95** млн. грн. вносяться наприкінці кожного року під відсоткову ставку (**15**)% річних. Визначити час формування фонду.

Розв'язання:

$$S=R\times\frac{(1+r)^n-1}{r};$$

$$(1+r)^n-1=\frac{S\times r}{R};$$

$$(1+r)^n=\frac{S\times r}{R}+1;$$

$$Ln(1+r)^n=Ln\frac{S\times r+R}{R}\Rightarrow n=\frac{Ln\dfrac{S\times r+R}{R}}{Ln(1+r)}=$$

$$=\frac{Ln\dfrac{850\times 0,15+95}{95}}{Ln1,15}=\frac{0,851}{0,14}=6,079$$

$$0,079\times 12\approx 1$$

$$n=6\,р.міс.$$

Відповідь: 6 років, 1 місяць.

5. Батьки вирішили накопичити за 18 років на освіту дитини **75** тис.грн. Банк забезпечує **7**% річних за вкладом. Скільки коштів потрібно вносити наприкінці кожного місяця?

Розв'язання:

$$S=\frac{R}{P}\times\frac{(1+\frac{r}{m})^{m\times n}-1}{(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}}-1};$$

$$S=\frac{R}{P}\times\frac{(1+r)^{n}-1}{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1};$$

$$\frac{R}{P}=S\times\frac{(1+r)^{\frac{1}{p}}-1}{(1+r)^{n}-1}=75\times\frac{1{,}07^{\frac{1}{12}}-1}{1{,}07^{18}-1}=75\times\frac{0{,}5654}{2{,}3799}=0{,}178$$

Відповідь: 0,178.

6. Яку суму потрібно покласти на банківський рахунок, якщо відсоткова ставка 7%, а людина бажає знімати по 1300 грн. наприкінці кожного з наступних 15 років.

Розв'язання:

$$A_{post}=R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}=1300\times\frac{1-(1+0{,}07)^{-15}}{0{,}07}=11840{,}3$$

Відповідь: 11840,3 грн.

7. Компанія орендує приміщення за 150 тис. грн на рік. Чому дорівнює викупна ціна оренди, якщо річна ставка ринкової дохідності складає 14%?

Розв'язання:

$n\to\infty$

$$A_{post}=R\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}=R\frac{1-\frac{1}{(1+r)^{n}}}{r}=\frac{R}{r}$$

$$A=\frac{150}{0{,}14}=1071{,}428\,тис.грн$$

Відповідь: 1071,428 тис.грн.

8. Акція приносить сталий прибуток 12 грн щорічно. Яка її теперішня вартість, якщо діюча на ринку ставка по кредитам (16)% річних складних?

Розв'язання:

$$A_{post} = \frac{R}{r} = \frac{12}{0,16} = 75 грн$$

Відповідь: 75 грн.

9. Маємо авансовий ануїтет з такими параметрами: строк ренти 6 років, річний платіж 1000 грн, відсоткова ставка 10%. Знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

Розв'язання:

Розрахунки наведено в табл

Періоди (роки)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Річні платежі, грн	1000	1000	1000	1000	1000
Сума на початок періоду, грн	1000	2100	3310	4641	6105,1
Сума на кінець періоду, грн	1100	2310	3641	5109,1	6715,61

Відповідь: 6715,61

10. Обчислити майбутню вартість авансового ануїтету за умови, що величина надходження 1800 тис грн. якщо відсоткова ставка становить (9)% річних, а термін дії угоди 13 років.

Розв'язання:

$$S_{pre} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (r+1) =$$

$$= 1800 \times \frac{(1+0,09)^{13} - 1}{0,09} \times (0,09+1) = 45034,54 тис.грн$$

Відповідь: 45034,54 тис.грн.

11. Визначити, при якому значенні щорічних внесків на початку року, через 12 років матимемо суму 95 тис грн. при відсоткові ставці (6)%.

Розв'язання:

$$S_{pre} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (r+1)$$

$$R = \frac{r \times S_{pre}}{(r+1) \times ((1+r)^n - 1)} =$$

$$= \frac{0,06 \times 95}{(0,06+1) \times ((1,06)^{12} - 1)} = 5,313 тис.грн$$

Відповідь: 5,313 тис.грн.

12. За якої відсоткової ставки накопичується сума 130 тис. грн., якщо на початку кожного з 6 років на рахунок надходить 15000 грн.

Розв'язання:

$$S_{pre} = R \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (r+1);$$

$$\frac{130}{23} \times (r+1-1) = (1+r) - (1+r);$$

$$\frac{130}{23} \times (r+1) - \frac{130}{23} = (1+r)^7 - (1+r);$$

$$(1+r)^7 - (1+r) - \frac{130}{23}(1+r) + \frac{130}{23} = 0$$

$$(1+r)^7 - \frac{153}{23}(1+r) + \frac{130}{23} = 0$$

$$f(x) = x^7 - \frac{153}{23}x + \frac{130}{23};$$

$$x = 1 + r$$

$$r = 0{,}106$$

$$r = 10{,}6\%$$

Відповідь: 10,6%

13. Студент отримав дворічний грант. Виплати за яким здійснюються так: перший рік – **5000** грн. рівними частинами щомісяця авансом, другий рік – **5000** грн. рівними частинами що півроку авансом. Визначити сучасну загальну вартість вказаних виплат, пораховану на початок першого року, якщо річна відсоткова ставка **(10)**%.

Розв'язання:

$$S_{pre} = \frac{R}{P} \times \frac{(1+\frac{r}{m})^{m\times n} - 1}{(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} - 1} \times (1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}};$$

$$A_{pre} = \frac{R}{P} \times \frac{1-(1+\frac{r}{m})^{-mn}}{(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} - 1} \times (1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}};$$

$$1) A_1 = \frac{5000}{12} \times \frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)^{\frac{1}{12}} - 1} \times (1+r)^{\frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{5000}{12} \times \frac{1-1{,}1^{-1}}{1{,}1^{\frac{1}{12}} - 1} \times 1{,}1^{\frac{1}{12}} = \frac{1250}{3} \times \frac{0{,}0909}{0{,}007974} \times 1{,}007974 = 4788{,}17$$

$$2) p = 2;$$

$$A_2 = \frac{5000}{2} \times \frac{1-1{,}1^{-1}}{1{,}1^{\frac{1}{2}} - 1} \times 1{,}1^{\frac{1}{2}} = \frac{5000}{2} \times \frac{0{,}0909}{0{,}0488} \times 1{,}0488 = 4884{,}05$$

$$A = A_1 + \frac{A_2}{1+r} = 4788{,}17 + \frac{4884{,}05}{1{,}1} = 4788{,}17 + 4440{,}05 = 9228{,}22$$

Відповідь: 9228,22

14. Згідно договору фінансового лізингу вартість устаткування розміром 1млн. 200 тис. грн. за терміном дії договору повністю відшкодовується за рахунок рівних періодичних амортизаційних відрахувань. Строк дії договору дорівнює строку експлуатації устаткування і становить 5 років. Лізингові платежі здійснюють двічі на рік, а річна лізингова ставка доходності (2)%. Визначити розмір лізингових платежів у кожному періоді та загальну суму лізингових платежів.

Розв'язання:

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_i	Відшкодування вартості майна, B_i	Лзингова винагорода, A_i	Лізингові платежі, R_i
1	1200	120	120	240
2	1080	120	108	228

3	960	120	96	216
4	840	120	84	204
5	720	120	72	192
6	600	120	60	180
7	480	120	48	168
8	360	120	36	156
9	240	120	24	144
10	120	120	12	132
Разом		**1200**	**660**	**1860**

Відповідь:

15. За умовою задачі 14 побудувати графік лізингових платежів на основі розрахунків за фінансовими рентами.

Розв'язання:

Спочатку обчислимо величину періодичного лізингового платежу:

$$R = \frac{C \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{1200 \cdot 0,1}{1-(1+0,1)^{-10}} = 195,2944739.$$

Всі інші результати розрахунку наведено в таблиці На відміну від традиційного методу розрахунку лізингових платежів, метод фінансових рент передбачає іншу послідовність заповнення таблиці-схеми погашення боргу. Для побудови цієї таблиці спочатку заповнюють стовпчик лізингових платежів R_i. Потім, поступово в кожному періоді, користуючись формулою $A_i = U_i \cdot r$, визначають розмір лізингової винагороди. І вже після цього розраховують розмір відшкодування вартості майна та величину залишкової вартості майна, яка стане основою для розрахунку розміру лізингової винагороди у наступному періоді.

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_i	Відшкодування вартості майна, B_i	Лзингова винагорода, A_i	Лізингові платежі, R_i
1	1200	75,2944739	120	195,2944739
2	1124,70553	82,8239212	112,47055	195,2944739
3	1041,8816	91,1063134	104,18816	195,2944739
4	950,775292	100,216945	95,077529	195,2944739
5	850,558347	110,238639	85,055835	195,2944739

6	740,319708	121,262503	74,031971	195,2944739
7	619,057205	133,388753	61,90572	195,2944739
8	485,668451	146,727629	48,566845	195,2944739
9	338,940822	161,400392	33,894082	195,2944739
10	177,540431	177,540431	17,754043	195,2944739
Разом		**1200**	**752,94474**	**1952,944739**

Відповідь: 1952,9447

Питання для проміжного та підсумкового контролю знань здобувачів вищої освіти

1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень.
2. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування.
3. Теперішня та майбутня вартість грошей.
4. Операція утримання коштів. Ставка дисконтування та облікова ставка.
5. Методика обчислень за правилом простих процентів.
6. Утримання коштів за правилом простих процентів.
7. Темп росту коштів за правилом простих процентів.
8. Обчислення за правилом простих процентів в умовах змін вихідних параметрів.
9. Оцінювання середньої ставки дохідності простих процентів за весь термін дії угоди.
10. Оцінювання середнього темпу приросту вартості за весь термін дії угоди.
11. Поняття часової бази розрахунків.
12. Комерційні та точні прості проценти.
13. Застосування програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом простих процентів.
14. Методика обчислення за правилом складних процентів.
15. Операція утримання коштів за правилом складних процентів.
16. Темп росту коштів за правилом складних процентів. Правило 72-х.
17. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів.
18. Номінальна та ефективна ставка складних процентів.
19. Поняття неперервного складного проценту та сили росту.
20. Застосування довідкових фінансових таблиць в обчисленнях за правилом складних процентів.
21. Застосування програмного забезпечення MS Excel в обчисленнях за правилом складних процентів.
22. Моделювання росту числової послідовності для простих та складних процентів.
23. Поняття фінансової еквівалентності.

24. Основні рівняння еквівалентності. Основні види ставок доходності.

25. Еквівалентність множників нарощування простих та складних процентів.

26. Темпи зростання вартості при застосуванні правил простих та складних процентів.

27. Еквівалентність множників утримання простих та складних процентів.

28. Темпи зменшення (утримання) вартості при застосуванні правил простих та складних процентів.

29. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для простих процентів.

30. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для складних процентів.

31. Еквівалентність множників нарощування складних процентів за номінальними та ефективними ставками дохідності.

32. Визначення еквівалентності ставки дохідності фінансової операції при утриманні комісійних.

33. Основні відомості про потоки платежів.

34. Національні стандарти оцінки. Основні вартісні оцінки потоку платежів.

35. Основні поняття фінансових рент.

36. Узагальнена класифікація фінансових рент.

37. Річна рента постнумерандо (звичайний ануїтет).

38. Нескінчена рента постнумерандо (перпетуїтет)

39. Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет).

40. Річна рента з платежами в середині періодів.

41. Інші види фінансових рент. Загальний випадок – $\boldsymbol{m \neq p}$.

42. Річна рента $(\boldsymbol{p = 1})$ з нарахуванням процентів $\boldsymbol{m}$ разів за рік.

43. $\boldsymbol{p}-$термінова рента з нарахуванням процентів один раз за рік $(\boldsymbol{m = 1})$.

44. $\boldsymbol{p}-$термінова рента з $\boldsymbol{m = p}$.

45. Окремі випадки фінансових рент.

46. Застосування довідкових фінансових таблиць у фінансових обчисленнях для потоків платежів.

47. Застосування програмного забезпечення MS Excel у фінансових обчисленнях для потоків платежів.

48. Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків.

49. Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів.

50. Механізм розрахунку лізингових платежів.

51. Механізм розрахунку лізингових платежів з амортизацією боргу рівними частинами.

52. Механізм розрахунку лізингових платежів, заснована на теорії фінансових рент.

53. Коригування залишкової вартості майна на авансовий платіж.

54. Коригування вартості майна на величину залишкової вартості.

55. Виплати лізингових платежів на початку періоду.

56. Споживчі кредити.

57. Аналіз схем споживчого кредитування.

58. Поняття іпотеки.

59. Розрахунки за іпотечними позиками.

60. Фонди нагромадження та погашення боргу.

Рекомендована література

1. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика: навч. посібник. – К.: Кондор, 2007. – 184 с.
2. Долінський Л.Б. Фінансова математика: навч. посібник / Л.Б. Долінський. – К. : КНЕУ, 2009. –265 с.
3. Круш П.В., Клименко О.В. Економіка (розрахунки фінансово-інвестиційних операцій в Excel): навч. посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 264 с.
4. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учеб. – 4-е изд. – М.: Дело, 2004. – 400 с.
5. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансова математика: учебник. – М.: Гардарики, 2002. – 624 с
6. Левин Л.А. Финансова математика в Excel: учебно метод. пособие / Красноярск, 2006. – 111 с.
7. Малыхин В.И. Финансовая математика: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 237 с.
8. Методичні вказівки до практичних робіт з курсу «Фінансова математика». Частина I / Укладачі: О. М. Назаренко, А. О. Васильєв. – Суми: Видавництво СумДУ, 2008. - 46 с.
9. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения: Учебн.-практ. пособие для вузов. - М.: "Издательство ПРИОР", 1999. - с. 144.
10. Кирлица В.П. Финансовая математика: рук. к решению задач: учеб. пособие / В.П. Кирлица. – Мн. : ТетраСистемс, 2005. – 192 с.
11. Кузнецов Б.Т. Финансовая математика: учебное пособие для вузов / Б.Т. Кузнецов. – М.: Издательство «Экзамен», 2005. – 128 с. (Серия «Учебное пособие для вузов»).

Навчальне видання

Фінансова математика

Контрольні завдання та методичні рекомендації

укладачі

Шебанін В.С.
Шебаніна О.В.
Атаманюк І.П.
Шептилевський О.В.
Бойчук О.В.
Богданов С.І.
Борчик Є.Ю.
Власов О.І.

Формат 60х84/16 Ум. друк.арк.. 4,69
Наклад 20 прим. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул Георгія Гонгадзе, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р