

Міністерство освіти і науки України
Миколаївський національний аграрний університет

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА.

Методичні рекомендації

до виконання практичних робіт

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр»
початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної форми навчання

Миколаїв
2021

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету, протокол № від .01.2021 р.

Укладачі:

- Іванов Г. О. – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін.
- Бабенко Д. В. – канд. техн. наук, професор, Перший проректор Миколаївського національного аграрного університету.
- Полянський П.М. – канд. екон. наук, доцент, в.о. зав. кафедри загальнотехнічних дисциплін.
- Степанов С.В. – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін.
- Баранова О.В. – асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін.

Рецензенти:

- Атаманюк І.П. – д-р техн. наук, професор, зав. кафедри вищої та прикладної математики.
- Гавриш В.І. – д-р екон. наук, професор, зав. кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу.

З М І С Т

ВСТУП. INTRODUCTION	5
1. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ. PRACTICAL WORKS	7
1.1. Рівновага плоскої системи збіжних сил	7
Equilibrium of a flat system of convergent forces	
Завдання 1. Визначення реакції стрижнів аналітичним і графічним методами	7
Task 1. Determination of the reaction of the rods by analytical and graphical methods	
Завдання 2. Знаходження зусиль у тросі та стрижнях підвісу ліхтаря	10
Task 2. Finding forces in the cable and rods of the lantern suspension	
Завдання 3. Знаходження опорних реакцій балки	15
Task 3. Finding the support reactions of the beam	
1.2. Плоска довільна система сил	20
Flat arbitrary system of forces	
Завдання 4. Визначення реакції опор балки	20
Task 4. Determination of the reaction of the beam supports	
Завдання 5. Визначення реакцій опор плоскої конструкції	29
Task 5. Determination of reactions of supports of flat design	
1.3. Розрахунок та дослідження плоскої ферми	34
Calculation and study of a flat farm	
Завдання 6. Визначення реакцій опор і зусиль в стрижнях плоскої ферми	38
Task 6. Determination of the reactions of supports and forces in the rods of a flat truss	
1.4. Визначення реакцій опор складеної конструкції	46
Determination of the reactions of the supports of the composite structure	
Завдання 7. Розрахунок та дослідження збірної конструкції	49
Task 7. Calculation and study of prefabricated structures	
1.5. Рівновага сил з врахуванням зчеплення (тертя спокою) ...	54
Equilibrium of forces taking into account coupling (friction at rest)	
1.6. Рівновага довільної системи сил у просторі	60
Equilibrium of an arbitrary system of forces in space	
Завдання 8. Розрахунок опорних реакцій просторової конструкції	60
Task 8. Calculation of reference reactions of a spatial design	
Завдання 9. Знаходження головного вектора та головного моменту системи сил	66
Task 9. Finding the main vector and the main moment of the system of forces	

1.7. Способи знаходження координат центра ваги тіл	70
Methods of finding the coordinates of the center of gravity of bodies	
1.7.1.Спосіб симетрії. Method of symmetry	70
1.7.2. Спосіб розбиття. The method of partitioning	70
1.7.3. Спосіб доповнення (або від'ємних площин)	71
Method of addition (or negative planes)	
1.8. Центри ваги простіших фігур	72
Centers of gravity of simpler figures	
Завдання 10. Визначення центра ваги пласких однорідних тіл	74
Task 10. Determining the center of gravity of flat homogeneous	
bodie	
Завдання 11. Визначення центра ваги просторових однорідних	
тіл	78
Task 11. Determining the center of gravity of spatial homogeneous	
bodies	
Запитання для самоконтролю. Questions for self-control	83
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	87
LIST OF USED LITERATURE	

ВСТУП

Місце дисципліни в структурі основної професійної програми «Теоретична механіка» в навчальному плані спеціальності 208 «Агроінженерія».

Мета і завдання дисципліни. Метою дисципліни «Теоретична механіка» відповідно до програми сільськогосподарських навчальних закладів та ІМО-моделі курсу є формування у здобувачів вищої освіти:

- сучасного наукового уявлення про навколишній світ природи, його закономірності;

- знань певних законів природи та умінь їх використовувати, тобто формування у них компетентностей, які є базовими для сприйняття та формування професійних компетентностей.

- знань, умінь та навичок, необхідних для: розуміння механічних явищ у практичній діяльності, складання розрахункових схем механізмів і машин, розвиток навичок, самостійного розв'язання різноманітних технічних задач, розуміння кількісних і якісних закономірностей, що спостерігаються у природі.

Завдання курсу. Дисципліна «Теоретична механіка» призначена для підготовки фахівців ступені вищої освіти бакалавр з спеціальностей 208 «Агроінженерія» та 015 «Професійна освіта».

Методичні: полягають у забезпеченні високого рівня теоретичних знань, необхідних для вивчення послідуєчих фундаментальних і фахових дисциплін та формування професійних компетентностей.

Пізнавальні: формування теоретичних понять та знань, які передбачає ІМО-модель курсу.

сприяти засвоєнню основних законів механіки, методів вивчення фізичних явищ, які необхідні для формування сучасного наукового світогляду;

сприяти формуванню базових знань та умінь, тобто формування загальнонаукових компетентностей, необхідних для подальшого вивчення спеціальних технічних та фахових дисциплін і формування загально-професійних та спеціалізовано-професійних компетентностей.

До них належать:

- умови рівноваги твердих тіл під дією сил (статика);

- основні характеристики механічного руху точки твердого тіла у просторі як функції часу (кінематика);

- основні закони руху матеріальної точки і механічної системи матеріальних точок під дією сил (динаміка);

- основні принципи механіки.

Практичні: формувати у здобувачів практичні знання та уміння, які передбачає ІМО-модель курсу;

- навчати здобувачів, використовуючи закони фізики, математики, розв'язувати технічні задачі, узгоджені з ІМО-моделлю курсу та технічними дисциплінами;

- сформувати вміння використовувати теоретичні знання з математики і фізики для розв'язання завдань, які виникають при експлуатації тракторів, сільськогосподарських та інших машин;

- навчати здобувачів працювати з навчальною та довідковою літературою необхідною в їх діяльності.

Практичні результати вивчення дисципліни зводяться до вміння:

- перетворювати одні системи сил в інші, що еквівалентні їм;

- визначати умови рівноваги твердих тіл, які знаходяться під дією сил;

- визначати кінематичні характеристики руху матеріальної точки і твердого тіла;

- визначати рух матеріальної точки і механічної системи матеріальних точок та абсолютно твердих тіл під дією сил;

- використовувати принципи механіки до розв'язування прикладних задач.

Для опанування навчальним матеріалом, передбаченого програмою з теоретичної механіки, необхідні знання з фізики, математики, в межах загальноосвітньої середньої школи, а також знання з вищої математики.

Методичні рекомендації. Кожна робота складається з конкретних завдань за темами відповідних розділів теоретичної механіки. Виконання цих завдань у вигляді розв'язування відповідних конкретних задач і складає зміст роботи.

Для успішного виконання завдань необхідно:

- вивчити теоретичний матеріал з даної теми;

- ознайомитися з методикою розв'язання задачі;

- розібратися у наведеному прикладі;

- засвоїти умову задачі і записати її у скороченому вигляді;

- зробити, якщо необхідно, відповідний рисунок чи схему;

- проаналізувати зв'язок між величинами, що характеризують дане явище, та записати відповідні рівняння;

- у разі необхідності, з'ясувати роль початкових та граничних умов;

- розв'язати рівняння або систему рівнянь та проаналізувати результати.

Якщо хід самостійного розв'язування та його результати не співпадають з прикладом, треба знайти і виправити помилки і ще раз спробувати розв'язати задачу-приклад самостійно. Ця процедура повторюється до повного співпадання результатів.

Після цього можна починати розв'язування задачі свого варіанту.

1. ПРАКТИЧНІ РОБОТИ. PRACTICAL WORS

1.1. Рівновага плоскої системи збіжних сил

Equilibrium of a flat system of convergent forces

Методичні вказівки до розв'язування задач. Задачі на плоску систему збіжних сил можна розв'язувати за допомогою силового багатокутника або аналітичним способом.

Рекомендуємо слідуєчий порядок дій при розв'язанні задач статички аналітичним способом:

1. Вияснити, рівновагу якої точки або тіла необхідно розглянути.
2. Вибрати осі координат.
3. Якщо тіло (точка) не вільне, то необхідно звільнитися від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.
4. Проаналізувати отриману систему активних сил і реакцій в'язей.
5. Записати аналітичні умови рівноваги отриманої системи сил і скласти рівняння рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь.

Завдання 1. Визначення реакції стрижнів аналітичним і графічним методами

Task 1. Determination of the reaction of the rods by analytical and graphical methods

За даною схемою навантаження плоского кронштейна АОВ (табл. 1.1) визначити реакції стрижнів аналітичним і графічним методами. Варіанти завдань наведені в табл. 1.2.

Приклад. За схемою (рис. 1.1) визначити реакції стрижнів кронштейна аналітичним і графічним методами якщо: $F_1 = 60$ Н, $F_2 = 40$ Н, $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 30^\circ$. *Розв'язання.* Аналітичний метод розрахунку.

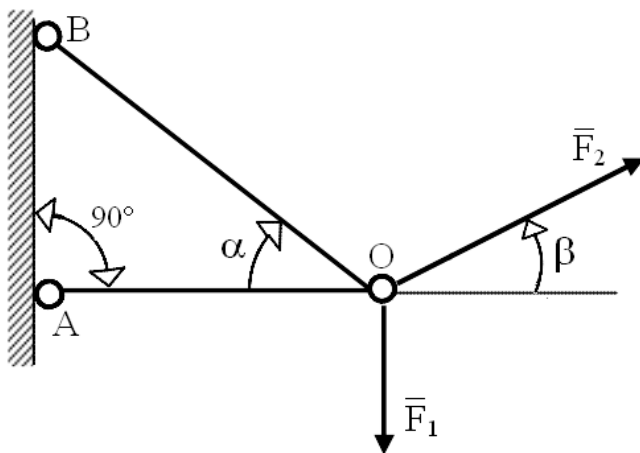


Рис. 1.1. До прикладу

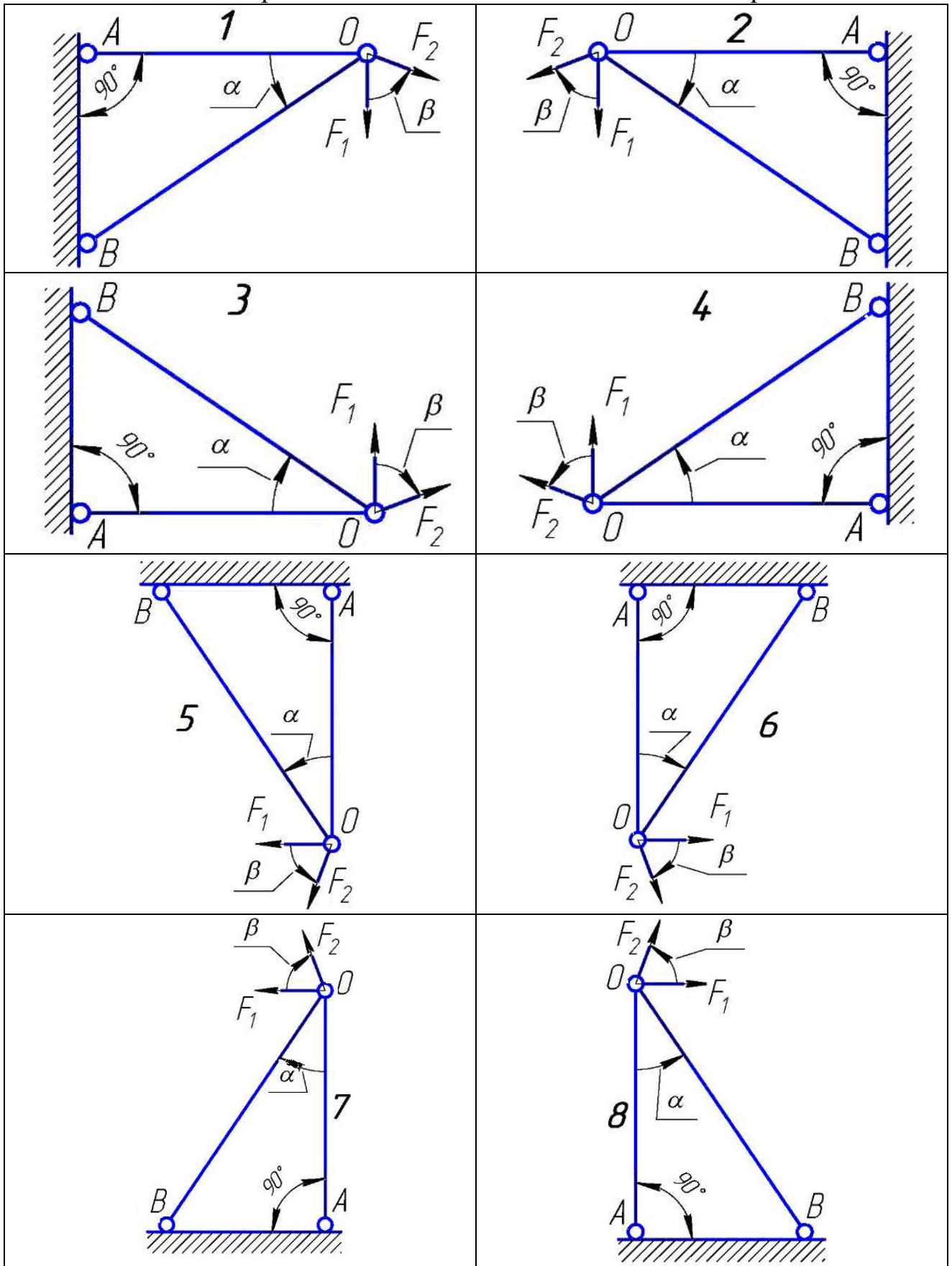
заданих кутів α та β .

3. Проводимо осі проекцій Ox та Oy так, щоб вісь Oy була перпендикулярною до реакції лінії дії реакції R_{OA} .

1. Обираємо об'єкт рівноваги – точку O , в якій перетинаються лінії дії сил системи. Прикладаємо активні (задані) сили F_1 і F_2 , які діють на точку.

2. Звільняємо точку O від в'язей (стрижнів OA та OB), замінюючи їх реакціями R_{OA} та R_{OB} (рис. 1.2). Реакції R_{OA} та R_{OB} напрямлені вздовж осей стрижнів OA та OB відповідно до

Таблиця 1.1. Варіанти і схеми навантаження плоского кронштейна



Таблиця 1.2. Варіанти завдань

Варіант	Схема навантаження	F ₁ , Н	F ₂ , Н	α, град.	β, град.
1	2	3	4	5	6
1	1	10	30	30	30
2	2	20	40	45	30
3	3	30	50	60	45
4	4	40	60	30	45
5	5	50	70	30	60
6	6	60	80	30	30
7	7	70	90	45	30
8	8	80	100	60	45
9	1	90	110	30	45
10	2	100	120	30	60
11	3	110	130	30	30
12	4	120	140	45	30
13	5	130	150	60	45
14	6	140	160	30	60
15	7	150	170	45	60
16	8	160	180	30	30
17	1	170	190	45	45
18	2	180	200	60	45
19	3	190	210	60	60
20	4	200	220	45	60
21	5	210	230	30	30
22	6	220	240	45	30
23	7	230	250	60	45
24	8	240	260	45	60
25	1	250	270	60	60
26	2	260	280	30	30
27	3	270	290	45	30
28	4	280	300	45	45
29	5	290	310	60	60
30	6	300	320	60	60

Складаємо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил і визначаємо з них реакції стрижнів.

$$\sum F_{ix} = F_2 \cdot \cos 30^\circ - R_{OA} + R_{OB} \cdot \cos 15^\circ = 0; \quad (1.1)$$

$$\sum F_{iy} = R_{OB} \cdot \cos 15^\circ - F_1 + F_2 \cdot \cos 60^\circ = 0. \quad (1.2)$$

З рівняння (2) знаходимо

$$R_{OB} = (F_1 - F_2 \cdot \cos 60^\circ) / \cos 15^\circ = (60 - 40 \cdot 0,5) / \cos 15^\circ = 41,41 \text{ Н.}$$

З рівняння (1)

$$R_{OA} = F_2 \cdot \cos 30^\circ + R_{OB} \cdot \cos 15^\circ = 40 \cdot \cos 30^\circ + 41,41 \cdot \cos 15^\circ = 23,92 \text{ Н.}$$

Виконуємо перевірку розв'язання. Проводимо вісь u за довільним напрямом (в нашому прикладі її напрям співпадає з лінією дії реакції R_{OB}). Складаємо рівняння $\sum F_{iu} = 0$.

$$\begin{aligned} \sum F_{iu} &= R_{OB} + R_{OA} \cdot \cos 75^\circ + F_2 \cdot \cos 75^\circ + F_1 \cdot \cos 165^\circ = \\ &= 41,41 + 23,92 \cdot 0,2588 + 60 \cdot (-0,9659) = 0. \end{aligned}$$

Отже, реакції визначені вірно.

Відповідь: результати аналітичного методу розрахунку $R_{OA}=23,92$ Н, $R_{OB}=41,41$ Н.

Графічний метод. Обираємо масштаб сил $\mu_F = 10$ Н/см і визначаємо довжини векторів відомих сил за формулою $l_F = F/\mu_F$: $l_{F1} = F_1/\mu_F = 60/10 = 6$ см; $l_{F2} = F_2/\mu_F = 40/10 = 4$ см.

Складаємо векторне рівняння рівноваги: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_{OA} + \vec{R}_{OB} = 0$ і будуємо за цим рівнянням замкнений багатокутник сил (рис. 1.3).

Вимірюємо на багатокутнику сил довжини векторів R_{OA} і R_{OB} : $L_{Roa} = 2,4$ см, $L_{Rob} = 4,1$ см.

Визначаємо величину реакцій: $R_{OA}^{zp} = l_{Roa} \cdot \mu_F = 2,4 \cdot 10 = 24$ Н; $R_{OB}^{zp} = l_{Rob} \cdot \mu_F = 4,1 \cdot 10 = 41$ Н.

Обчислюємо похибку графічного методу:

$$\begin{aligned} \mu_{R_{OA}} &= \frac{|R_{OA}^{an} - R_{OA}^{zp}|}{R_{OA}^{an}} \cdot 100\% = \frac{23,92 - 24,00}{23,92} \cdot 100\% = \\ &= 0,3\% < 3\%; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{R_{OB}} &= \frac{|R_{OB}^{an} - R_{OB}^{zp}|}{R_{OB}^{an}} \cdot 100\% = \frac{41,41 - 41,00}{41,41} \cdot 100\% = \\ &= 0,99\% < 3\%. \end{aligned}$$

Похибка розрахунків не перевищує 3%, отже приклад розв'язаний з достатньою точністю.

Завдання 2. Знаходження зусиль у тросі та стрижнях підвісу ліхтаря

Task 2. Finding forces in the cable and rods of the lantern suspension

На схемах (рис. 1.4-1.7) приведені варіанти підвісу ліхтаря вагою Q . Знайти зусилля у тросі та стрижнях. Дані для розрахунку приведені в табл. 1.3.

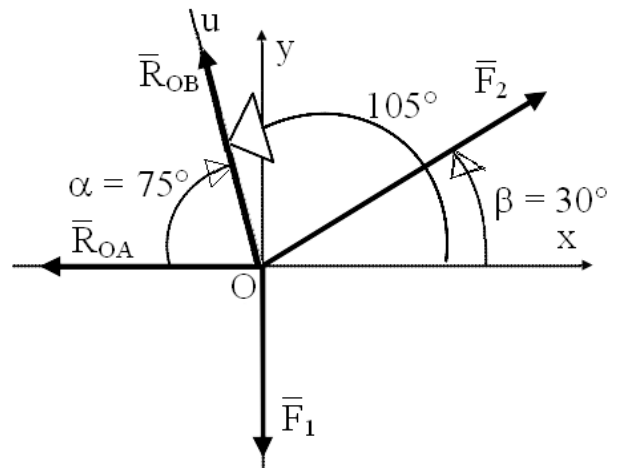


Рис. 1.2. До прикладу

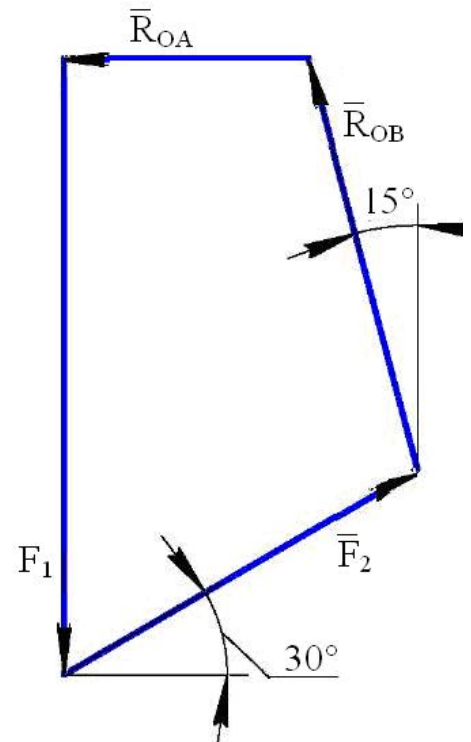


Рис. 1.3. Замкнений багатокутник сил

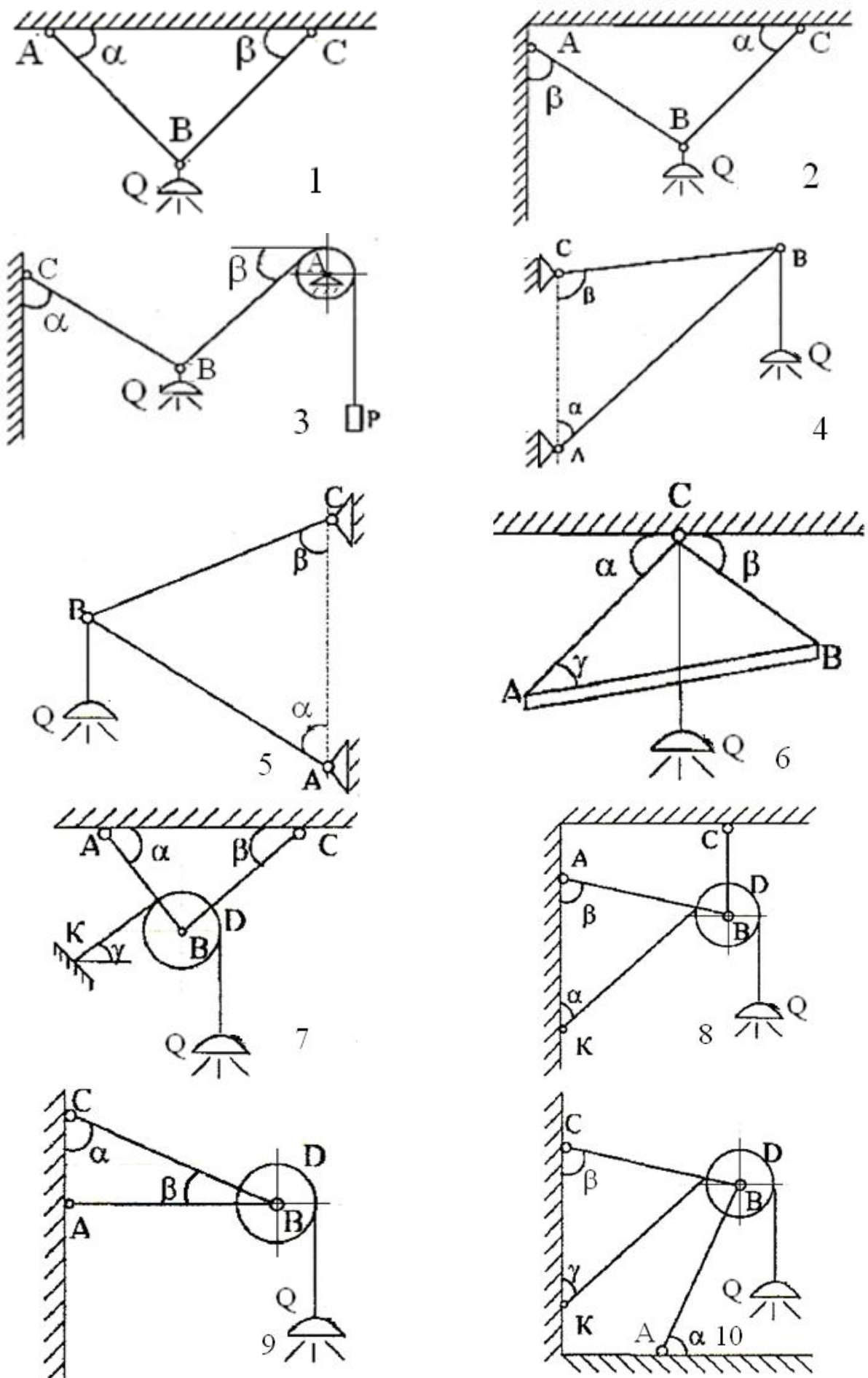


Рис. 1.4

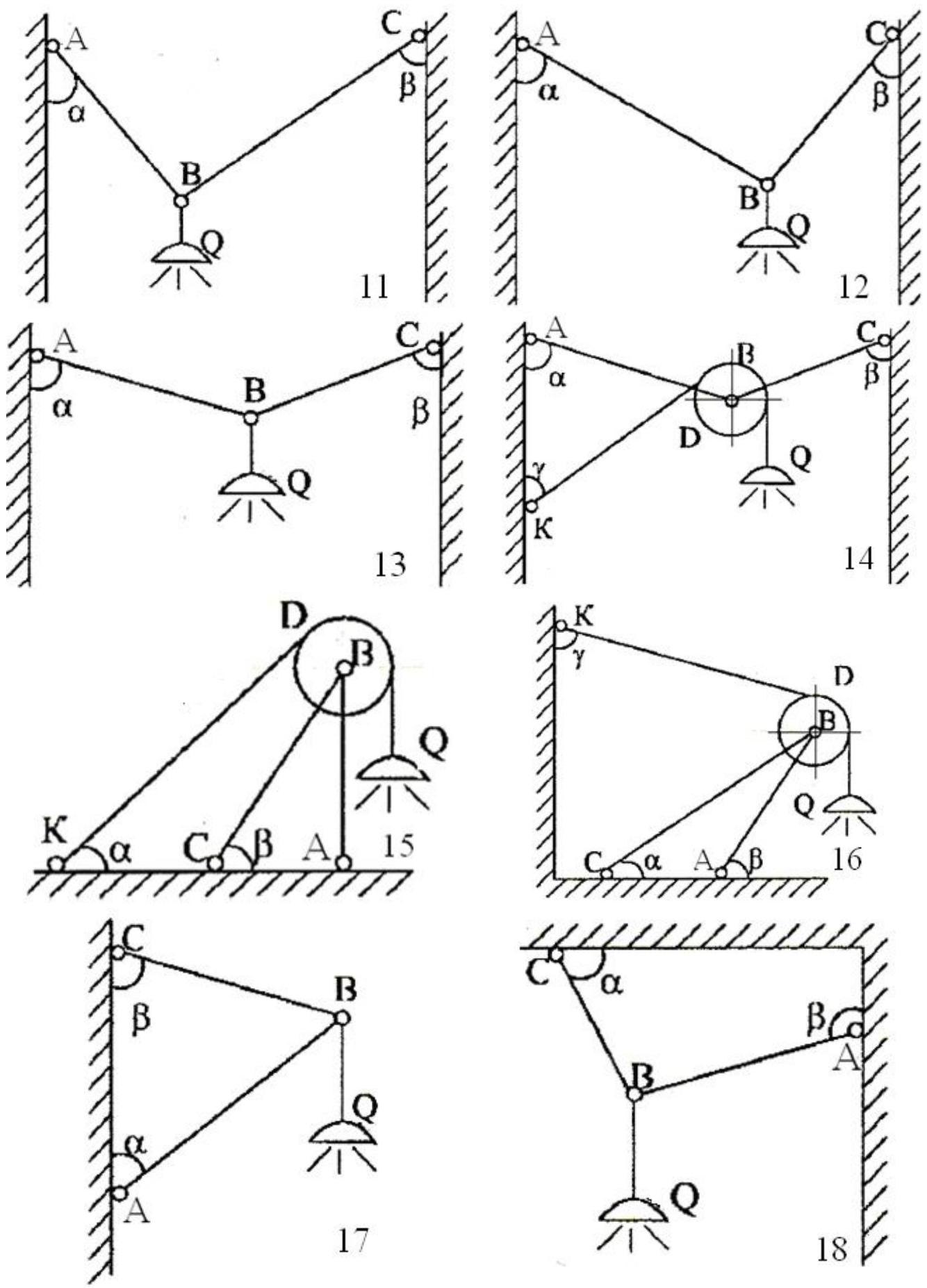


Рис. 1.5

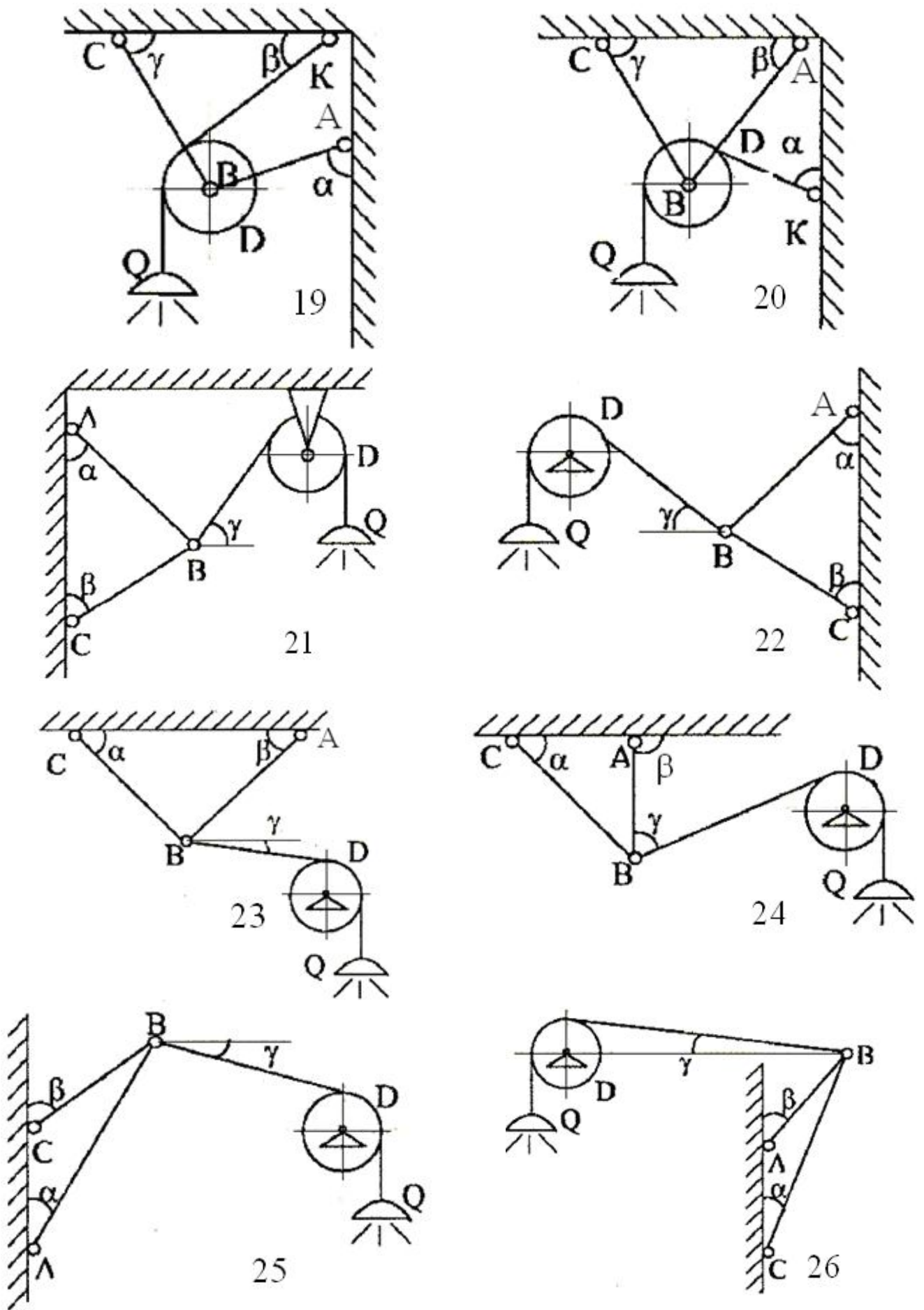


Рис. 1.6.

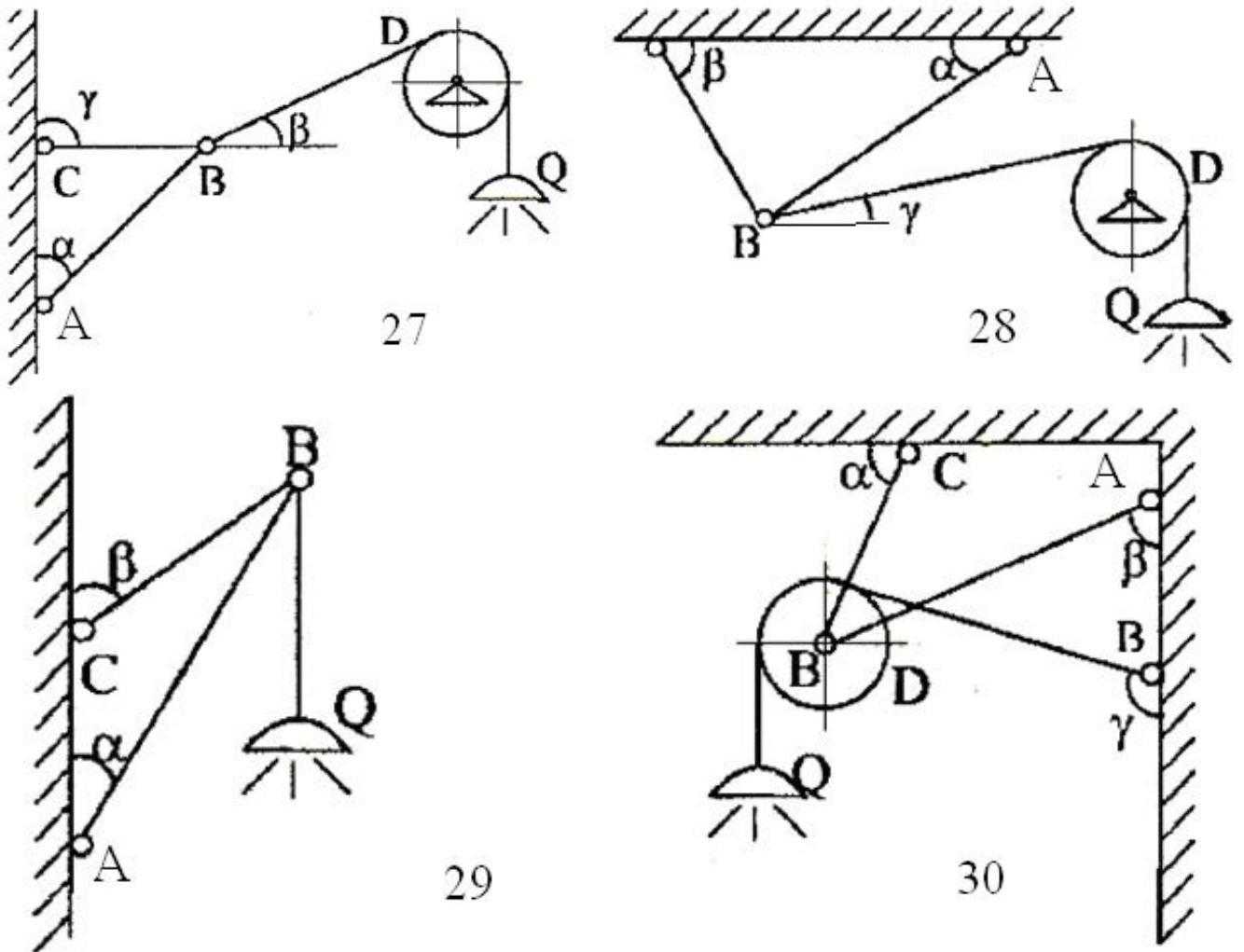


Рис. 1.7.

Таблиця 1.3. Дані для розрахунку

Варіант	Q, Н	α , град.	β , град.	γ , град.
1	50	30	45	30
2	40	30	60	45
3	60	60	30	60
4	30	30	120	75
5	45	30	60	15
6	60	30	60	30
7	70	60	30	45
8	30	60	75	60
9	80	30	60	75
10	150	60	30	45

Приклад розв'язання. Ліхтар підвешений на тросі до системи кронштейнів АВ і ВС (рис. 1.8). Вага ліхтаря $Q = 165$ Н, кут нахилу кронштейнів та тросу становить $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 150^\circ$.

Розглянемо рівновагу блока D (рис. 1.9). Зусилля в тросі, на якому висить ліхтар, дорівнює вазі ліхтаря Q (нехтуємо тертям тросу по блоку D).

Відкидаємо стрижень АВ і ВС та трос КЕ й їх дію замінюємо силами $\bar{R}_A, \bar{R}_C, \bar{Q}, \bar{Q}_1$ з якими вони діють на блок D. При цьому враховуємо, що трос працює тільки на розтягнення, а тяга ВА (стрижень) може як стискатись, так і розтягуватися. Під дією системи сил $(\bar{R}_A, \bar{R}_C, \bar{Q}, \bar{Q}_1)$ блок D знаходиться у рівновазі $\sum \bar{R}_A + \bar{R}_C + \bar{Q} + \bar{Q}_1 = 0$, причому $\bar{Q} = Q_1$.

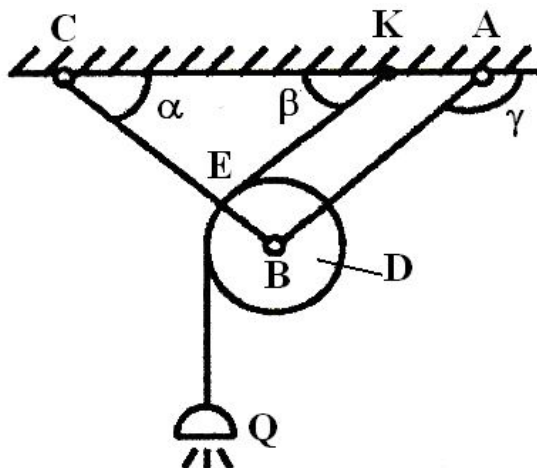


Рис. 1.8. До прикладу

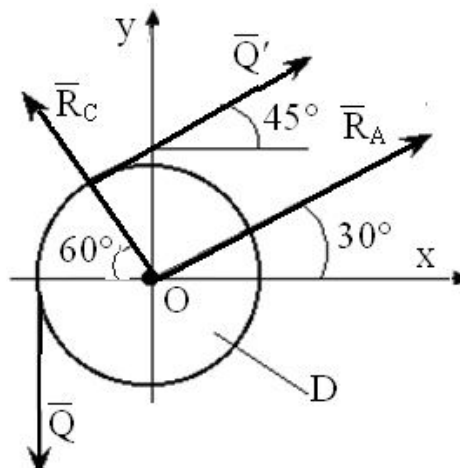


Рис. 1.9. До прикладу

Запишемо рівняння рівноваги для сил, що прикладені до блока D.

$$\sum F_x = 0; Q \cdot \cos 45^\circ + R_A \cdot \cos 30^\circ - R_C \cdot \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0; -Q + Q_1 \cdot \sin 45^\circ + R_A \cdot \sin 30^\circ + R_C \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Звідси знаходимо:

$$R_A = Q \frac{1 - \sin 45^\circ - \cos 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}{\sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ} = 165 \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3}}{0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}} = -76,40 \text{ Н};$$

$$R_C = \frac{Q \cdot \cos 45^\circ + R_A \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{165 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-76,40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}{0,5} = -100,30 \text{ Н}.$$

Відповідь: $R_A = -76,40 \text{ Н}$, $R_C = -100,30 \text{ Н}$.

Завдання 3. Знаходження опорних реакцій балки

Task 3. Finding the support reactions of the beam

Балка (рис. 1.10-1.12) завантажена силою \bar{F} , розподіленим навантаженням q та парою сил з моментом M . Знайти опорні реакції балки. Дані для розрахунку наведені в табл. 1.4.

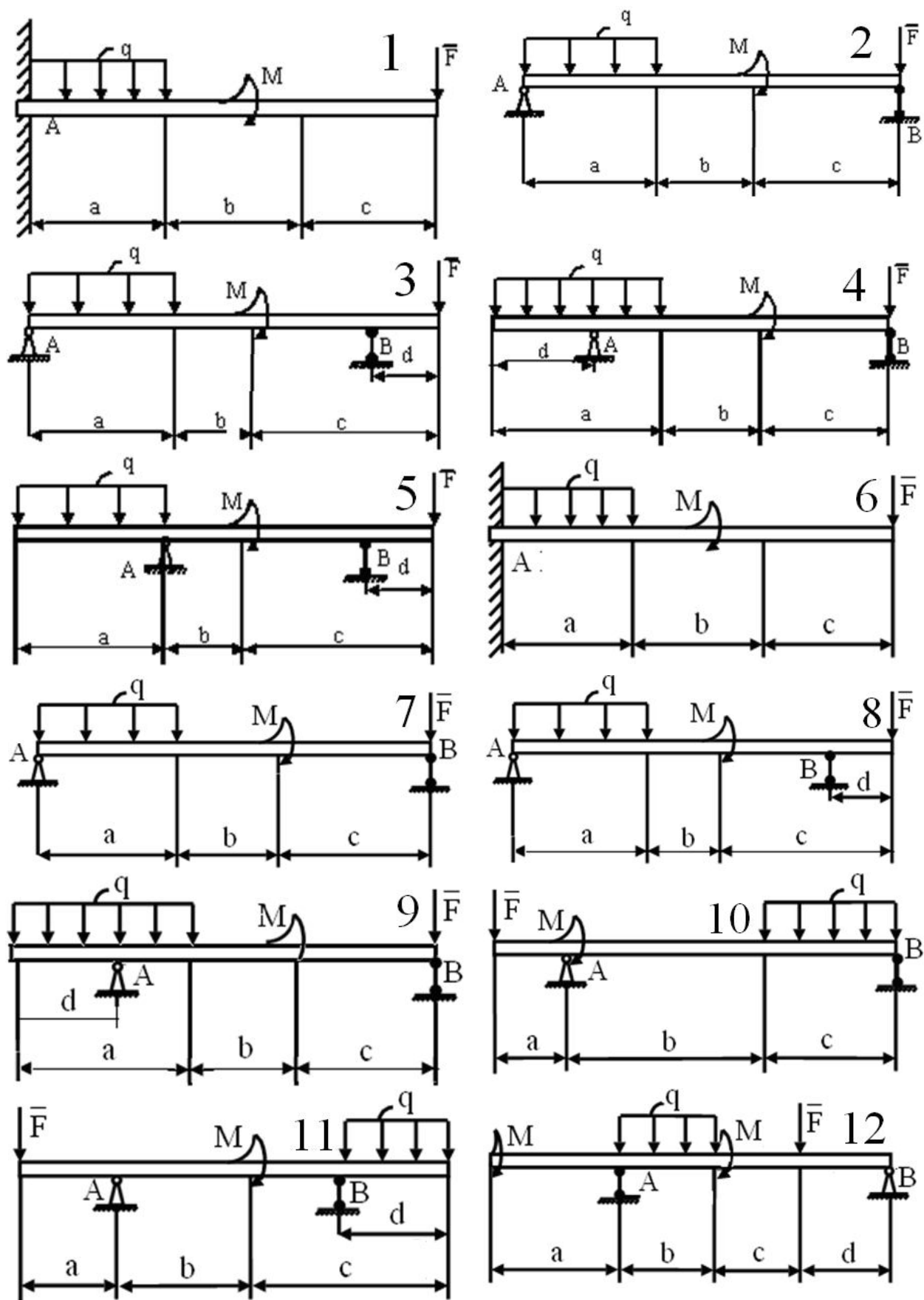


Рис. 1.10

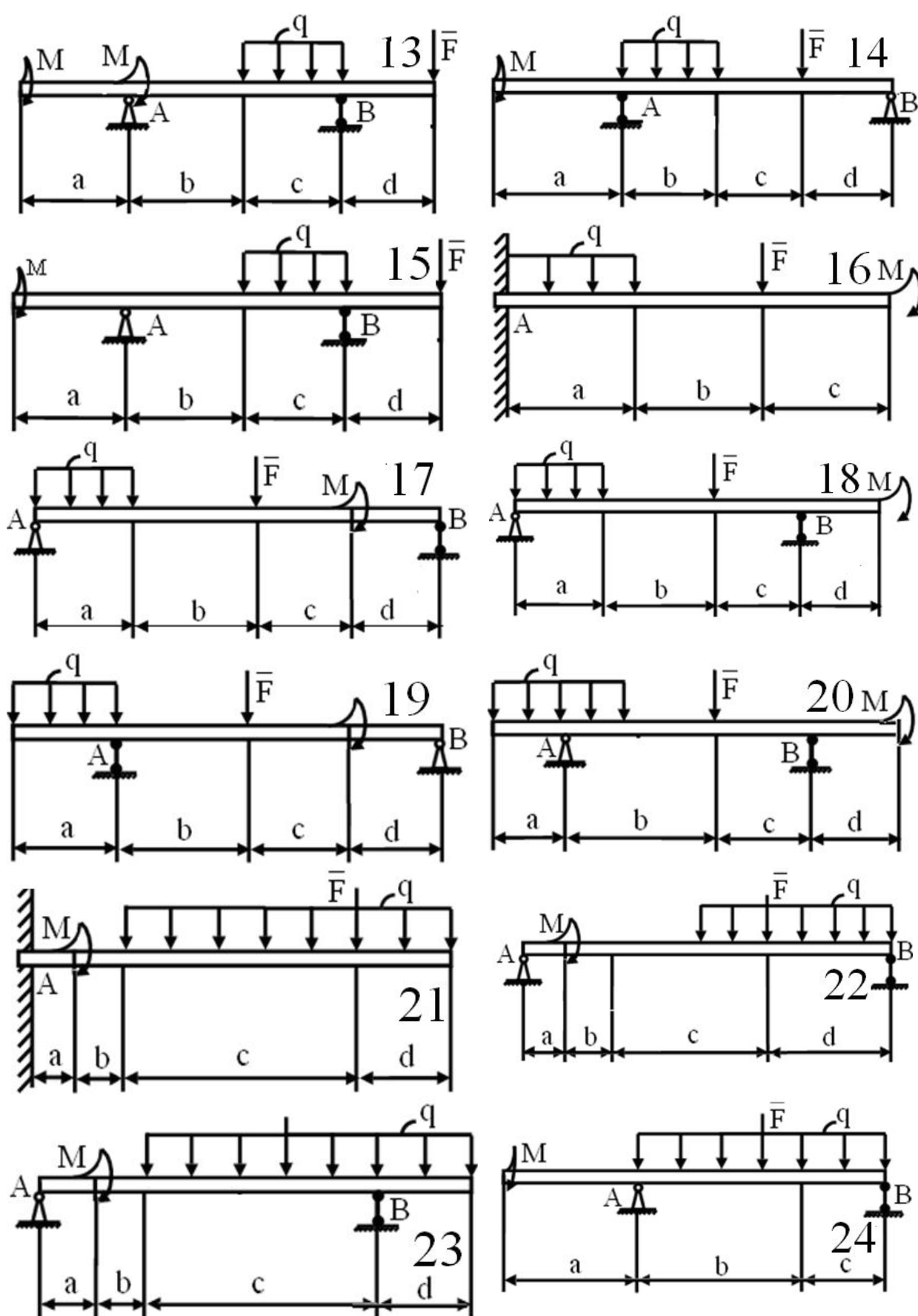


Рис. 1.11

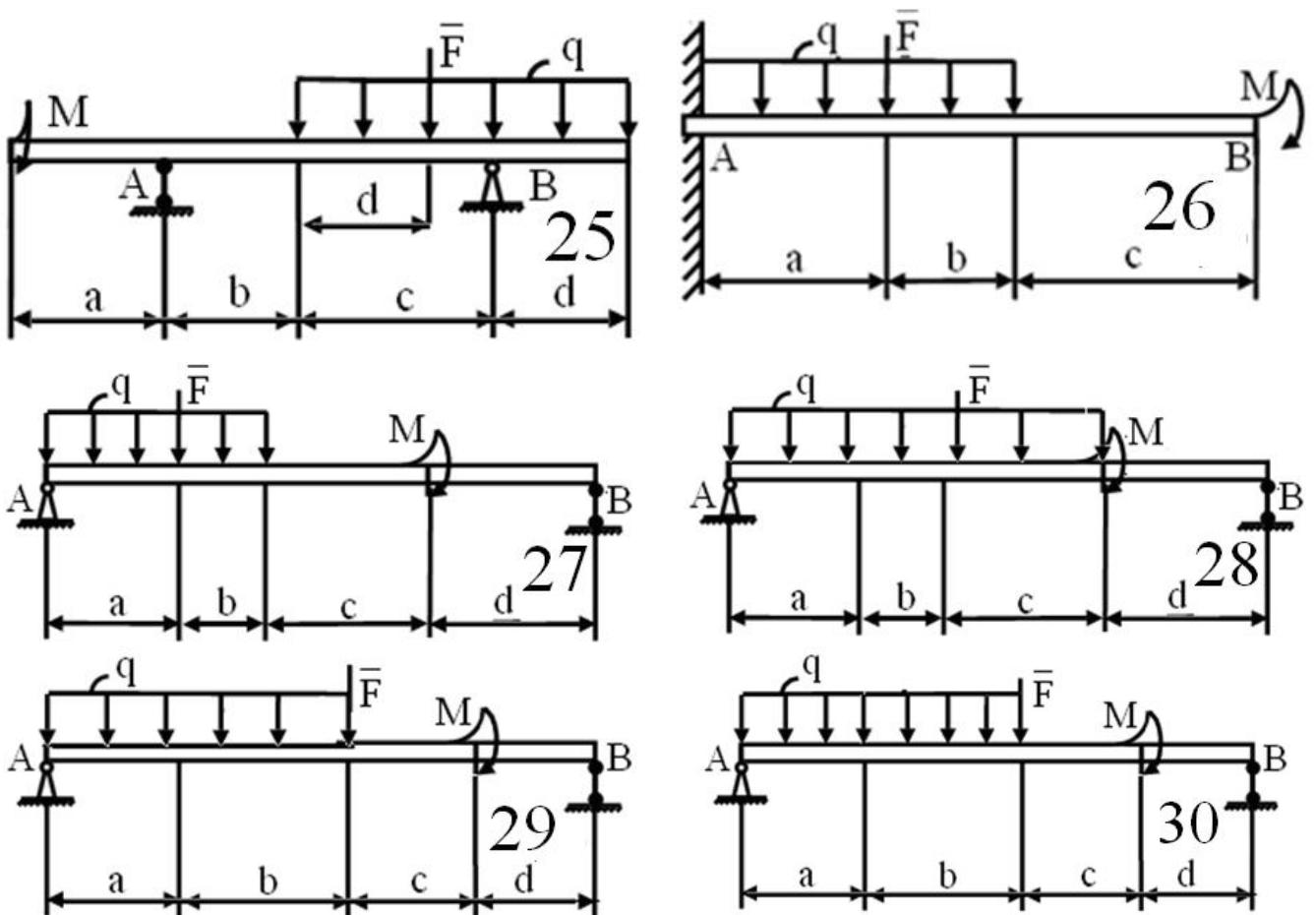


Рис. 1.12

Таблиця 2.4. Дані для розрахунку

Варіант	M, кН·м	F, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м	d, м
1	5	4	2	2	3	4	2
2	6	3	1	3	2	5	1
3	10	5	2	1	2	4	3
4	4	1	2	2	3	5	1
5	6	8	1	3	2	4	2
6	8	5	2	1	3	5	2
7	4	6	1	2	3	4	1
8	5	7	2	3	2	5	2
9	6	8	1	1	2	4	2
10	5	3	2	2	3	5	3

Приклади виконання завдання. *Приклад 1.* Для балки (рис. 1.13, а) знайти опорні реакції, якщо $F=3$ кН, $q=1$ кН/м.

Розв'язання. Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (покої).

На балку діють активні сили: зосереджена сила \bar{F} та розподілене навантаження інтенсивністю q , яке еквівалентне зосередженій силі Q

$$Q = q \cdot l = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного нерухомого шарніра А та рухомого В замінюємо їх

реакціями \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{R}_B (рис. 1.13, б).

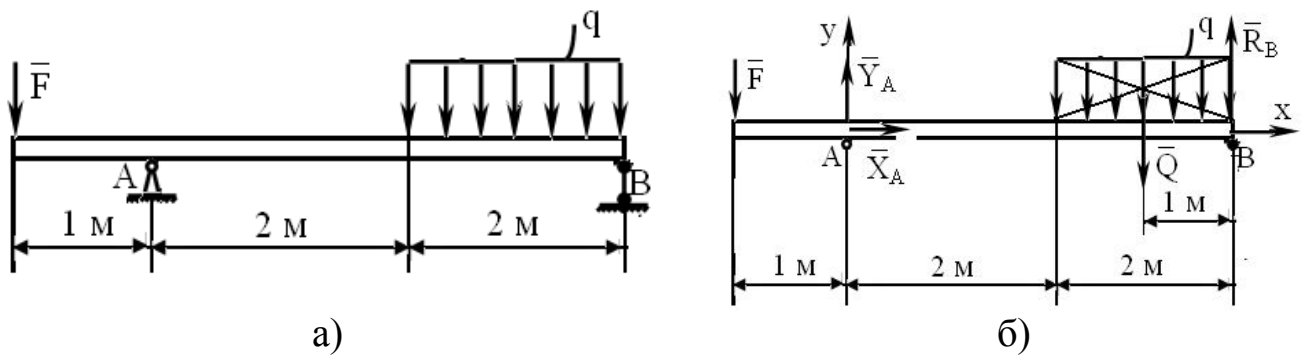


Рис. 1.13. До прикладу 1

Для зрівноваження системи сил \bar{F} , \bar{X}_A , \bar{Y}_A , \bar{Q} , \bar{R}_B запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \bar{X}_A = 0. \quad \sum M_A(F) = 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0;$$

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0. \quad R_B = 0,75 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(F) = 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0; \quad 3 \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 0; \quad Y_A = 4,25 \text{ кН.}$$

Достовірність отриманих результатів можна перевірити, записавши ще одне рівняння:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -\bar{F} + \bar{Y}_A - \bar{Q} + \bar{R}_B = 0; \quad -3 + 4,25 - 2 + 0,75 = 0.$$

Відповідь: $R_B = 0,75 \text{ кН}$; $Y_A = 4,25 \text{ кН}$; $X_A = 0$

Приклад 2. Для консольної балки (рис. 1.14, а) знайти реакції жорсткого защемлення, якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

На балку АВ діють: активна сила \bar{F} , пара сил з моментом M . Її руху перешкоджає в'язь – жорстке защемлення в точці А. Відкидаємо в'язь в точці А, і на підставі аксіоми про звільнення від в'язей, її дію замінюємо силами \bar{X}_A і \bar{Y}_A та моментом M_A (рис. 1.14, б).

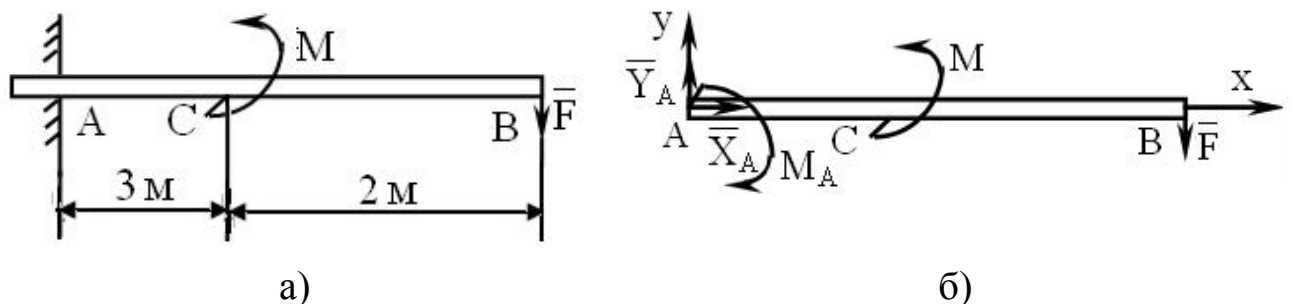


Рис. 1.14. До прикладу 2

Запишемо умови рівноваги для системи сил: $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \bar{X}_A = 0;$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \overline{Y}_A - F = 0; \quad \overline{Y}_A - 2 = 2кН.$$

$$\sum M_A(F) = 0; \quad -M_A + M - F \cdot 5 = 0; \quad -M_A + 5 - 2 \cdot 5 = 0; \quad M_A = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Відповідь: $\overline{X}_A = 0; \quad \overline{Y}_A = 2кН; \quad M_A = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

1.2. Плоска довільна система сил

Flat arbitrary system of forces

Методичні вказівки до розв'язування задач про рівновагу плоскої довільної системи сил.

До розв'язування задач необхідно приступати тільки після попереднього вивчення теоретичного матеріалу. Найбільш загальним методом розв'язування задач на рівновагу є аналітичний метод.

Послідовність (методика) розв'язування задач статички приведена на стор. 7. Цієї послідовності необхідно дотримуватись і при розв'язуванні задач на рівновагу плоскої довільної системи сил.

Для отримання більш простих рівнянь рівноваги потрібно:

1. Складаючи рівняння проєкцій сил, необхідно одну з координатних осей спрямувати перпендикулярно до лінії однієї, а якщо можливо, то і двох невідомих сил; при цьому проєкція сили на цю вісь буде дорівнювати нулю, а на вісь, їй перпендикулярній, сила спроектується в натуральну величину.

2. Складаючи рівняння моментів для плоскої системи сил, доцільно вибрати центр моментів в тій точці, де більше всього невідомих сил. Тоді в рівняння моментів всіх сил увійде тільки одна невідома сила.

В тих випадках, коли при знаходженні момента сили відносно точки важко знайти плече сили, то буває доцільно цю силу розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові і шукати момент цих складових сил відносно даної точки.

В більшості задач статички неможливо наперед вказати напрям реакції опори. Тому в цих випадках невідому реакцію треба розкласти на дві складові, які спрямовуються вздовж відповідних осей координат, і ввести їх в рівняння рівноваги в якості невідомих.

Якщо в результаті розв'язання рівнянь величина якої-небудь складової реакції буде від'ємна, то це означає, що в дійсності ця складова реакції напрямлена в протилежну сторону вибраного напрямку.

Завдання 4. Визначення реакції опор балки

Task 4. Determination of the reaction of the beam supports

Для балки, завантаженою активними силами і моментом пари сил визначити реакції опор. Схеми балок і прикладени навантаження наведені на рис. 1.15–1.17.

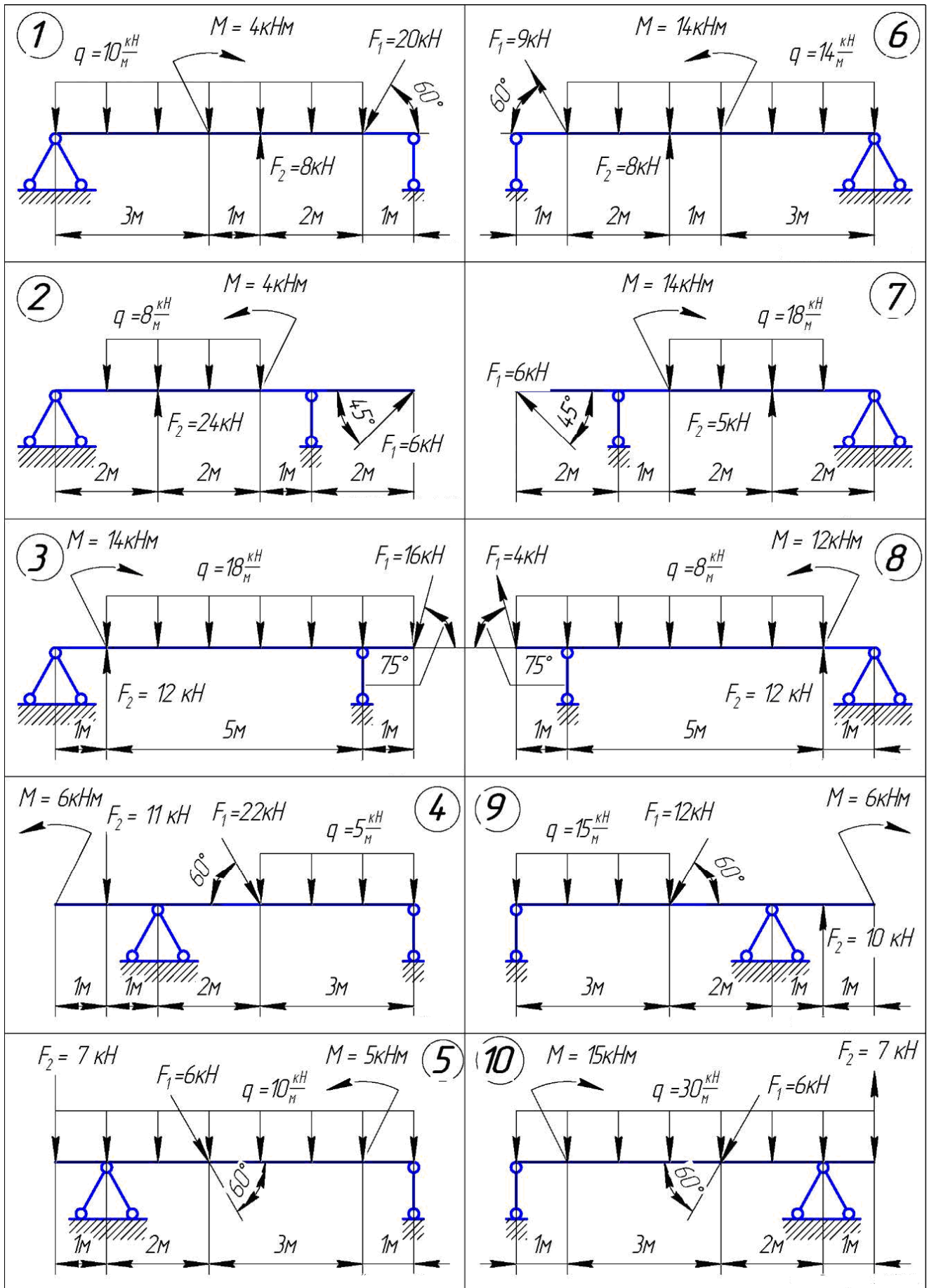


Рис. 1.15

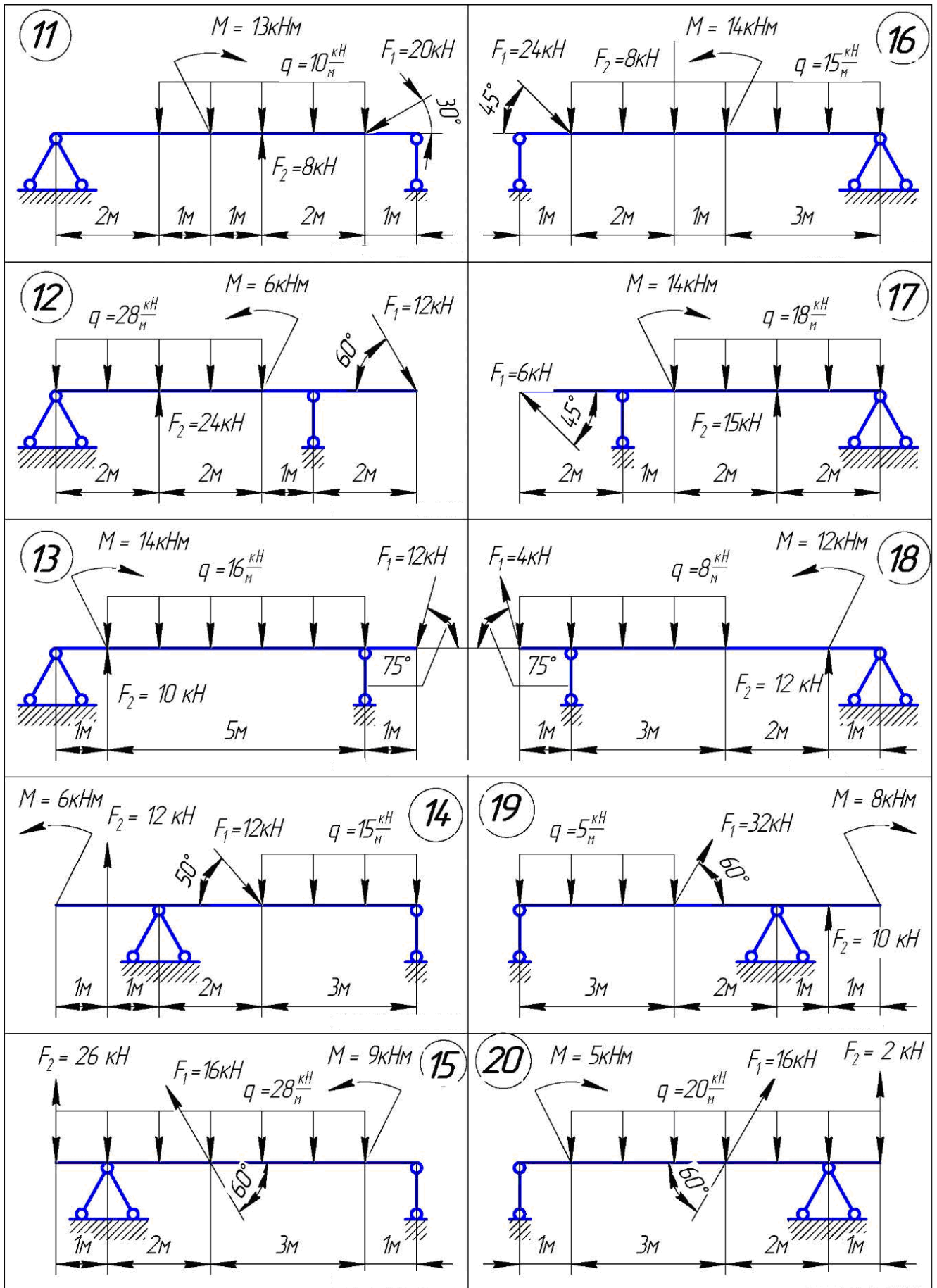


Рис. 1.16

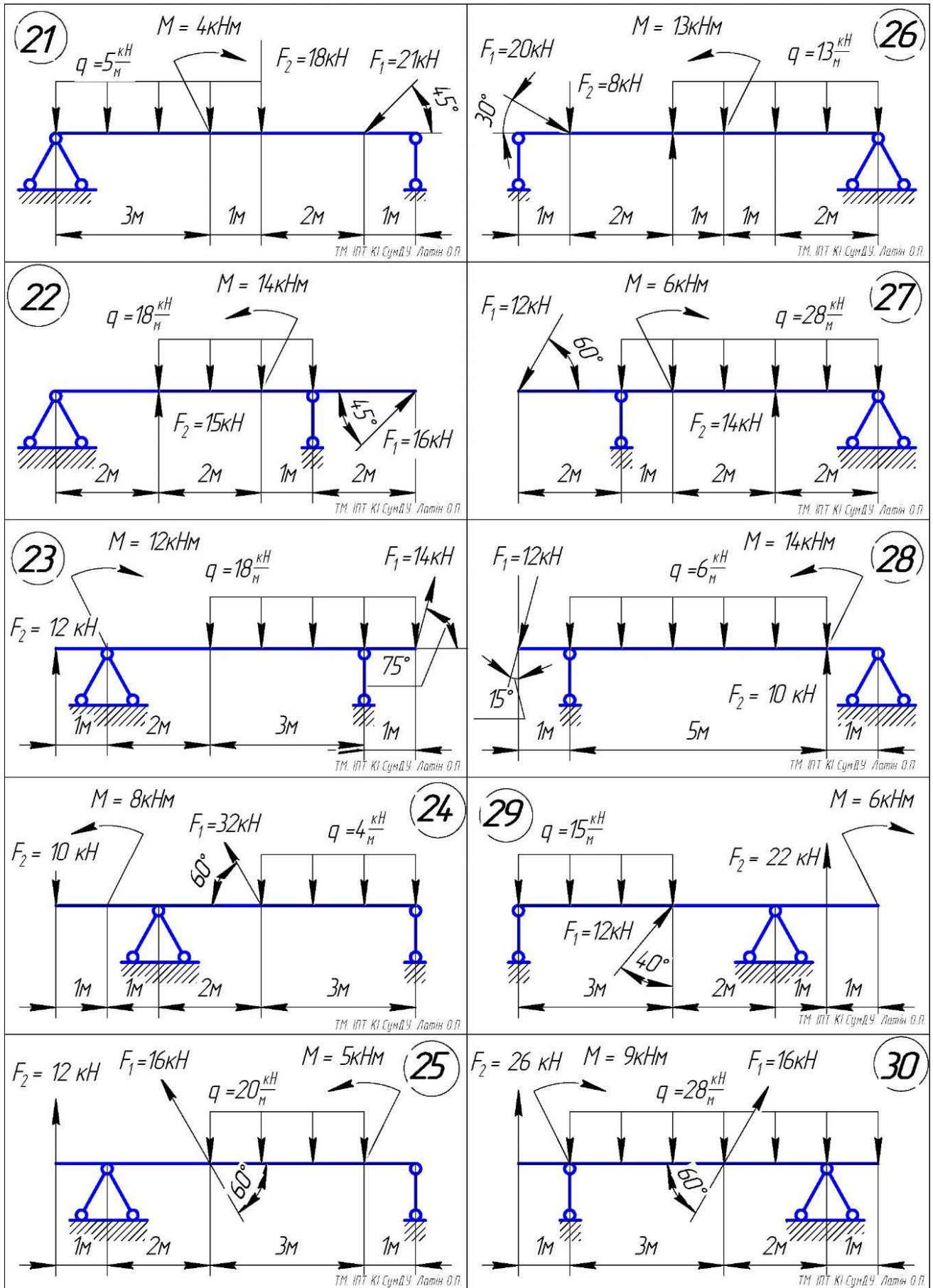


Рис. 1.17

Приклади розв'язання задач рівноваги довільної системи сил у площині

Приклад 1. Початкова схема конструкції наведена на рис. 1.18, а.

Тут на балку із зацмеленим кінцем А на відрізку CD діє рівномірно розподілене навантаження $q = 0,8$ кН/м, активна сила $F = 2$ кН і момент пари сил $M = 1,2$ кН.

Розв'язання. Розрахункова схема наведена на рис. 1.19, б. При її побудові використано принцип звільнення від в'язів.

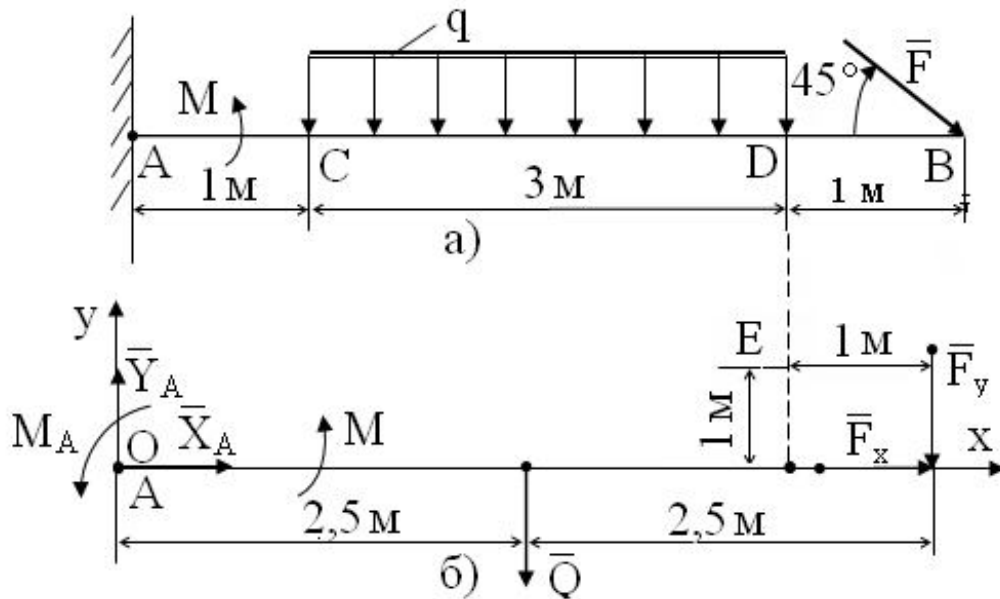


Рис. 1.18. До прикладу 1

Розподілене навантаження замінено зосередженою силою $Q = 3 \cdot 0,8 = 2,4$ кН, а силу \bar{F} -координатними складовими \bar{F}_x , \bar{F}_y з величинами $F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41$ кН; $F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \sqrt{2} / 2 = 1,41$ кН.

Відповідно до рис. 1.18, б балка, як вільне тверде тіло, перебуває в рівновазі під дією заданих сил \bar{Q} , \bar{F}_x , \bar{F}_y , пари сил з моментом M і реакції зацмелення у вигляді силових складових \bar{X}_A , \bar{Y}_A та пари сил з моментом M_A .

Складемо рівняння рівноваги балки, використавши першу форму умов рівноваги довільної плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + F_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - Q - F_y = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad M_A + M - 2,5Q - 5F_y = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:

з першого рівняння $X_A = -F_x = -1,41$ кН;

з другого рівняння $Y_A = Q + F_y = 2,4 + 1,41 = 3,81$ кН;

з третього рівняння $M_A = 5F_y + 2,5Q - M = 5 \cdot 1,41 + 2,5 \cdot 2,4 - 1,2 = 11,87$ кН·м.

Знак «мінус» отриманої реакції \bar{X}_A показує, що в дійсності вона направлена на розрахунковій схемі у протилежний бік.

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язів складемо рівняння моментів сил відносно точки E, що знаходиться на відстані 1 м від точки B і від балки (рис. 1.18, б).

$$\begin{aligned} \text{Перевірка. } \sum M_E &= M_A - Y_A \cdot 4 + M + Q \cdot 1,5 - F_y \cdot 1 + X_A \cdot 1 + F_x \cdot 1 = \\ &= 11,87 - 3,81 \cdot 4 + 1,2 + 2,4 \cdot 1,5 - 1,41 \cdot 1 - 1,44 \cdot 1 + 1,41 \cdot 1 = 18,08 - 18,08 = 0. \end{aligned}$$

Приклад 2. На балку АВ вагою $G = 2$ кН діє розподілене навантаження інтенсивністю $q = 2$ кН/м і зосереджена сила $F = 8$ кН. Знайти реакції опор А і В.

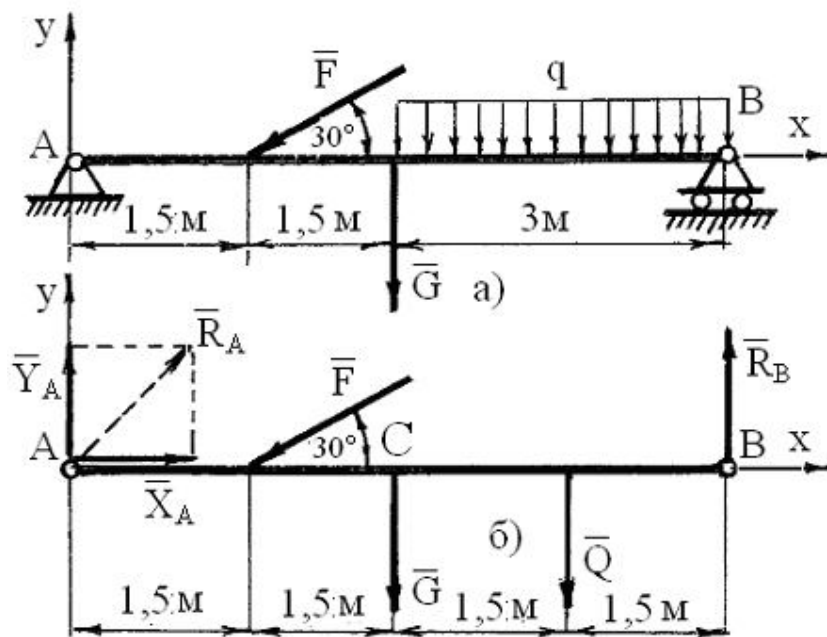


Рис. 1.19. До прикладу 2

Розміри показані на рис. 1.19, а.

Розглянемо рівновагу балки АВ. Для неї в'язями являються опори в точках А і В. Опора в точці А-це нерухомий шарнір, в точці В - рухомий шарнір. Звільнимось від в'язей. Початок системи координат вибираємо в точці А. На ділянці СВ діє розподілене навантаження. Дію розподіленого навантаження замінимо дією зосередженої

сили: $Q = q \cdot l = 2 \cdot 3 = 6$ кН.

Так як розподілене навантаження рівномірне, то сила Q прикладена в точці D - середині відрізка СВ. $CD = DB = 1,5$ м (рис. 1.19, б).

Складемо рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил в формі:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - F \cos 30^\circ = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + R_B - F \sin 30^\circ - G - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F \sin 30^\circ \cdot 1,5 - G \cdot 3 - Q \cdot 4,5 + R_B \cdot 6 = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь визначаємо три невідомі реакції:

з перого рівняння $X_A = F \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} = 6,93$ кН;

з третього рівняння

$$R_B = (F \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,5 + G \cdot 3 + Q \cdot 4,5) / 6 = (8 \cdot 0,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4,5) / 6 = 6,5 \text{ кН};$$

з другого рівняння

$$Y_A = F \sin 30^\circ + G + Q - R_B = 8 \cdot 0,5 + 2 + 6 - 6,5 = 5,5 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку результатів. Для цього складемо таке рівняння рівноваги, щоб в нього ввійшло якнайбільше знайдених раніше невідомих реакцій в'язей, і якщо це рівняння після підстановки числових значень реакцій буде дорівнювати нулю, то це означає, що реакції знайдено вірно.

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 3 + F \cdot \sin 30^\circ \cdot 1,5 - Q \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = -5,5 \cdot 3 + 8 \cdot 0,5 \cdot 1,5 - 6 \cdot 1,5 + 6,5 \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Реакція в точці А } R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{6,93^2 + 5,5^2} = 8,85 \text{ кН.}$$

Приклад 3. На балку АВ з защемленим кінцем діє на ділянці CD рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \text{ кН/м}$, в точці В діє активна сила $F = 6 \text{ кН}$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ і, крім цього, на балку діє пара сил з моментом $M = 4 \text{ кНм}$, Знайти реакції защемлення. Розміри вказані на рис. 1.20, а. Вагу балки не враховувати.

Розглянемо рівновагу балки АВ. Для неї в'язю є опора в точці А (жорстке защемлення). Звільнімося від в'язі і замінімо її дію на балку реакціями X_A, Y_A, M_A . Тут M_A —момент в защемленні (рис. 1.20, б).

Розподілене навантаження замінімо зосередженою силою $Q = q \cdot l = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ кН}$.

Складемо рівняння рівноваги в

$$\text{формі: } \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0;$$

$$X_A - F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; Y_A - F \sin 45^\circ - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; M_A - M - Q \cdot 3,5 - F \sin 45^\circ \cdot 7 = 0.$$

З отриманих трьох рівнянь можна визначити три невідомі реакції:

$$\text{з першого рівняння } X_A = F \cos 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,24 \text{ кН};$$

$$\text{з другого рівняння } Y_A = F \sin 45^\circ + Q = 4,5 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8,74 \text{ кН};$$

з третього рівняння

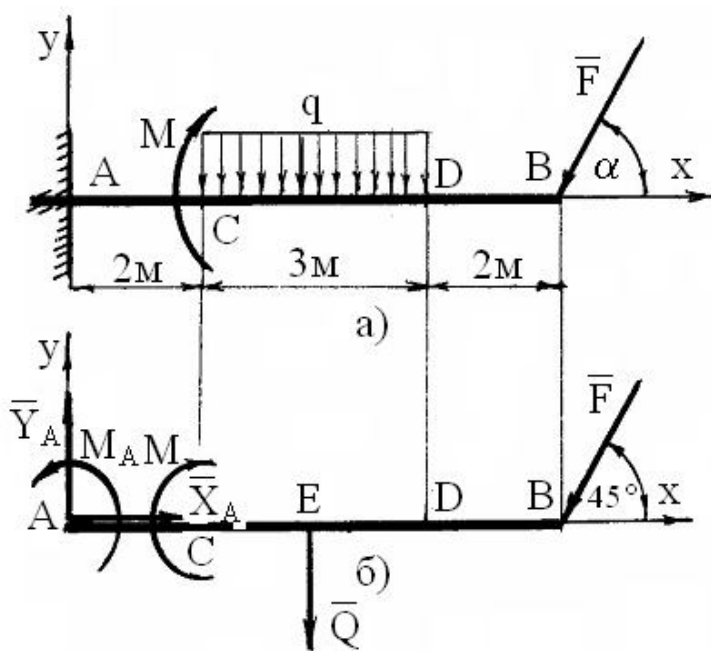


Рис. 1.20. До прикладу 3

$$M_A = M + Q \cdot 3,5 + F \sin 45^\circ \cdot 7 = 4 + 4,5 \cdot 3,5 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 49,44 \text{ кН}.$$

Зробимо перевірку:

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = M_A - Y_A \cdot 7 - M + Q \cdot 3,5 = 49,45 - 8,74 \cdot 7 - 4 + 4,5 \cdot 3,5 = 0,02 \text{ кН}.$$

Похибка розрахунку: $\Delta = \frac{65,2 - 65,18}{65,2} 100\% = 0,03\%$. Допустима похибка розрахунку $[\Delta] = 3\%$.

Приклад 4. Знайти реакції в жорсткому защемленні, якщо інтенсивність розподіленого навантаження $q_{\max} = 3 \text{ кН/м}$, а зосереджена сила $F = 4 \text{ кН}$. Розміри балки в метрах показані на рис. 1.21, а. Вагу балки не враховувати.

Розглянемо рівновагу балки ABD. В точці А – жорстке защемлення. (див. приклад 3). На ділянці BD діє розподілене навантаження по закону трикутника і досягає найвищої інтенсивності в точці D.

Знайдемо рівнодійну розподіленого навантаження.

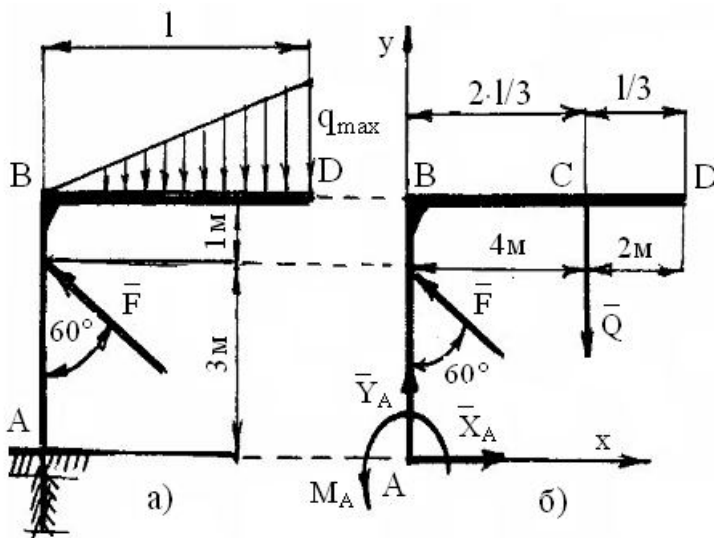


Рис. 1.21. До прикладу 4

Рівнодійна трикутного навантаження чисельно дорівнює половині добутку максимальної інтенсивності на довжину навантаженої ділянки, а лінія її дії проходить на відстані, рівній $2/3$ довжини ділянки від кінця, на якому інтенсивність дорівнює нулю.

$$Q = \frac{q_{\max} \cdot l}{2}; \quad BC = \frac{2}{3}l; \quad CD = \frac{1}{3}l$$

(рис. рис. 1.21, б). В даному випадку: $Q = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ кН}$;

$$BC = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4 \text{ м}; \quad CD = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \text{ м}.$$

Реакції опори А показані на рис. 1.21, б.

Запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A - F \sin 60^\circ = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad Y_A + F \cos 60^\circ - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + F \sin 60^\circ \cdot 3 - Q \cdot 4 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $X_A = 3,46 \text{ кН}$; $Y_A = 7,00 \text{ кН}$;
 $M_A = 25,61 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Для перевірки запишемо рівняння:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A - F \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 - F \cdot \sin 30^\circ \cdot 6 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 6 + Q \cdot 2 = 0.$$

$$25,61 - 4 \cdot \sqrt{3}/2 \cdot 1 - 4 \cdot 0,5 \cdot 6 + 3,46 \cdot 4 - 7 \cdot 6 + 9 \cdot 2 = 1,05 \text{ кН}.$$

Похибка розрахунку $[(58,45 - 57,40)/58,45] \cdot 100\% = 1,79\%$, що менше за 3%.

Приклад 5. Знайти зусилля в стрижнях, які підтримують балку АВ (рис. 1.22). На балку діють сила $F = 20$ кН, розподілене навантаження $q = 10$ кН/м і пара сил з моментом $M = 304$ кН·м. Вагою стрижнів і балки АВ знехтувати. Розміри ділянок балки вказані на рис. 1.22.

Розглянемо рівновагу балки АВ.

Для неї в'язями є стрижні 1, 2, 3.

Звільнимися від цих стрижнів.

Стрижні невагомі, на кінцях мають шарнірні з'єднання, тому реакції цих стрижнів спрямовані по стрижням $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$.

Дію розподіленого навантаження замінимо дією зосередженої сили:

$$Q = q \cdot l = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кН}.$$

На рис. 1.22 сила Q показана штриховою лінією.

Запишемо рівняння рівноваги в формі:

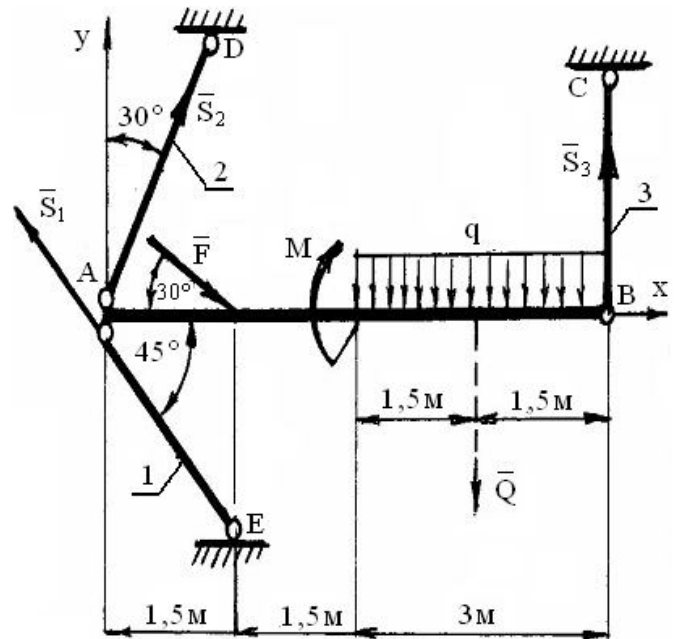


Рис. 1.22. До прикладу 5

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 4 + M_A - F \cos 60^\circ \cdot 6 - F \sin 60^\circ \cdot 1 + Q \cdot 2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_1 \sin 30^\circ \cdot 1,5 - M - Q \cdot 4,5 + S_3 \cdot 6 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_1 \sin 45^\circ \cdot 6 - S_2 \cos 30^\circ \cdot 6 + F \sin 30^\circ \cdot 4,5 - M + Q \cdot 1,5 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $S_1 = 20,72$ кН, $S_2 = -5,36$ кН, $S_3 = 30$ кН.

Знак «мінус» при S_2 показує, що в дійсності реакція стрижня 2 спрямована в протилежну сторону вибраному напрямку.

Зусилля в стрижнях чисельно дорівнюють реакціям відповідних в'язей.

Зробимо перевірку:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = S_2 \cos 30^\circ + S_1 \sin 45^\circ - F \cdot \sin 30^\circ - Q + S_3 =$$

$$= -5,36 \cdot \sqrt{3}/2 + 20,72 \cdot \sqrt{2}/2 - 20 \cdot 0,5 - 30 + 30 = 0,05 \text{ кН}.$$

Завдання 5. Визначення реакцій опор плоскої конструкції

Task 5. Determination of reactions of supports of flat design

Мета роботи: 1. Сформувати компетентності для визначення реакцій опор плоскої конструкції, яка знаходиться під дією системи сил, що дає можливість проектування суднових механізмів і перевірки їх на міцність.

2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Жорстка балка знаходиться у вертикальній площині, складається з елементів кожний довжиною a метрів та погонною вагою $q = 100$ Н/м і закріплена в точках А та В (рис. 1.23). На балку діють сили F_1 та F_2 під кутами α та β до неї відповідно (усі кути відкладаються проти руху стрілки годинника від горизонталі), та момент пари зовнішніх сил M . Визначити реакції опор конструкції. Тип балки, точки і способи закріплення (згідно з рис. 1.24) та навантаження на балку приведені в табл. 1.5.

Зауваження.

1. При розв'язанні вважати, що закріплення не змінює розмірів балки.

2. Для закріплень а) і б) додатні кути γ та θ (рис. 1.24) відкладати проти руху стрілки годинника від горизонтальної осі Ox , що спрямована праворуч.

3. У випадку закріплення г) виникає дві реакції (у місці закріплення) – сила, яка перпендикулярна до тіла (ТТ) та момент закріплення; а у випадку закріплення д) – три реакції: вертикальна та горизонтальна сили і момент закріплення.

4. Для визначення напрямів сил \vec{F}_1 та \vec{F}_2 додатні кути α та β відкладати проти руху стрілки годинника від горизонтальної осі Ox , що спрямована праворуч.

Методика розв'язання задачі

1. Вибираємо зручну систему координат (як правило, горизонтальну вісь x та вертикальну вісь y).

2. Звільняємо конструкцію від в'язів, а їхню дію замінюємо реакціями.

3. Розкладаємо активні сили та реакції на складові вздовж обраних осей.

4. Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum M(\vec{F}_i) = 0.$$

Останнє рівняння записуємо відносно довільної точки, використовуючи теорему Варіньона. Щоб спростити останнє рівняння, вибираємо ту точку, де перетинається найбільша кількість невідомих векторів сил.

5. Розв'язуємо систему рівнянь та визначаємо невідомі величини.

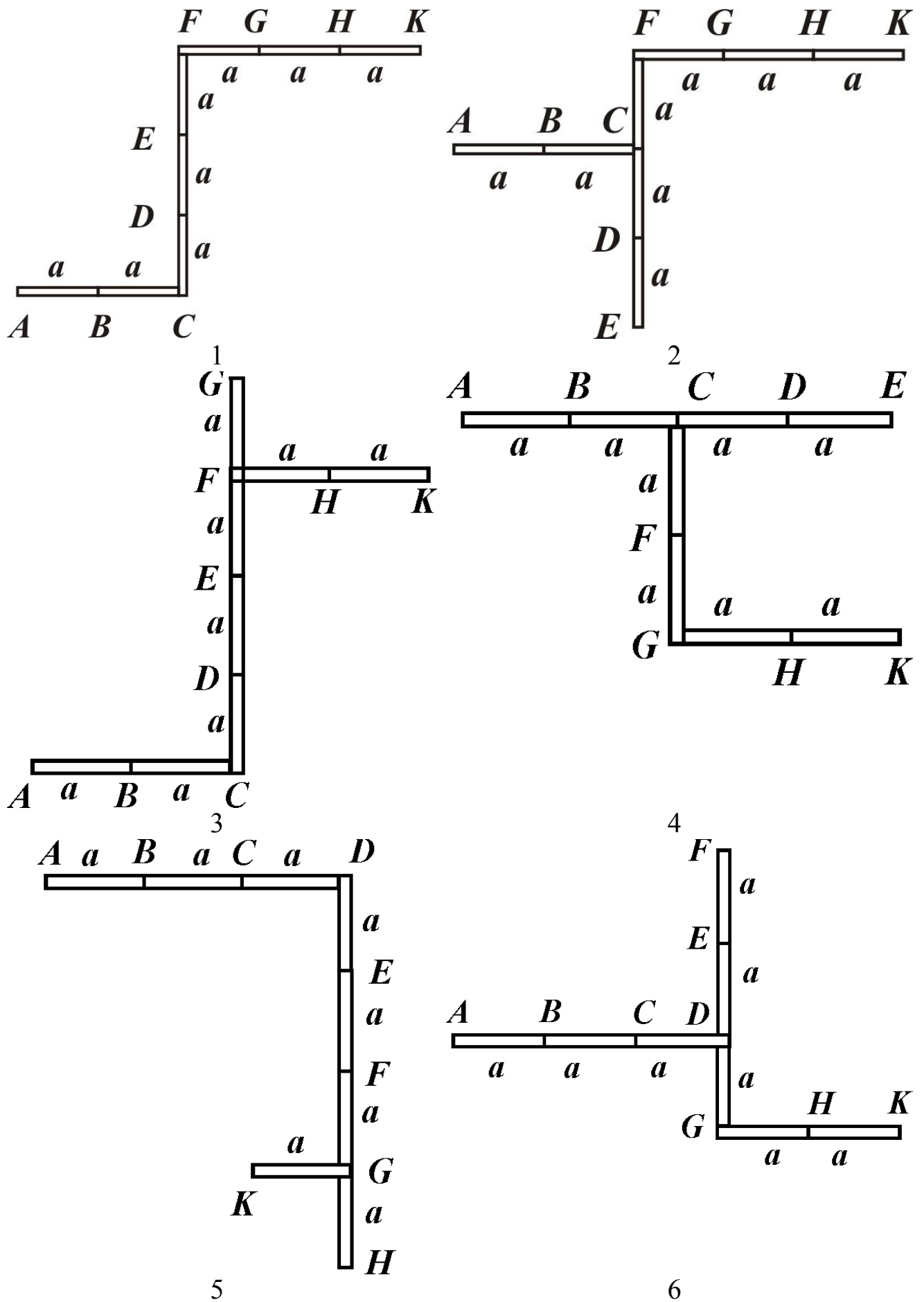


Рис. 1.23. Схеми до завдання 5

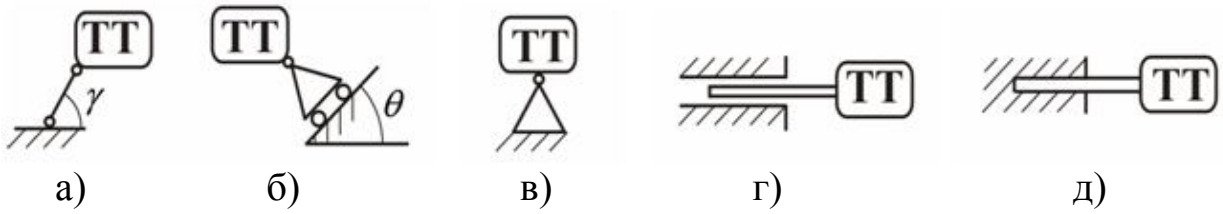


Рис. 1.24. Способи закріплення твердого тіла (ТТ).

- а) жорсткий невагомий стрижень на шарнірах; б) котки (рухомі шарніри);
- в) циліндричний (сферичний) шарнір; г) напівзащемлена опора;
- д) защемлення.

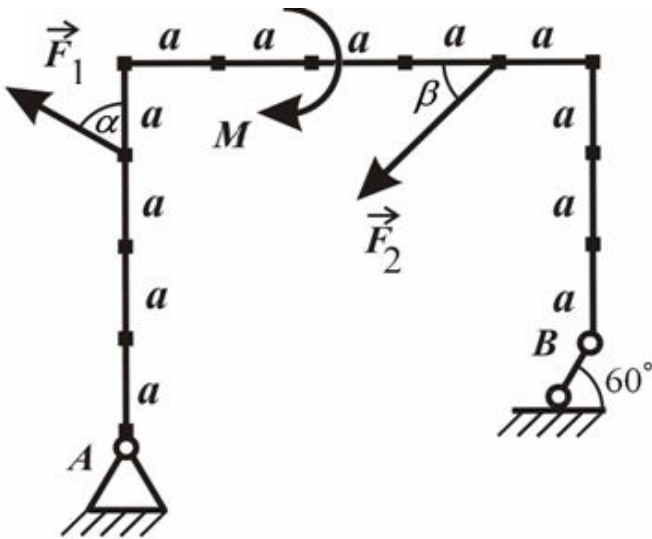


Рис. 1.25. Схема до прикладу відповідно, та момент пари зовнішніх сил $M = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Приклад. Жорстка однорідна балка погонною вагою $q = 100 \text{ Н/м}$ знаходиться у вертикальній площині і складається з елементів, довжина кожного $a = 0,5 \text{ м}$ (рис. 2.25). Балка закріплена в точці А нерухомим шарніром та в точці В невагомим стрижнем з шарнірами на кінцях.

Визначити реакції опор в точках А і В, якщо на балку діють сили $F_1 = 80 \text{ Н}$ та $F_2 = 30 \text{ Н}$ під кутами $\alpha = 60^\circ$ та $\beta = 45^\circ$, до неї

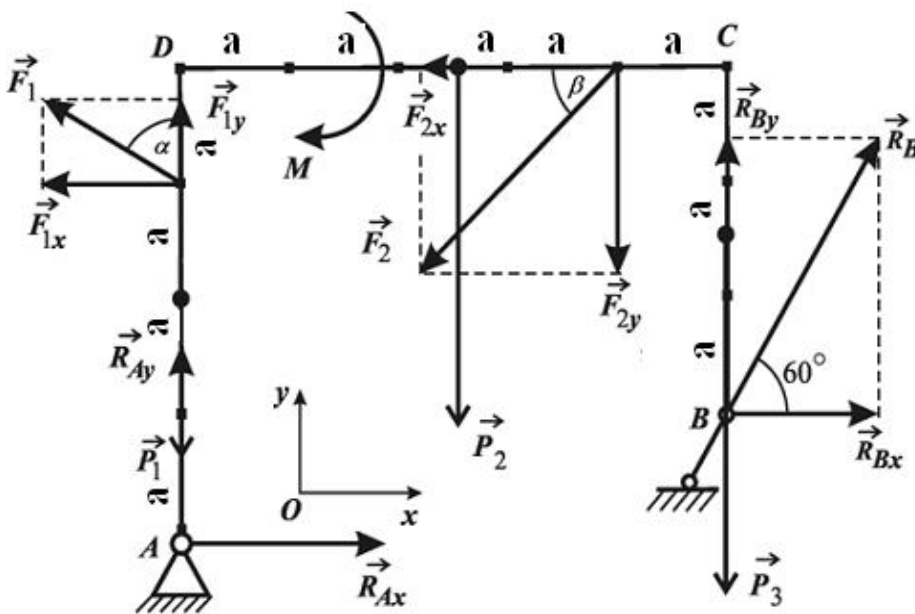


Рис. 1.26. До прикладу

Розв'язання. Напрями осей декартової системи координат xOy спрямуємо паралельно елементам конструкції, оскільки вона складається з горизонтальних та вертикальних елементів (рис. 2.26). Розглянемо рівновагу даної конструкції АВ під дією заданих сил F_1 , F_2 та моменту пари M . В'яжами

заданої конструкції АВ є циліндричний шарнір А та стрижень В з шарнірами на кінцях. Звільняємо балку від в'язів, дію опор замінюємо на їхні реакції. Тоді в точці А реакція циліндричного шарніра визначається двома складовими \vec{R}_{Ax} і \vec{R}_{Ay} , а реакція стрижня в точці В спрямована вздовж лінії,

яка з'єднує шарніри. Напрями реакцій виберемо умовно, бо справжні напрями визначаються після розв'язування рівнянь рівноваги.

Таблиця 1.5. Вихідні дані для розв'язання завдання 4

Варіант	Рисунок	а, м	Точка А, тип кріпл.	Кут, °	Точка К, тип кріпл.	Кут, °	F ₁ , модуль	Точка приклення	α , °	F ₂ , модуль	Точка приклення	β , °	M, Н·м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1,2	а	45	в	-	35	C	-120	15	H	-30	20
2	2	1,5	г	-	а	30	15	B	45	45	G	120	20
3	3	1,0	д	-	-	-	25	B	60	45	D	120	10
4	4	1,2	в	-	б	30	45	F	60	35	H	-30	10
5	5	1,2	а	-60	г	-	15	H	120	30	E	30	20
6	6	1,4	б	30	в	-	35	D	-135	35	F	45	-10
7	1	1,0	г	-	а	-60	45	E	-120	30	F	30	-10
8	2	1,2	б	45	г	-	25	D	45	15	H	-60	-15
9	3	1,2	-	-	д	-	30	E	45	15	H	-60	25
10	4	1,4	г	-	а	60	35	B	-120	50	D	-30	-20
11	5	1,2	в	-	б	30	50	B	120	30	D	-45	15
12	6	1,5	а	-45	г	-	45	C	120	40	F	-60	-25
13	1	1,2	г	-	б	45	25	D	60	45	C	-45	15
14	2	1,0	-	-	д	-	15	E	-135	40	H	60	15
15	3	1,4	г	-	а	60	45	D	-45	40	F	30	15
16	4	1,2	б	30	в	-	35	B	60	40	G	-135	-25
17	5	1,2	а	60	в	-	40	D	60	20	H	-45	5
18	6	1,5	г	-	б	-60	10	C	-120	30	H	45	-20
19	1	1,4	д	-	-	-	15	D	-120	25	G	-45	-25
20	2	1,2	а	30	г	-	50	C	-120	50	G	-135	10
21	3	1,0	в	-	а	45	25	E	-150	10	F	45	-25
22	4	1,2	а	30	г	-	15	C	45	15	H	-90	-25
23	5	1,5	-	-	д	-	10	B	60	40	E	-150	10
24	6	1,2	б	30	в	-	30	B	-30	10	E	-150	-10
25	1	1,4	г	-	а	-60	40	D	45	45	G	-60	5
26	2	1,2	в	-	б	30	45	B	60	25	G	-30	5
27	3	1,0	а	-60	г	-	45	C	60	15	F	-135	-20
28	4	1,2	г	-	б	45	25	H	-150	50	E	45	15
29	5	1,5	д	-	-	-	45	E	-150	50	D	60	10
30	6	1,2	а	60	г	-	5	C	-120	25	E	30	-15

Обчислимо вагу кожної ділянки балки (AD, DC і CB), які визначаємо як добуток погонної ваги q на довжину елемента l_i ($P_i = q \cdot l_i$) і отримаємо величини сил тяжіння, що діють на кожну ділянку конструкції:

$$P_1 = 100 \cdot 4 \cdot 0,5 = 200 \text{ Н}, P_2 = 100 \cdot 5 \cdot 0,5 = 250 \text{ Н}, P_3 = 100 \cdot 3 \cdot 0,5 = 150 \text{ Н}.$$

Ці сили прикладені до середин ділянок AD, DC і CB.

Запишемо рівняння рівноваги для нашого випадку:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = R_{Ax} - F_1 \sin \alpha - F_2 \cos \beta + R_B \cos 60^\circ = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = R_{Ay} - P_1 + F_1 \cos \alpha - P_2 - F_2 \sin \beta - P_3 + R_B \sin 60^\circ = 0. \quad (1.4)$$

Рівняння для моменту сил запишемо відносно точки A, оскільки в цій точці перетинаються лінії дій двох невідомих реакцій (\vec{R}_{Ax} і \vec{R}_{Ay})

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = F_1 \sin \alpha \cdot 3a - M - P_2 \cdot 2,5a + F_2 \cos \beta \cdot 4a - F_2 \sin \beta \cdot 4a - P_3 \cdot 5a + R_B \sin 60^\circ \cdot 5a - R_B \cos 60^\circ \cdot a = 0. \quad (1.5)$$

Звернемо увагу на те, що лінія дії сили F_2 в нашому прикладі проходить через точку A, тому $F_2(\cos 45^\circ) \cdot 4a - F_2 \sin(45^\circ) \cdot 4a = 0$.

Таким чином ми отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Рівняння (2.5) містить одну невідому величину – R_B . Тому, підставляючи в нього вихідні дані задачі, отримаємо:

$$80 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,5 - 60 - 250 \cdot 1,25 - 150 \cdot 2,5 + R_B \cdot \sin 60^\circ \cdot 2,5 - R_B \cdot \cos 60^\circ \cdot 0,5 = 0,$$

отже $-643,58 + 1,92R_B = 0$ і $R_B = 643,58/1,92 = 336,06 \text{ Н}$.

Підставимо цей результат в (2.3) і (2.4) та знайдемо R_{Ax} та R_{Ay} :

$$R_{Ax} - 80 \cdot \sin 60^\circ - 30 \cdot \cos 45^\circ + 336,06 \cdot \cos 60^\circ = R_{Ax} + 77,54 = 0; R_{Ax} = -77,54;$$

$$R_{Ay} - 200 + 80 \cdot \cos 60^\circ - 250 - 30 \cdot \sin 45^\circ - 150 + 9,7 \cdot \sin 60^\circ = R_{Ay} - 290,18 = 0;$$

$$R_{Ay} = 290,18 \text{ Н}.$$

Отже, напрями реакцій R_{Ay} та R_B відповідають тому, що зображено на рис. 2.26. Що стосується реакції R_{Ax} , то знак «мінус» свідчить про те, що реальний напрям реакції проти осі Ox . Оскільки $R_{Ax} \perp R_{Ay}$, модуль реакції в точці A обчислимо за формулою

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-77,54)^2 + 290,18^2} = 300,36 \text{ Н}.$$

Відповідь: $R_A = 300 \text{ Н}$, $R_B = 336,06 \text{ Н}$.

1.3. Розрахунок та дослідження плоскої ферми Calculation and study of a flat farm

Зробити розрахунок ферми – це знайти реакції опор і зусилля в усіх стрижнях ферми. При цьому повинні виконуватись такі умови:

- а) всі стрижні ферми невагомі і прямолінійні;
- б) тертя в шарнірах відсутнє;

в) навантаження, які діють на ферму, лежать в її площині і прикладені тільки в вузлах. При виконанні таких умов стрижні ферми будуть зазнавати тільки стиск або розтяг.

Розрахунок ферми починається з знаходження реакцій опор ферми. Після того, як реакції опор знайдені, можна приступати до визначення зусиль в стрижнях ферми.

Для знаходження зусиль в стрижнях можна використати:

- 1) спосіб вирізання вузлів;
- 2) 2) спосіб Ріхтера.

Як це робиться розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 1. У ферми, зображеній на рис. 1.27, знайти реакції опор та зусилля в стрижнях, якщо $F_1 = 12$ кН, $F_2 = 4$ кН.

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї не в'язями є опори в точках А і В.

Звільнимось від в'язей (рис. 1.27). Знайдемо реакції в'язей.

Запишемо рівняння

рівноваги: $\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; X_A = 0;$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; Y_A + R_B - F_1 - F_2 = 0; Y_A + R_B - 12 - 4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0; -12 \cdot 2 - 4 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0;$$

З цих рівнянь маємо, $X_A = 0; Y_A = 10$ кН; $R_B = 6$ кН.

Зробимо перевірку.

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = -Y_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = -10 \cdot 4 + 12 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 0.$$

Тепер перейдемо до обчислення зусиль в стрижнях ферми. Але спочатку перевіримо, чи є дана ферма статично визначена, тобто, чи виконується для

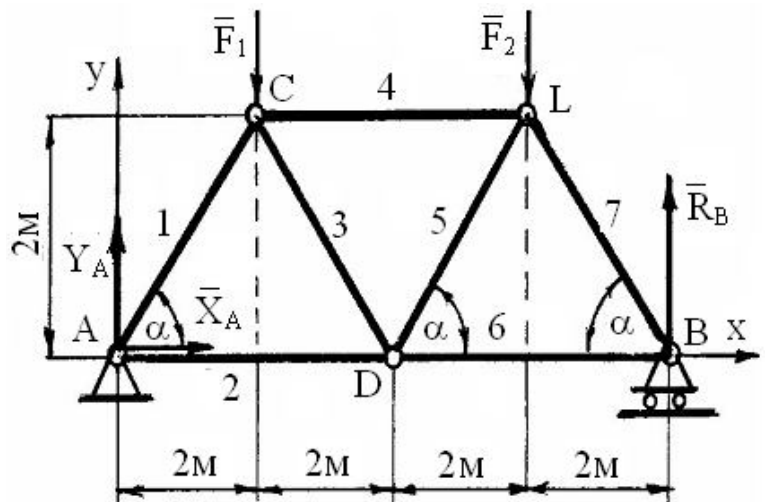


Рис. 1.27. До прикладу 1

неї залежність $k = 2n - 3$. Тут число вузлів $n = 5$, кількість стрижнів $k = 7$.
 $k = 2n - 3$; $7 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$ тобто ця ферма статично визначена і жорстка.

2.Обчислення зусиль в стрижнях ферми способом вирізання вузлів.

Вузли ферми знаходяться в точках А, С, D, L, В. Під дією активних сил і опорних реакцій ферма в цілому знаходиться в рівновазі, а це означає, що в рівновазі буде знаходитися і кожний умовно вирізаний її вузол.

Розрахунок потрібно починати з того вузла, де сходяться два стрижня. В даному випадку в вузлах А і В сходяться по два стрижні. Розрахунок почнемо з вузла А. Стрижні 1 і 2, які сходяться в вузлі А ферми, є в'язями для цього вузла. Реакції цих стрижнів спрямуємо по стрижням від вузла (рис. 1.28, а).

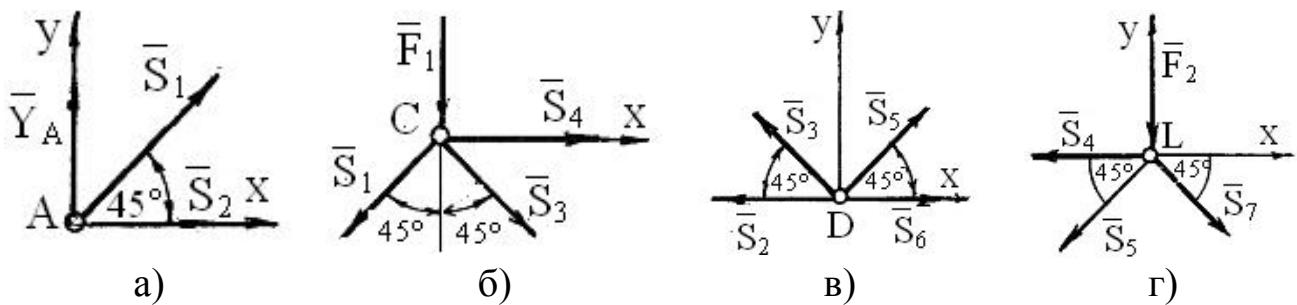


Рис. 1.28. Обчислення зусиль в стрижнях ферми

Якщо під час розв'язування задачі виявиться, що числові значення зусиль в стрижнях додатні, то ці стержні розтягуються, а якщо від'ємні – то стрижні стискаються.

При розв'язуванні задачі необхідно знайти деякі кути. В нашому випадку: $\operatorname{tg} \alpha = 2 / 2 = 1$, $\alpha = 45^\circ$.

Після розгляду вузла А потрібно переходити до слідуєчого вузла, у якого невідомих зусиль не більше двох. Цим вузлом є точка С (рис. 1.28, б). Після вузла С можна розглянути вузол D або вузол L (рис. 1.28, в, г).

$$\text{Для вузла А: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_2 + S_1 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + S_1 \sin 45^\circ = 0; \quad 10 + S_1 \cdot \sqrt{2} / 2 = 0.$$

Звідки знаходимо $S_1 = -10\sqrt{2}$ кН, $S_2 = 10$ кН.

Стиржень 2 розтягується, а стиржень 1 стискається.

$$\text{Для вузла С: } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_4 + S_3 \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -S_1 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ - F_1 = 0.$$

Звідки знаходимо $S_3 = -2\sqrt{2}$ кН (стискається); $S_4 = -8$ кН (стискається).

Для вузла D: $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$; $S_6 + S_5 \cos 45^\circ - S_2 - S_3 \cos 45^\circ = 0$;

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; S_3 \sin 45^\circ + S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

Звідки знаходимо $S_5 = 2\sqrt{2}$ кН (розтягується), $S_6 = 6$ кН (розтягується).

Для вузла L: $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$; $-S_4 - S_5 \cos 45^\circ + S_7 \cos 45^\circ = 0$.

Звідки знаходимо $S_7 = -6\sqrt{2}$ кН (стискується).

Для перевірки розрахунків доцільно для кожного вузла побудувати багатокутник сил. На рис. 1.29 (а, б, в) показані багатокутники сил в вузлах А, В і L.

Для вузла А відкладаємо реакцію Y_A в певному масштабі і проводимо через кінець і початок цього вектора напрями реакцій \bar{S}_1 і \bar{S}_2 до їх перетину. (рис. 1.29, а).

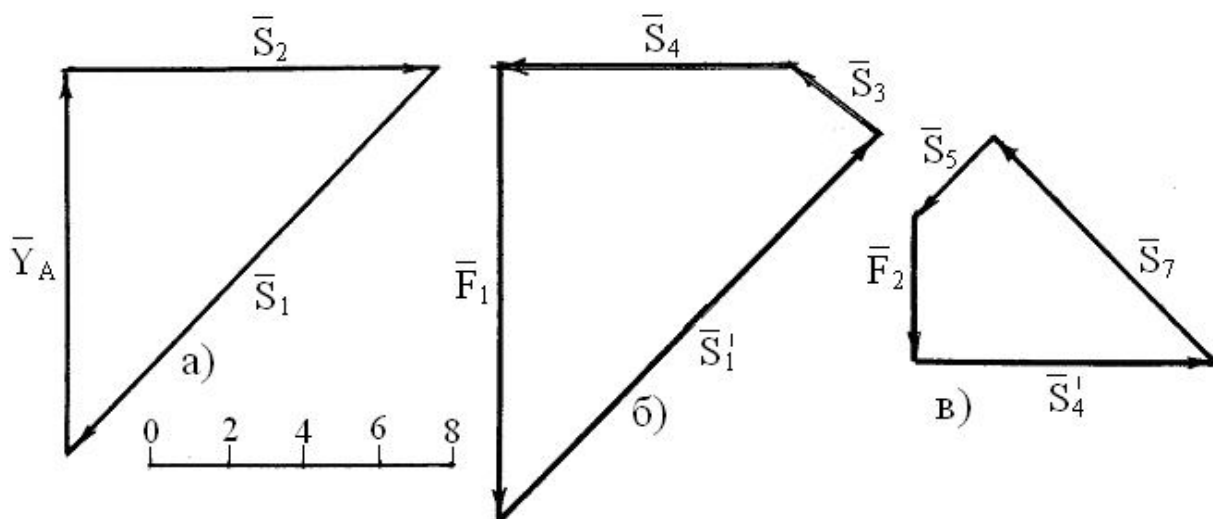


Рис. 1.29. Багатокутники сил

Так як напрям сили Y_A нам відомий, то обходячи трикутник по периметру по напрямку Y_A , розставимо в ньому стрілки і тим самим знайдемо напрям невідомих реакцій \bar{S}_1 і \bar{S}_2 .

Якщо умовно перенести вектори \bar{S}_1 і \bar{S}_2 на стрижні 1 і 2, що сходяться в вузлі А, то ми побачимо, що реакція \bar{S}_1 спрямована по стрижню 1 до цього вузла, отже стрижень 1 стискується; реакція \bar{S}_2 спрямована по стрижню 2 від вузла, отже стрижень 2 розтягується.

Після вузла А розглянемо вузол С. В цьому вузлі сходяться стрижні 3 і 4, зусилля в яких ще не відомі, і стрижень 1, зусилля в якому вже знайдено. Крім цього, на вузол С діє сила \bar{F}_1 . Побудову цього силового багатокутника потрібно починати з відомої сили \bar{F}_1 і \bar{S}_1' . При цьому треба звернути увагу на те, що реакція \bar{S}_1' стрижня 1 з точкою прикладання С дорівнює по

модулю і спрямована протилежно реакції \vec{S}_1 цього стрижня з точкою прикладання А, тобто $\vec{S}_1' = -\vec{S}_1$

Побудова багатокутника в вузлі С показана на рис. 1.29, б, а на рис. 1.29, в побудований багатокутник в вузлі L.

Заміряні в масштабі побудовані реакції стрижнів чисельно повинні мало відрізнятись від знайдених аналітично.

3. Обчислення сил в стрижнях способом розрізу (спосіб Ріттера).

Спосіб Ріттера – це аналітичний спосіб знаходження зусиль в стрижнях ферми. Нехай в фермі (рис. 1.27) необхідно знайти зусилля тільки в стрижнях 2, 3, 4. Щоб знайти, наприклад, зусилля в стрижні 4 способом вирізання вузлів, необхідно було спочатку розглянути рівновагу вузла А, а потім вже вузла С, куди входить цей стрижень. В цій процедурі немає потреби при використанні способу Ріттера.

Розріжемо ферму по стрижням 2, 3, 4 на дві частини і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини. Реакції відкинutoї частини ферми будуть спрямовані по стрижням 2, 3, 4. Як і раніше, ці реакції будемо спрямовувати від вузла (рис. 1.30).

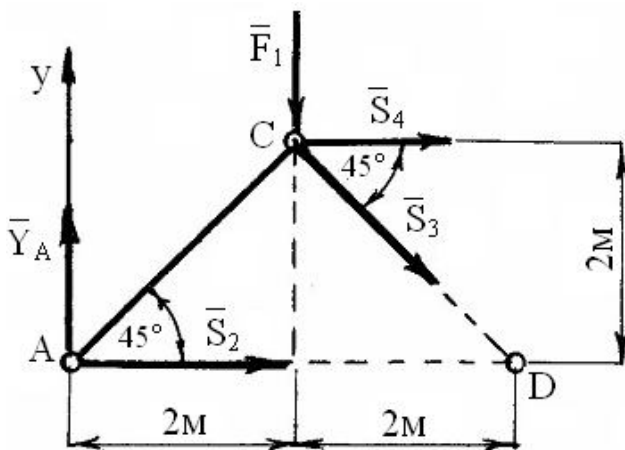


Рис. 1.30. Вузол С

Знайдемо реакцію \vec{S}_4 . Для цього рівняння моментів сил запишемо відносно точки D. Чому відносно D? Тому що моменти невідомих реакцій \vec{S}_2 і \vec{S}_3 відносно цієї точки дорівнюють нулю.

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2 - S_4 \cdot 2 = 0.$$

Звідси знаходимо $S_4 = -8$ кН.

Знайдемо реакцію \vec{S}_2 .

Рівняння моментів сил запишемо відносно точки С.

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -Y_A \cdot 2 + S_2 \cdot 2 = 0. \quad \text{Звідси знаходимо } S_2 = 10 \text{ кН.}$$

Знайдемо реакцію \vec{S}_3 :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - F_1 - S_3 \sin 45^\circ = 0. \quad \text{Маємо } S_3 = -2\sqrt{2} \text{ кН.}$$

Перевага способу Ріттера в тому, що кожне з зусиль знаходиться незалежно від других з одного рівняння. Ця перевага особливо помітна в тих випадках, коли потрібно знайти не всі зусилля в стрижнях ферми, а лише в деяких із них.

Завдання 6. Визначення реакцій опор і зусиль в стрижнях плоскої ферми

Task 6. Determination of the reactions of supports and forces in the rods of a flat truss

Аналітично визначити реакції опор ферми та способом вирізання вузлів знайти зусилля в її стрижнях. На рис. 1.31 показані напрями дії сил залежно від кута α . Способом Ріттера знайти зусилля в стрижнях, номери яких вказані в таблиці. Схеми ферм показані на рис. 1.32-1.34, необхідні числові дані приведені в табл. 1.6. На схемах не показані місце знаходження

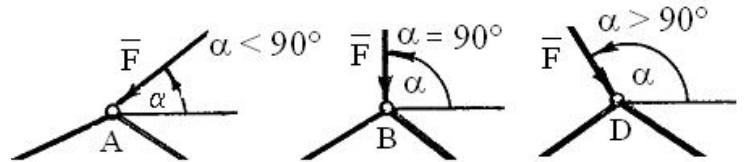


Рис. 1.31.

опор ферми та точки прикладання сил. Ці дані беруться з табл. 1.6. Для ілюстрації виконання завдання 4 на рис. 1.35 побудована ферма з опорами і діючими на неї силами. У ферми, зображеній на рис. 1.35, знайти реакції опор та зусилля в стрижнях, якщо $F_1=6$ кН, $F_2=4$ кН, $F_3=10$ кН. Але спочатку перевіримо, чи є дана ферма статично визначена, тобто, чи виконується для неї залежність $k = 2n - 3$. Тут число вузлів $n = 5$, кількість стрижнів $k = 7$. $7 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$, тобто ця ферма статично визначена і жорстка.

1. Знаходимо реакції в'язей

Розглянемо рівновагу ферми в цілому. Для неї в'язями є опора в точці А (нерухомий шарнір) і опора в точці В (рухомий шарнір). Реакції будуть $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$.

Запишемо рівняння рівноваги ферми:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - F_1 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ - R_B = 0;$$

$$X_A - 6 \cdot 0,5 + 4 \cdot \sqrt{2} / 2 - R_B = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_2 - F_3 \sin 45^\circ = 0;$$

$$Y_A - 6 \cdot \sqrt{3} / 2 - 4 - 10 \cdot \sqrt{2} / 2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad F_1 \cos 60^\circ \cdot 4,5 - F_3 \cos 45^\circ \cdot 3 - F_3 \sin 45^\circ \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + R_B \cdot 3 = 0;$$

$$6 \cdot 0,5 \cdot 4,5 - 10 \cdot \sqrt{2} / 2 \cdot 3 - 10 \cdot \sqrt{2} / 2 \cdot 2 - 10 \cdot 4 + R_B \cdot 3 = 0.$$

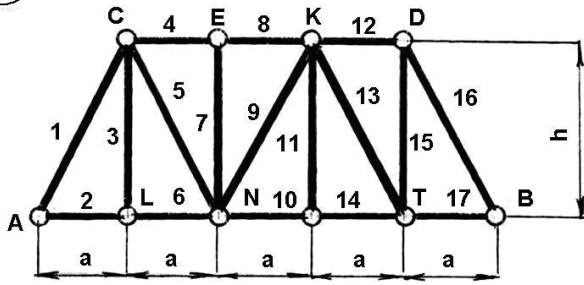
Розв'язуючи ці рівняння, маємо: $X_A = 8,55$ кН; $Y_A = 16,27$ кН;

$R_B = 12,62$ кН.

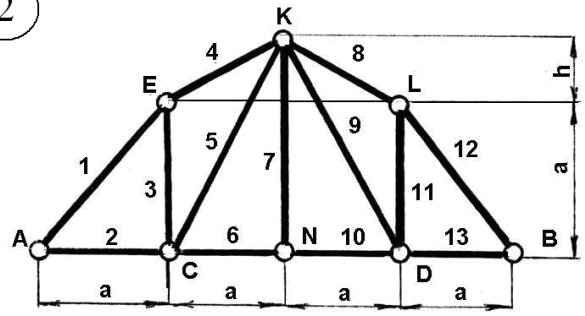
Перевірка:
$$\sum_{k=1}^n M_K(\bar{F}_k) = X_A \cdot 4,5 - Y_A \cdot 4 + F_1 \sin 60^\circ \cdot 4 + F_3 \cos 45^\circ \cdot 1,5 \cdot 2 +$$

$$+ F_3 \cdot \sin 45^\circ - R_B \cdot 1,5 = -0,05 \text{ кН}.$$

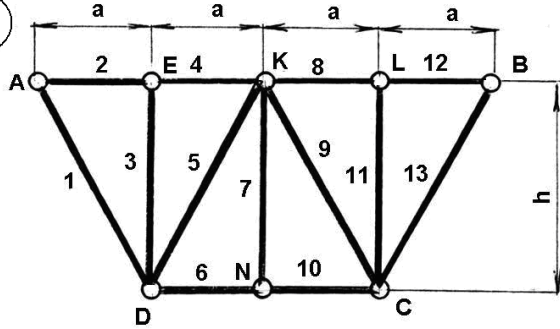
1



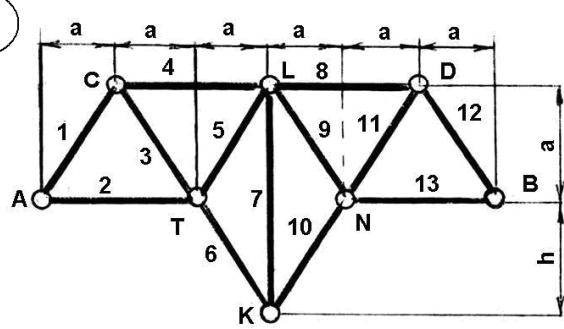
2



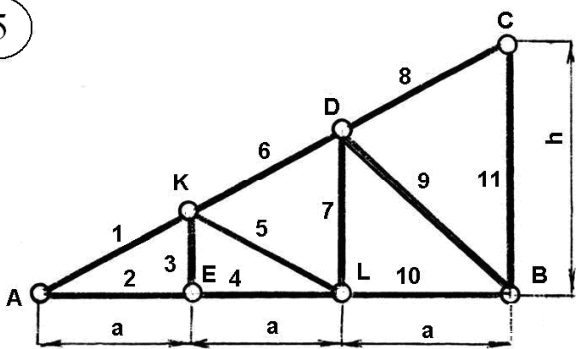
3



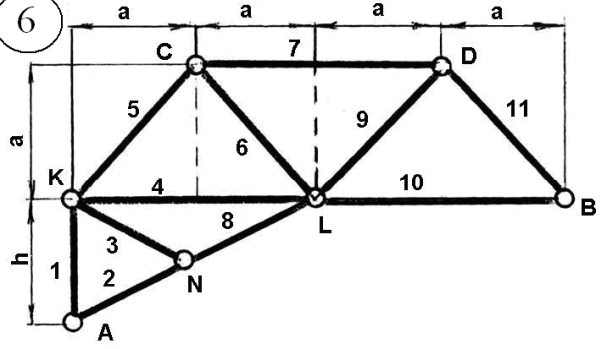
4



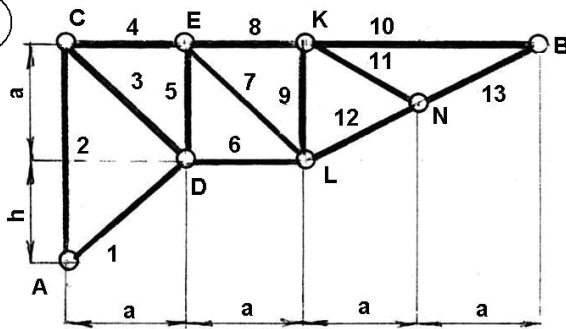
5



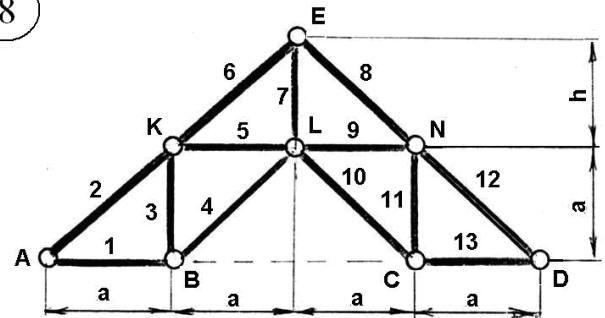
6



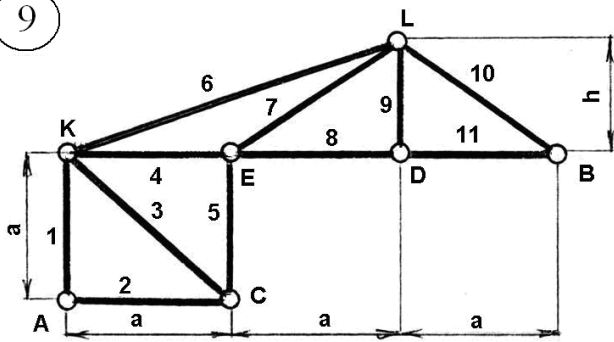
7



8



9



10

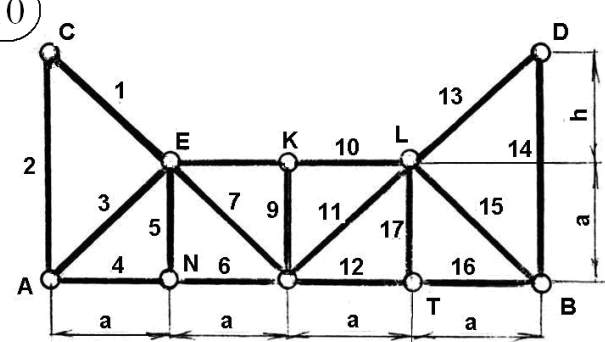


Рис. 1.32

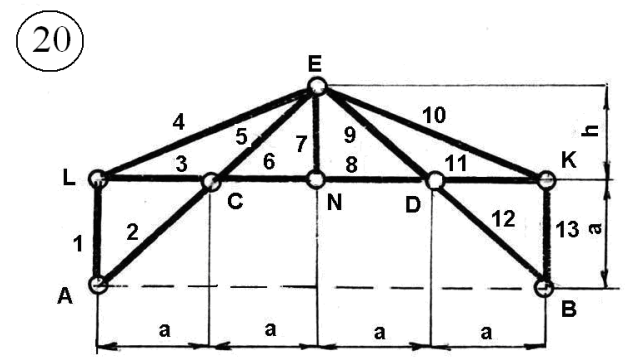
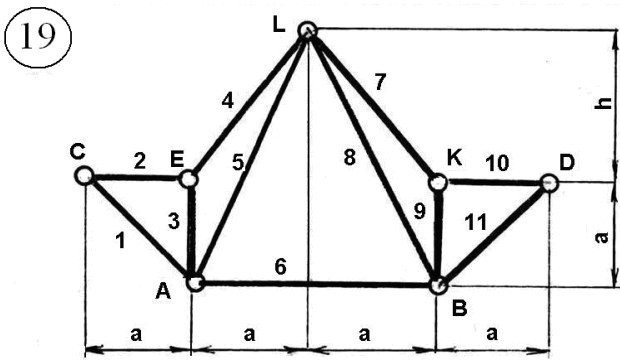
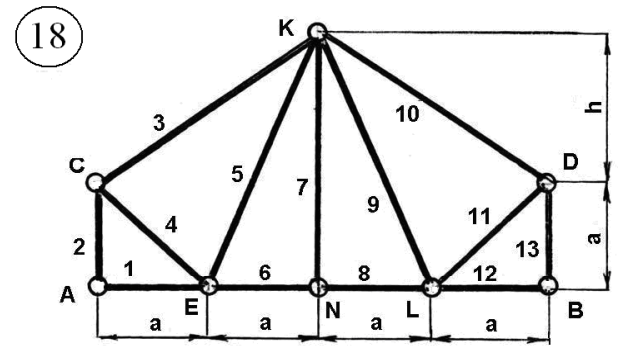
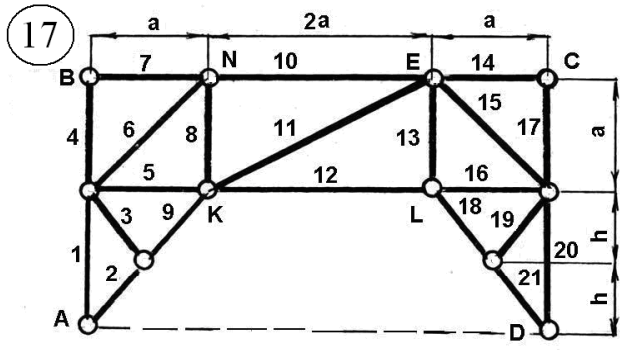
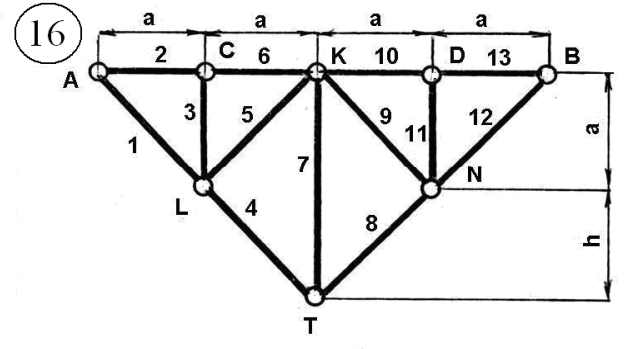
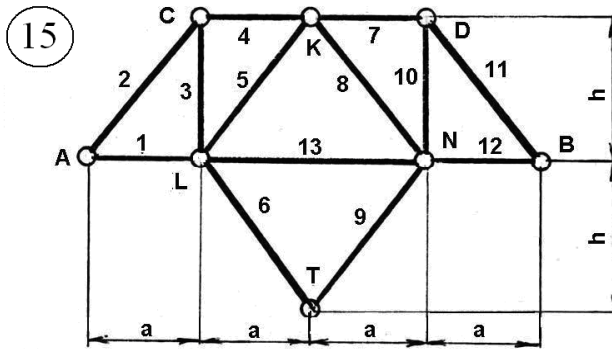
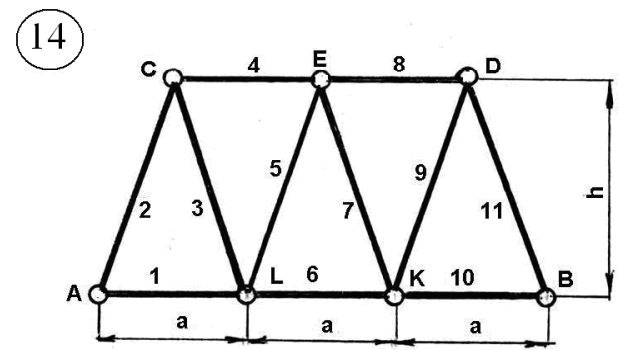
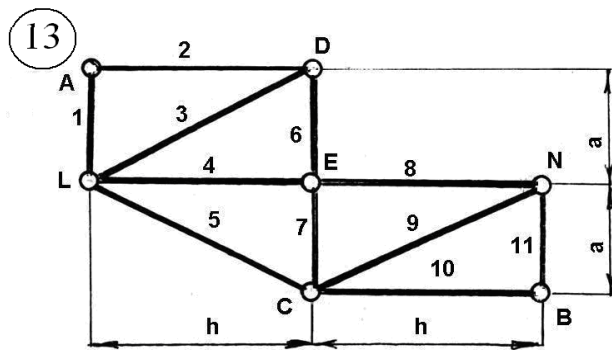
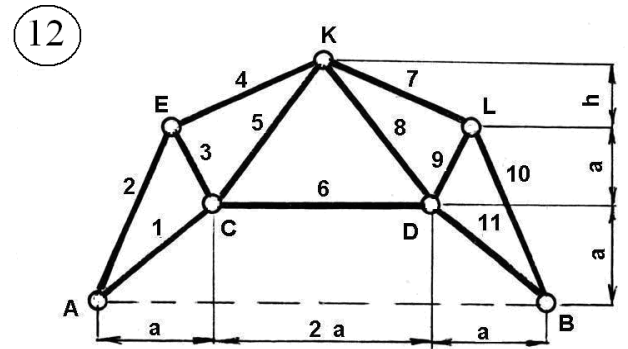
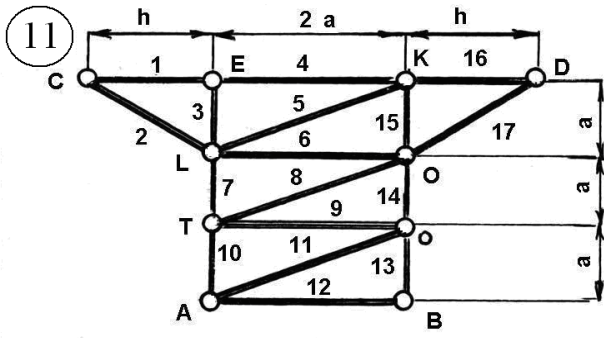
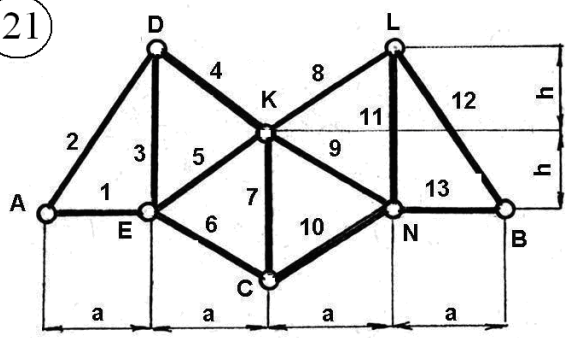
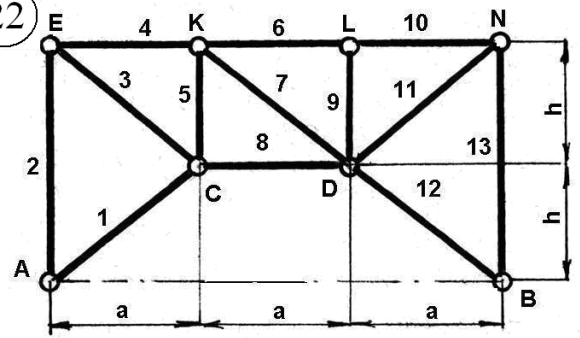


Рис. 1.33

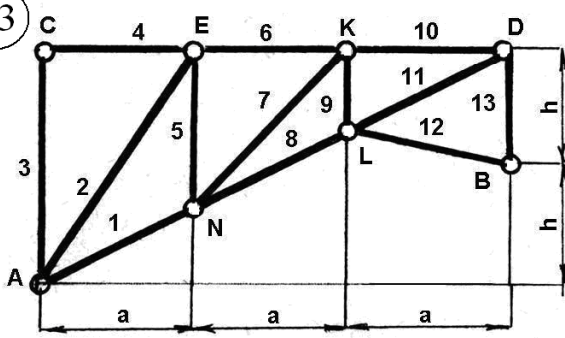
21



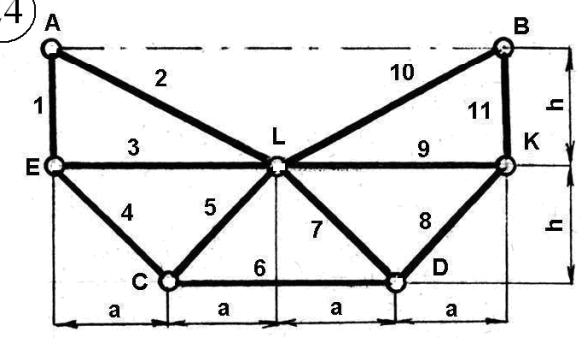
22



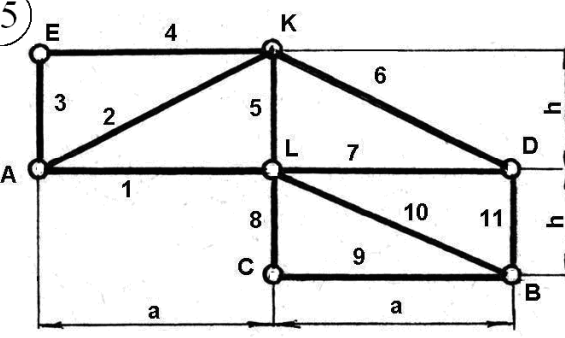
23



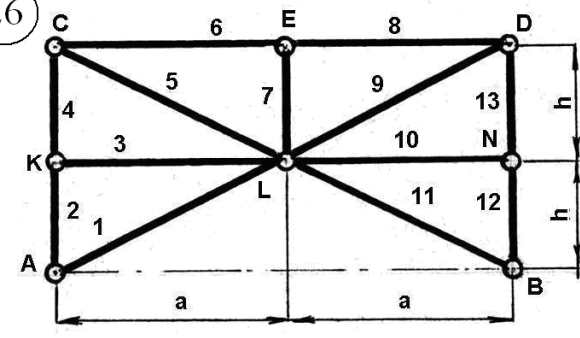
24



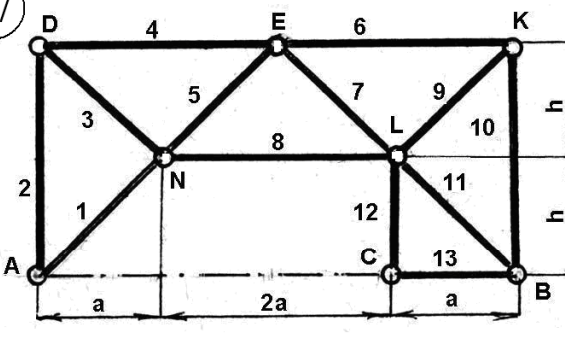
25



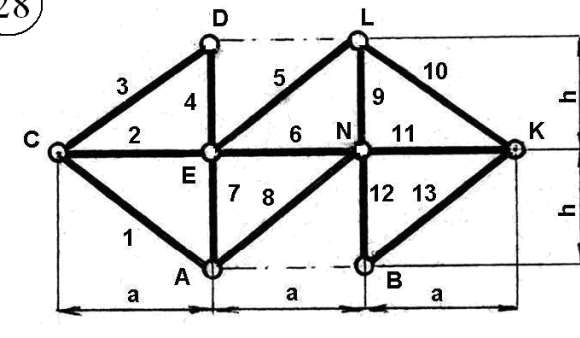
26



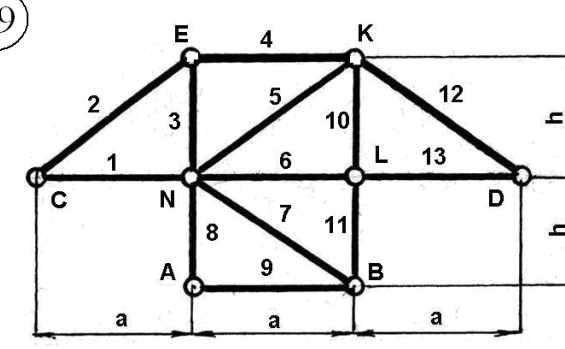
27



28



29



30

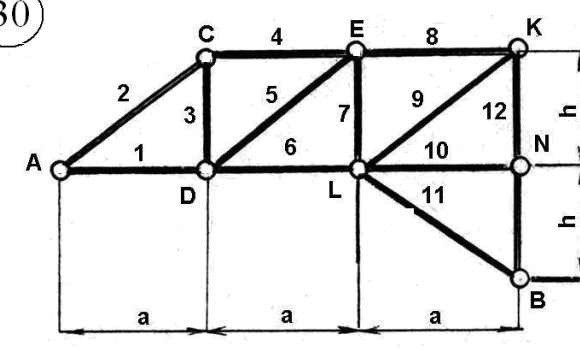




Рис. 1.34

Таблиця 2.6. Вихідні дані для розрахунку ферми

Варіант	Схема	Опори та їх місце знаход.			Розміри ферми		Зосереджені сили									Зусилля в стрижнях за способом Ріттера
				β , град	a, м	h, м	F_1			F_2			F_3			
							F_1 , кН	точка прикл.	α_1 , град	F_2 , кН	точка прикл.	α_2 , град	F_3 , кН	Точка прикл.	α_3 , град	
1	1	A	B	30	2	2	20	C	60	15	D	120	10	N	30	8, 9, 10
2	1	L	T	0	3	2	15	E	45	20	K	60	14	D	90	12,13,14
3	1	B	A	45	4	4	10	C	45	12	E	75	10	D	60	4, 5, 6
4	1	A	T	0	3	3	12	L	45	14	K	60	12	D	120	7, 8, 9
5	2	A	B	30	4	1	8	E	45	10	K	60	14	L	90	4, 5, 6
6	2	C	D	0	6	2	10	A	90	12	B	60	16	L	60	8, 9, 10
7	2	C	B	30	4	2	12	E	60	14	K	90	18	N	60	4, 5, 7
8	2	B	C	0	3	2	4	E	70	8	A	120	10	L	45	8, 9, 11
9	2	D	C	30	4	3	6	A	90	10	N	135	12	L	60	4, 7, 10
10	3	D	C	45	2	3	10	A	90	12	L	60	14	B	45	4, 5, 7
11	3	A	B	30	4	3	12	D	180	14	K	60	16	L	45	8, 9, 10
12	3	D	B	45	4	4	6	A	60	10	K	75	12	N	40	8, 11, 13
13	3	A	C	0	2	3	18	D	120	20	K	60	22	L	45	4, 5, 6
14	4	A	B	30	2	2	16	C	45	17	D	60	20	K	0	4, 5, 6
15	4	C	D	45	4	3	10	A	120	12	B	60	16	L	90	8, 9, 10
16	4	B	A	45	2	3	12	C	180	16	L	60	8	T	90	4, 5, 10
17	4	C	B	30	4	4	9	A	135	10	L	90	12	D	60	6, 7, 8
18	4	K	B	30	6	4	20	A	120	25	D	45	18	L	90	8, 9, 10
19	5	A	B	45	4	5	14	K	120	16	D	90	20	L	60	4, 5, 6
20	5	E	C	90	3	4	8	A	150	10	D	90	15	B	75	6, 7, 10
21	5	B	A	0	4	4	12	K	60	14	L	45	16	C	120	4, 7, 8
22	5	C	A	30	3	5	9	E	120	12	D	90	14	B	60	6, 9, 10
23	6	A	B	60	2	3	16	K	120	18	D	60	20	L	90	5, 4, 8
24	6	K	B	30	4	3	10	A	180	12	C	120	16	D	45	7, 6, 8
25	6	C	B	0	5	4	6	A	0	10	L	90	12	D	60	7, 9, 10
26	6	B	A	30	3	4	8	K	135	12	C	60	14	D	120	7, 8, 9
27	6	L	A	0	2	4	7	C	45	9	D	0	11	B	75	5, 4, 9
28	7	A	B	30	4	2	14	C	60	16	K	135	10	L	0	6, 7, 8
29	7	C	B	45	3	3	10	E	120	12	D	90	16	N	60	4, 5, 6
30	7	B	A	0	1,5	2	12	C	150	10	K	60	14	L	0	4, 12, 10

2.Обчислення зусиль в стрижнях ферми способом вирізання вузлів Calculation of forces in the truss rods by cutting nodes

Розрахунок почнемо з вузла А, де сходяться два стрижня 1 і 2. (рис. 1.36, а).

Запишемо рівняння рівноваги:

$$a) \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad X_A - S_2 = 0; \quad X_A = S_2; \quad S_2 = 8,55 \text{ кН};$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + S_1 = 0; \quad S_1 = -Y_A; \quad S_1 = -16,27 \text{ кН.}$$

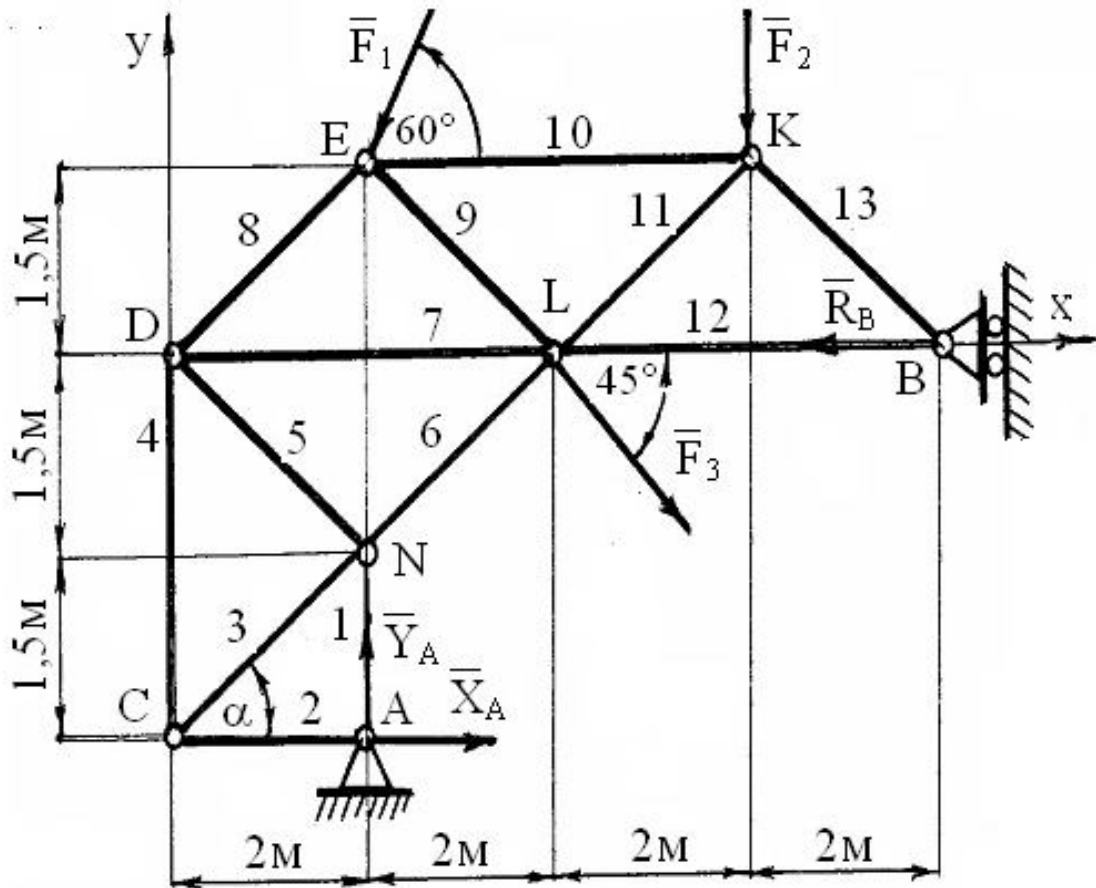


Рис. 1.35. Ферма

Розглянемо рівновагу вузла С (рис. 1.36, б).

$$\text{б) } \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad S_2 + S_3 \cos \alpha = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad S_4 + S_3 \sin \alpha = 0.$$

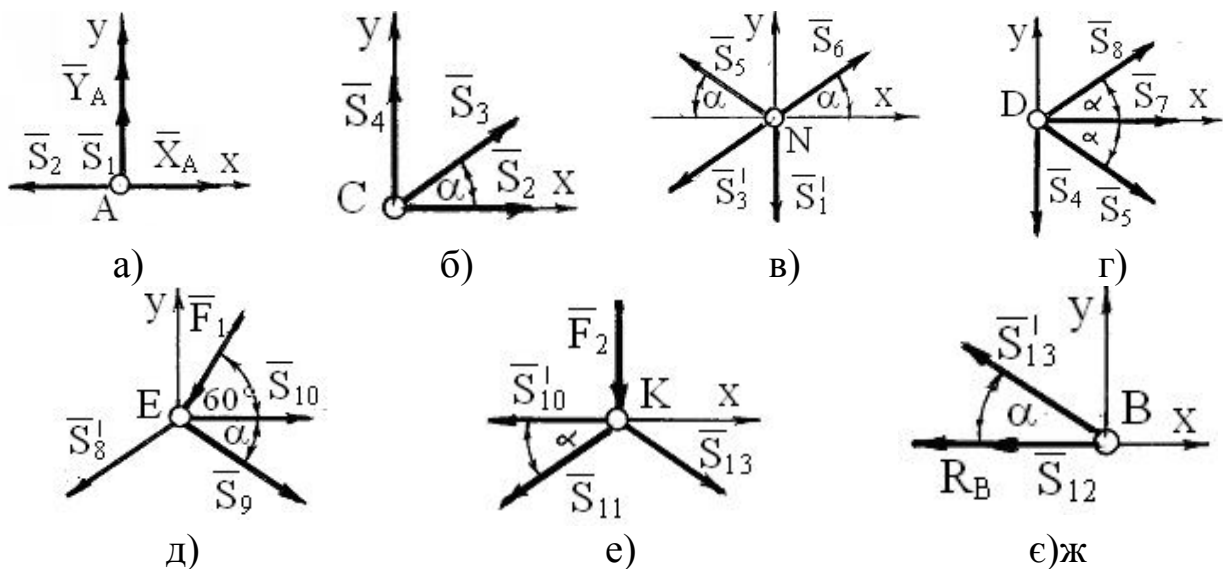


Рис. 1.36. Реакції вузлів ферми

Знайдемо значення функцій $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$:

$$CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ м}; \quad \sin \alpha = \frac{AN}{CN} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6;$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{CN} = \frac{2}{2,5} = 0,8. \quad \sin \alpha = 0,6; \quad \cos \alpha = 0,8; \quad \alpha = 39,9^\circ.$$

Тоді із системи рівнянь б) маємо: $S_3 = -10,69 \text{ кН}; S_4 = 6,41 \text{ кН}.$

Для вузла N (рис. 1.36, в):

$$в) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_6 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_6 \sin \alpha - S_3 \sin \alpha + S_5 \sin \alpha - S_1 = 0.$$

Маємо: $S_5 = -13,56 \text{ кН}; S_6 = -24,25 \text{ кН}.$

Для вузла D (рис. 1.36, г):

$$г) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_7 + S_8 \cos \alpha + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_8 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha - S_4 = 0.$$

Маємо: $S_8 = -2,88 \text{ кН}; S_7 = 13,15 \text{ кН}.$

Для вузла E (рис. 1.36, д):

$$д) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad S_{10} + S_9 \cos \alpha - S_8 \cos \alpha - F_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -F_1 \sin 60^\circ - S_9 \sin \alpha - S_8 \sin \alpha = 0.$$

Маємо: $S_9 = -5,78 \text{ кН}; S_{10} = +5,32 \text{ кН}.$

Для вузла K (рис. 1.36, е):

$$е) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -S_{10} - S_{11} \cos \alpha + S_{13} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -F_2 - S_{11} \sin \alpha - S_{13} \sin \alpha = 0.$$

Маємо: $S_{13} = 0 \text{ кН}; S_{11} = -6,65 \text{ кН}.$

Для вузла B (рис. 1.36, є):

$$є) \sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -R_B - S_{12} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad S_{13} \sin \alpha = 0.$$

Маємо: $S_{12} = -12,62 \text{ кН}.$

Для перевірки розрахунків доцільно для кожного вузла побудувати багатокутник сил. На рис. 1.37 показані багатокутники сил для вузлів, що

розглядалися. Методика побудовання багатокутників приведена в прикладі 1 стор. 36.

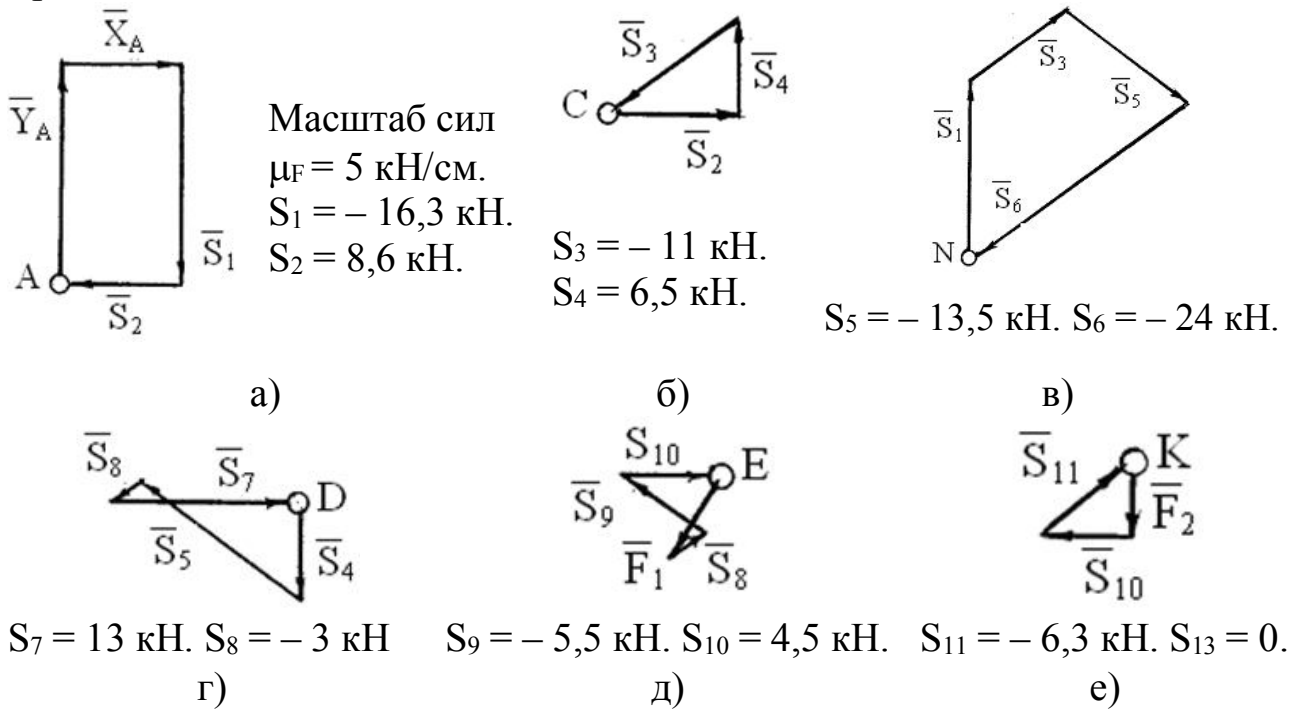


Рис. 1.37. Багатокутники сил

3. Зусилля в стрижнях 6, 7, 8 знайдемо за способом Ріттера

Для цього розріжемо ферму по цих стрижнях і розглянемо, наприклад, ліву половину ферми. Дія правої частини ферми на ліву передається по стрижням 6, 7, 8. Реакції цих стрижнів спрямуємо від вузлів по стрижням (рис. 1.38).

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки L:

$$\sum_{k=1}^n M_L(\vec{F}_k) = 0; \quad -S_8 \sin \alpha \cdot 4 - Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0;$$

$$-S_8 \sin \alpha \cdot 4 - 16,27 \cdot 2 + 8,55 \cdot 3 = 0.$$

Маємо $S_8 = -2,87 \text{ кН.}$

Складаємо рівняння моментів сил відносно точки D:

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0;$$

$$S_6 \cos \alpha \cdot 1,5 + S_6 \sin \alpha \cdot 2 + Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 3 = 0;$$

$$S_6 \cos \alpha \cdot 1,5 + S_6 \sin \alpha \cdot 2 + 16,27 \cdot 2 + 8,55 \cdot 3 = 0. \text{ Маємо } S_6 = -24,24 \text{ кН.}$$

Запишемо рівняння моментів сил відносно

точки N: $\sum_{k=1}^n M_N(\vec{F}_k) = 0;$

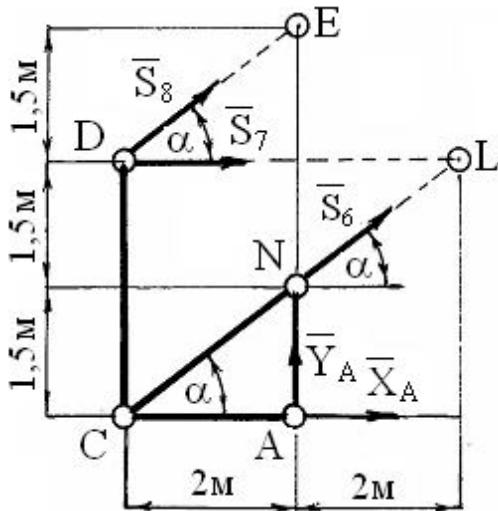


Рис. 2.38.

$$-S_7 \cdot 1.5 - S_8 \cos \alpha \cdot 1.5 - S_8 \sin \alpha \cdot 2 + X_A \cdot 1.5 = 0.$$

$$-S_7 \cdot 1.5 - S_8 \cos \alpha \cdot 1.5 - S_8 \sin \alpha \cdot 2 + X_A \cdot 1.5 = 0;$$

$$-S_7 \cdot 1.5 - (-2,87) \cdot 0.8 \cdot 1,7 - (-2,87) \cdot 0,6 \cdot 2 + X_A \cdot 1,5 = 0. \text{ Маємо } S_7 = 13,14 \text{ кН.}$$

Ці результати добре узгоджуються з розрахунками, що отримані за допомогою способу вирізання вузлів. Знайдені зусилля зведемо в одну табл. 1.7.

Таблиця 1.7. Числове значення сили стрижнів та їх знак

Номер стрижня	1	2	3	4	5	6	7
Знак сили	-	+	-	+	-	-	+
Сила, кН	16,27	8,55	10,69	6,41	13,56	24,25	13,15
Номер стрижня	8	9	10	11	12	13	
Знак сили	-	-	+	-	-		
Сила, кН	2,88	5,78	5,32	6,65	12,62	0	

1.4. Визначення реакцій опор складеної конструкції

Determination of the reactions of the supports of the composite structure

Розглянемо тепер задачі на рівновагу не одного тіла, а системи тіл, які вільно опираються один до одного, або з'єднаних між собою певним чином, і знаходяться під дією довільної системи сил. Таку систему тіл називають *складеною системою*.

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;

2) початкову конструкцію відразу розчленили на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Приклад 1. Балка АВ складається з двох балок ВС і АС, з'єднаних між собою шарніром С. На складену балку АВ діє сила в 20 кН, пара сил з моментом 30 кНм і рівномірно розподілене навантаження інтенсивності 2 кН/м (рис. 1.39, а). Не враховуючи вагу конструкції, знайти реакції опор і шарніра С.

Розглянемо рівновагу балки АВ в цілому. Для неї в'язями є нерухомий шарнір А, рухомий шарнір D і невагомий стрижень ВL. Маємо чотири невідомих X_A , Y_A , R_D , R_B , а незалежних рівнянь для їх знаходження можна скласти тільки три. (рис. 1.39, а). Тому дану складену за допомогою шарніра

С систему двох балок розріжемо по шарніру С на дві балки ВС і СА і розглянемо рівновагу кожної з балок окремо (рис. 1.39, б, в).

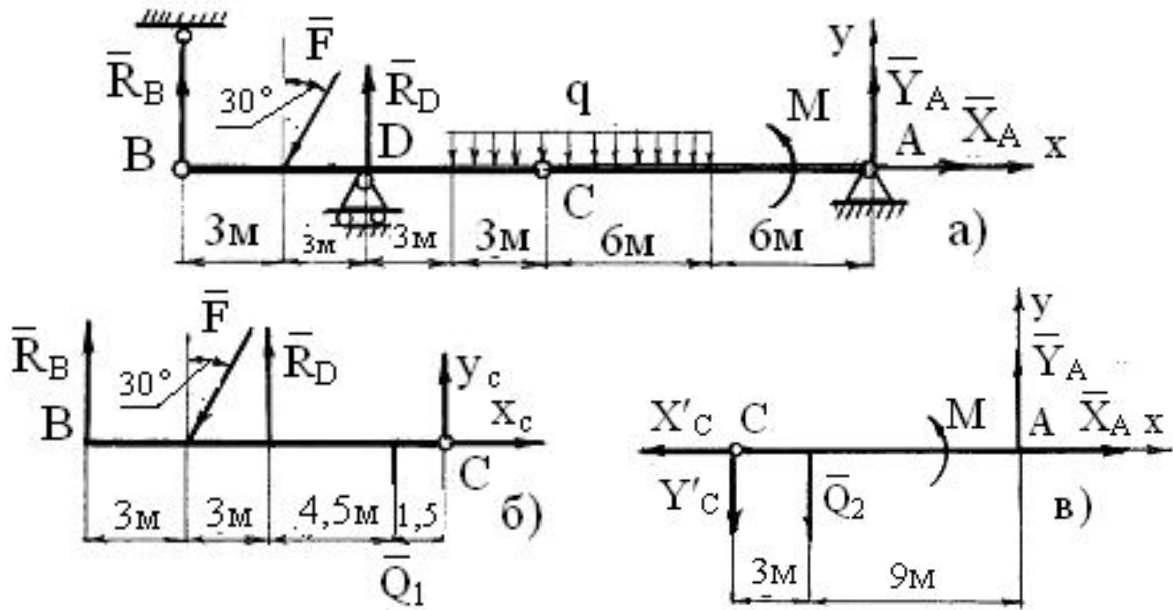


Рис. 1.39. До прикладу 1

Дія балки АС на балку ВС передається через шарнір С і, враховуючи те, що напрям дії невідомий, то розкладемо реакцію \vec{R}_C на дві складові X_C , Y_C (рис. 1.39, б). Аналогічно і для балки АС, тільки реакція \vec{R}'_C буде спрямована в протилежну сторону реакції \vec{R}_C . Чисельно $X'_C = X_C$, $Y'_C = Y_C$, а те що вони спрямовани в протилежні сторони враховано на рис. 1.39, в. Розподілене навантаження, що діє на балку ВС, замінимо зосередженою силою $Q_1 = q \cdot l_1 = 2 \cdot 3 = 6$ кН. Аналогічно, для балки АС маємо $Q_2 = q \cdot l_2 = 2 \cdot 6 = 12$ кН.

Маємо тепер шість невідомих X_A , Y_A , R_D , R_B , X_C , Y_C . Для знаходження цих невідомих маємо скласти шість рівнянь рівноваги.

Ці шість рівнянь можна отримаи, якщо розглянути рівновагу балок АВ і ВС або балок АВ і АС, або балок ВС і АС. Ми вибираємо третій варіант.

Розглянемо рівновагу балок ВС і АС (рис 1.39, б, в).

Складемо рівняння рівноваги балки ВС:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_C - F \sin 30^\circ = 0; \quad X_C - 20 \cdot 0,5 = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad R_B - F \cos 30^\circ + R_D - Q_1 + Y_C = 0; \quad (1.7)$$

$$R_B - 20 \cdot 0,5 + R_D - Q_1 + Y_C = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_B \cdot 12 + F \cos 30^\circ \cdot 9 - R_D \cdot 6 + Q_1 \cdot 1,5 = 0; \quad (1.8)$$

$$-R_B \cdot 12 + 20 \cdot 0,5 \cdot 9 - R_D \cdot 6 + Q_1 \cdot 1,5 = 0.$$

Складемо рівняння рівноваги балки АС:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad -X'_C + X_A = 0; \quad (1.9)$$

$$\text{ж} \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad -Y'_C - Q_2 + Y_A = 0; \quad (1.10)$$

$$\sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -Q_2 \cdot 3 + Y_A \cdot 12 + M = 0; \quad (1.11)$$

$$-Q_2 \cdot 3 + Y_A \cdot 12 + 30 = 0.$$

Розв'язавши рівняння (6)-(11), маємо: $X_A = 10$ кН, $Y_A = 0,5$ кН, $R_D = 42,16$ кН, $R_B = -7,34$ кН, $X_C = 10$ кН, $Y_C = -11,5$ кН.

Для перевірки цих результатів складемо одне з рівнянь рівноваги балки АВ (рис. 1.39, а).

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) &= -R_B \cdot 12 + F \cos 30^\circ \cdot 9 - R_D \cdot 6 + Q_1 \cdot 1,5 - Q_2 \cdot 3 + M + Y_A \cdot 12 = \\ &= +7,34 \cdot 12 + 20 \cdot 0,866 \cdot 9 - 42,16 \cdot 6 + 6 \cdot 1,5 - 12 \cdot 3 + 30 + 0,5 \cdot 12 = 0. \end{aligned}$$

Приклад 2. Однорідний брус 2 вагою 4 кН вільно опирається в точці В на однорідну балку 1 вагою 6 кН. Знайти опорні реакції в точках А і D і тиск, який брус 2 спричиняє на балку 1. (рис. 1.43, а).

Розглянемо окремо рівновагу бруса BD і балки АС (рис. 1.43, б, в).

Запишемо рівняння рівноваги бруса BD:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_D = 0; \quad (1) \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad R_B - Q_2 + Y_D = 0; \quad (1.12)$$

$$\sum_{k=1}^n M_D(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_B \cdot 4 + Q_2 \cdot 2 = 0. \quad (1.13)$$

Запишемо рівняння рівноваги балки АС:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad X_A = 0; \quad (4) \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad R_B = R'_B; \quad M_A - R'_B \cdot 2 - Q_1 \cdot 3 = 0. \quad (1.14)$$

Розв'язуючи рівняння (12)-(14), маємо:

$$X_A = X_D = 0, \quad Y_A = 8 \text{ кН}, \quad M_A = 22 \text{ кНм}, \quad Y_D = 2 \text{ кН}, \quad R'_B = 2 \text{ кН}.$$

Перевіримо результати розрахунків. Складемо одне з рівнянь рівноваги конструкції в цілому (рис. 1.43, а).

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = M_A - Y_A \cdot 2 - Q_1 \cdot 1 - Q_2 \cdot 2 + Y_D \cdot 4 = 22 - 8 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 0.$$

Завдання 7. Розрахунок та дослідження збірної конструкції

Task 7. Calculation and study of prefabricated structures

Плоска рама (рис. 1.40-1.42) складається з двох частин, які з'єднані шарніром С. На раму діють сили P_1 і P_2 і пара сил з моментом M . До окремих частин рами прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q . Геометричні розміри рами визначаються параметрами a, b, c, h , а кути φ_1 і φ_2 вказують напрямки дії сил P_1 і P_2 .

За даними розмірами і силовими навантаженнями знайти опорні реакції рами.

Значення силових навантажень розмірів і кутів взяти з табл. 1.7.

Таблиця 1.7. Значення силових навантажень розмірів і кутів

Варіант	P_1	P_2	M	q	a	b	c	h	φ_1	φ_2
	кН		кН·м	кН/мм	м				град	
1	6	4	10	10	4	4	3	2	30	30
2	3	2	12	15	5	3	3	1	45	45
3	5	6	8	20	4	3	4	6	60	60
4	4	7	14	22	3	6	2	3	75	75
5	3	6	10	18	6	2	3	4	30	30
6	6	5	16	15	2	2	4	3	45	45
7	8	2	14	24	4	4	2	6	30	30
8	7	6	8	28	3	5	2	1	60	60
9	7	6	8	17	5	3	4	2	75	75
10	5	3	11	30	4	6	4	3	45	45

Приклад виконання завдання. Плоска рама, що складається з двох частин, з'єднаних шарніром С, зображена на рис. 1.44, а. Величини силових навантажень, розміри і кути мають значення: $P_1 = 9$ кН, $P_2 = 4$ кН, $M = 10$ кН м, $q = 0,5$ кН/м, $a = 7$ м, $b = 4$ м, $c = 3$ м, $h = 2$ м, $\varphi_1 = 15^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$. Знайти опорні реакції R_A і R_B .

Розв'язання. На рис. 1.44, б зображено раму в плоскій системі координат з навантаженнями і реакціями в опорах.

Обидві опори рами є нерухомими шарнірами, тому реакції R_A і R_B показуємо у вигляді складових X_A, Y_A і X_B, Y_B .

Складаємо рівняння рівноваги для плоскої довільної системи сил

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Згідно з рис. 2.42, б вони запишуться:

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = X_A + P_1 \cos\varphi_1 - P_2 \cos\varphi_2 + X_B = 0; \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = Y_A - q \cdot b + P_1 \sin\varphi_1 - P_2 \sin\varphi_2 + Y_B = 0; \quad (1.16)$$

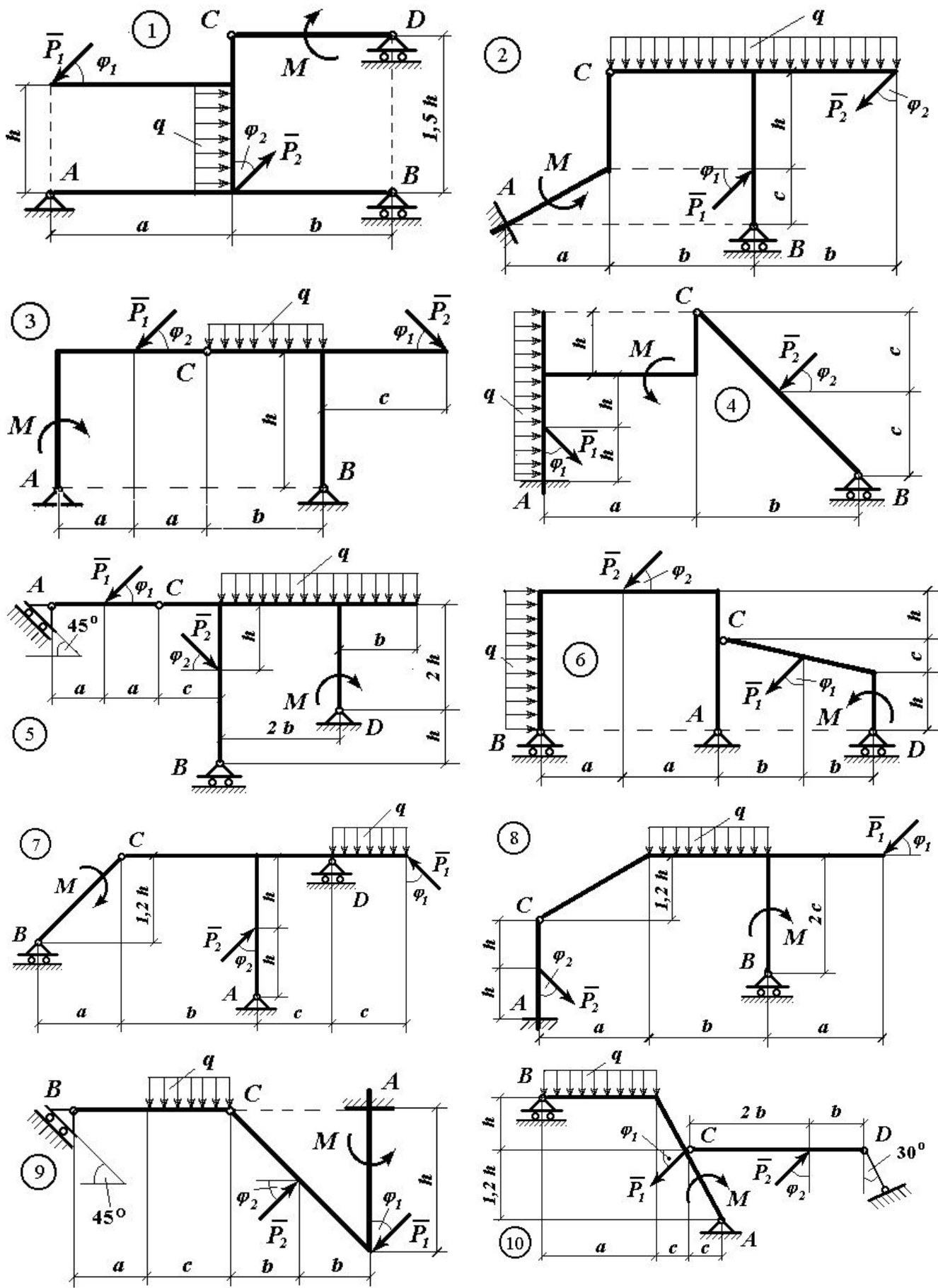


Рис. 1.40

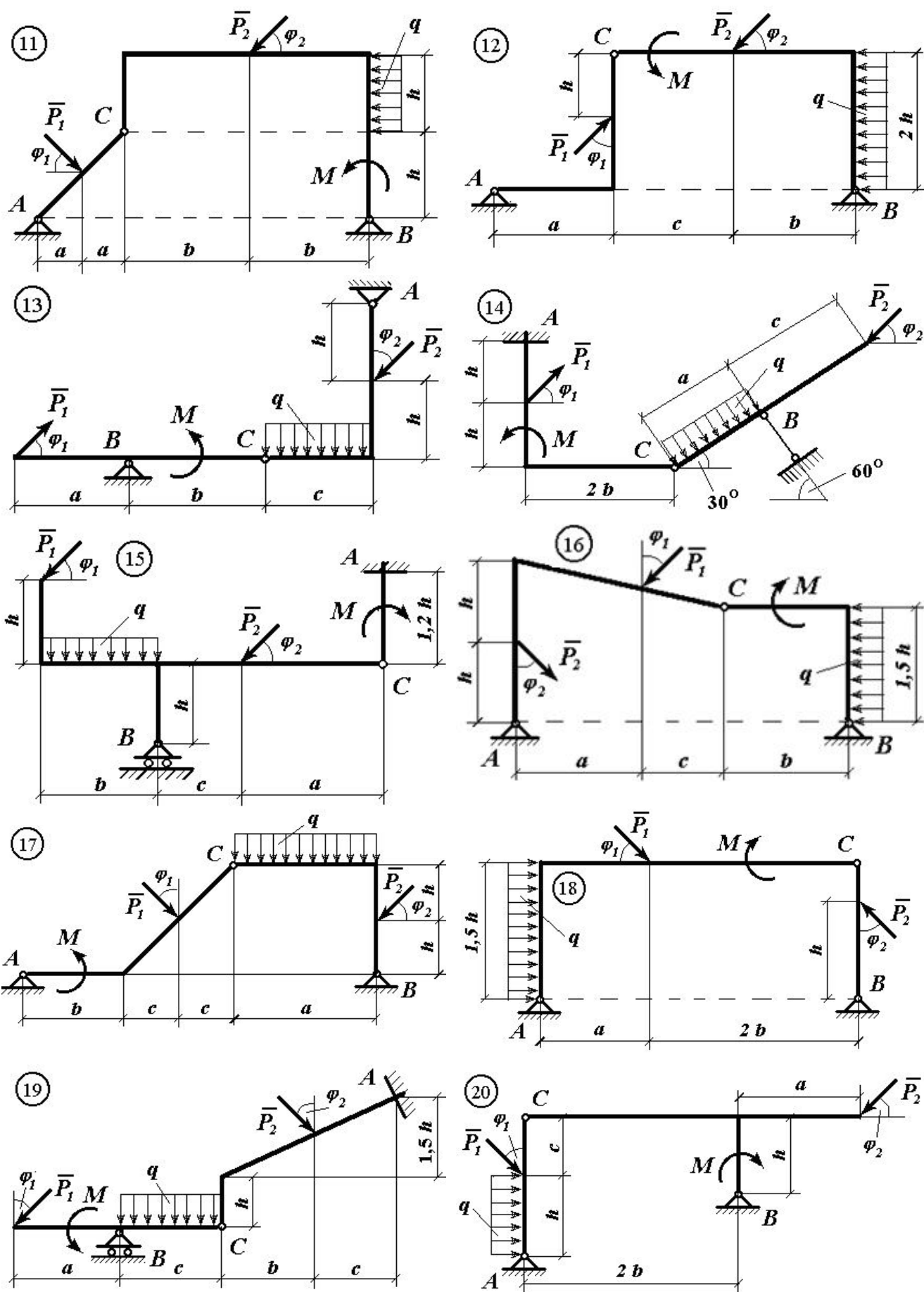


Рис. 1.41

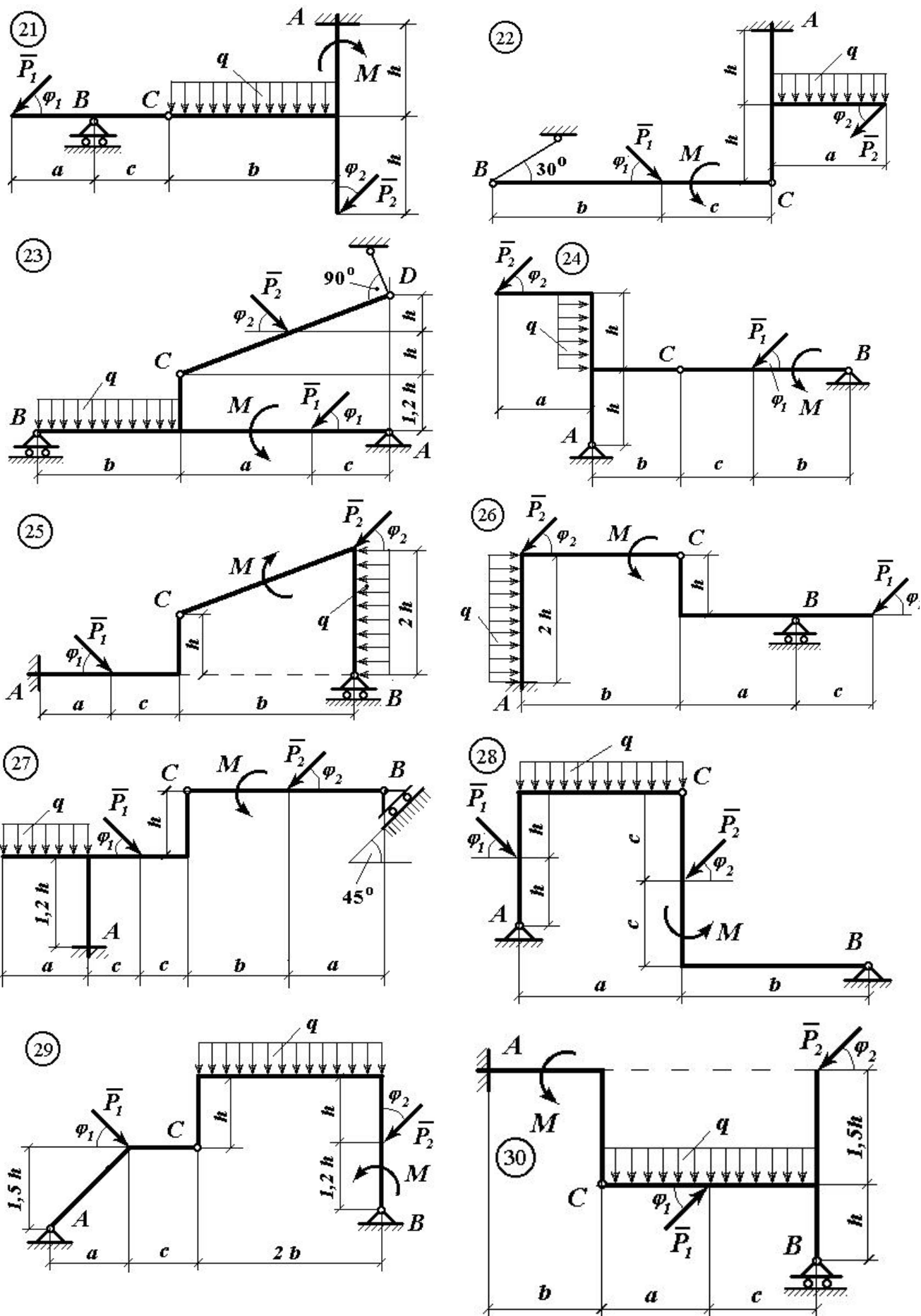


Рис. 1.42

$$\Sigma M_C(F_i) = -Y_A \cdot a - X_A \operatorname{tg} \alpha + M - q \cdot b^2 / 2 + P_1 \sin \varphi_1 \cdot b + Y_B (b + c) + X_B \cdot h + P_2 \cos \varphi_2 \cdot h - P_2 \sin \varphi_2 \cdot (b + c) = 0 . \quad (1.17)$$

Ці три рівняння розв'язати неможливо, так як в них є чотири невідомих. Виростаємо їх для перевірки розв'язку. Поставлену задачу розв'яжемо методом розчленування. Розглядаємо раму по частинах, роз'єднавши її по шарніру С. Частина АС збірної конструкції зображена на рис. 1.44, а.

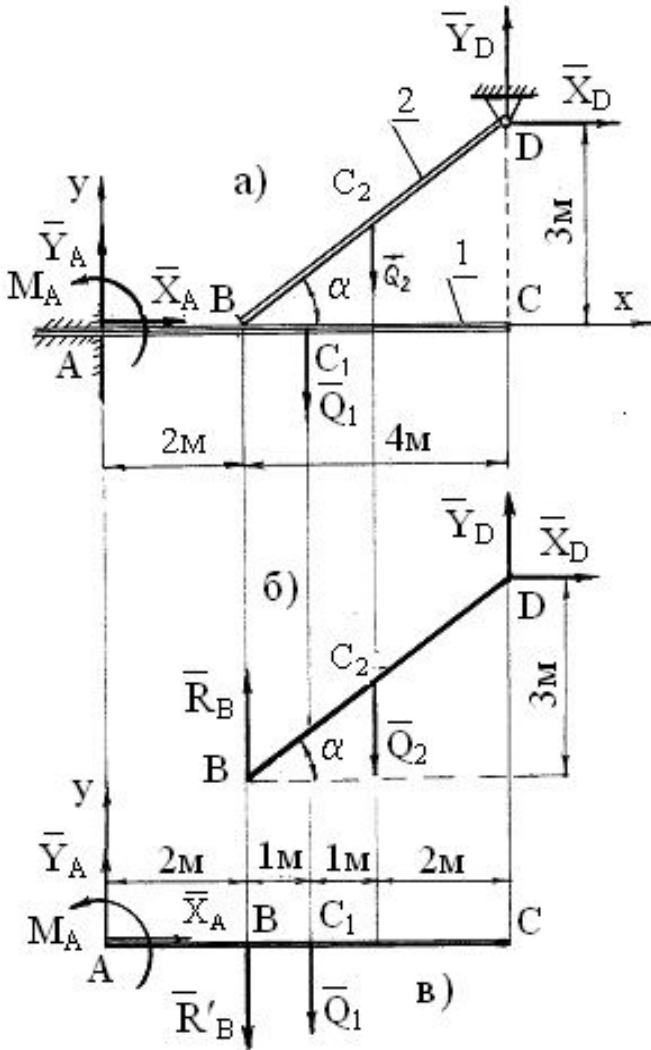


Рис. 1.43. До прикладу 2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= X_A + X_C = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= Y_A + Y_C = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) &= M + Y_C \cdot a + \\ &+ X_C \cdot a \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Розв'язання цих рівнянь також неможливий, бо в них 4 невідомих. Розглядаємо частину СВ, що зображена на рис. 1.44, б. Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q приводимо до зосередженої сили Q , яка дорівнює:
 $Q = q \cdot b = 0,5 \cdot 4 = 2 \text{ кН} .$

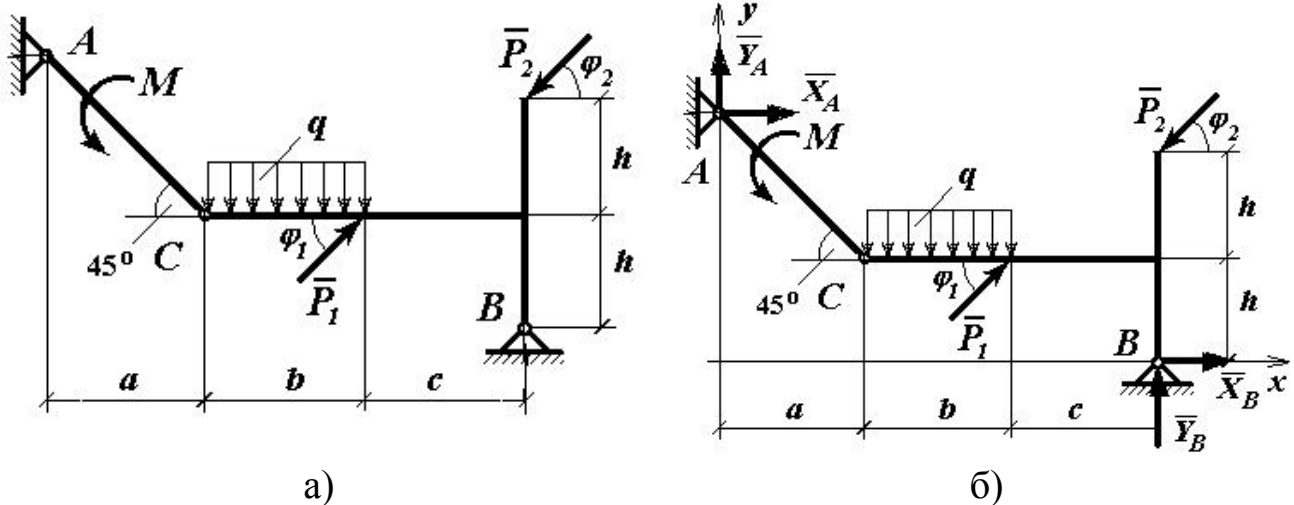


Рис. 1.44. До прикладу

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -X_C + P_1 \cos \varphi_1 + X_B - P_2 \cos \varphi_2 = 0 , \quad (1.19)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -Y_C - Q + P_1 \sin \phi_1 + Y_B - P_2 \sin \phi_2 = 0, \quad (1.20)$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = Y_C \cdot (b + c) + X_C \cdot h + Q \cdot (c + b / 2) - P_1 \sin \phi_1 \cdot c - P_1 \cos \phi_1 \cdot h + P_2 \cos \phi_2 \cdot 2 \cdot h = 0. \quad (1.21)$$

Рівняння (2.18) і (2.19) розв'язуємо як систему, звідки знаходимо

$$X_C = (K_1 + M(b + c) / a) / [h - (b + c) \operatorname{tg} 45^\circ], \quad (1.22)$$

$$Y_C = -M / a - X_C \operatorname{tg} 45^\circ, \quad (1.23)$$

де позначено: $K_1 = P_1(c \sin \phi_1 + h \cos \phi_1) - 2 P_2 h \cos \phi_2 - Q(c + b / 2)$.

Тоді з рівнянь (15), (16) і (17), (2.18) знаходимо складові реакцій R_A і

R_B : $X_A = -X_C$; $Y_A = -Y_C$; $X_B = X_C - P_1 \cos \phi_1 + P_2 \cos \phi_2$;

$Y_B = Y_C + Q - P_1 \sin \phi_1 + P_2 \sin \phi_2$.

Модулі реакцій R_A і R_B будуть дорівнювати:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

1.5. Рівновага сил з врахуванням зчеплення (тертя спокою)

Equilibrium of forces taking into account coupling (friction at rest)

Методичні рекомендації до розв'язання задач рівноваги з урахуванням сил тертя. Аналітичний метод розв'язування задач статички з урахуванням сил тертя залишається таким самим, як і в тих випадках, коли тертя не враховується. Різниця тільки в тому, що в рівняннях рівноваги з'являються, крім нормальних реакцій, сили тертя. При цьому максимальне значення сили тертя ковзання знаходиться по формулі $F_{\max} = f \cdot N$, а при коченні максимальний момент опору $M_k = k \cdot N$.

Приклад 1. Тертя ковзання. Механічна схема конструкції (рис. 1.45, а) включає два вантажі вагою $P_1 = 4$ кН і $P_2 = 6$ кН, які з'єднані тросом і розташовані на похилій шорсткій поверхні. Визначити стан системи двох тіл при $f_{01} = 0,4$, $f_{02} = 0,8$, $\alpha = 30^\circ$,

де f_{0i} - статичний коефіцієнт тертя i -го тіла.

Розв'язання. Розглянемо рівновагу вантажу P_1 в напрямку осі Ox (рис. 1.45, б), прийнявши $F_{\text{тер}1} = F_{\text{тер}1}^{\text{ван}}$: $P_{12} - T_1 - F_{\text{тер}1} = 0$, (1.24)

де $D_{12} = D_1 \sin 30^\circ$; T_1 - сила натягу троса; $F_{\text{тер}1}$ - сила тертя:

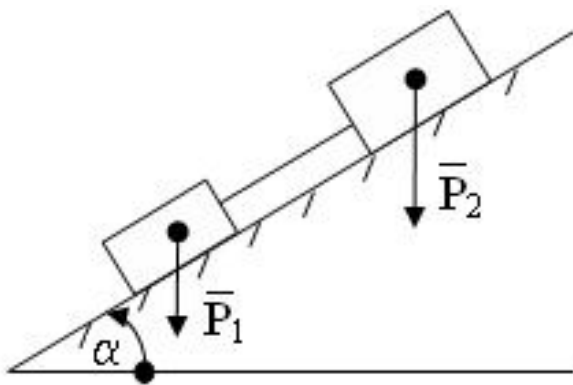
$$F_{\text{тер}1} = F_{\text{тер}1}^{\text{ван}} = f_{01} \cdot P_{11} = f_{01} \cdot P_1 \cos 30^\circ.$$

З рівняння (1.24) отримаємо

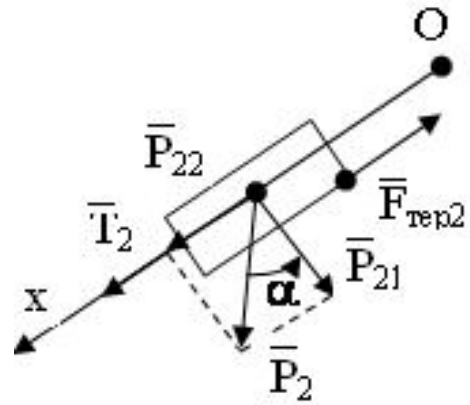
$$T_1 = P_{12} - F_{\text{тер}1} = P_1 \sin 30^\circ - f_{01} P_1 \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,5 - 0,4 \cdot 4 \cdot 0,866 = 0,614 \text{ кН}.$$

За величиною $T_1 > 0$, отже при відсутності троса вантаж P_1 не буде знаходитися у стані рівноваги, тому що при куті $\alpha = 30^\circ$ умова рівноваги тіла ($P_{12} = F_{\text{тер}1}^{\text{ван}}$) не виконується.

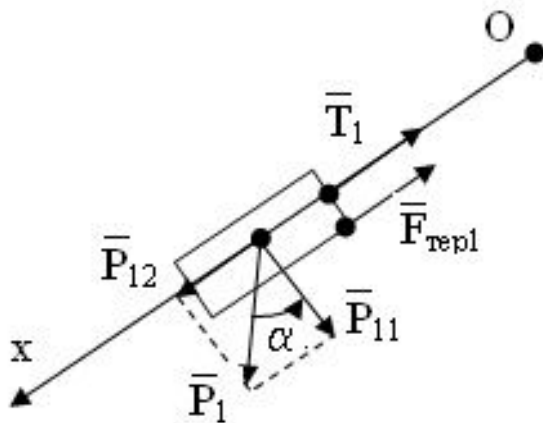
Вантаж P_1 з'єднано тросом з вантажем P_2 , тому його стан спокою



а)



в)



б)

Рис. 1.45. До прикладу 1

можна забезпечити за допомогою вантажу P_2 , якщо для сили тертя $\bar{F}_{\text{дод}2}$ останнього буде виконуватись нерівність $0 < F_{\text{тер}2} \leq F_{\text{тер}2}^{\text{ван}} = f_{02} P_2 \cos 30^\circ = 0,8 \cdot 6 \cdot 0,866 = 4,157 \text{ кН}$.

Величину сили тертя $\bar{F}_{\text{тер}2}$ визначимо, якщо розв'яжемо рівняння рівноваги тіла P_2 у проєкціях на вісь Ox (рис. 1.45, в):

$$\text{в): } F_{\text{дод}2} = T_2 + P_{22}, \quad (1.25)$$

де $T_2 = T_1$; $P_{22} = P_2 \sin 30^\circ$.

З виразу (2) буде: $F_{\text{тер}2} = T_1 + P_2 \sin 30^\circ = 0,614 + 6 \cdot 0,5 = 3,614 \text{ кН}$.

Отже для заданих механічних і геометричних параметрів систем двох тіл отримано, що сила тертя $\bar{F}_{\text{тер}2}$ вантажу P_2 задовольняє умові його рівноваги за наявності нерівної нулю сили натягу троса від вантажу P_1 . Її величина є достатньою для забезпечення особистої рівноваги, а також утримання у спокої і тіла P_1 , тобто рівноваги системи двох тіл в цілому.

З рівнянь (1.24) і (1.25) можна визначити кут α , при якому матиме стан граничної рівноваги системи вантажів:

$$T_2 + P_{22} = F_{\text{тер}2}^{\text{ван}} \text{ або } P_1 \sin \alpha - f_{01} \cdot P_1 \cos \alpha + P_2 \sin \alpha = f_{02} \cdot P_2 \cos \alpha$$

$$\text{або } \alpha = \arctg \frac{f_{01} \cdot P_1 + f_{02} \cdot P_2}{P_1 + P_2}. \quad (1.26)$$

Формулу (1.26) використовують на практиці при побудові розглянутої на рис. 1.45, а механічної конструкції: визначенні геометричних і механічних параметрів опорної поверхні, вантажів та ін.

Приклад 2. На барабан намотаний трос, до кінця якого підвішений вантаж вагою 4,5 кН. Знайти найменшу величину сили \bar{P} , яка прикладена до

важеля колодкового гальма при рівновазі барабана, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює 0,5. Вагою важеля знехтувати (рис. 1.46, а).

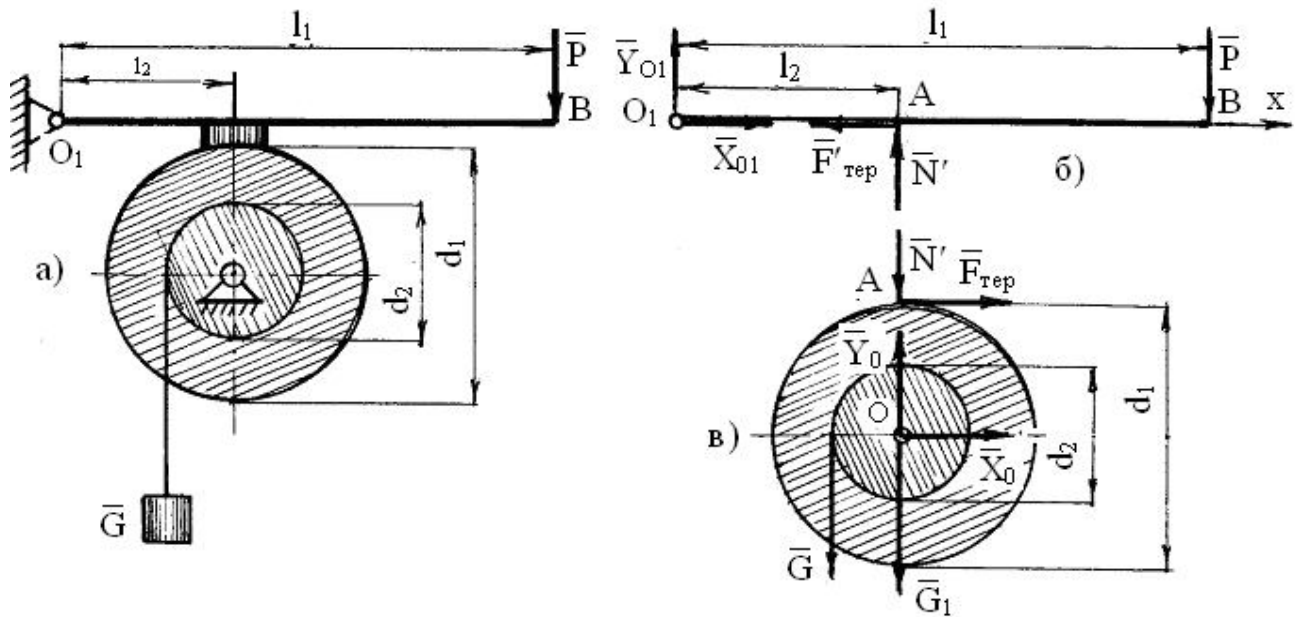


Рис. 1.46. До прикладу 2

Розглянемо рівновагу барабана (рис. 1.46, в). Для нього в'язями є опора в точці O (реакції X_0, Y_0) і важеля O_1B . В точці A барабана зі сторони важеля діє нормальна реакція \vec{N} і сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. Сила тертя спрямована в протилежну сторону можливого переміщення точки A .

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки O :

$$\sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0; \quad G \frac{d_2}{2} - F_{\text{тер}} \cdot \frac{d_1}{2} = 0. \quad \text{Звідси маємо } F_{\text{тер}} = G \frac{d_2}{d_1}.$$

В свою чергу максимальне значення сили тертя $F_{\text{тер}} = f \cdot N$.

$$N = \frac{F_{\text{тер}}}{f} = G \frac{d_2}{fd_1}. \quad (1.27)$$

Розглянемо рівновагу важеля O_1B . Для нього в'язями є опора в точці O_1 (реакції X_{01}, Y_{01}) і барабан. В точці A важеля буде нормальна реакція $\vec{N}' = -\vec{N}$ і сила тертя $\vec{F}'_{\text{тер}} = -\vec{F}_{\text{тер}}$. (рис. 1.46, б).

Запишемо рівняння моментів сил відносно точки O_1 :

$$\sum_{k=1}^n M_{O_1}(\vec{F}_k) = 0; \quad -P \cdot l_1 + N' \cdot l_2 = 0.$$

$$\text{Маємо } P = N' \frac{l_2}{l_1}. \quad \text{Використаємо вираз (1). Тоді } P = G \frac{d_2 \cdot l_2}{f \cdot d_1 \cdot l_1}.$$

$$P = 4,5 \frac{0,1 \cdot 0,17}{0,5 \cdot 0,6 \cdot 1,7} = 0,15 \text{ кН}. \quad P_{\text{min}} = 150 \text{ Н}.$$

$P_{\text{min}} = 150 \text{ Н}$ – це мінімальне значення сили P , при дії якої барабан буде нерухомим. Зрозуміло, що при $P > 150 \text{ Н}$ барабан тим більше буде в спокої.

Приклад 3. Пружина, що розтягнута силою $P = 60$ Н, притискує невагомий важіль до кулачка, який обертається. На кінці важеля знаходиться вантаж $G = 10$ Н. Знайти силу тиску кулачка на важіль і реакцію шарніра O , якщо коефіцієнт тертя ковзання між кулачком і важелем $0,1$ (рис. 1.47)

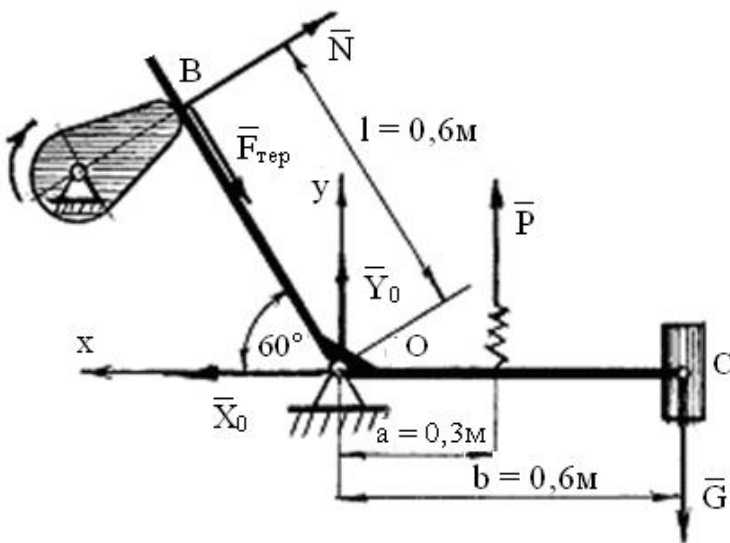


Рис. 1.47. До прикладу 3

Розглянемо рівновагу важеля ВОС. Для нього в'язями є опора в точці O (реакції X_0, Y_0) і кулачок. В точці B на важіль діє нормальна реакція \vec{N} і сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$. $F_{\text{тер}} = f \cdot N$. (1.28)

Запишемо рівняння рівно-

ваги важеля ВОС: $\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0;$

$$X_0 - F_{\text{тер}} \cdot \cos 60^\circ - N \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (1.29)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0;$$

$$Y_0 - F_{\text{тер}} \sin 60^\circ + N \sin 30^\circ + P - G = 0; \quad (1.30)$$

$$\sum_{k=1}^n M_0(\vec{F}_k) = 0; \quad -N \cdot l + P \cdot a - G \cdot b = 0. \quad (1.31)$$

З рівняння (1.31) $N = \frac{P \cdot a - G \cdot b}{1} = \frac{60 \cdot 0,3 - 10 \cdot 0,6}{0,6} = 20$ Н.

З рівняння (1.29), з урахуванням (2.28),

$$X_0 = N(f \cos 60^\circ + \cos 30^\circ) = 20(0,1 \cdot 0,5 + \sqrt{3}/2) = 18,3 \text{ Н.}$$

З рівняння (2.30), з урахуванням (1.28)

$$Y_0 = N(\sin 60^\circ \cdot f - \sin 30^\circ) - P + G = 20(\sqrt{3}/2 \cdot 0,1 - 0,5) - 60 + 10 = -58,3 \text{ Н.}$$

Сила тиску важеля на кулачок спрямована в протилежну сторону нормальній реакції \vec{N} і чисельно їй рівна. Тому $F = N = 20$ Н.

Приклад 4. Драбина AB вагою G опирається кінцями на вертикальну стінку і горизонтальну підлогу. При якому куті нахилу α драбина буде в рівновазі, якщо коефіцієнт тертя ковзання в точках A і B дорівнює f ? (рис. 1.48).

Розглянемо рівновагу драбини AB . Для неї в'язями є стінка і підлога. В точці A – нормальна реакція \vec{N}_1 і сила тертя \vec{F}_1 . В точці B – нормальна реакція \vec{N}_2 і сила тертя \vec{F}_2 . $a = AB \sin \alpha$; $b = AB \cos \alpha$.

$$F_1 = f \cdot N_1; \quad (1.32)$$

$$F_2 = f \cdot N_2. \quad (1.33)$$

Запишемо рівняння рівноваги драбини АВ.

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad N_2 - F_1 = 0; \quad (1.34)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad N_1 + F_2 - G = 0; \quad (1.35)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -N_2 \cdot a - F_2 b + G \frac{b}{2} = 0. \quad (1.36)$$

Підставимо (1.32) і (1.33) в (1.34) і (1.35)

$$\begin{cases} N_2 - f \cdot N_1 = 0; \\ N_1 + f \cdot N_2 = G. \end{cases}$$

$$\text{Звідси маємо: } N_2 = G \frac{f}{1+f^2}; \quad N_1 = G \frac{1}{1+f^2}.$$

Підставимо N_1 і N_2 в (1.36).

$$-N_2 \cdot \sin \alpha - F_2 \cdot \cos \alpha + 0,5 \cdot G \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Розділимо на } \cos \alpha \quad -N_2 \operatorname{tg} \alpha - F_2 + 0,5G = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,5 \cdot G - F_2 / N_2.$$

$$\text{Нарешті маємо } \operatorname{tg} \alpha = (1 - f^2) / 2f. \quad (1.37)$$

Найменше значення кута нахилу α , при якому ще можлива рівновага, знаходиться з виразу (1.37).

Приклад 5. Вісь котка 1, сила тяжіння якого 200 Н, і брусок 2, сила тяжіння якого 100 Н, зв'язані невагомим тросом і утримуються на похилій площині в рівновазі вантажем 3. Знайти масу вантажу, при якій коток і брусок будуть нерухомі, якщо коефіцієнти тертя: ковзання бруска 0,2, кочення котка 0,06 см (рис. 1.49). Вихідні дані: $\alpha=30^\circ$, $G_1=200$ Н, $G_2=100$ Н, $f=0,2$, $k=0,06$ см, $r=0,06$ м.

Для системи можливі два переміщення: коток і брусок рухаються по похилій площині або вгору, або вниз.

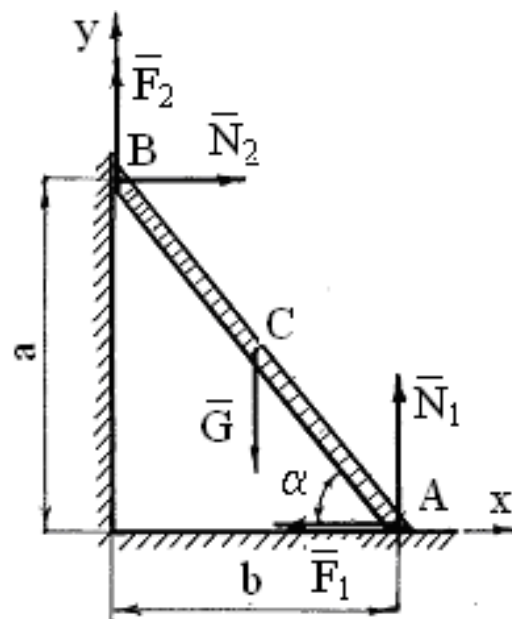


Рис. 1.48. До прикладу 4

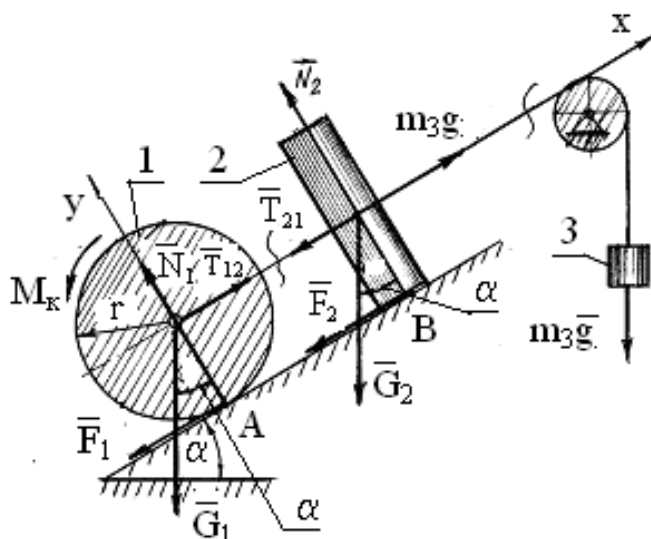


Рис. 1.49. До прикладу 5

Розглянемо перший варіант. Розглянемо рівновагу бруска 2. На нього діють сили $m_3 \cdot \vec{g}$, \vec{G}_1 , \vec{G}_2 , реакція троса \vec{T}_{12} , нормальна реакція \vec{N}_2 і сила тертя ковзання \vec{F}_2 похилої площини.

Запишемо рівняння рівноваги бруска 2.

$$\sum_{k=1}^n F_{k_x} = 0; \quad m_3 \cdot g - T_{12} - G_2 \sin \alpha - F_2 = 0; \quad (1.38)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad N_2 - G_2 \cos \alpha = 0. \quad (1.39)$$

$$F_2 = f \cdot N_2. \quad (1.40)$$

$$\text{З цих рівнянь знаходимо} \quad T_{12} = m_3 g - G_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (1.41)$$

Розглянемо рівновагу котка 1. На нього діють сили \vec{G}_1 , реакція троса $\vec{T}_{21} = -\vec{T}_{12}$. Коток котиться по шорсткій площині. Реакція цієї площини: \vec{N}_1 – нормальна реакція, \vec{F}_1 – сила тертя ковзання, M_K – момент тертя качення.

Запишемо рівняння рівноваги котка 1.

$$\sum_{k=1}^n F_{k_y} = 0; \quad N_1 - G_1 \cos \alpha = 0; \quad (1.42)$$

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad M_K + G_1 \sin \alpha \cdot r - T_{21} \cdot r = 0. \quad (1.43)$$

$$M_K = k \cdot N_1. \quad (1.44)$$

З цих рівнянь знаходимо

$$T_{21} = \frac{M_K}{r} + G_1 \sin \alpha = \left(\frac{k}{r} \cos \alpha + \sin \alpha \right) G_1. \quad (1.45)$$

Прирівняємо вирази (1.41) і (1.45)

$$\left(\frac{k}{r} \cos \alpha + \sin \alpha \right) G_1 = m_3 g - G_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

$$\begin{aligned} \text{Звідки} \quad m_3 &= \left[G_1 \left(\frac{k}{r} \cos \alpha + \sin \alpha \right) + G_2 (\sin \alpha + f \cos \alpha) \right] / g = \\ &= \left[200 \left(\frac{0,06}{0,06} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + 0,5 \right) + 100 (0,5 + 0,2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}) \right] / 9,81 = 172 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Якщо m_3 буде більше 172 Н, то система буде рухатись вгору по похилій площині. Якщо зменшувати масу m_3 , то при певній граничній масі m_3 система почне рухатись вниз.

Ми даємо можливість цей варіант читачеві розглянути самостійно.

В цьому випадку маса $m_3 = 129 \text{ Н}$. $129 < m_3 < 171 \text{ Н}$.

Приклад 6. Тертя кочення. Визначити значення кута α (рис. 1.50), при якому циліндр вагою P і радіусом $R = 5$ см знаходиться на похилій шорсткій площині у граничній рівновазі при коченні, якщо $f_0 = 0,1$. а $\delta = 0,05$ см.

Розв'язання. Складемо рівняння рівноваги циліндра:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = P_2 - F_{тер} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = N - P_1 = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_A(\bar{F}_k) = -R \cdot P_2 + M_{тер}^{коч} = 0, \end{cases}$$

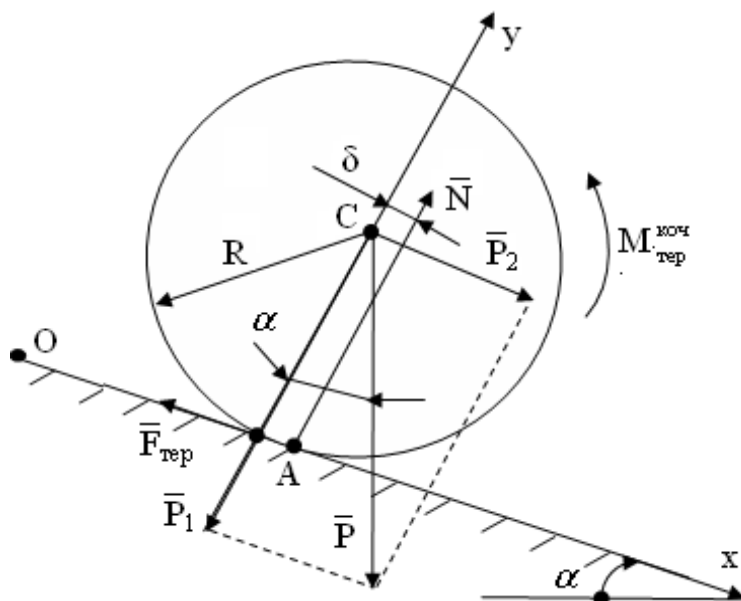


Рис. 1.50. До прикладу 6

де \bar{N} – нормальна складова реакції площини; $M_{тер}^{коч}$ – момент тертя кочення циліндра; $P_1 = P \cos \alpha$; $P_2 = P \sin \alpha$. При рівновазі циліндра буде виконуватись умова $M_{тер}^{коч} \leq M_{тер}^{ван} = \delta \cdot N$. З другого рівняння системи отримаємо $N = P_1 = P \cos \alpha$. Тоді третє рівняння в умовах граничної рівноваги набуде вигляду $-R \cdot P \sin \alpha + \delta \cdot P \cos \alpha = 0$.

Звідкиля $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{R} = \frac{0,05}{5} = 0,01$, отже $\alpha = \operatorname{arctg} 0,01 = 0^{\circ} 35'$.

З першого рівняння маємо $F_{\delta\delta} = P_2 = P \sin \alpha$.

Для зображеної на рис. 1.50 механічної схеми максимальна величина сили тертя спокою

$$\left(F_{тер}^{cn}\right)_{\max} = f_0 \cdot N = f_0 \cdot P \cos \alpha = (f_0 / \operatorname{tg} \alpha) \cdot P \sin \alpha = 10P \sin \alpha.$$

Отже, враховуючи, що сила тертя в умові граничної рівноваги циліндра при коченні (коли $\alpha = 0^{\circ} 35'$) задовольняє нерівності $F_{тер} < \left(F_{тер}^{cn}\right)_{\max}$, по площині циліндр ковзати не буде.

1.6. Рівновага довільної системи сил у просторі

Equilibrium of an arbitrary system of forces in space

Завдання 8. Розрахунок опорних реакцій просторової конструкції

Task 8. Calculation of reference reactions of a spatial design

До невагомої жорсткої плити ABCD (рис. 1.51-1.54) прикладені сили F_1 і F_2 і пара сил з моментом M , що діє в площині плити. Опорами плити є: в т. А – просторовий шарнір, в т. В – циліндричний шарнір і т. С – стрижень

ОС. Належність сил F_1 і F_2 до площини вказується на рис. 1.51-1.54 за варіантами, а їх напрямок і напрямок стрижня ОС визначається кутами γ , β , φ . Геометричні розміри плити і положення точок прикладання сил вказується розмірами a , b , c , d .

Дані для розрахунків приводяться в табл. 1.8, де сили задані в Н, момент пари сил в Н·м, кути в градусах, а розміри в сантиметрах.

Знайти модулі реакцій опор в точках А, В, С при рівновазі плити.

Таблиця 1.8. Дані для розрахунків опорних реакцій

Варіант	F_1	F_2	M	a	b	c	d	γ	β	φ
1	15	5	22	6	4	2	3	30	30	45
2	6	8	18	8	5	3	2	60	15	20
3	12	14	14	10	3	1	4	75	53	60
4	8	3	10	12	5	3	3	45	60	30
5	7	8	15	9	8	4	2	30	20	75
6	11	10	19	14	6	2	3	60	45	13
7	4	12	10	10	8	4	3	15	75	30
8	10	7	14	16	7	5	2	30	60	30
9	8	5	16	11	5	3	3	30	45	20
10	9	6	17	15	8	4	2	20	45	

Приклад виконання завдання. Невагома плита ABCD, що зображена на рис. 1.55, а, знаходиться в рівновазі під дією сили $F_1 = 20$ Н і пари сил з моментом $M = 30$ Н·м, що діє в площині плити. Сила F_1 лежить в площині, паралельній до площини yAz , і діє під кутом φ до осі y . Розміри плити і положення точки прикладання сили F_1 визначаються величинами: $a = 6$ м, $b = 8$ м і $c = 2$ м.

Плита утримується опорами: в т. А – сферичним шарніром, в т. В – циліндричним шарніром і в т. С – стрижнем ОС, що лежить в площині, паралельній до координатної площини xAz , і складає з вертикаллю кут $\beta = 60^\circ$. Знайти реакції опор в точках А, В і С.

Розв'язання. Показуємо сили і реакції, що діють на плиту (рис. 1.55, б). В опорі А реакцію R_A розкладаємо на складові X_A , Y_A , Z_A , в опорі В реакцію R_B розкладаємо на X_B і Y_B , а в точці С реакція R_C спрямована по стрижню О.

Рівняння рівноваги для просторової довільної системи сил:

$$\sum X_i = 0; \sum M_x(F) = 0; \sum Y_i = 0; \sum M_y(F) = 0; \sum Z_i = 0; \sum M_z(F) = 0.$$

У відповідності з рис. 1.55 ці рівняння мають вигляд;

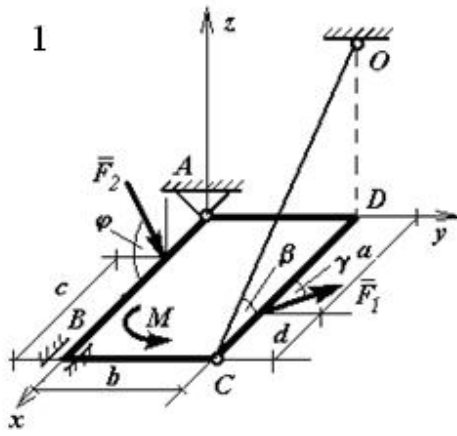
$$\sum X_i = X_A + X_B + R_C \sin \beta = 0; \quad (1.46)$$

$$\sum Y_i = Y_A - F_1 \cos \varphi = 0; \quad (1.47)$$

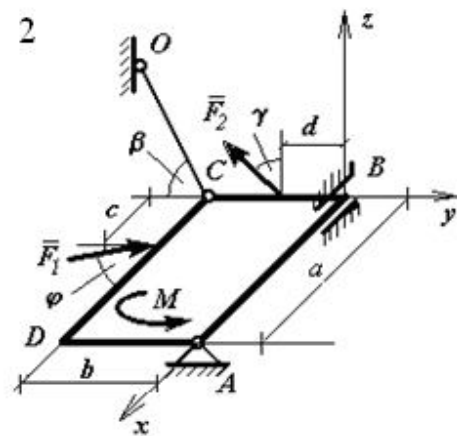
$$\sum Z_i = Z_A + Z_B + F_1 \sin \varphi + R_C \cos \beta = 0; \quad (1.48)$$

$$\sum M_{xi} = F_1 \sin \varphi \cdot c + Z_B \cdot a + R_C \cos \beta \cdot a = 0; \quad (1.49)$$

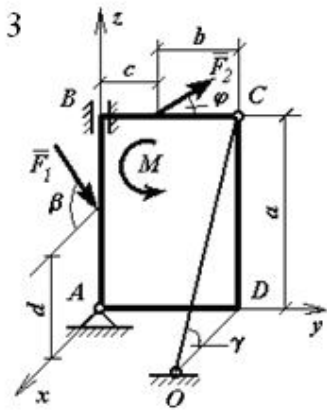
$$\sum M_{yi} = F_1 \sin \varphi \cdot b + R_C \cos \beta \cdot b = 0; \quad (1.50)$$



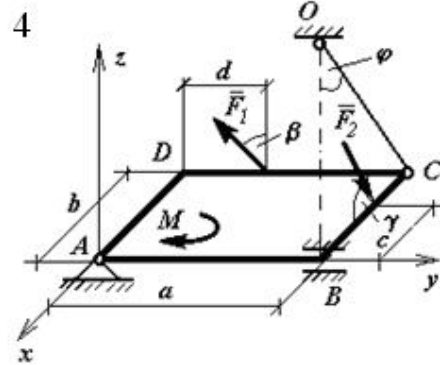
1 F_1 – в площ. xAy , F_2 – в площ. xAz



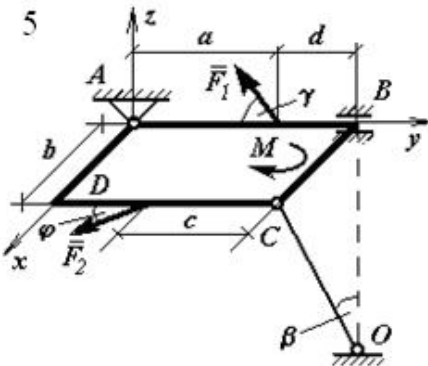
2 F_1 – в площ. xBy , F_2 – в площ. yBz



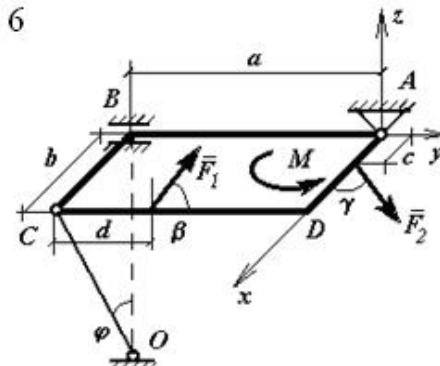
3 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



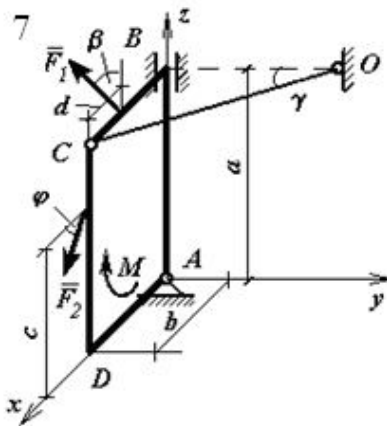
4 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



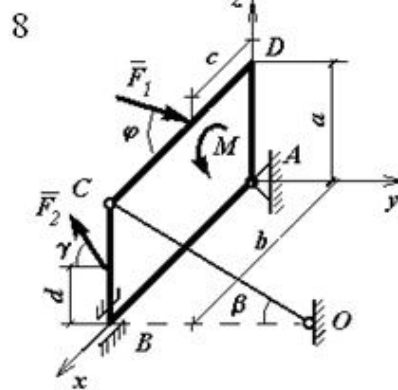
5 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAy



6 F_1 – в площ. xAy , F_2 – в площ. zAy

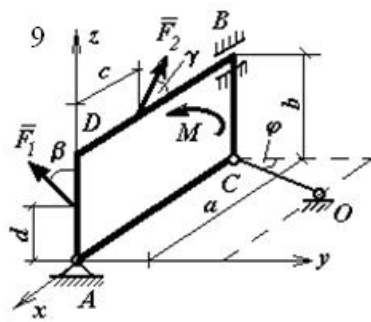


7 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz

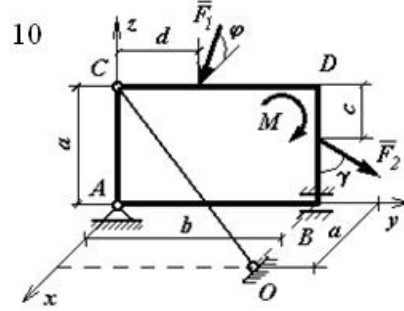


8 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

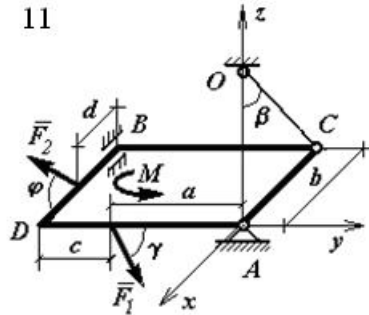
Рис. 1.51



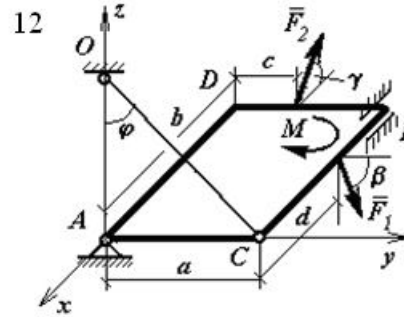
9 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



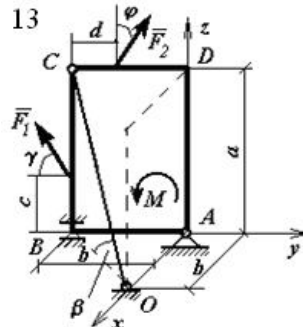
10 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



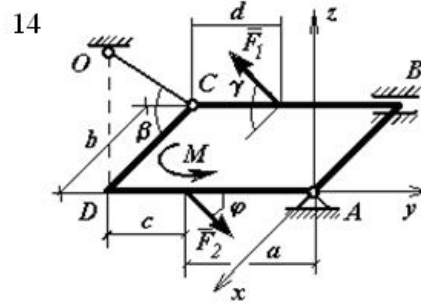
11 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



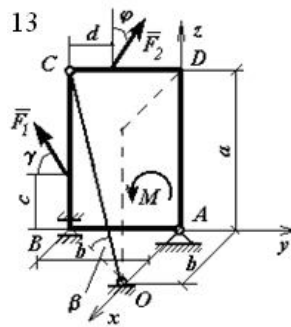
12 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



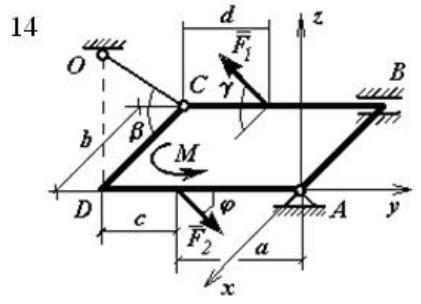
13 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



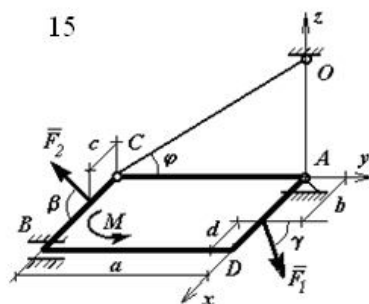
14 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



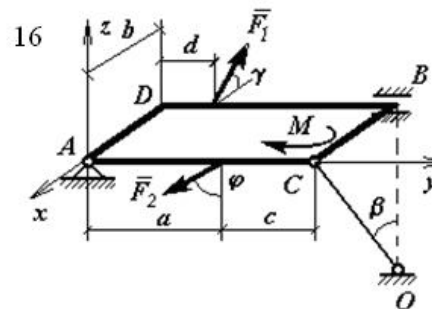
13 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



14 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

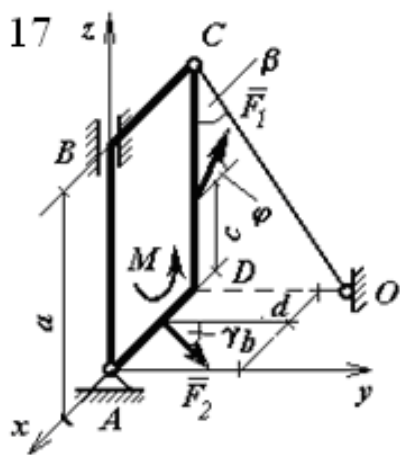


15 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

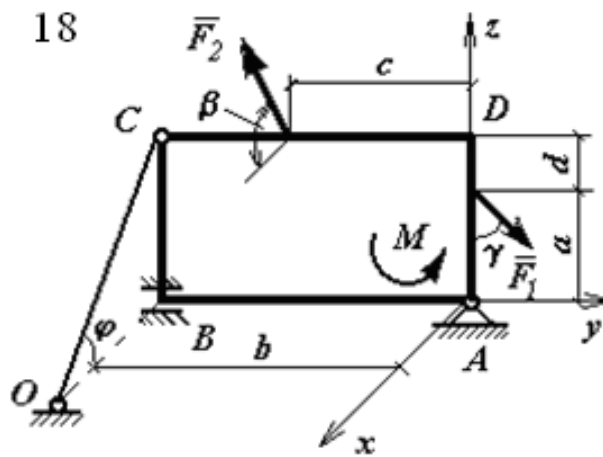


16 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

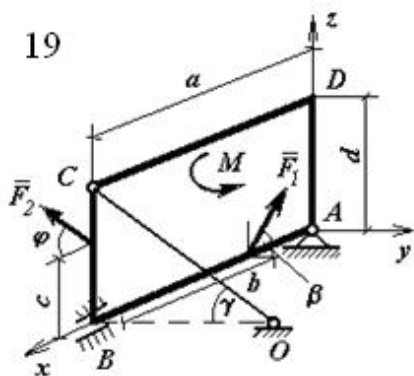
Рис. 1.52



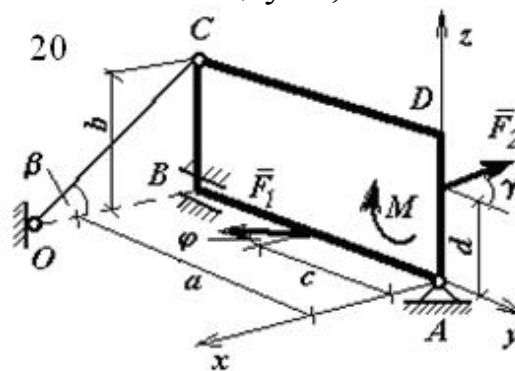
17 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



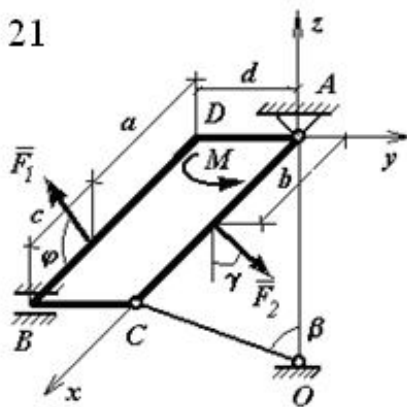
18 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. yAz



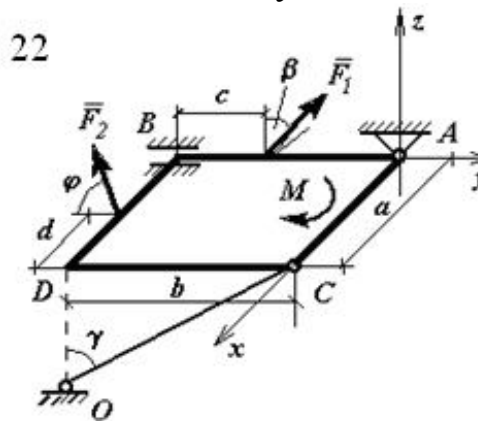
19 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



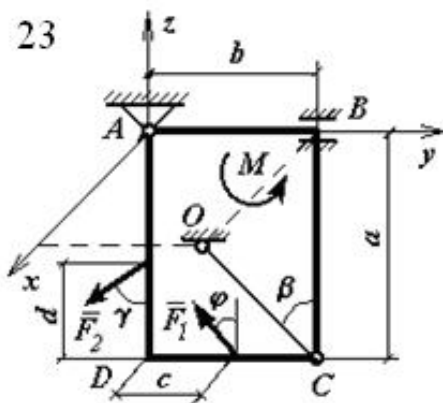
20 F_1 – в площ. xAy , F_2 – в площ. xAz



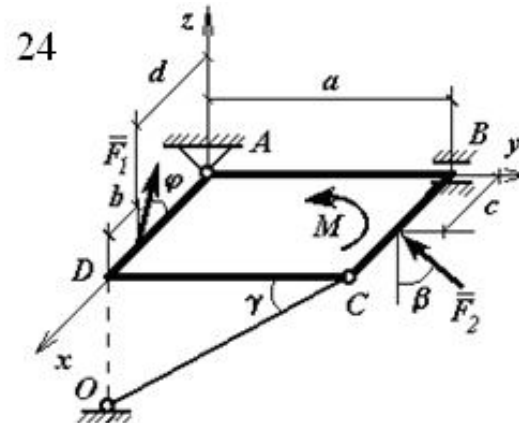
21 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. xAz



22 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

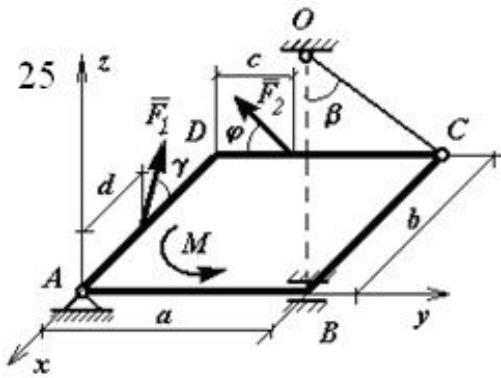


23 F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. yAz

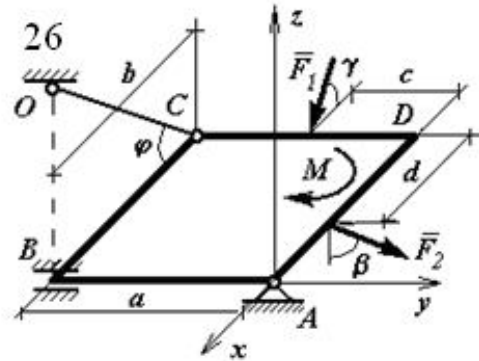


24 F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

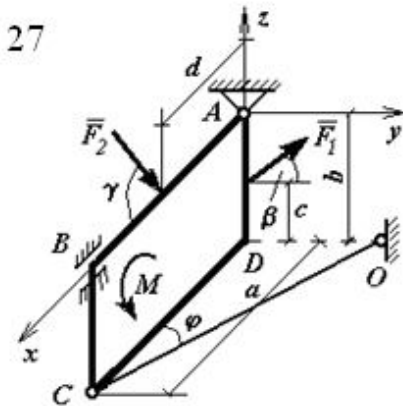
Рис. 1.53



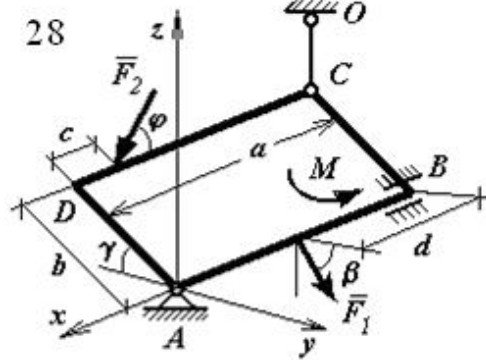
F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



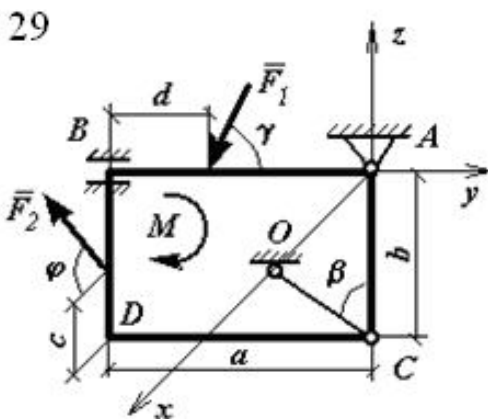
F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz



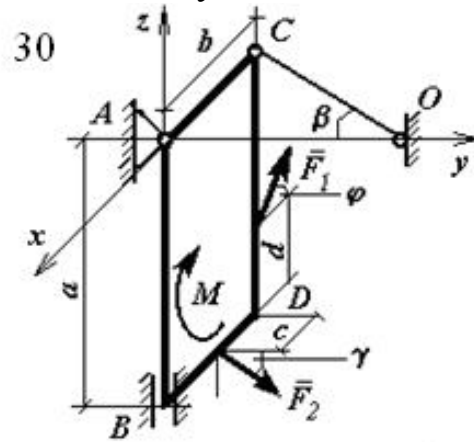
F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz

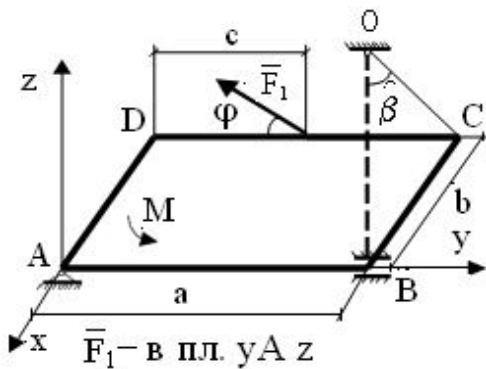


F_1 – в площ. yAz , F_2 – в площ. xAz



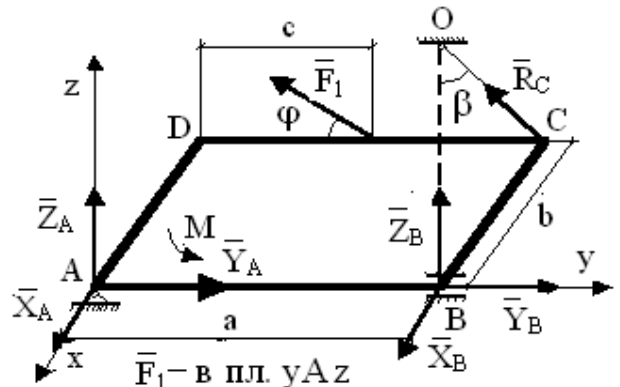
F_1 – в площ. xAz , F_2 – в площ. yAz

Рис. 1.54



\bar{F}_1 – в пл. yAz

а)



\bar{F}_1 – в пл. yAz

б)

Рис. 1.55. До прикладу виконання завдання

$$\Sigma M_{zi} = M - X_B \cdot a + F_1 \cos\varphi \cdot b - R_C \sin\beta \cdot a = 0. \quad (1.51)$$

Одержані рівняння розв'язуємо в такій послідовності: (1.47), (1.50), (1.51), (1.46), (1.49), (1.48).

$$Y_A = F_1 \cos\varphi; \quad (1.52)$$

$$R_C = -(F_1 \sin\varphi \cdot b) / (b \cdot \cos\beta); \quad (1.53)$$

$$X_B = (M + F_1 \cos\varphi \cdot b - R_C \sin\beta \cdot a) / a; \quad (1.54)$$

$$X_A = -X_B - R_C \sin\beta; \quad (1.55)$$

$$Z_B = -(F_1 \sin\varphi \cdot c + R_C \cos\beta \cdot a) / a; \quad (1.56)$$

$$Z_A = -Z_B - F_1 \sin\varphi - R_C \cos\beta. \quad (1.57)$$

Модулі реакцій R_A і R_B знайдемо за формулами

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2}. \quad (1.58)$$

Завдання 9. Знаходження головного вектора та головного моменту системи сил

Task 9. Finding the main vector and the main moment of the force system

Мета роботи:

1. Сформувати компетентності для визначення силових характеристик просторових систем сил, що дає можливість проектування судових механізмів.

2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Сили F_1, F_2, F_3, F_4 , прикладені у вершинах паралелепіпеда з ребрами a, b, c (рис. 1.56). Розміри паралелепіпеда (м), величини сил (Н) і точки їх прикладання та напрями вказані в табл. 1.9. Знайти головний вектор і головний момент цієї системи сил (компоненти цих векторів, їхні модулі та напрямні косинуси). Зобразити головний вектор та головний момент у декартовій системі координат. Масштаб скорочення осі Ox відносно осей Oy та Oz прийняти як 1:2.

Методика розв'язання задачі.

1. Креслимо паралелепіпед та вказуємо сили, які на нього діють (точки прикладання сил та їхні напрями).

2. Якщо сила непаралельна до будь-якої осі, то проектуємо її на декартові осі. Тригонометричні функції кутів, які сила складає з осями координат, визначаємо з геометричних міркувань.

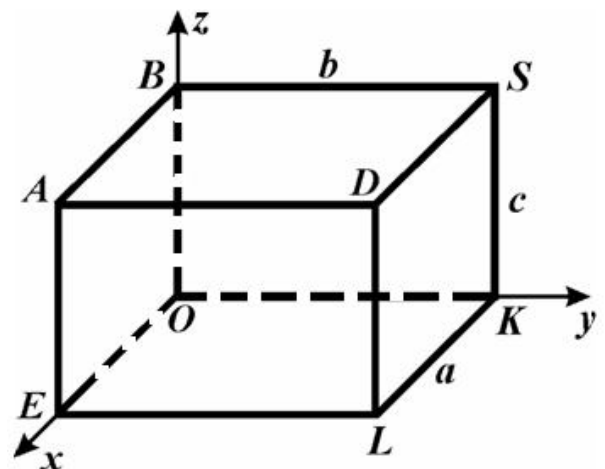


Рис. 1.56. До прикладу

3. Знаходимо алгебраїчні суми проєкцій сил (R_x , R_y та R_z) на декартові осі, модуль головного вектора сил та напрямні косинуси.

4. Знаходимо проєкції головного моменту сил на декартові осі (M_{Ox} , M_{Oy} , M_{Oz}), його модуль та напрямні косинуси.

5. У зручних масштабах креслимо головний вектор та головний момент системи сил.

Таблиця 1.9. Вихідні дані для розв'язання завдання 9

Варіант	a	b	c	F ₁		F ₂		F ₃		F ₄	
				модуль	напря́м	модуль	напря́м	модуль	напря́м	модуль	напря́м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	6	3	95	EA	35	BO	35	LO	115	SA
2	2	6	5	80	BE	45	ED	85	KO	120	SB
3	3	5	5	75	AS	120	LE	25	EA	35	KL
4	5	4	4	155	LA	105	OE	50	OB	160	KO
5	3	2	5	65	AE	25	DE	60	SK	65	SB
6	6	3	2	85	KB	110	AL	50	LD	70	OE
7	5	4	4	115	OB	35	BS	145	SL	105	BE
8	6	4	4	85	BS	75	SD	115	LA	140	AD
9	6	3	5	85	LO	140	LD	55	EA	75	AB
10	4	2	4	75	KE	120	BA	50	AE	150	EL
11	4	6	4	100	KD	60	BO	20	AD	110	LD
12	3	5	5	160	SL	80	DL	95	AD	120	EO
13	5	3	2	25	DK	115	BS	90	BO	25	EL
14	3	2	3	135	LS	80	LE	150	OB	155	SB
15	2	6	2	110	SA	130	LD	75	OB	55	BA
16	3	2	6	85	DB	125	KS	25	OE	90	AB
17	3	4	2	25	AS	60	DL	25	DS	60	KS
18	5	3	3	50	BD	105	AE	90	SK	80	LK
19	4	6	4	120	SO	90	AB	130	LD	115	KO
20	4	4	2	95	KB	65	DL	85	OE	45	EA
21	5	6	6	155	BK	100	KL	105	LE	95	KS
22	3	3	4	60	EB	15	LD	20	BS	35	SK
23	5	5	3	110	BE	35	SB	130	SD	125	EA
24	4	2	4	155	KE	55	LD	110	DA	140	SB
25	3	4	6	30	EK	70	BS	110	AE	45	EL
26	5	3	4	90	ED	100	KL	105	BO	30	AD
27	4	3	2	40	AL	85	AB	20	OK	165	LK
28	6	4	5	95	DE	140	BS	25	SD	50	AD
29	4	6	3	15	LA	85	KO	90	SK	120	BO
30	5	4	2	160	OB	100	OE	50	LA	160	KO

Приклад. Знайти головний вектор \vec{R} та головний момент \vec{M}_O системи сил, зображеної на рис. 1.57, якщо сили $F_1 = 25$ Н, $F_2 = 20$ Н, $F_3 = 30$ Н, $F_4 = 15$ Н, прикладені у вершинах прямого паралелепіпеда з ребрами $a = 6$ м, $b = 5$ м, $c = 3$ м. Вектори \vec{R} та \vec{M}_O зобразити у декартових координатах у зручних масштабах.

Розв'язання. Головний вектор та головний момент системи сил визначаються як:

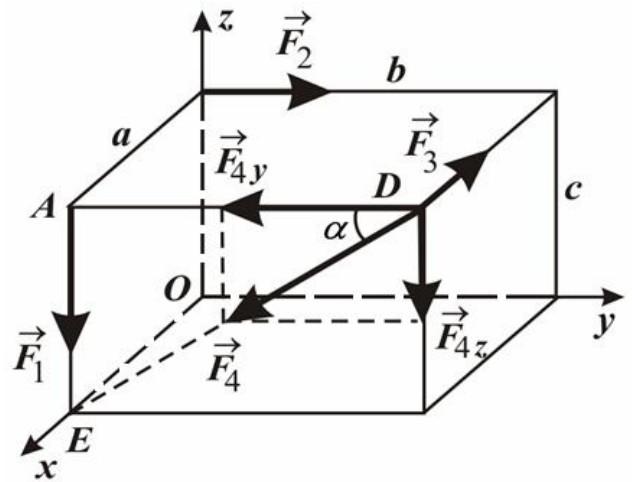


Рис. 1.57. До прикладу

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i; \quad (2.64) \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(\vec{F}_i). \quad (1.59)$$

1. Для головного вектора в нашому випадку отримуємо

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4.$$

Щоб знайти \vec{R} , визначимо алгебраїчні компоненти головного вектора, проєктуючи вектори сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 та \vec{F}_4 на осі Ox , Oy та Oz . Тоді отримуємо:

$$R_x = -F_3; \quad R_y = F_2 - F_{4y} = F_2 - F_4 \cos \alpha; \quad R_z = -F_1 - F_{4z} = -F_1 - F_4 \sin \alpha.$$

Тут α – кут між силою \vec{F}_4 та ребром AD . Тригонометричні функції цього кута знаходимо з прямокутного трикутника EAD , який є подібним до трикутника сил зі сторонами F_{4y} , F_{4z} та F_4 :

$$\sin \alpha = AE/ED = c/\sqrt{c^2 + b^2}; \quad \cos \alpha = AD/ED = b/\sqrt{c^2 + b^2}.$$

Таким чином, необхідні компоненти сили \vec{F}_4 визначаються як:

$$F_{4y} = F_4 \cos \alpha = F_4 (b/\sqrt{c^2 + b^2}) = 15 \cdot 5/\sqrt{3^2 + 5^2} = 12,86 \text{ Н};$$

$$F_{4z} = F_4 \sin \alpha = F_4 (c/\sqrt{c^2 + b^2}) = 15 \cdot 3/\sqrt{3^2 + 5^2} = 7,72 \text{ Н}.$$

Підставляючи дані задачі в (2.64) – (2.65), отримуємо:

$$R_x = -30 \text{ Н}; \quad R_y = 20 - 12,86 = 7,14 \text{ Н}; \quad R_z = -25 - 7,72 = -32,72 \text{ Н}.$$

Це дозволяє знайти модуль головного вектора системи сил

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{30^2 + 7,14^2 + 32,72^2} = 44,96 \text{ Н}.$$

Напрявні косинуси головного вектора сили знайдемо за формулами:

$$\cos(\vec{i}, \vec{R}) = R_x/R = -30/44,96 = -0,667; \quad \cos(\vec{j}, \vec{R}) = R_y/R = 7,14/44,96 = 0,159,$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{R}) = R_z/R = -32,72/44,96 = -0,728.$$

2. Визначимо головний момент системи сил, обчислюючи моменти сил відносно осей. Нагадаємо, що момент сили відносно осі дорівнює нулю,

якщо лінія дії сили перетинає вісь або паралельна їй. В нашому прикладі $M_{Ox}(\vec{F}_1) = 0$; $M_{Ox}(\vec{F}_4) = 0$; $M_{Oz}(\vec{F}_2) = 0$, бо ці сили перетинають відповідні осі; та $M_{Ox}(\vec{F}_3) = 0$; $M_{Oz}(\vec{F}_1) = 0$; $M_{Oy}(\vec{F}_2) = 0$ оскільки ці сили паралельні вказаним осям.

Запишемо вирази для компонентів вектора головного моменту, беручи до уваги точки прикладання та напрями сил (рис. 1.57). Нагадаємо, що алгебраїчне значення моменту сили додатне, коли сила може викликати обертання проти руху стрілки годинника (дивлячись з додатного напрямку відповідної осі), а якщо за рухом стрілки годинника – то від’ємне. Обчислення дають:

$$M_{Ox} = -F_2 \cdot c = -20 \cdot 3 = -60 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{Oy} = F_1 \cdot a - F_3 \cdot c + F_{4z} \cdot a = 25 \cdot 6 - 30 \cdot 3 + 7,72 \cdot 6 = 106,32 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{Oz} = F_3 \cdot b - F_{4y} \cdot a = 30 \cdot 5 - 12,86 \cdot 6 = 72,84 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Модуль головного моменту знайдемо за теоремою Піфагора

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{60^2 + 106,32^2 + 72,84^2} = 142,16 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Напрямні косинуси цього вектора знайдемо за формулами:

$$\cos(\vec{i}, \vec{M}_O) = M_{Ox}/M_O = -60/142,16 = -0,422;$$

$$\cos(\vec{j}, \vec{M}_O) = M_{Oy}/M_O = 106,32/142,16 = 0,748.$$

Знайдені вектори \vec{R} і \vec{M}_O та їхні компоненти зображені на рис. 1.58 (масштаб скорочення по осі Ox відносно осей Oy та Oz – 1:2).

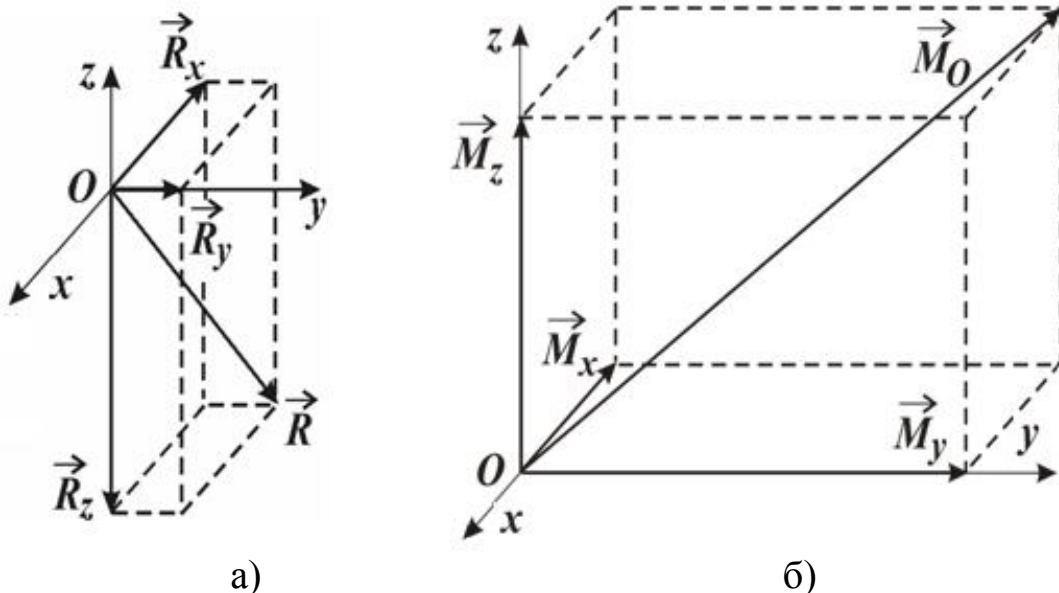


Рис. 1.58. Вектори \vec{R} і \vec{M}_O та їхні компоненти

Відповідь: $\vec{R} = -30\vec{i} + 7,14\vec{j} - 32,72\vec{k}$ Н, $|\vec{R}| = 44,96$ Н;

$$\cos(\vec{i}, \vec{R}) = -0,667, \cos(\vec{j}, \vec{R}) = 0,159, \cos(\vec{k}, \vec{R}) = -0,728;$$

$$\vec{M}_O = -60\vec{i} + 106,32\vec{j} + 72,84\vec{k} \text{ Н}\cdot\text{м}, |\vec{M}_O| = 142,16 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\cos(\vec{k}, \vec{M}_O) = M_{Oz} / M_O = 72,84 / 142,16 = 0,512;$$

$$\cos(\vec{i}, \vec{M}_O) = -0,422, \quad \cos(\vec{j}, \vec{M}_O) = 0,748, \quad \cos(\vec{k}, \vec{M}_O) = 0,512.$$

1.7. Способи знаходження координат центра ваги тіл

Methods of finding the coordinates of the center of gravity of bodies

1.7.1. Спосіб симетрії (Method of symmetry)

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (9.10), (9.12), (9.14), (9.17) [10].

Розглянемо декілька прикладів.

а) *прямолінійний стрижень*

Центр симетрії такого стрижня є точка у середині стрижня. Отже, центр ваги прямолінійного стрижня, точка С, знаходиться у середині стрижня (рис. 1.59);

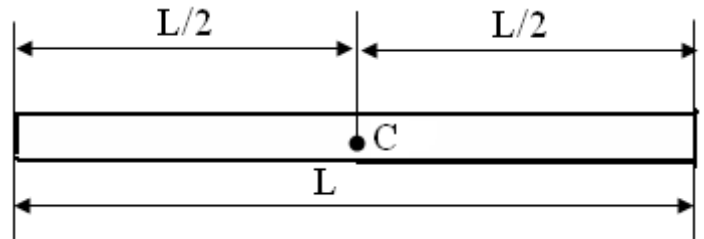


Рис. 1.59

б) *прямокутник*. Центром симетрії прямокутника є точка перетину його діагоналей. Тоді центр ваги прямокутника, точка С, також знаходиться у точці перетину діагоналей (рис. 1.60). Як відомо, діагоналі в точці перетину діляться навпіл;

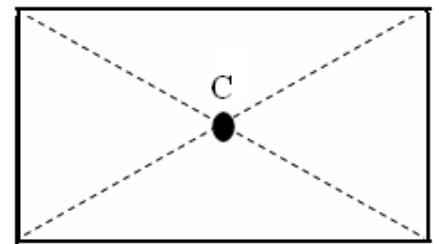


Рис. 1.60

в) *коло*. Центром симетрії, а значить і центром ваги кола є його центр (рис. 1.61).

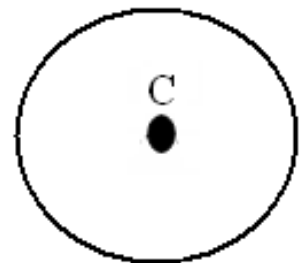


Рис. 1.61

1.7.2. Спосіб розбиття. The method of partitioning

Приклад 1. Визначити координати центра ваги площі (рис. 1.62).

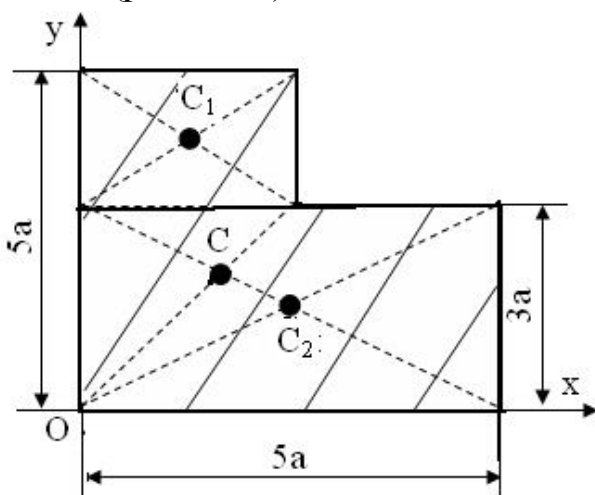


Рис. 1.62

Розв'язання.

Розіб'ємо площу на два прямокутники, центри ваги яких C_1 і C_2 знаходяться в точках перетину діагоналей. Виберемо систему координат Oxy . Дані про координати центрів ваги прямокутників і їх площі запишемо в табл. 1.10.

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{1,5a \cdot 6a^2 + 2,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{9a^3 + 37,5a^3}{21a^2} = \frac{46,5}{21} a \approx 2,2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{4a \cdot 6a^2 + 1,5a \cdot 15a^2}{6a^2 + 15a^2} = \frac{24a^3 + 22,5a^3}{21a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a.$$

Таблиця 1.10. Координати центрів ваги прямокутників

k	x_k	y_k	S_k
1	1,5a	4a	6a ²
2	2,5a	1,5a	15a ²

Значення координат точки С (2a; 2a) свідчать, що вона лежить на бісектрисі кута, проведеної з центра координат, яка є лінією симетрії площі.

1.7.3. Спосіб доповнення (або від'ємних площин)

Method of addition (or negative planes)

Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

Приклад 2. Розглянемо задачу *прикладу 1*.

Розв'язання. Уявимо площу як квадрат (1) зі сторонами 5a x 5a, з якого вирізали квадрат (2) зі сторонами 2a x 2a (рис. 1.63). Площу останнього квадрата будемо вважати від'ємною. Дані про координати центрів ваги квадратів і їх площі запишемо в табл. 1.11.

Таблиця 1.11. Координати центра ваги площі

k	x_k	y_k	S_k
1	2,5a	2,5a	25a ²
2	4a	4a	-4a ²

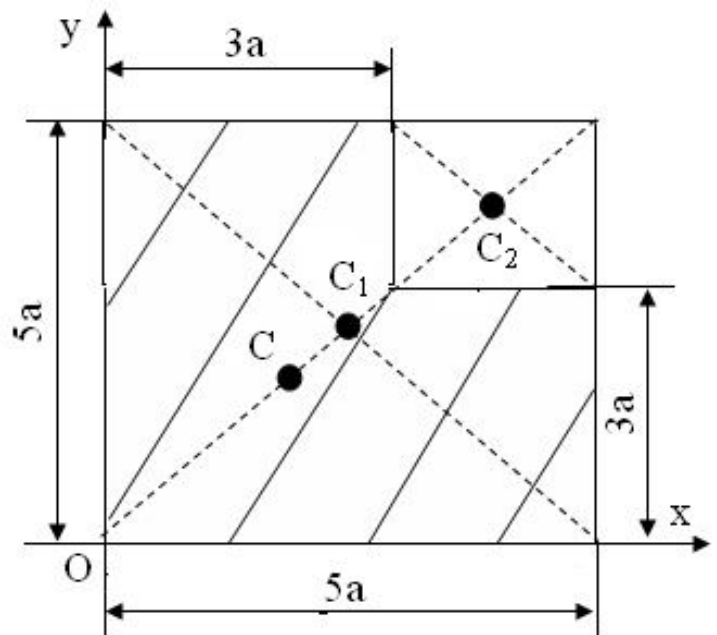


Рис. 1.63

Координати центра ваги площі знайдемо за формулами (9.14):

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{S} = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a;$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{S} = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2} = \frac{2,5a \cdot 25a^2 + 4a \cdot (-4a^2)}{25a^2 + (-4a^2)} = \frac{62,5a^3 - 16a^3}{25a^2 - 4a^2} = \frac{46,5}{21}a \approx 2,2a.$$

1.8. Центри ваги простіших фігур Centers of gravity of simpler figures

Приклад 1. Визначити мінімальну ширину a бетонної греблі довжиною $l = 1$ м прямокутного перерізу за умови стійкості при перекиданні, якщо висота греблі і глибина води $h = 3$ м, питома вага води $\gamma_v = 10$ кН/м³, питома вага матеріалу греблі $\gamma_r = 22$ кН/м³ (рис. 1.64).

Розв'язання. Розглянемо бетонний паралелепіпед зі сторонами h , a і b . На нього діє зовнішня активна сила тиску води, рівнодійна якої за модулем дорівнює

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_v \cdot h \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \gamma_v \cdot h^2 \cdot l$$

і прикладена на відстані $h/3$ від підва-лини греблі, а також сила ваги $P = \gamma_a \cdot h \cdot a \cdot b$, яка прикладена у центрі ваги C греблі.

$$Q = \frac{1}{2} \gamma_v \cdot h^2 \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 \cdot 1 = 90 \text{ кН.}$$

$$P = \gamma_r \cdot h \cdot a \cdot l = 10 \cdot 3 \cdot a \cdot 1.$$

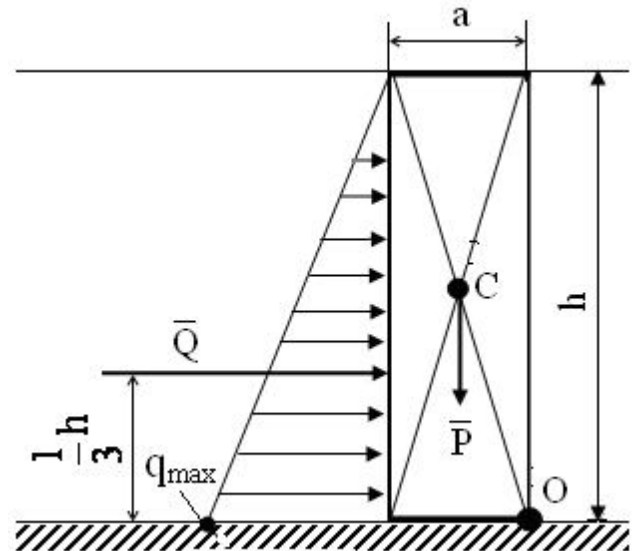


Рис. 1.64. До прикладу 1

Можливим перекиданням греблі буде її обертання навколо ребра O , тому умовою рівноваги буде $\sum M_O(\bar{F}_k) = -Q \frac{h}{3} + P \frac{a}{2} = 0$.

З цього рівняння

$$a^2 = \frac{2 \cdot Q \cdot h}{3 \cdot P} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma_v \cdot h^2 \cdot h}{3 \cdot \gamma_r \cdot h} = \frac{\gamma_v \cdot h^2}{3 \cdot \gamma_r} = \frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 22} = 1,36 \text{ м}^2 \text{ або } a = 1,17 \text{ м.}$$

Зауваження. При розгляді задач на перекидання тіла вводять поняття коефіцієнта стійкості. Коефіцієнтом стійкості при перекиданні тіла називається відношення суми моментів сил, що намагаються утримати тіло від перекидання, до суми моментів сил, що намагаються перекинути тіло. Постановка задачі в *прикладі 1* передбачала її розв'язання у припущенні, що коефіцієнт стійкості дорівнює 1.

Приклад 2. Визначити розміри відомої іграшки „Іван-покиван” (h, R , рис. 1.65, а), яка складається з півкулі і конуса, щоб вона була стійкою при перекиданні. Конус і півкуля виконані з одного і того самого матеріалу.

Розв'язання. Зазначимо, що точка опори O такої конструкції лежить на вертикальному радіусі AO . Внаслідок симетрії конструкції центр її ваги (точка C) лежить на відрізку BD . Очевидно, якщо точка C лежатиме нижче точки A , то конструкція під дією сили ваги \bar{D} буде завжди повертатись із нахилоного положення до вертикального, тобто буде стійкою при перекиданні.

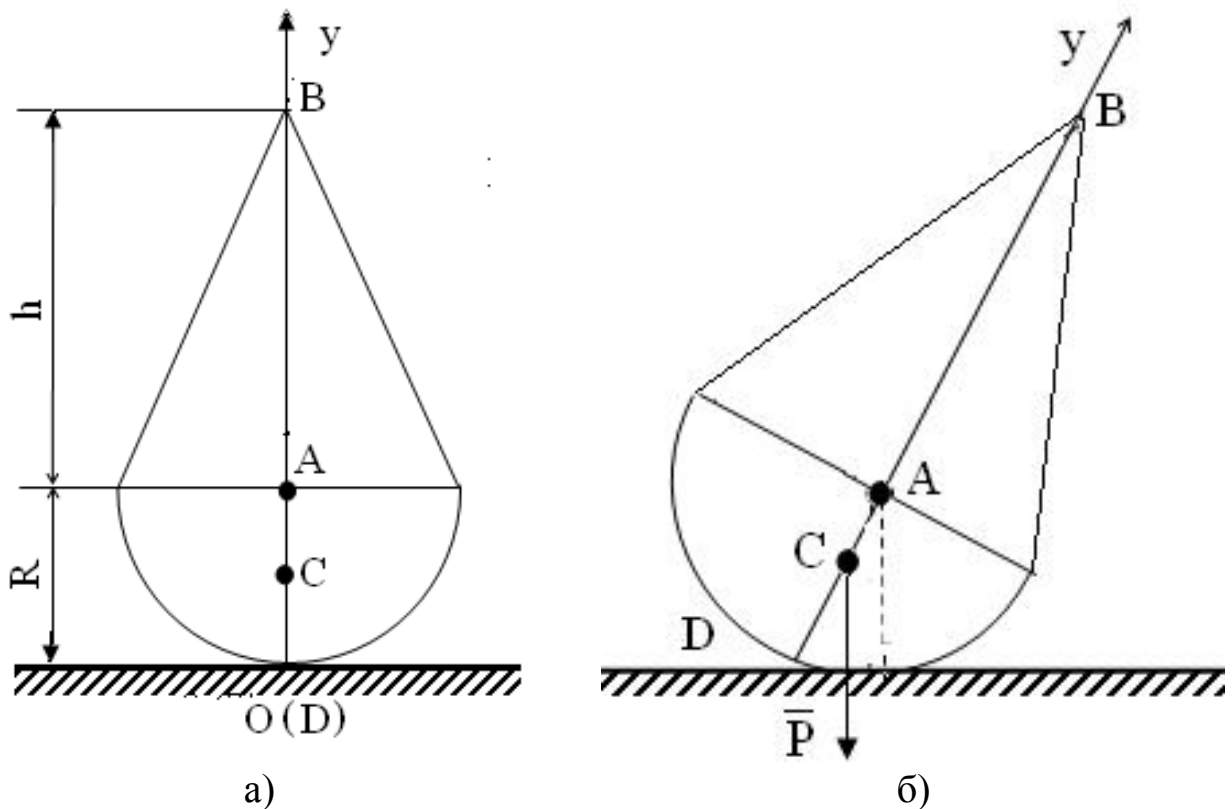


Рис. 1.65. До прикладу 2

Відлік координати y будемо вести від точки D . Для визначення координати центра ваги об'єму використаємо спосіб розбиття. Конусу надамо індекс 1, півкулі – 2. Тоді згідно з формулою $y_C = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 V_2}{V_1 + V_2}$.

$$\text{Для конуса } y_1 = R + \frac{1}{4}h; V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h.$$

$$\text{Для півкулі } y_2 = R - \frac{3}{8}R = \frac{5}{8}R; V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } y_C &= \frac{(R + \frac{1}{4}h) \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h + \frac{5}{8}R \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3}{\frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h + \frac{2}{3}\pi \cdot R^3} = \frac{(R + \frac{1}{4}h)h + \frac{5}{4}R^2}{h + 2R} = \\ &= \frac{R \cdot h + \frac{1}{4}h^2 + \frac{5}{4}R^2}{h + 2R} = \frac{4R \cdot h + h^2 + 5R^2}{4h + 8R}. \end{aligned}$$

Для того, щоб точка C лежала нижче точки A , повинна виконуватись умова: $y_C < R$.

Тоді з урахуванням виразу для y_C :

$$\frac{4Rh + h^2 + 5R^2}{4h + 8R} < R \text{ або } 4R \cdot h + h^2 + 5R^2 < 4R \cdot h + 8R^2.$$

Звідси отримаємо умову $h^2 < 3R^2$ або $h < 1,73R$. (1.60)

При виконанні геометричної умови (1.60) розглядуване тіло буде стійким при перекиданні.

Завдання 10. Визначення центра ваги плоских однорідних тіл Task 10. Determining the center of gravity of flat homogeneous bodies

Мета роботи: 1. Сформувати компетентності для визначення центра ваги плоских однорідних тіл, що дає можливість проектування механізмів.

2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.

Знайти координати центра ваги плоскої фігури відносно заданих осей координат. Задані розміри перерізу плоскої фігури вибрати за варіантом у відповідності до табл. 1.12. Схеми завдань за варіантом показані на рис. 1.66-1.68.

Приклад розв'язання задачі знаходження центра ваги наданого плоского перерізу. Визначити центр ваги наданого плоского перерізу, зображеного на рис. 1.69, відносно заданих осей координат. Розміри перерізу надані в міліметрах.

Таблиця .12. Вихідні дані завдання 10

Скористуємося методом групу-

Варіант	Розмір перерізу а, мм	Варіант	Розмір перерізу а, мм
1	15	16	12
2	10	17	14
3	15	18	18
4	20	19	21
5	15	20	19
6	10	21	15
7	12	22	13
8	10	23	16
9	18	24	21
10	20	25	24
11	12	26	15
12	14	27	10
13	18	28	12
14	20	29	18
15	21	30	21

вання та розділимо наданий плоский переріз на прості плоскі фігури, центр ваги яких нам відомий: 1) прямокутник з розмірами 50x26 мм; 2) коло радіуса $R=13$ мм; 3) прямокутник з розмірами 70x15 мм; 4) трикутник з розмірами 21 x 15 мм; 5) трикутник з розмірами 21 x 15 мм.

Позначимо центри ваги кожної простої фігури на рис. 2.81. Центр ваги прямокутника 1, точка C_1 . Знайдемо її координати за формулами:

$$X_{C_1} = a/2 = 50/2 = 25 \text{ мм};$$

$$Y_{C_1} = b/2 = 26/2 = 13 \text{ мм}.$$

Визначимо координати точки C_1 відносно заданих осей координат ОХ та ОУ.

$X_1 = 0$ (точка C_1 належить осі ОУ), $Y_1 = 13$ мм, таким чином $C_1(0;13)$.

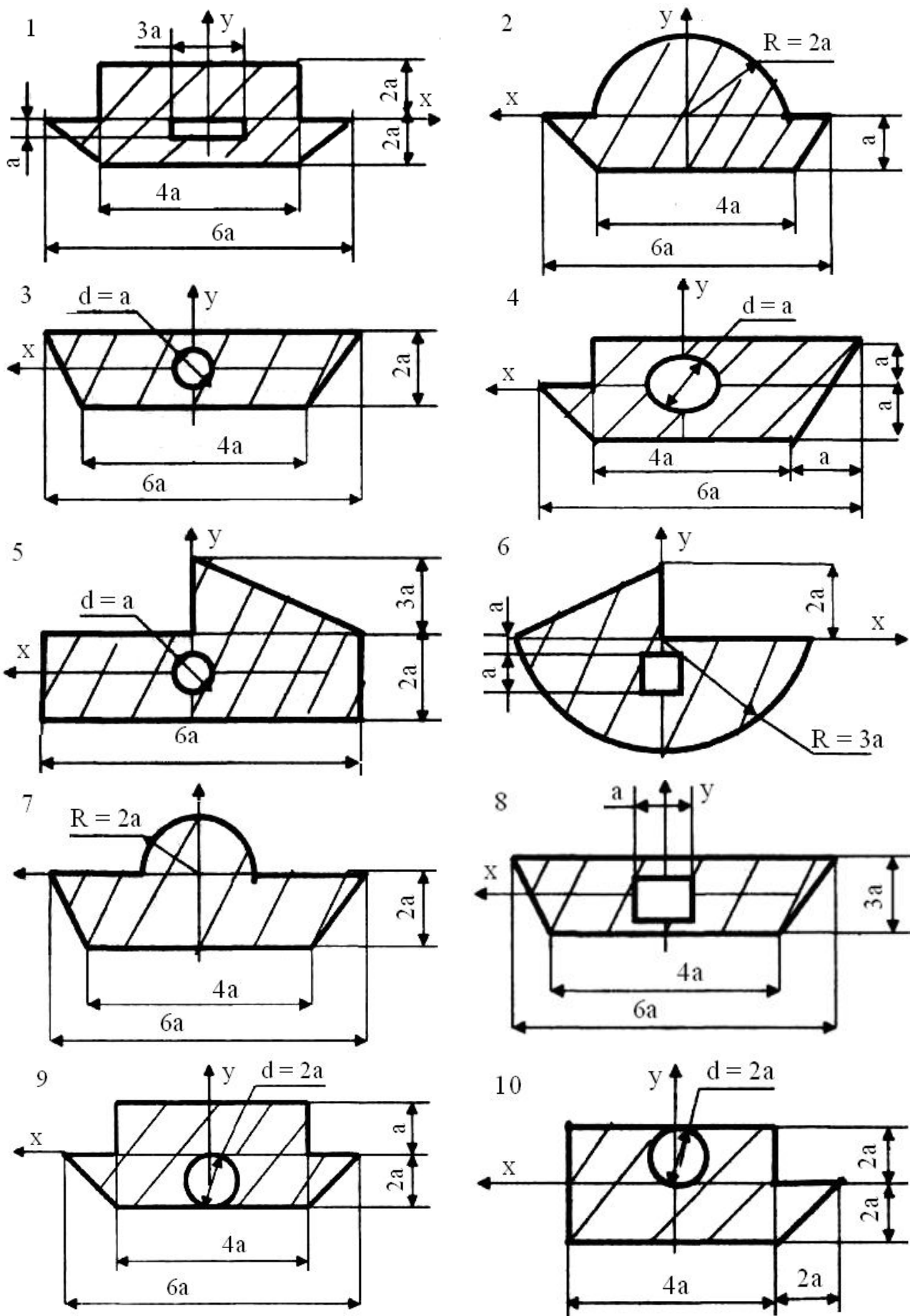


Рис. 1.66. Схеми завдань (варіанти 1-10)

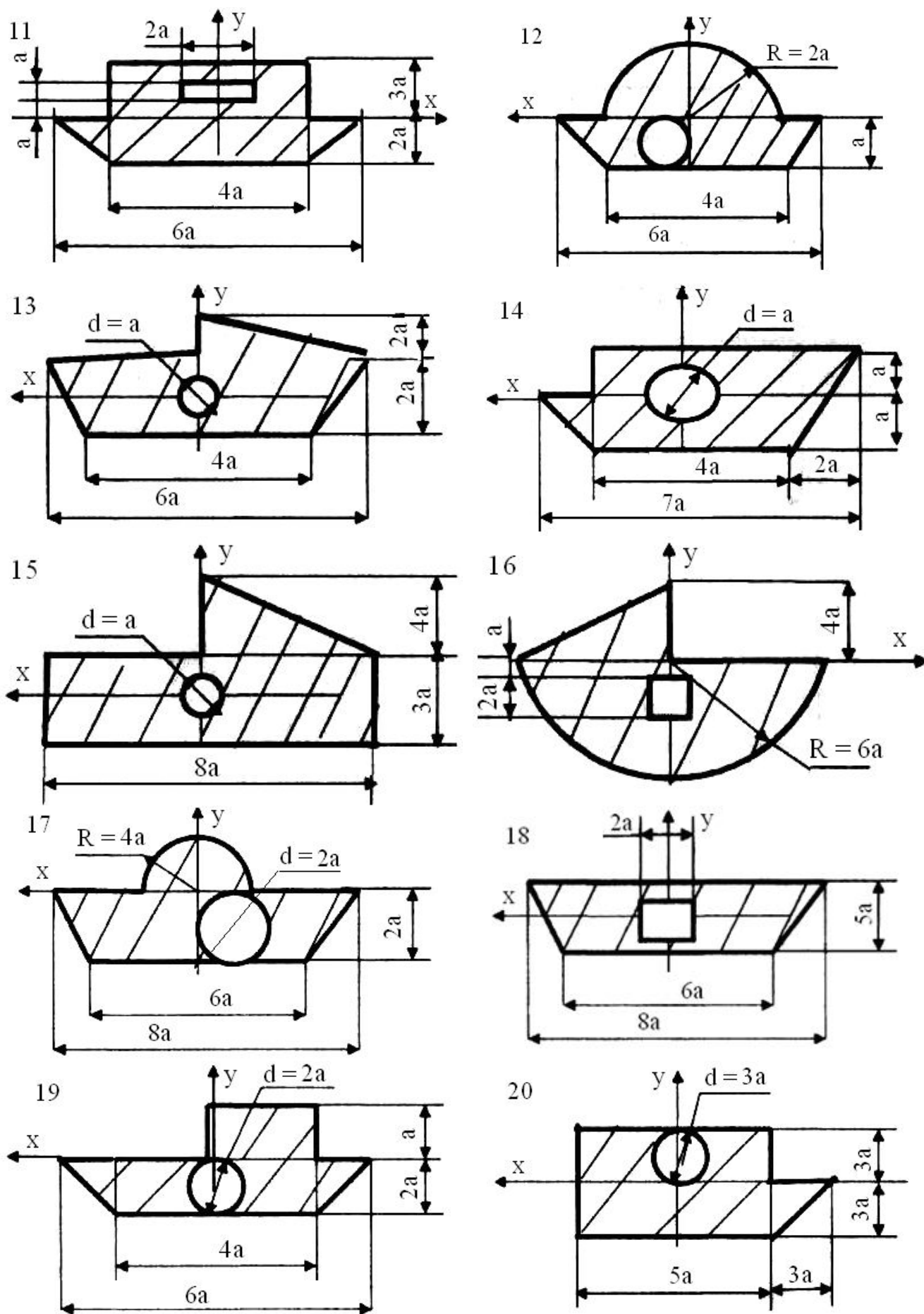


Рис. 1.67. Схеми завдань (варіанти 11-20)

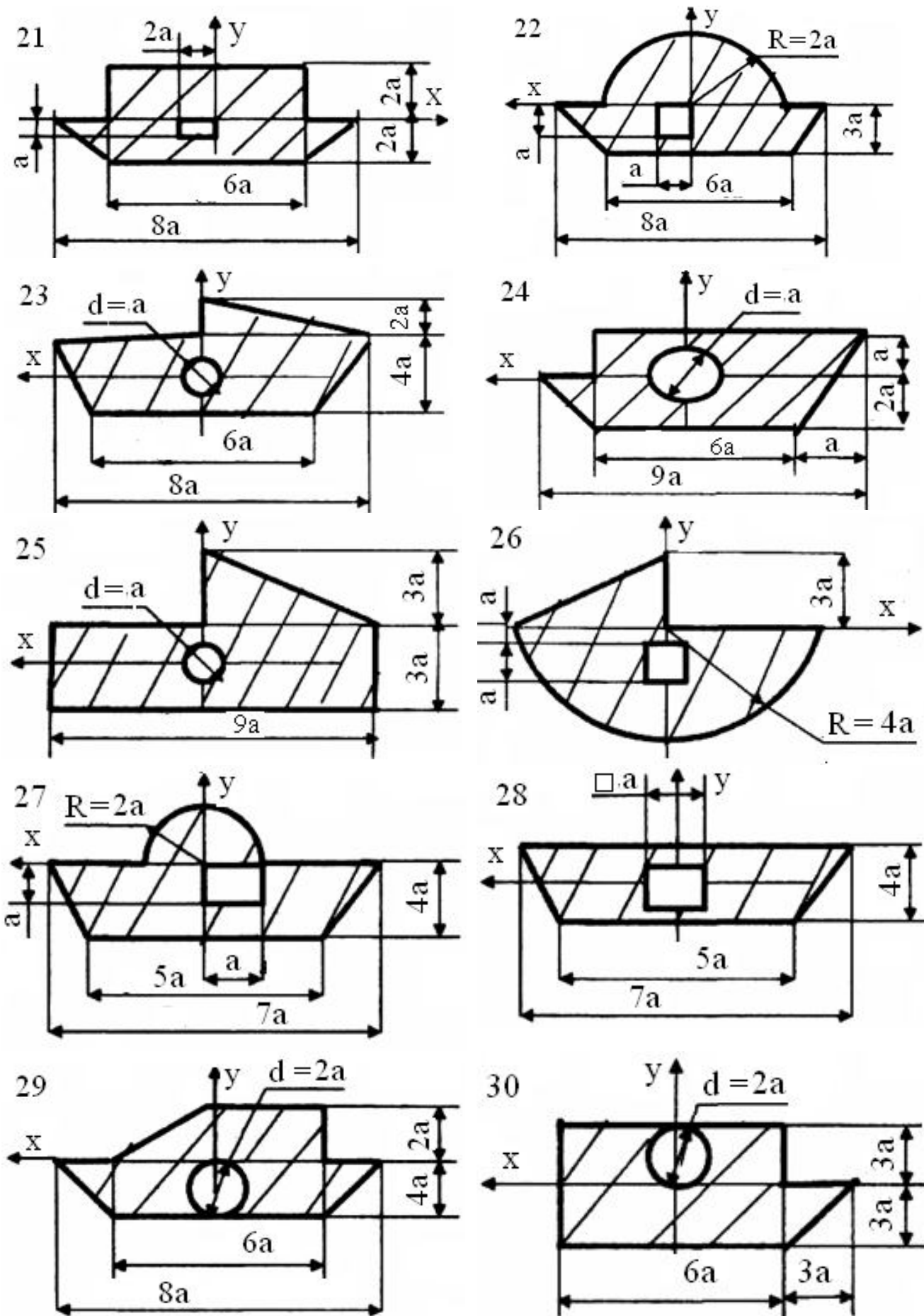


Рис. 1.68. Схеми завдань (варіанти 21-30)

Центр ваги кола 2, точка C_2 знаходиться в центрі кола. Знайдемо її координати точки $X_2 = 0$; $Y_2 = R = 13$ мм. Таким чином $C_2(0;13)$, тобто координати точок C_1 та C_2 однакові, значить точки співпадають. Центр ваги прямокутника точка C_3 . Знайдемо її координати за формулами:

$$X_{C_3} = 70/2 = 35 \text{ мм}; Y_{C_3} = 15/2 = 7,5 \text{ мм}.$$

Визначимо координати точки C_3 відносно заданих осей координат Ox та Oy . $X_3 = 0$ (точка C_3 належить осі OY), а $Y_3 = -7,5$, таким чином $C_3(0; -7,5)$.

Центр ваги трикутника 4 точка C_4 . Знайдемо її координати за формулами: $X_{C_4} = 1/3 a = 21/3 = 7$ мм, $Y_{C_4} = 1/3 \cdot b = 15/3 = 5$ мм.

Визначимо координати точки C_4 відносно заданих осей координат Ox та Oy . $X_4 = -35 - 7 = -42$ мм, $Y_4 = -5$, тоді $C_4(-42; -5)$.

Центр ваги трикутника 5 точка C_5 . Знайдемо координати:

$$X = 21/3 = 7 \text{ мм}, Y = 15/3 = 5 \text{ мм}.$$

Визначимо ці координати відносно заданих осей координат Ox та Oy $X_5 = 35 + 7 = 42$ мм, $Y_5 = -5$ мм, $C_5(42; -5)$.

3. За допомогою відомих формул обчислимо площі наданих п'яти фігур: 1) площа прямокутника 1 $A_1 = a \cdot b = 50 \times 26 = 1300 \text{ мм}^2$;

2) площа кола 2 від'ємна, тому що коло є порожниною (метод від'ємних мас). $A_2 = \pi R^2 = 3.14 \times 13^2 = -530,7 \text{ мм}^2$;

3) площа прямокутника 3 $A_3 = 70 \times 15 = 1050 \text{ мм}^2$;

4) площа трикутників 4 та 5 буде однакова:

$$A_4 = A_5 = a \cdot b / 2 = 21 \cdot 15 / 2 = 157,5 \text{ мм}^2.$$

Для плоских перерізів координати центра ваги знаходять за допомогою формул:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5}{A_1 - A_2 + A_3 + A_4 + A_5}; y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 - A_2 + A_3 + A_4 + A_5}$$

Підставимо обчислені значення величин, отримуємо:

$$x_c = \frac{1300 \cdot 0 + (-530,7) \cdot 0 + 1050 \cdot 0 + 157,5 \cdot (-42) + 157,5 \cdot 42}{1300 - 530,7 + 1050 + 157,5 + 157,5} = 0 \text{ мм};$$

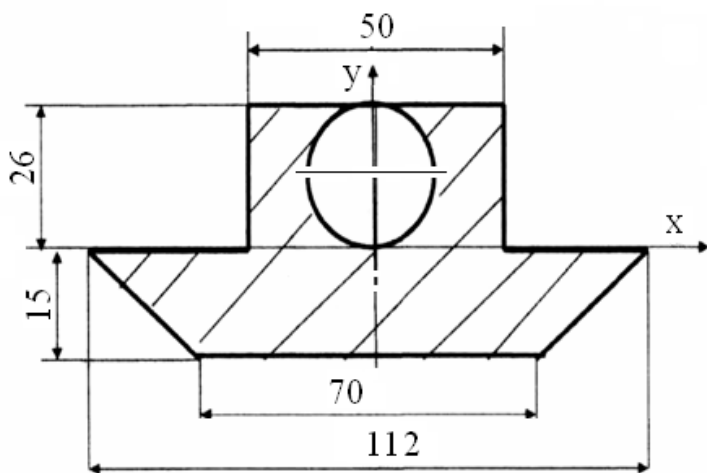
$$y_c = \frac{1300 \cdot 13 + (-530,7) \cdot 13 + 1050 \cdot (-7,5) + 157,5 \cdot (-5) + 157,5 \cdot (-5)}{1300 - 530,7 + 1050 + 157,5 + 157,5} = 0,25 \text{ мм}.$$

Відповідь: $C(0; 0,25)$.

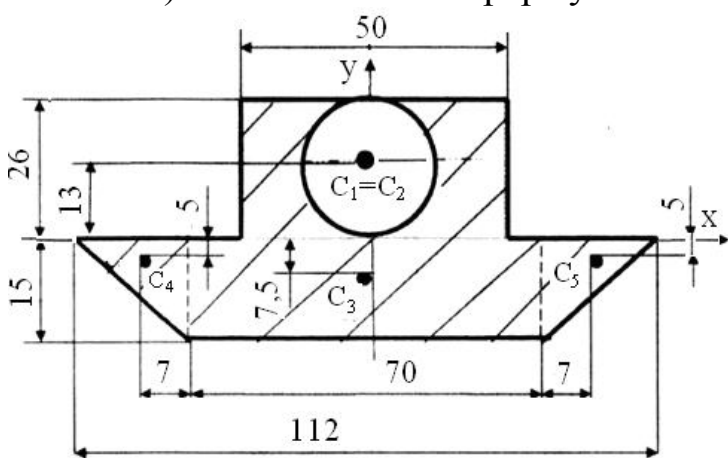
Завдання 11. Визначення центра ваги просторових однорідних тіл **Task 11. Determination of the center of gravity of spatial homogeneous bodies**

Мета роботи: 1. Сформувати компетентності для визначення центра ваги просторових тіл, що дає можливість проектування різних механізмів.

2. Сформувати компетентності самостійної роботи і творчого мислення.



а) ескіз плоского перерізу



б) координати центру ваги

Рис. 1.69. До прикладу

елементів треба брати зі знаком мінус.

Приклад. Знайти координати центра ваги просторового тіла, яке виготовлено з однорідних пластин (рис. 1.76). Криволінійна ділянка є половиною кола.

Розв'язання. Тіло, для якого потрібно визначити центр ваги, складається з однорідних пластин. Тому для координат центра ваги тіла маємо:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i x_i}{\sum_{i=1}^n S_i}; y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i y_i}{\sum_{i=1}^n S_i}; z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_i z_i}{\sum_{i=1}^n S_i}. \quad (1.61)$$

Розіб'ємо тіло на наступні елементи, площі та координати центра ваги кожного з яких легко знайти:

1. Прямокутник зі сторонами 90 та 70.
2. Прямокутний трикутник з катетами 60 та 40 (виріз).
3. Прямокутник зі сторонами 90 та 40.
4. Половина круга радіусом 30 см.

Знайти координати центра ваги просторової фігури, яка складається з однорідних пластин (рис. 1.70-1.75), взявши необхідні розміри (у сантиметрах) з табл. 1.13.

Накреслити фігуру у зручному масштабі відповідно до вказаних розмірів та позначити її центр ваги після виконаних розрахунків.

Методика розв'язання задачі

1. Розбиваємо фігуру на прості елементи. Ця процедура неоднозначна, але раціональний поділ на прості фігури дозволяє спростити розрахунки.

2. За заданими розмірами обчислюємо площу та координати центра ваги кожного окремого елемента.

3. Знаходимо координати центра ваги фігури, беручи до уваги що площі вирізаних

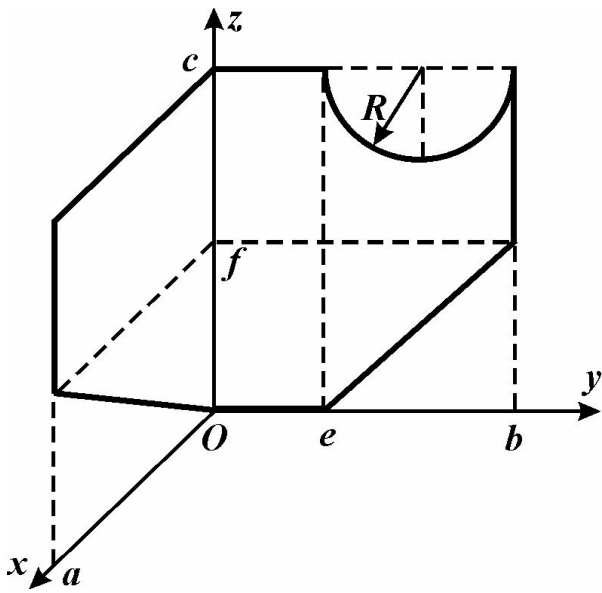


Рис. 1.70

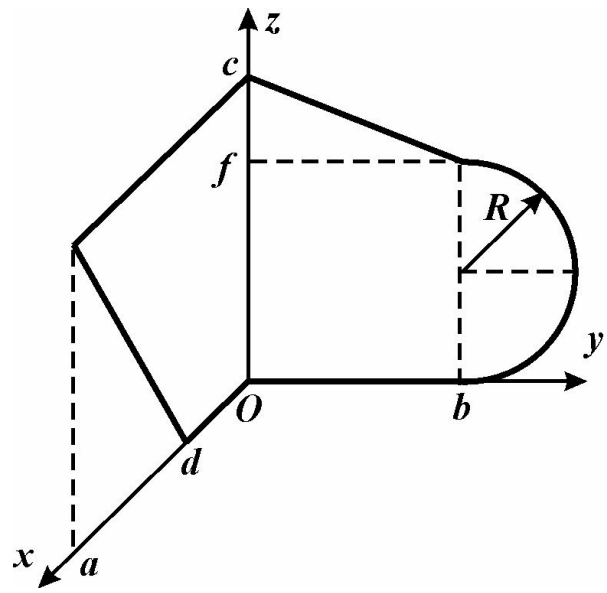


Рис. 1.71

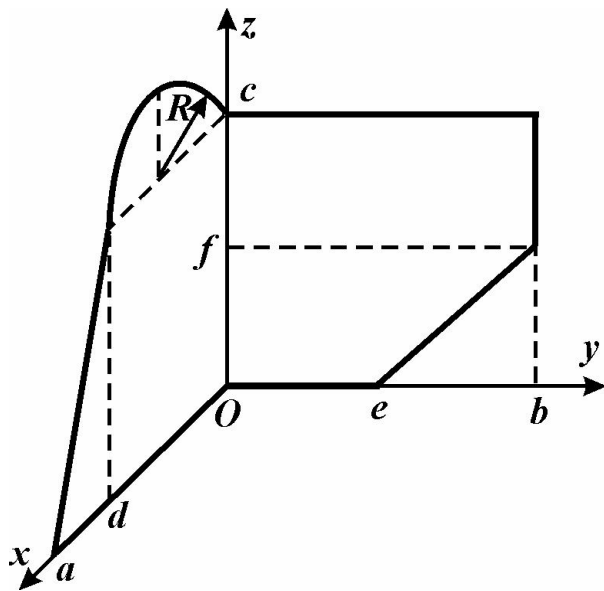


Рис. 1.72

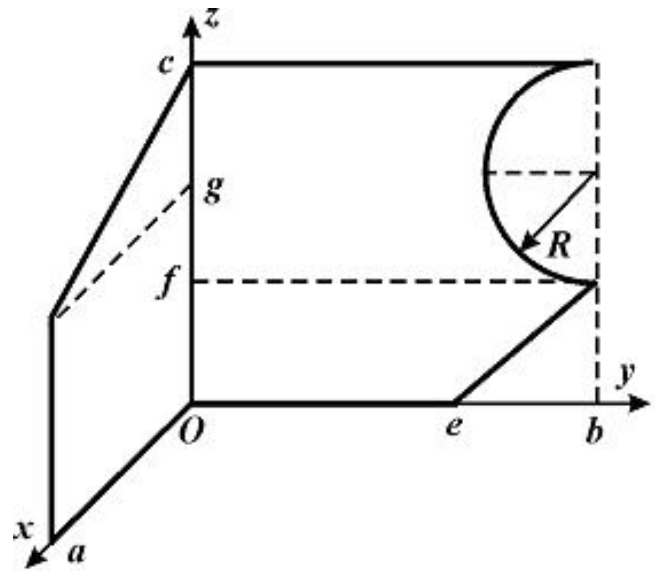


Рис. 1.73

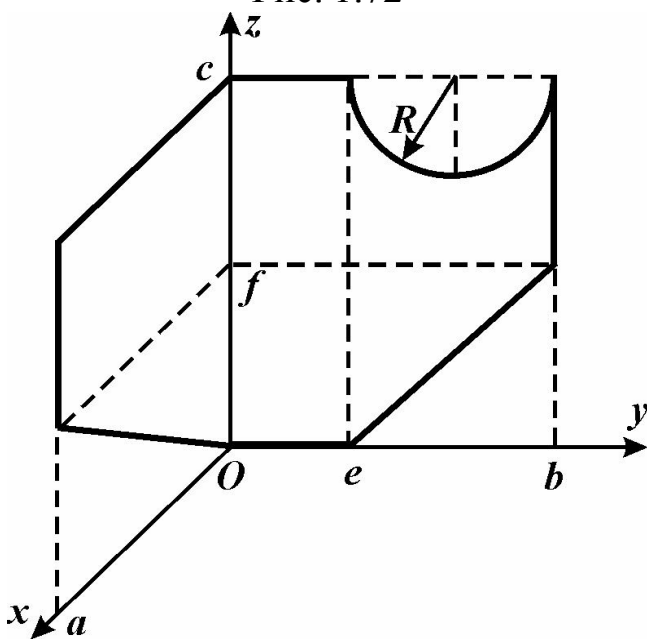


Рис. 1.74

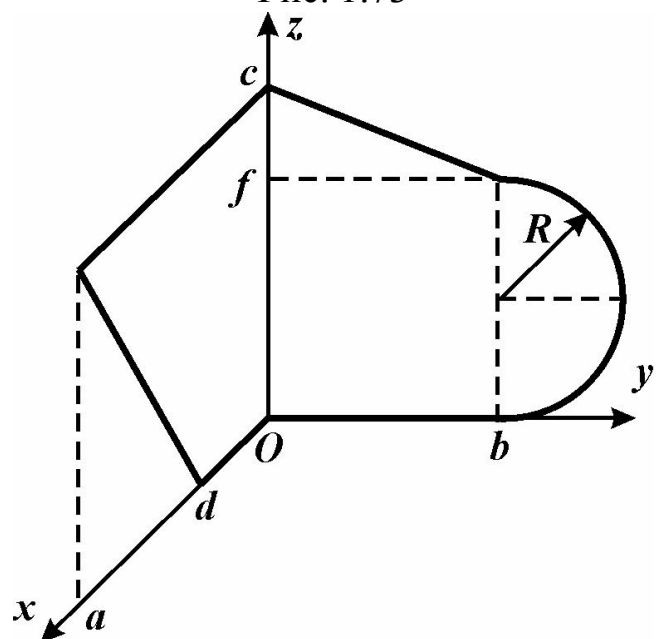


Рис. 1.75

Таблиця 1.13. Вихідні дані для задачі 11

№	Рис.	a, см	b, см	c, см	d, см	e, см	f, см	g, см
1	1	60	45	75	-	30	30	60
2	2	60	60	45	30	40	15	30
3	3	45	60	45	30	30	20	-
4	4	30	45	60	-	30	15	30
5	5	30	60	45	-	40	15	-
6	6	45	30	60	30	-	30	-
7	2	90	60	60	40	40	20	50
8	3	90	45	90	60	30	20	-
9	4	60	60	80	-	40	40	60
10	5	45	60	40	-	40	20	-
11	6	80	60	60	40	-	40	-
12	1	60	45	50	-	30	30	40
13	3	50	80	90	20	50	45	-
14	4	45	60	60	-	30	20	40
15	5	90	60	90	-	20	30	-
16	6	60	90	60	30	-	40	-
17	1	45	60	60	-	40	20	40
18	2	45	60	90	30	30	30	60
19	4	80	40	70	-	10	30	60
20	5	70	80	90	-	40	60	-
21	6	75	90	90	60	-	40	-
22	1	90	75	75	-	30	45	60
23	2	60	40	60	40	10	10	40
24	3	80	60	80	50	45	30	-
25	5	90	60	90	-	20	30	-
26	6	90	70	80	45	-	50	-
27	1	60	90	60	-	60	30	50
28	2	60	60	90	30	30	30	60
29	3	90	60	90	50	45	60	-
30	4	45	90	60	-	60	20	40

5. Прямокутний трикутник з катетами 30 та 40 (виріз).

Послідовно обчислимо площі та координати центра ваги кожної фігури:

$$S_1 = 90 \cdot 70 = 6300 \text{ см}^2, x_1 = (0 + 90)/2 = 45 \text{ см}, y_1 = 0, z_1 = (0 + 70)/2 = 35 \text{ см};$$

$$S_2 = 60 \cdot 40/2 = 1200 \text{ см}^2, x_2 = (90 + 90 + 30)/3 = 70 \text{ см}, y = 0;$$

$$z_2 = (0 + 0 + 40)/3 = 13,3 \text{ см};$$

$$S_3 = 90 \cdot 40 = 3600 \text{ см}^2, x_3 = 0 \text{ см},$$

$$y_3 = (0 + 90)/2 = 45 \text{ см}, z_3 = (0 + 40)/2 = 20 \text{ см};$$

$$S_4 = \pi R^2/2 = 3,14 \cdot 900/2 = 1413 \text{ см}^2;$$

$$x_4 = 0 \text{ см}, y_4 = 30 \text{ см};$$

$$z_4 = 40 + 4R/3\pi = 40 + 4 \cdot 30/(3 \cdot 3,14) = 52,7 \text{ см};$$

$$S_5 = 30 \cdot 40/2 = 600 \text{ см}^2, x_5 = 0 \text{ см}, y_5 = (60 + 90 + 90)/3 = 80 \text{ см},$$

$$z_5 = (0+0+40)/3 = 13,3 \text{ см}.$$

Отримані значення та відповідні добутки, які входять до формул (1.61), внесемо до табл. 1.14.

Звернемо увагу на те, що площа вирізу (для трикутників 2 та 4) та добуток площі на координату увійшли в розрахунки зі знаком «-».

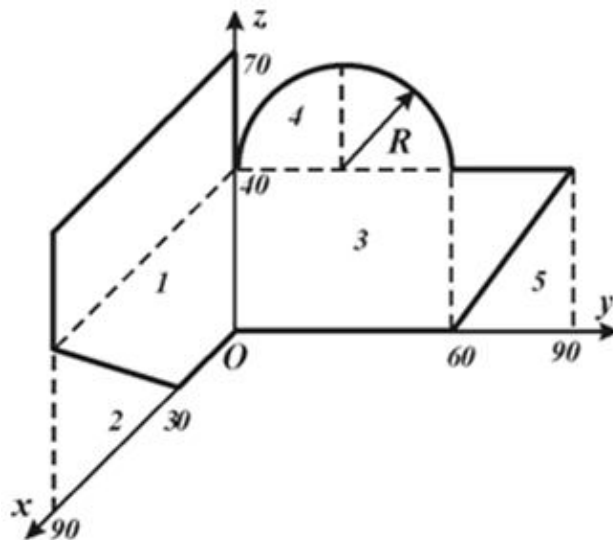


Рис. 1.76.

Таблиця 1.14. Значення показників

i	$S_i, \text{ см}^2$	$x_i, \text{ см}$	$y_i, \text{ см}$	$z_i, \text{ см}$	$S_i \cdot x_i, \text{ см}^3$	$S_i \cdot y_i, \text{ см}^3$	$S_i \cdot z_i, \text{ см}^3$
1	6300	45	0	35,0	283500	0	220500
2	-1200	70	0	13,3	-84000	0	-16000
3	3600	0	45	20,0	0	162000	72000
4	1413	0	30	52,7	0	42390	74465
5	-600	0	80	13,3	0	-48000	-7980
Σ	9513				199500	156390	342945

Визначаємо координати центра ваги фігури за наведеними формулами:

$$x_C = 199500/9510 = 21 \text{ см}, y_C = 15390/9510 = 16,4 \text{ см}, z_C = 342945/9510 = 36,1 \text{ см}.$$

Відповідь: $x_C = 21 \text{ см}, y_C = 16,4 \text{ см}, z_C = 36,1 \text{ см}.$

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ QUESTIONS FOR SELF-CONTROL

1. Що є предметом статички?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статички.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил? Чому вона еквівалентна?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стержень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке защемлення.
11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теорему про три сили (приклад задається викладачем).

15. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину. Визначите проекції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі Ox .
16. Як формулюються умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?
17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор-момент сили відносно даної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно даної точки.
20. Визначте момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил за довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при $q(0) = 0$.
30. Дайте визначення центра паралельних сил. Запишіть формули для визначення координат центра паралельних сил у геометричній формі в просторі й в алгебраїчній формі – у площині xOy .

31. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла.
32. Як визначаються координати ваги однорідної пластини.
33. Сформулюйте способи визначення координат центра ваги твердого тіла (площі, лінії), дайте їхню математичну інтерпретацію.
34. Що називається статичним моментом площини відносно осі?
35. Якою формулою визначається положення центра ваги площини сектора кола?
36. Як визначається положення центра ваги складеного тіла.
37. Дайте визначення парі сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
38. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
39. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площини?
40. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
41. Які пари сил називаються еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?
42. Як формулюються умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебраїчній формах?
43. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
44. Дайте визначення головного вектора системи сил.
45. Що називається головним моментом системи сил?
46. Чому дорівнюють головний момент і головним момент відносно даної точки довільної системи сил.
47. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
48. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
49. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
50. Що називається динамою (силовим гвинтом)?
51. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
52. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?

53. Якою властивістю володіє головний момент системи сил при перенесенні центра зведення?
54. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?
55. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодіючої).
56. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
57. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
58. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
59. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
60. Наведіть плоску довільну систему сил до найпростішого вигляду з використанням теореми Пуансо.
61. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
62. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
63. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
64. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
65. Дайте механічне поняття сил тертя спокою, ковзання і кочення.
66. Що таке трибометр?
67. Сформулюйте і дайте формульне визначення закону Амонтонна – Кулона. Якими властивостями володіють сили тертя ковзання?
68. Що таке коефіцієнт тертя спокою і тертя ковзання? Укажіть розмірності зазначених коефіцієнтів.
69. Що таке кут тертя і конус тертя?
70. Якими властивостями володіє коефіцієнт тертя катання? Укажіть його розмірність.
71. Укажіть цифрові значення для коефіцієнтів тертя спокою і кочення для типових кінематичних пар.
72. Для чого і чому в техніці при конструюванні вузлів машин прагнуть перейти від коефіцієнта тертя ковзання до коефіцієнта тертя кочення?
73. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм,
74. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми методом вирізання вузлів.
75. Як розраховують плоскі ферми методом Ріттера? Чим він відрізняється від методу вирізання вузлів?
76. Дайте поняття стійкості твердого тіла при його перекиданні. Наведіть приклади.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ LIST OF USED LITERATURE

1. Система конструкторської документації. Терміни та визначення основних понять : ДСТУ 3321:2003. – [Чинний від 2004-10-01]. – К. : Держстандарт України, 2005. – 50 с. – (Національний стандарт України).
2. Видання. Вихідні відомості (ISO 8:1977, NEQ; ISO 1086:1991, NEQ; ISO 7275:1985, NEQ): ДСТУ 4861:2007. – [Чинний від 2009-10-01]. – К. : Держспоживстандарт України, 2009. – 45 с. – (Національний стандарт України).
3. Теоретична механіка. Навчальний посібник / О.М. Черниш, М. Г. Березовий, В.В. Яременко, І.В. Головач. К. : Центр навчальної літератури, 2018. – 760 с
4. Теоретична механіка / І.В. Кузьо, Я.І. Зінько, Т.Н.М. Ванькович, В.І. Векерик та ін. Харків: Фоліо, 2017. – 347 с.
5. Теоретична механіка: Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету післядипломної освіти / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. Харків : ХДАМГ, 2001. – 124 с.
6. Пастушунко С. І. Практикум з теоретичної механіки. Навчальний посібник / С. І. Пастушенко, О. Г. Руденко, В.В. Іщенко. Частина 1. Статика. Кінематика. Вінниця : Нова книга, 2006. – 380 с.
7. Лобас Л. Г. Теоретична механіка у прикладах і задачах. Частина 1. Статика / Л. Г. Лобас, В. В. Ковальчук. Видання друге, виправлене і доповнене. К. : ДЕДУТ, 2008. – 96 с.
8. Павловский М.А. Теоретична механіка. К.: Техніка, 2002. – 512 с.
- 9, Теоретична механіка. Статика. Методичні рекомендації для виконання практичних робіт для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальностей: 208 «Агроінженерія»; 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)» денної та заочної форм навчання. Миколаїв, МНАУ, 2021. – 108 с. Укладачі: Іванов Г.О., Полянський П. М., Степанов С. М., Баранова О. В.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА.

Методичні рекомендації

до виконання практичних робіт

для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр»
початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 208 «Агроінженерія»
денної форми навчання

Укладачі:

Іванов Геннадій Олександрович.

Бабенко Дмитро Володимирович

Полянський Павло Миколайович та ін.

Технічний редактор – П. М. Полянський

Дизайн обкладинки – П. М. Полянський

Комп'ютерний набір – Г. О. Іванов, П. М. Полянський

Комп'ютерна верстка – П. М. Полянський

Формат 60x84/1/16. Папір офсетний.

Ум. друк. арк. 5,5. Наклад 30 прим. Зам. №57.

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.
Тел./факс: (0512) 341082

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.