Міністерство освіти і науки України
Миколаївський національний аграрний університет

Теоретична механіка. Статика.

методичні рекомендації до вивчення курсу лекцій для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальностей 208 «Агроінженерія» та 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)» денної та заочної форм навчання

Миколаїв
2021

УДК 539.3:521.21
Т30

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету, протокол №6 від 15.02.2021 р.

Укладачі:

Іванов Г. О. –	канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін.
Бабенко Д.В. –	канд. техн. наук, професор, Перший проректор Миколаївського національного аграрного університету.
Полянський П.М. –	канд. екон. наук, доцент, в.о. зав. кафедри загальнотехнічних дисциплін.
Степанов С.В. –	старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін.
Баранова О.В. –	асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін.

Рецензенти:

Атаманюк І.П. –	докт. техн. наук, професор, зав. кафедри вищої та прикладної математики.
Гавриш В.І. –	докт. техн. наук, професор, зав. кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу.

ЗМІСТ

ВСТУП. INTRODUCTION

1. Призначення навчальної дисципліни «Теоретична механіка». Знання та вміння, набуті при вивченні предмету, можуть бути використані для дослідження найскладніших проблем техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і технічних засобів, для розуміння нових механічних явищ з якими будуть зустрічатись майбутні фахівці у практичній діяльності, а також для самостійного опанування нових питань технології, які виникають на межі різних галузей наук.

2. Мета навчальної дисципліни. Метою освоєння дисципліни «Теоретична механіка» є формування у майбутніх фахівців комплексу теоретичних знань і практичних вмінь, навичок щодо найбільш загальних закономірностей механічного руху і рівноваги матеріальних тіл і систем та взаємодії матеріальних об'єктів, що з'являються при дослідженні, експлуатації, випробуванні і ремонтних роботах.

Предмет навчальної дисципліни: формування у майбутніх фахівців комплексу теоретичних знань і практичних вмінь, навичок щодо основ теоретичної механіки, здобуття навичок розв'язання задач статики, кінематики і динаміки.

Навчальна дисципліна «Теоретична механіка» відіграє важливу роль в інженерній освіті, яка повязує математику і фізику, механіку матеріалів і конструкцій та будівельну механіку з загальнотехнічними і спеціальними дисциплінами.

3. Компетентності. Компетентності здобувачів обумовлені освітньою програмою «Агроінженерія» й передбачають отримання відповідних результатів навчання, використання методів й форм оцінювання. Програмні компетентності включають інтегральні компетентності, загальні компетентності, фахові компетентності. Здобувачі вищої освіти повинні отримати здатність розв'язувати складні завдання й проблеми у сфери професійної діяльності – вміння розв'язувати задачі з розділів статики, кінематики та динаміки.

Основні фахові компетенції здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти у контексті навчальної дисципліни «Теоретична механіка»:

здатність застосування теорії для вирішення конкретних практичних задач складання розрахункових схем і диференціальних рівнянь руху, вміти визначати закони руху тіл під дією прикладених сил, розраховувати статичні і динамічні реакції, зводити складну систему сил до найпростішого виду, раціонально вибирати метод вирішення конкретної задачі механіки;

комунікативні, вміння зрозуміти завдання, задати питання по складним питанням та розв’язати завдання.

4. Заплановані результати. У результаті вивчення навчальної дисцип-лінни студент повинен:

знати: -умови та рівняння рівноваги тіл;

-класифікацію рухів тіла і залежності для визначення його кінематичних характеристик;

-методи визначення загальних законів руху тіла під дією сил;

-як перетворювати системи сил в еквівалентні, визначати і складати умови рівноваги системи сил, які діють на тіло;

вмити:-визначати траєкторії, швидкість і прискорення точок твердого тіла незалежно від діючих на нього сил;

-застосовувати загальні закони руху механічної системи під дією сил, складати диференційні рівняння її руху і з них визначити кінематичні характеристики руху.

Перелік практичних умінь, необхідних для розробки й прийняття рішень у пізнавальний й професійній діяльності здобувачів:

- фундаментальні цілі – уміння, які реалізуються у сфері інженерії, в тому числі сільсьгосподарського виробництва;
- предметні цілі – уміння, які реалізуються у сфері техніки агропромис-лового комплексу; призначення точності деталей і з’єднань машин і механізмів;
- функціональні цілі – уміння, характерні для галузей й сфер діяль-ності: участь у І-му і ІІ-му етапах Всеукраїнських студентських олімпіадах з дисципліни «Теоретична механіка»; підготовка наукових робіт;
- виховні цілі – прийняття управлінських рішень, самоорганізація здобувача, уміння поставити інженерну задачу та обґрунтовано її розв’язати.

5. Опис. Здатність застосування теорії для вирішення конкретних практичних задач складання розрахункових схем і диференціальних рівнянь руху, вміти визначати закони руху тіл під дією прикладених сил, розраховувати статичні і динамічні реакції, зводити складну систему сил до найпростішого виду, раціонально вибирати метод вирішення конкретної задачі механіки.

Вивчаючи дану дисципліну здобувач має розвиток світосприймання в розумінні законів механічного руху, взаємодії та рівноваги матеріальних об’єктів, загально інженерний розвиток та отримання навичок розв’язку задач, а також підготовка здобувачів вищої освіти до вивчення загально технічних і спеціальних дисциплін.

Для опанування навчальним матеріалом, передбаченого програмою з теоретичної механіки, необхідні знання з фізики, математики, в межах загальноосвітньої середньої школи, а також знання з вищої математики.

Згідно з розподілом навчального часу «Теоретична механіка» у робочому навчальному плані галузі знань 20 «Аграрні науки та продовольство» спеціальності 208 «Агроінженерія» предмет вивчається на протязі другого та третього семестрів в обсязі 180 годин.

У другому семестрі вивчається перший розділ: статика (20 годин лекцій, 54 годин практичних занять, самостійна робота 31 година);

У третьому семестрі вивчається: кінематика (14 годин лекцій та 14 годин практичних занять), динаміка (16 годин лекцій, 16 годин практичних занять, самостійна робота 45 годин).

Семестр	Денна форма навчання					
	Всього	у тому числі:				
		лекції	сп	прак.	лаб., інд	с.р.
2	105	20	-	54	-	31
Форма контролю		Залік				
3	105	30	-	30	-	45
Форма контролю		Розрахунково-графічна робота, екзамен				
Разом	210	50	-	84	-	76

Галузь знань 01 «Освіта» спеціальність 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)» 1 курс 2 семестр: лекцій 20 годин, практичних занять 18 годин, самостійна робота 52 години.

Галузь знань 01 «Освіта» спеціальності 015 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства)»:
2 курс 3 семестр: лекцій 16 годин, практичних занять 30 годин, самостійна робота 44 години.

Семестр	Денна форма навчання					
	Всього	у тому числі:				
		лекції	сп	прак.	лаб., інд	с.р.
2	90	20	-	18	-	52
Форма контролю		Залік				
3	90	16	-	30	-	44
Форма контролю		Екзамен				
Разом	180	36	-	48	-	96

1. ОСНОВНІ ІСТОРИЧНІ ЕТАПИ РОЗВИТКУ МЕХАНІКИ THE MAIN HISTORICAL STAGES OF THE DEVELOPMENT OF MECHANICS

Механікою (mechanics) називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і виникаючу при цьому взаємодію між ними. Відноситься механіка до природничих наук.

Термін «механіка» є словом грецького походження, який в буквальному перекладі означає «хитромудрість». Цей термін вперше був вжитий в III в. до н.е. учнем великого давньогрецького філософа Арістотеля в момент спостереження роботи важеля, коли «мале долає велике». В праці Арістотеля (384-322 рр. до н.е.) «Механічні проблеми» міститься багато цінного для механіки. Але, поряд з тим, зустрічається так багато невірного, що праці Арістотеля відіграли в історії негативну роль, тому, що майже дві тисячі років він вважався церквою непогрішним.

Історики науки вважають, що початок механіки, як науки, пов'язаний з ім'ям великого механіка усіх часів Архімедом (287-212 рр. до н.е.). Він заклав основи механіки як точної науки, зробив відкриття в математиці, гідростатиці, створив теорію рівноваги важеля і вчення про центр ваги тіл.

В наступні півтори тисячі років розвиток механіки був зупинений. Дешевий людський труд і низький рівень техніки не створювали умов для розквіту цієї науки. Приватне господарство було розраховано лише на персональні потреби.

Тільки з XII ст. відкрились перші університети Європи, але готували они переважно служителів духівництва та правників. Навіть у Парижі викладати геометрію було дозволено лише по святах, в 1355 р. Основою наук вважались праці Арістотеля, із яких було вилучено живий зміст.

Але поступово, у середині другого тисячоліття н.е., починають набирати темпи торгівельні відносини, а з ними і розвиток промисловості. Перед механікою постали проблеми в галузі техніки, пароплавства, у військовій справі. Для ефективної експлуатації шахт і копалин необхідно піднімати руду з великої глибини, будувати вентиляційні пристрої, відкачувати воду. Артилерія потребувала від механіки розв'язати такі питання, як міцність гармати при найменшій вазі, залежність опору повітря від швидкості снаряду, визначення траєкторії руху снаряду в повітрі і в пустоті.

З розвитком механіки, як науки, в ній з'явився цілий ряд самостійних галузей, пов'язаних з вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. Однак в усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка (*theoretical mechanics*) – це частина механіки, в якій вивчаються найзагальніші закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними.

Механічний рух (*mechanical movement*) – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ісаака Ньютона, тому вона називається ньютонівською або класичною. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А. Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих у порівнянні зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по перше, тим, що вона є фундаментальною загальнонауковою дисципліною, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара при тепловій конвекції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія, динамічні явища при протіканні хімічної реакції Білоусова-Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак-жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноваженість клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах.

По друге, теоретична механіка є *основою інженерних розрахунків* (*the basis of engineering calculations*), оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, суден), виробничого устаткування (двигунів, насосів, компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Відвертаючись при вивченні руху матеріальних тіл від усього часткового, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, які в даній задачі є визначальними. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які являють собою ту чи іншу ступень абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки відносять поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.

Матеріальною точкою (*material point*) називається тіло, розмірами якого можна знехтувати при розв'язанні певних задач. Наприклад, при наближеному дослідженні рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки.

Абсолютно твердим (*absolutely solid body*) називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

Теоретична механіка широко користується не тільки методом абстракцій, а й узагальненням, математичними методами і методами формальної логіки. Застосування цих методів і узагальнень результатів безпосередніх спостережень, виробничої практики і досліду дозволили встановити певні загальні закони, що відіграють роль аксіом. Усі подальші висновки теоретичної механіки можуть бути отримані з цих аксіом за допомогою логічних міркувань і математичних викладок. При цьому достовірність положень теоретичної механіки перевіряється дослідом і практикою.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

-*статики* (*statics*), в якій вивчаються методи еквівалентних перстворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;

-*кінематики* (*kinematics*), в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;

-*динаміки* (*dynamics*), в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Окрім цих трьох розділів, у теоретичній механіці вивчаються також *елементи аналітичної механіки* (*elements of analytical mechanics*), яка являє собою сукупність найбільш узагальнених аналітичних методів розв'язання задач механіки, котрі дозволяють не тільки однаково розв'язувати задачі динаміки, а й розповсюджувати їх на такі галузі, як класична теорія поля і квантова механіка.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь вчених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа Арістотеля (384-322 рр. до н.е.), який розглядав розв'язання практичних задач за допомогою важеля.

Вперше наукове обґрунтування механіки з'являється в роботі сіракузького геометра і механіка Архімеда (287-212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), дав низку наукових узагальнень, що відносяться до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Швидкий розвиток механіки починається з епохи Відродження. Видатні вчені цієї епохи розвинули методи статики і заклали основи динаміки. Найбільш значний внесок в механіку внесли: Леонардо да Вінчі (1452-1519)-вивчав траєкторію тіла, що було кинуто під кутом до горизонту, рух тіла по площині і явище тертя, а також запровадив поняття моменту сили відносно точки.

Сімон Стевін (1548-1620)-дав аксіоматичну побудову статики на основі постулатів Архімеда, запровадив поняття силового трикутника і довів теорему про три сили.

Микола Копернік (1473-1543)-відкрив геліоцентричну систему світу.

Галілео Галілей (1564-1642)-встановив основні закони вільного падіння тіл, увів поняття про нерівномірний рух і прискорення точки, вперше сформулював закон інерції, принцип відносності класичної механіки і дослідив дію сил на тіла, що рухаються.

Іоганн Кеплер (1571-1630)-відкрив закони руху планет.

Рене Декарт (1596-1650)-ближче до своїх сучасників підійшов до правильного формулювання закону інерції, вперше увів поняття кількості руху матеріальної точки і дослідив питання про складання довільного числа рухів точки.

Хрістіан Гюйгенс (1629-1695)-розробив теорію коливань фізичного маятника і визначив центр його коливання, довів теореми про відцентрову силу, експериментально визначив прискорення сили тяжіння, дослідив проблему удару двох тіл.

Роберт Гук (1635-1703)-відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією (закон Гука), що є основним співвідношенням при сучасних розрахунках динаміки та міцності конструкцій і споруд, а також передбачив закон всесвітнього тяжіння Ньютона.

П. Варіньон (1654-1722)-встановив в остаточному вигляді поняття моменту сили, умови рівноваги системи збіжних і паралельних сил, довів теорему про момент рівнодійної.

Одне з перших місць у розвитку механіки займає Готфрід Лейбніц (1646-1716), який розробив і застосував до задач механіки диференціальне і інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного обчислення.

Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727). У своєму знаменитому творі «Математичні основи натуральної філософії» (1687) він сформулював основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку механіки після Ньютона значною мірою пов'язаний з ім'ям Леонарда Ейлера (1707-1783), який більшу частину життя працював у Петербурзькій академії наук. Л. Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток механіки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був покладений працями Ж.Л. Даламбера (1717-1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статики (принцип Даламбера) і Ж.Л. Лагранжа (1736-1813). У своєму видатному творі «Аналітична механіка» він сформулював найбільш загальний принцип статики-принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність механіки-загальне рівняння динаміки, і вивів в узагальненому вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа першого і другого роду).

У подальшому працями видатних математиків і механіків П.Л. Мопертюї (1698-1759), П.С. Лапласа (1749-1827), К.Ф. Гаусса (1777-1855), С. Пуассона (1781-1840), У. Гамільтона (1805-1865), К. Якобі (1804-1851), М.В. Остроградського (1801-1861) завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, були вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Одночасно з розвитком аналітичних методів механіки в цей період удосконалюються геометричні методи, зокрема в задачах статики. Так, у книзі французького механіка Л. Пуансо (1777-1859) «Елементи статики» вперше була введена нова абстракція-пара сил і викладена теорія приведення довільної системи сил до заданого центру.

Наступний розвиток механіки характеризується поглибленим вивченням ряду її розділів і появою нових.

Слід відзначити роботи С.М. Ковалевської (1850-1891) з теорії обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки, які стали початковою точкою для прикладної теорії гіроскопів.

Значний внесок у розвиток механіки неголономних систем, що має чисельні застосування в кібернетиці, теорії автоматичного керування, динаміці машин, зробили Д. Гіббс (1839-1903), С.А. Чаплигін (1863-1945) та інші вчені.

Теорія стійкості рівноваги та руху, яка була тісно пов'язана з проблемою точного приладобудування, створена і розвинута працями Е. Рауса (1831-1907), М.Є. Жуковського (1847-1921), О.М. Ляпунова (1857-1918), А. Пуанкаре (1854-1912).

Найбільш суттєві результати в теорії гіроскопів, які є основою навігаційних приладів, були отримані Л. Фуко (1819-1868), О.М. Криловим (1863-1945), В.В. Булгаковим (1901-1952) та іншими механіками.

Проблема боротьби з небезпечними вібраціями машин і споруд призвела до розробки теорії малих коливань, де значні результати отримали Релей (1842-1919), А. Пуанкаре, О.М. Крилов.

На початку XX сторіччя інтенсивного розвитку набула теорія нелінійних коливань, що описує процеси не тільки в механічних, а і в радіо-технічних, хімічних, біологічних та інших системах, основоположниками якої були Ван-дер-Поль, О.О. Андронов (1901-1952), М.М. Крилов (1879-1955), М.М. Боголюбов та ін.

Основи механіки тіла змінної маси, що є фундаментом вивчення реактивного польоту, були закладені в роботах І.В. Мещерського (1859-1935), К.Е. Ціолковського (1857-1935) і розвинуті С.П. Корольовим (1907-1966). Подальший розвиток цього розділу механіки працями А. Лоренца (1853-1928), А. Пуанкаре і А. Ейнштейна (1879-1955) привів до встановлення положень теорії відносності, яка створила нову, після І.Ньютона, систему просторово-часових відношень.

Наприкінці XIX ст. під впливом розвитку кораблебудування і авіації почалась розробка проблем гідро-та аеродинаміки, де найбільш значні результати пов'язані з іменами М.Є. Жуковського, С.А. Чаплигіна, Л. Прандтля (1875-1953), Т. Кармана (1881-1963).

Теоретична механіка стала основою теорії автоматичного регулювання, значний внесок у розвиток якої зробив І.А. Вишнеградський (1831-1895).

Працями Л. Ейлера, Нав'є (1785-1836), Коші (1789-1857), Сен-Венана (1797-1886) у XIX ст. була створена теорія пружності-наука про закони статичного і динамічного деформування пружних тіл.

У другій половині XX ст. з'явився новий напрям науки і технологій-робототехніка, основою якого стала теоретична механіка та теорія механізмів і машин. Особливістю робототехніки є те, що вона об'єднує такі науки, як механіка, кібернетика і комп'ютерні технології. Великий внесок у розвиток цього напряму мають: К.В. Фролов, Е.І. Воробйов, А.Г. Овакімов, Р. Уікер, М. Вулкобратович, М.З. Згуровський та ін.

Бурхливо розвинулась у минулому столітті механіка нелінійних коливань. Великий внесок у розвиток теорії нелінійних коливань належить українським вченим: М.М. Боголюбову, Ю.О. Митропольському, В.О. Кононенку та ін.

На початку XX сторіччя, у зв'язку з розвитком будівництва і машинобудування, виникла потреба розробки теорії пластин та оболонок, розвиток якої пов'язаний іменами Лява, Рейсснера, Доннелла, С.П. Тимошенко, В.З. Власова, В.В. Новожилова, Х.М. Муштарі, А.С. Вольміра, А.Л. Гольденвейзера та ін.

Теоретична механіки продовжує швидко розвиватись і тепер. Перед сучасними вченими постають великі задачі: засвоєння космосу, автоматика і телемеханіка, робототехніка і сучасні технології, машинобудування тощо. Це стимулює розвиток науки

В Україні сформувалось три школи прикладної теорії гіроскопів:
О.Ю. Ішлінського-В.М. Кошлякова (Інститут математики НАНУ),
А.О. Одінцова і М.А. Павловського (обидві Національний технічний університет Україна «Київський політехнічий інститут»).

На базі досягнень теоретичної механіки плідно працювали і працюють в галузі механіки суцільного середовища, теорії пружності, і пластичності відомі вчені: Г.М. Савін, О.М. Кільчевський, О.М. Гузь, А.Ф. Улітка, О.О. Горошко, В.Т. Грінченко та ін.

2. КУРС ЛЕКЦІЙ. LECTURE'S COURCE

ЛЕКЦІЯ 1. СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА LECTURE 1. STATICS OF AN ABSOLUTELY SOLID BODY

2.1.Основні визначення, поняття і аксіоми статики. Предмет статики

2.1.Basic definitions, concepts and axioms of statics. The subject of statics

Статикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються загальні положення про сили, їх приведення до найпростішого вигляду та умови рівноваги матеріальних тіл, на які діють ці сили.

Під *рівновагою* розуміють стан спокою тіла по відношенню до інших тіл. *Under equilibrium is understood as the state of rest of the body in relation to other bodies*.

Умови рівноваги істотно залежать від того, чи є тіло твердим, пружним, рідким, газоподібним. У загальному курсі теоретичної механіки розглядаються тільки задачі про рівновагу абсолютно твердих тіл.

У статиці розв'язуються такі основні задачі:

1) приведення системи сил, що діють на абсолютно тверде тіло, до найпростішого вигляду;

2) визначення умов рівноваги сил, які діють на абсолютно тверде тіло.

The following basic tasks are solved in statics:

1) bringing the system of forces acting on an absolutely rigid body to the simplest form;

2) determining the conditions of equilibrium of forces acting on an absolutely rigid body.

Ці задачі статики можна розв'язувати шляхом відповідних геометричних побудов або за допомогою числових розрахунків.

Матеріальна точка-це матеріальне тіло, розмірами якого при вирішенні конкретної задачі можна знехтувати, або геометрична точка, яка наділена певною масою.

A material point is a material body that can be neglected when solving a particular problem, or a geometric point that is endowed with a certain mass.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, відстань між частками якого залишається постійною. Тобто абсолютно тверде тіло зберігає свою геометричну форму незалежно від дії інших сил.

An absolutely solid body is a body whose distance between particles remains constant. That is, a completely solid body retains its geometric shape regardless of the action of other forces.

Сила – фізична величина, яка є кількісною мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами. *Force is a physical quantity that is a quantitative measure of the mechanical interaction between material bodies*

Сила-величина векторна, її дія на абсолютно тверде тіло визначається: значенням або модулем сили; напрямом дії сили; точкою, в якій вона прикладена. Пряма *аа* (рис. 1.1), уздовж якої спрямована сила, називається *лінією дії сили*. Основною одиницею сили є 1 ньютон (Н). Це сила, яка масі в 1 кг надає прискорення в 1 м/с^2 (1Н = 1 кг · 1 м/с^2 = 1 кг·м/с^2). Графічно сила зображується спрямованим відрізком-вектором (рис. 1.1), довжина якого виражає у вибраному масштабі величину сили, а напрям відрізка відповідає напряму сили. Силу позначатиму буквою $\overline{F}$, а її величину (модуль) як F чи $|\overline{F}|$.

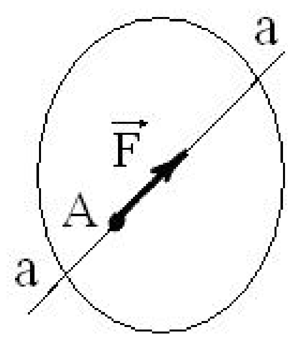


Рис. 1.1

Системою сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$ називатимемо сукупність сил, що діють на абсолютно тверде тіло. *The system of forces is called the set of forces acting on an absolutely rigid body.*

Наведемо ще такі визначення:

1. Тіло, яке не взаємодіє з іншими тілами і якому з даного положення можна надати будь-яке переміщення у просторі, називається *вільним*.

2. Якщо одну систему сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$, що діють на вільне тверде тіло, можна замінити іншою системою $(\overline{P}_1,...,\overline{P}_m)$, не порушуючи при цьому стану спокою чи руху, в якому знаходиться тіло, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*: $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n) \sim (\overline{P}_1,...,\overline{P}_m)$.

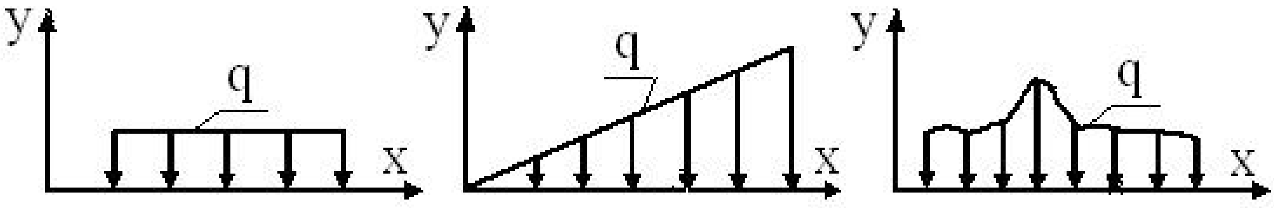
3. Система сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані спокою, називається *зрівноваженою*, або еквівалентною нулю: $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n) \sim 0$.

4. Якщо задана система сил $(\overline{P}_1,...,\overline{P}_n)$ еквівалентна одній силі, то ця сила називається *рівнодійною* $\overline{R}$ заданої системи сил: $(\overline{P}_1,...,\overline{P}_n) \sim \overline{R}$.

5. Сила, яка прикладена до тіла в точці, називається *зосередженою*. *Точкою прикладання* сили називається та матеріальна частка тіла, до якої ця сила безпосередньо прикладена.

6. Сили, що діють на всі точки довжини, поверхні чи об'єму, називаються *розподіленими*.

Величину сили, яка припадає на одиницю довжини, площі або об'єму, називають *інтенсивністю*. Звичайно розподілену силу позначають буквою q, яка має розмірність Н/м, Н/м^2, Н/м^3 відповідно. Прикладами розподілених сил є: тиск циліндричного котка на поверхню дороги; тиск колеса трамваю на рейку; тиск снігового шару на покрівлю; тиск рідини на стінки трубопроводу, посудини, греблі; сили ваги тіла та ін. Позначають характер дії розподілених сил графіком (епюрою). Епюри рівномірної, трикутникової і довільної інтенсивностей діючих сил наведено на рис.1.2, а, б, в відповідно.



а) б) в)

Рис.1.2. Епюри інтенсивностей діючих сил

7. *Зовнішні сили* - це сили, що діють на тіло або механічну систему з боку матеріальних точок або інших тіл, які не входять в цю систему. *External forces are forces acting on a body or mechanical system from material points or other bodies not included in the system*.

8. *Внутрішні сили* - це сили взаємодії між точками однієї механічної системи. *Internal forces are forces of interaction between points of one mechanical system.*

1.2. Класифікація систем сил. Classification of systems of forces

При вивченні статики будемо послідовно переходити від розгляду простих систем сил до більш складних.

Системи сил можна класифікувати так:

Force systems can be classified as:

- система збіжних сил, плоска й просторова; *system of convergent forces, flat and spatial*;
- плоска система паралельних сил; *flat system of parallel forces*;
- довільна плоска система сил; *arbitrary flat force system*;
- просторова система паралельних сил; *spatial system of parallel forces;*
- довільна просторова система сил. *arbitrary spatial system of forces*.

1.3. Аксіоми статики. Axioms of static

В основі статики лежить ряд аксіом, що являють собою результат узагальнень численних дослідів і спостережень за рівновагою і рухом тіл, неодноразово підтверджених практикою. Аксіоми статики є вихідними положеннями дослідного характеру, що приймаються без доведення. Вони формулюються так.

Аксіома 1. Вільне абсолютно тверде тіло може знаходитися під дією двох сил $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ у рівновазі тоді й тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем

$\left|\overline{F}_1\right| = \left|\overline{F}_2\right|$ і діють уздовж однієї прямої аа у протилежних напрямах (рис. 1.3): $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$.

Axiom 1. A free absolutely rigid body can be under the influence of two forces in equilibrium if and only if these forces are equal in modulus and act along one straight line aa in opposite directions (*fig.* 1.3).

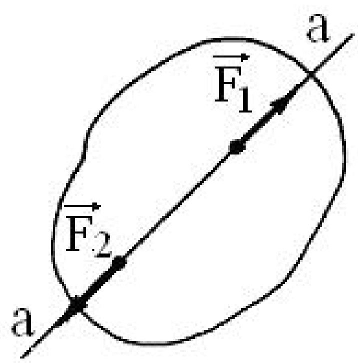


Рис. 1.3. До аксіоми 1

У механіці така система сил має назву “двійка сил”.

Ця аксіома визначає найпростішу зрівноважену систему двох сил, оскільки досліди свідчать, що вільне тіло, на яке діє тільки одна сила, знаходитися в рівновазі не може.

Аксіома 2. Дія заданої системи сил на абсолютно тверде тіло не порушується, якщо до неї додати або відняти зрівноважену систему сил (наприклад, двійку сил, рис. 1.4).

Axiom 2. The action of a given system of forces on an absolutely rigid body is not disturbed by adding or subtracting an equilibrium system of forces (for example, two forces, fig. 1.4).

Наслідок з аксіоми 2. Не порушуючи стану абсолютно твердого тіла, точку прикладання сили можна переносити вздовж її лінії дії.

Consequence from axiom 2. Without disturbing the state of a completely solid body, the point of application of force can be transferred along its line of action.

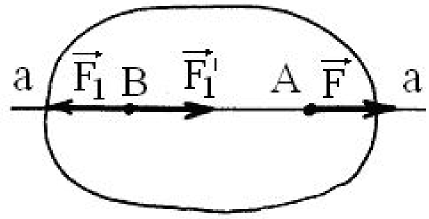


Рис. 1.4. До аксіоми 2

Доведення. Нехай на абсолютно тверде тіло діє сила $\overline{F}$, прикладена в точці А (рис. 1.4). Візьмемо на лінії дії аа цієї сили довільну точку В і прикладемо в ній дві сили $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ (двійку сил), що дорівнюють за величиною силі $\overline{F}$, тобто $\left(F = F_1 = F_1'\right)$.

Таку двійку сил можемо прикласти на підставі аксіоми 2. Сила $\overline{F}$, яка прикладена в точці *A,* і сила $\overline{F}_1$, прикладена в точці В, складають, за побудовою, зрівноважену систему сил. Тому її можна відкинути, не порушуючи стану рівноваги тіла. Отже, залишається сила $\overline{F_1}'$, яка прикладена в точці В і дорівнює за величиною початковій силі $\overline{F}$.

За інженерними розрахунками цим наслідком можна користуватися лише тоді, коли визначаються умови рівноваги конструкції і не розглядаються внутрішні зусилля, що виникають в її окремих частинах. Цей наслідок визначає силу як вектор, що ковзає по власній лінії дії, не залишаючи тіло (сила є ковзним вектором).

Аксіома 3 (аксіома про паралелограм сил). Система двох сил, прикладених в одній точці до абсолютно твердого тіла, має рівнодійну, яка зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах, і прикладена в тій самій точці (рис. 1.5).

Axiom 3 (*axiom about the parallelogram of forces*). *The system of two forces applied at one point to a completely rigid body has an equilibrium, which is represented by a diagonal of a parallelogram constructed on these forces, and applied at the same point* (*fig.* 1.5).

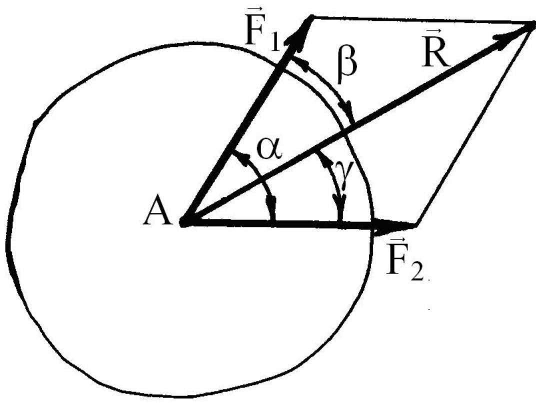


Рис.1.5. До аксіоми 3

Вектор $\overline{R}$, який дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, як на сторонах, називається *геометричною сумою* цих векторів:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 . \qquad (1.1)$$

У цій аксіомі сформульовано правило векторного додавання сил. Тому її можна сформулювати ще так: дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла в одній точці, мають рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в тій самій точці.

Модуль рівнодійної

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}\,, \qquad (1.2)$$

де α – кут між векторами $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$.

При однаковому напрямі сил ($\cos\alpha$=1) $R = F_1 + F_2$, а при протилежному ($\cos\alpha = -1$) $R = F_1 - F_2$.

Будь-яку силу $\overline{R}$ також можна єдиним способом розкласти на дві складові сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ за двома заданими напрямами, які утворюють кути β і γ з напрямком цієї сили:

$$F_1 = R\frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}; \quad F_2 = R\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}. \qquad (1.3)$$

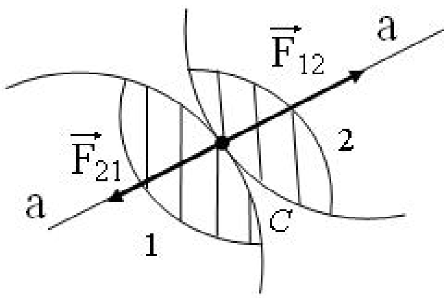


Рис. 1.6. До аксіоми 4

Аксіома 4. Сили взаємодії двох матеріальних тіл $\overline{F}_{12}$ (сила дії тіла 1 на тіло 2) і $\overline{F}_{21}$ завжди рівні за величиною $(F_{12} = F_{21})$ і діють по одній прямій аа у протилежних напрямах (рис. 1.6).

Axiom 4. The forces of interaction of two material bodies (*the force of action of body 1 on body 2*) *are always equal in magnitude and act in a straight line aa in opposite directions* (*fig*. 1.6).

Ця аксіома є третім законом Ньютона. Сили взаємодії двох тіл не створюють систему зрівноважених сил (двійку сил), бо вони прикладені до різних тіл.

Аксіома 5. Якщо деформоване тіло знаходиться в рівновазі під дією сил, то рівновага не порушиться і в тому випадку, коли це тіло затвердіє (стане абсолютно твердим).

Axiom 5. If a deformed body is in equilibrium under the action of forces, then the equilibrium will not be broken even when this body solidifies (*becomes absolutely solid*).

Ця аксіома дозволяє результати, що отримані в статиці абсолютно твердого тіла, переносити на тіла, які можуть деформуватися.

Аксіома 6. Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями.

Axiom 6. An involuntary material body can be regarded as free by discarding the ligaments and replacing them with reactions.

Ця аксіома має також назву-принцип звільнення від в'язей, який використовують при складанні рівнянь рівноваги будь-якої конструкції.

Задані (активні) сили намагаються рухати тіло, а реакції протидіють цьому переміщенню. Величина реакцій в'язей завжди залежить від діючих на тіло активних сил.

У статиці також зустрічаються задачі про рівновагу тіла, що складається з декількох твердих тіл, зв'язаних між собою. Таке тіло знаходиться в рівновазі, якщо в рівновазі перебувають всі складові тіла.
У деяких випадках таке тіло розглядають як одне абсолютно тверде тіло. Принцип затвердіння широко використовується в інженерних розрахунках.

1.4. Проекція сили на вісь і площину
The projection of force on the axis from and on the plane

Проекція сили на вісь (*The projection of force on the axis from*)- алгебраїчна величина, яка дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатнього напрямку осі, і знак «–»- якщо в бік від'ємного напрямку. Тому (рис.1.7, а) буде $F_x = F \cdot \cos\alpha, F_y = F \cdot \sin\alpha,\ T_x = 0,$

Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю. *Проекцією сили на площину* (*The projection of force on the plane*) називається вектор, який міститься між проекціями початку і кінця даної сили на площину (рис. 1.7, б).

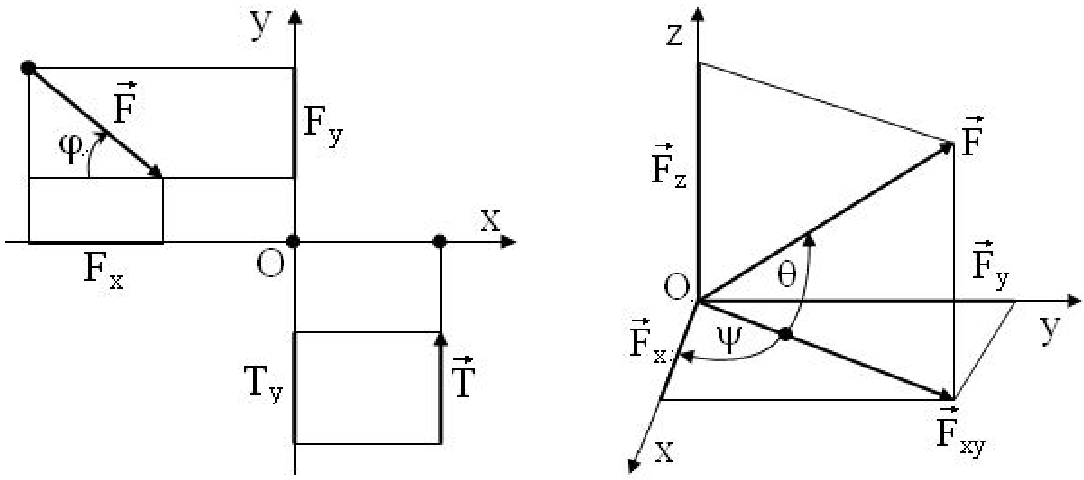
Таким чином, проекція сили на площину, на різницю від проекції сили на вісь, є величиною *векторною*.

На рис. 1.7, б вектором $\overline{F}_{xy}$ позначена проекція сили $\overline{F}$ на площину xOy, а її проекції на осі Ox, Oy, Oz визначаться так: $F_x = F_{xy} \cos\psi = F\cos\theta \cdot \cos\psi;\ F_z = F\sin\theta;\ F_y = F_{xy} \sin\psi = F\cos\theta \cdot \sin\psi;$

Тут величини F_x і F_y визначено методом подвійного проектування: спочатку знаходиться проекція сили на площину xOy, а потім отриманий вектор $\overline{F}_{xy}$ проектують на осі Ox і Oy.

1.5. Розклад сили на координатні складові
Schedule of force into coordinate components

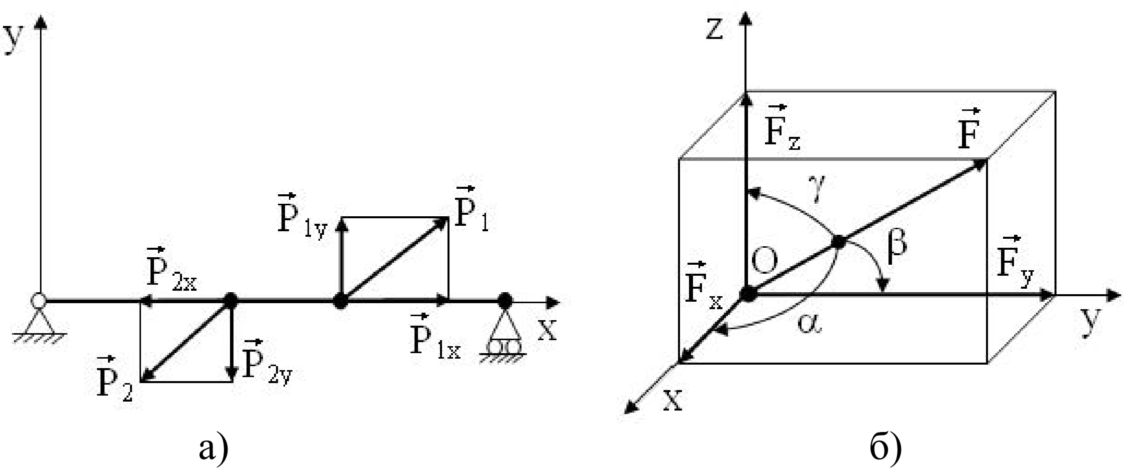
Відповідно до аксіоми 3 про паралелограм сил кожну силу можна розкласти на складові.



а) б)

Рис. 1.7. Проекція сили на вісь (а) і площину (б)

Якщо їх лінії дії паралельні осям системи координат, то вони називаються *координатними складовими сили* (*coordinate components of force*) у площині (сили $\overline{P}_{1x}, \overline{P}_{1y}, \overline{P}_{2x}, \overline{P}_{2y}$ на рис. 1.8, а) або у просторі (сили $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ на рис. 1.8, б). При побудові координатних складових в першому випадку використовують метод прямокутника, а у другому – метод паралелепіпеда, відповідно до якого вектор $\overline{F}$ сили уявляють діагоналлю паралелепіпеда (рис. 1.8, б), ребра якого приймають за її складові $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$.



а) б)

Рис. 1.8. Координатні складові сили у площині (а) і у просторі (б)

У техніці процедуру розкладу сили на координатні складові використовують при розв'язанні задач рівноваги твердого тіла, наприклад, при складанні рівнянь моментів сил. Тут для координатних складових просто визначаються плечі сил, а деякі моменти складових виявляються рівними нулю за побудовою. Величини координатних складових розраховують за допомогою розглянутих в підрозділі (1.4) формул.

Але якщо у просторі задано кути α, β, γ між вектором сили $\overline{F}$ (рис. 1.8, б) і осями системи координат, то краще користуватися наступними виразами: $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\cos\beta$; $F_z = F\cos\gamma$.

ЛЕКЦІЯ 2. В'ЯЗІ ТА ЇХ РЕАКЦІЇ.
LECTURE 2. VISIAS AND THEIR REACTIONS

В'язями називають тіла або сукупність тіл, які обмежують рух даного тіла чи даної матеріальної системи. *Connections are called bodies or sets of bodies that restrict the movement of a given body or a given material system.*

За аксіомою 6 невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями. Звільнення від в'язей дає можливість звести рівновагу невільного твердого тіла до відповідного питання про рівновагу вільного твердого тіла, яке находиться під дією одночасно зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Сила, з якою в'язь діє на тіло, щоб перешкодити будь-яким його переміщенням, називається *реакцією в'язі.* Визначення реакцій в'язей має велике практичне значення: знаючи їх, будемо знати і сили тиску тіла на в'язі, які необхідні для розрахунку міцності відповідних частин конструкції.

Надалі сили, які не є реакціями в'язей (наприклад, сила тяжіння), будемо називати *активними силами*. Особливість активної сили полягає в тому, що її модуль і напрям безпосередньо не залежать від інших сил, які діють на тіло. Реакції в'язей відрізняються від діючих на тіло активних сил тим, що їх напрямок і величина завжди залежать від цих сил і наперед невідомі. Якщо ніякі активні сили на тіло не діють, то реакції в'язей дорівнюють нулю. Для визначення реакції в'язі потрібно розв'язати відповідну задачу статики. Правильне визначення напрямів реакцій в'язей відіграє при розв'язуванні задач статики дуже важливу роль. Розглянемо докладніше, як спрямовані реакції деяких основних типів в'язей.

2.1. Гладка опорна поверхня. Smooth bearing surface

Гладкою називається поверхня, тертям тіла по якій можна знехтувати. Smooth is called a surface that can be neglected by the friction of the body.

Гладка опорна поверхня не перешкоджає руху тіла по поверхні, але перешкоджає переміщенню тіла вздовж нормалі до поверхні зв'язку. Реакція такої поверхні спрямована перпендикулярно до дотичної площини, проведеної до поверхні цієї опори у точці стикання з даним тілом (рис. 2.1, а).

У випадках, коли спільна нормаль до поверхонь в'язі й тіла виявляється неозначеною, наприклад, вироджується в точку, то реакція в'язі спрямована по нормалі до тієї поверхні, до якої можна провести нормаль.

Прикладом може бути опора ребром або вершиною кута (рис. 2.1, б, в, г). В точці A (рис. 2.1, г) нормальна реакція $\overline{N_A}$ спрямована перпендикулярно AC, в точці B реакція $\overline{N_B}$-перпендикулярна AB. В точці D реакція $\overline{N_D}$-перпендикулярна поверхні DL. Напрямок реакцій опор K і L видно з рис. 2.1, г.

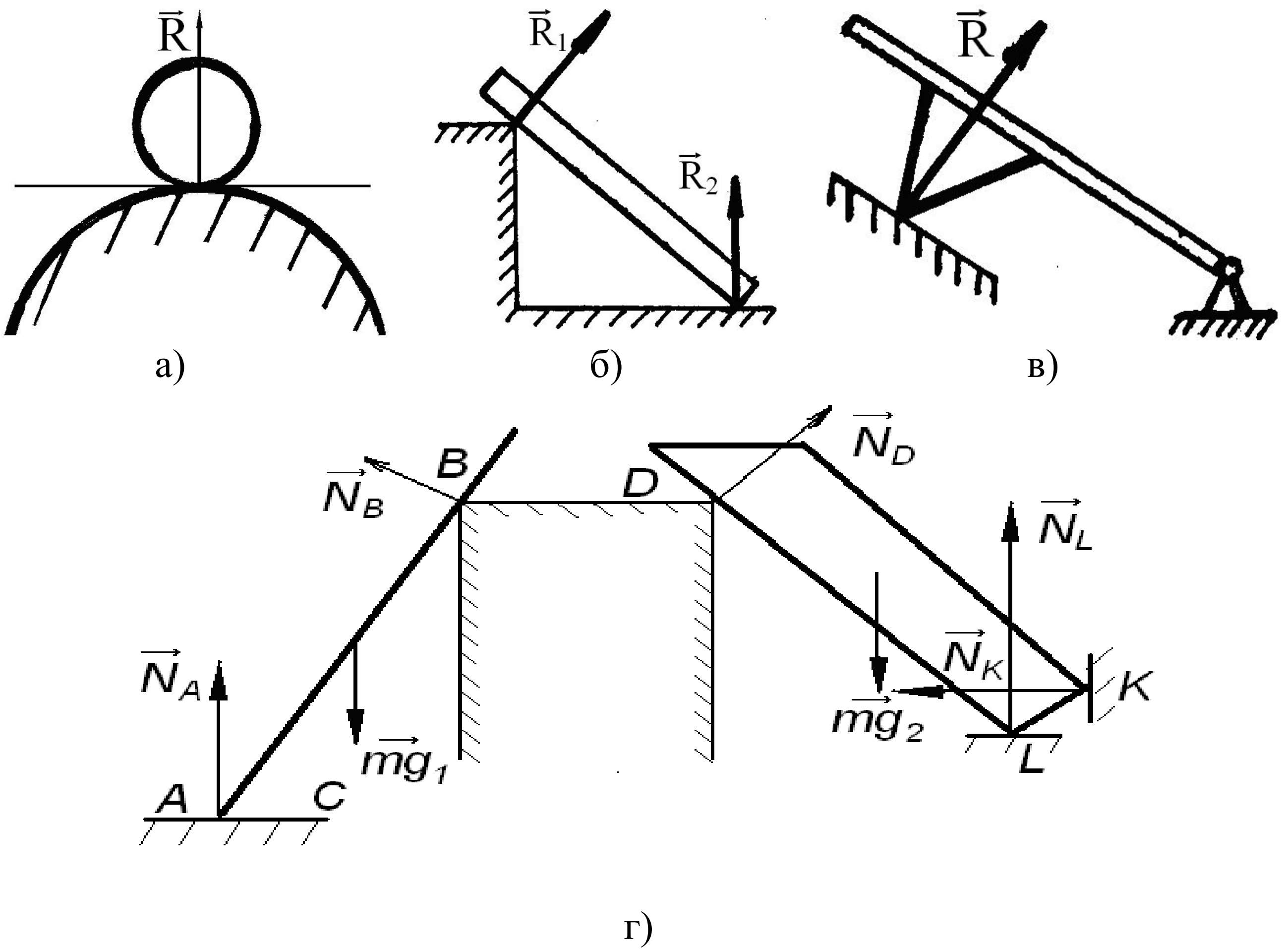


Рис. 2.1. Реакції гладких опорних поверхонь

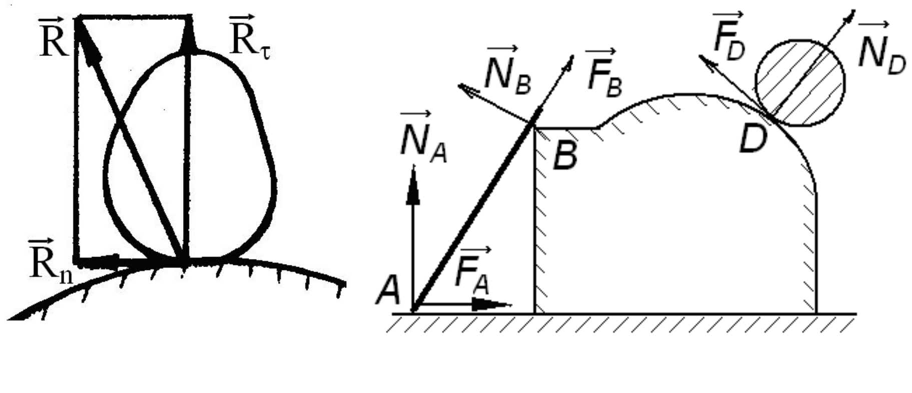
2.2. Негладка опорна поверхня. Опора з тертям Not a smooth bearing surface. Friction support

Негладка опорна поверхня-це шорстка поверхня і в цьому випадку необхідно враховувати сили тертя ковзання. *The non-smooth support surface is a rough surface and in this case it is necessary to take into account the sliding friction forces*.

У цьому випадку реакцію опори $\overline{R}$ розкладають на дві складові (рис. 2.2, а): силу $\overline{R}_n$, нормальну до поверхні опори, і силу $\overline{R}_\tau$ дотичну до поверхні опори (силу тертя):

$$\overline{R} = \overline{R}_n + \overline{R}_\tau;$$

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2}. \quad (2.1)$$



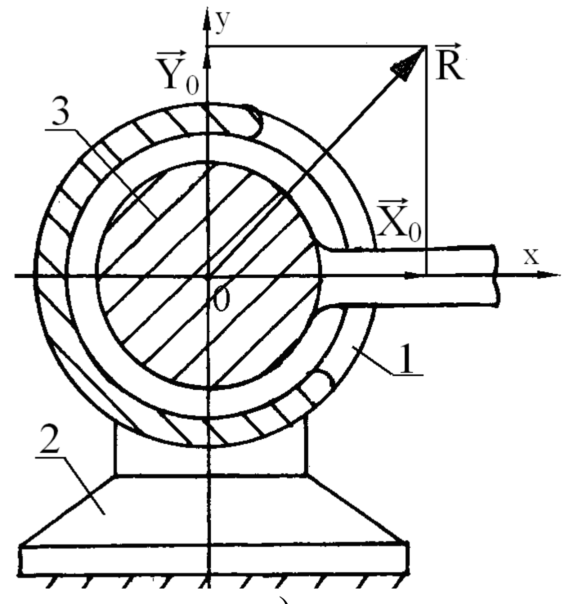
а) б)

Рис. 2.2. Реакції негладких опорних поверхонь

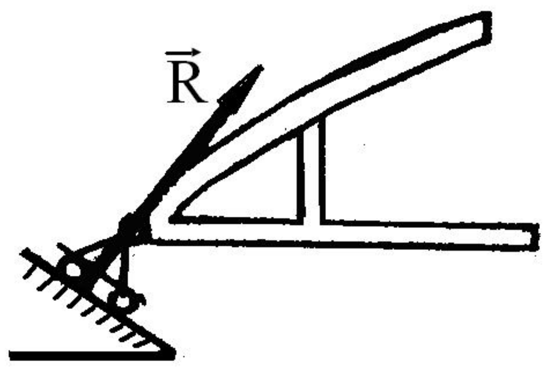
На рис. 2.2, б $\overline{N_A}$, $\overline{N_B}$, $\overline{N_D}$ -це нормальні реакції опор. $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$, $\overrightarrow{F_D}$ - це сили тертя ковзання. $R = \sqrt{N_A^2 + F_A^2}$.

2.3. Шарнірне з'єднання тіл. Articulate connection of bodies

З'єднання двох тіл, яке дає змогу одному тілу повертатися відносно іншого, не відділяючись, називається *шарніром* (*hinge*).



а)



Нерухомий циліндричний шарнір (*fixed cylindrical joint*). Він звичайно складається з обойми 1, яка закріплена на нерухомій опорі 2, і циліндрич-ного вала 3 (рис. 2.3, а). Тут з'єднане з валом 3 тіло може обертатися тільки навколо осі O шарніра. Реакція $\overline{R}$ циліндричного шарніра перпендикулярна до його осі і має напрям, який залежить від сил, прикладених до тіла. Тому її вира-жають у вигляді взаємно перпендикуляр-них координатних складових $\overline{X}_0$, $\overline{Y}_0$, тобто $\overline{R} = \overline{X}_0 + \overline{Y}_0$ і $R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$.

б)

Рис. 2.3. Нерухомий і рухомий циліндричні шарніри

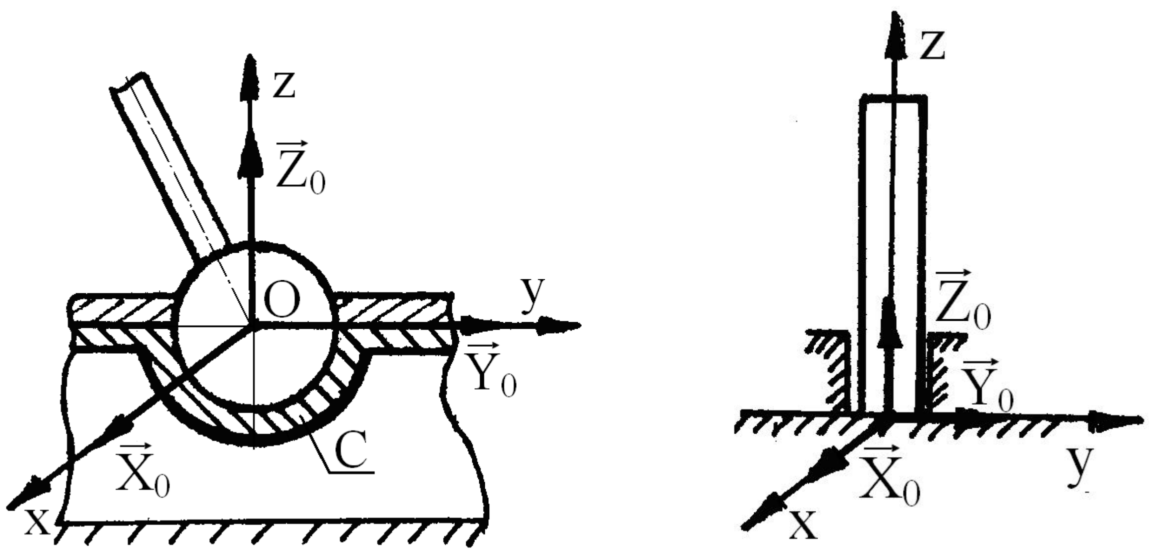
Рухомий циліндричний шарнір (*коток*). *Movable cylindrical hinge* (*cat*). Цей вид в'язі не дає змогу тілу переміщатися в напрямі, перпендикулярному до опорної поверхні котка. Його реакція $\overline{R}$ (рис. 2.3, б) спрямована завжди по нормалі до опор-ної площини. Опора на котках застосову-ється звичайно в мостових конструкціях (рис. 2.3, б).

Сферичний шарнір (*spherical hinge*). Сферичний шарнір представляє собою кулю, яка може обертатись як завгодно в середині сферичної порожнини (рис. 2.4, а). *The spherical hinge is a ball that can rotate anywhere in the middle of a spherical cavity* (*fig.* 2.4, а). У випадку сферичного шарніра тіло, яке з'єднане з обоймою C, має змогу обертатися навколо центру шар-ніра в будь-якому напрямі (рис. 2.4, а). Реакцію сферичного шарніра виража-ють трьома кординатними складовими $\overline{X}_O, \overline{Y}_O, \overline{Z}_O$ у трьох взаємно перпендикулярних напрямах:

$$\overline{R} = \overline{X}_O + \overline{Y}_O + \overline{Z}_O; \; R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \qquad (2.2)$$

Підп'ятник (*daddy*). Підп'ятник представляє собою з'єднання циліндричного шарніра з опорною площиною (рис. 2.4, б). *The bracket is a connection of the cylindrical hinge to the support plane* (fig. 2.4, б).

Якщо циліндричний шарнір перешкоджає переміщенню вала вздовж осі z вниз, то такий циліндричний шарнір називають підп'ятником. Опорна



а) б)

Рис. 2.4. Реакції сферичного шарніра і підп’ятника

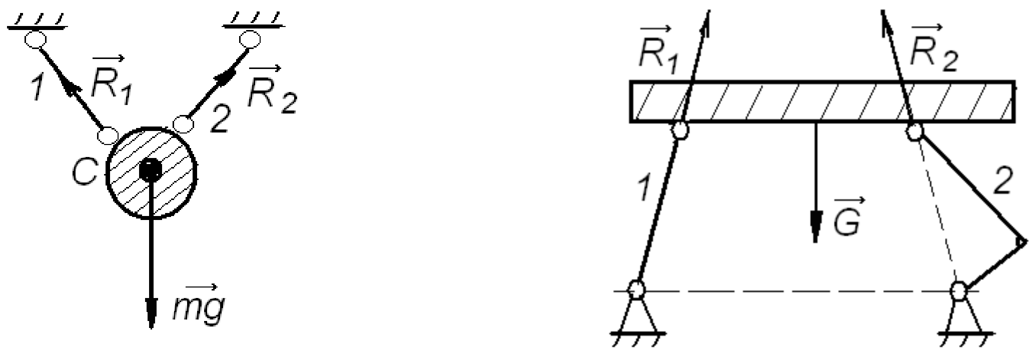
реакція підп’ятника має три координатні складові $\overline{X}_O, \overline{Y}_O, \overline{Z}_O$ (рис. 2.4, б).

Такий зв’язок дозволяє обертатися валу навколо його осі і переміщатися вздовж неї тільки в одному напряму. Реакція підп’ятника складається з реакції циліндричного підшипника X_A і Y_A і нормальної реакції Z_A опорної площини.

$$\overline{R} = \overline{X}_O + \overline{Y}_O + \overline{Z}_O; R = \sqrt{X_O^2 + Y_O^2 + Z_O^2}. \qquad (2.3)$$

2.4. Реакція невагомого стрижня. The reaction of a weightless rod

Якщо невагомий стрижень має на кінцях шарнірні з’єднання, то реакція цього стрижня спрямована по стрижню. Для тіла С (рис. 2.5, а) стрижні 1 і 2 є зв’язками. Такі стрижні працює тільки на розтяг або стиск. Реакції цих зв’язків спрямовані по стрижням 1 і 2.



а) б)

Рис. 2.5. Реакції невагомого стрижня

Ідеальними стрижнями (*Ideal Rods*) називаються невагомі стрижні 1 і 2, закріплений двома ідеальними шарнірами на їх кінцях (рис. 2.5, б).

Реакції стрижнів 1 і 2 тіла показані (рис. 2.5, б). Реакції $\overline{R}_1$ і $\overline{R}_2$ ідеальних стрижнів спрямовані по осям стрижнів. Якщо стрижні розтягнути, то реакції спрямовані від тіла до стрижнів; якщо стрижні стиснути – то по стрижням від них до тіла.

2.5. В'язь, що здійснюється гнучким тілом, ниткою або канатом, тросом, ланцюгом
Elm made of flexible body, thread or rope, rope, chain

Такі в'язі (рис. 2.6) працюють тільки на розтяг, їх реакції напрямлені по нитці. В'язь, реалізована в даному вигляді, не дає змоги тілу віддалятися від точки підвісу за напрямом AM. Тому реакція $\overline{T}$ нитки AM спрямована завжди вздовж нитки до точки підвісу A. У задачах теоретичної механіки припускають, що нитка є навагомою, гнучкою і нерозтяжною.

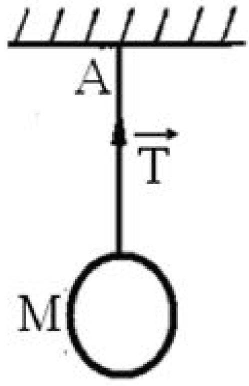


Рис. 2.6. Реакція нитки

2.6. Жорстке защемлення. Hard stiffening

Балка AB кінцем A жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець вільний (рис. 2.7). Якщо на балку діє задана сила $\overline{F}$, то в защемленні виникають реакції $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ і пара сил з моментом M_A. Так як напрям реакції $\overline{R}_a$ невідомий, то ця реакція розкладається на дві невідомі складові X_A і Y_A. Таким чином, в точці A жорсткого защемлення маємо три невідомі складові реакції X_A, Y_A і M_A.

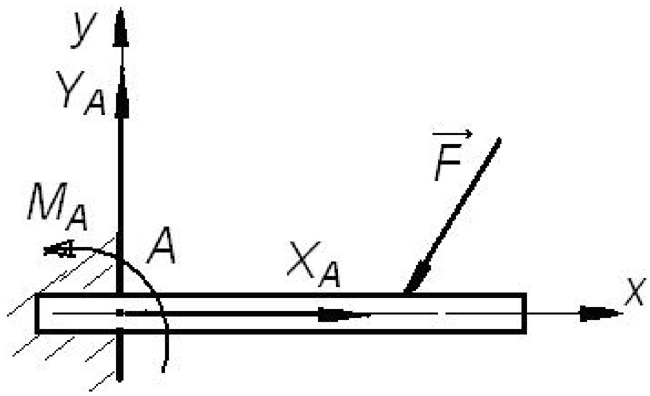


Рис. 2.7. Жорстке защемлення.

ЛЕКЦІЯ 3. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ
LECTURE 3. THE SYSTEM OF RELATED FORCES

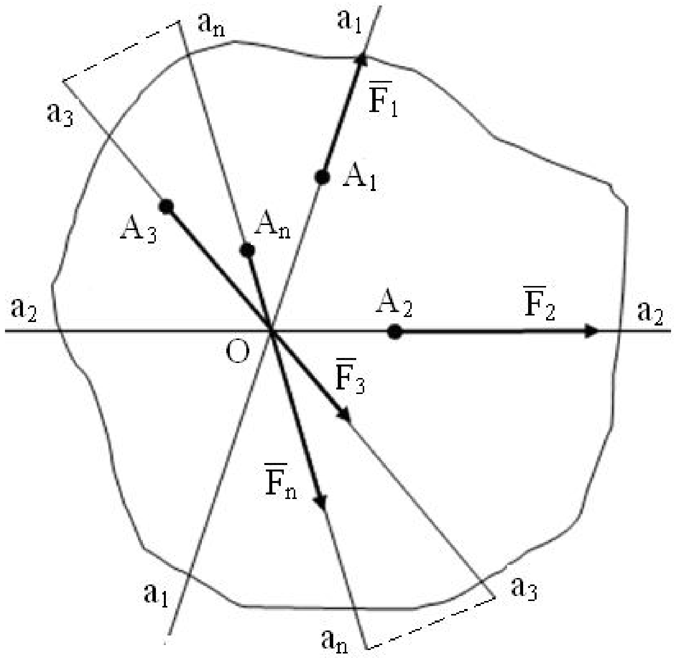
3.1. Зведення до рівнодійної. Правило многокутника сил
Reduction to the resultant. Rule of the polygon of forces

Найпростішою є система *збіжних сил*, тобто система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці (точці O збігу сил). Вона може бути просторовою чи плоскою. В останньому випадку всі лінії дії сил системи належать одній площині.

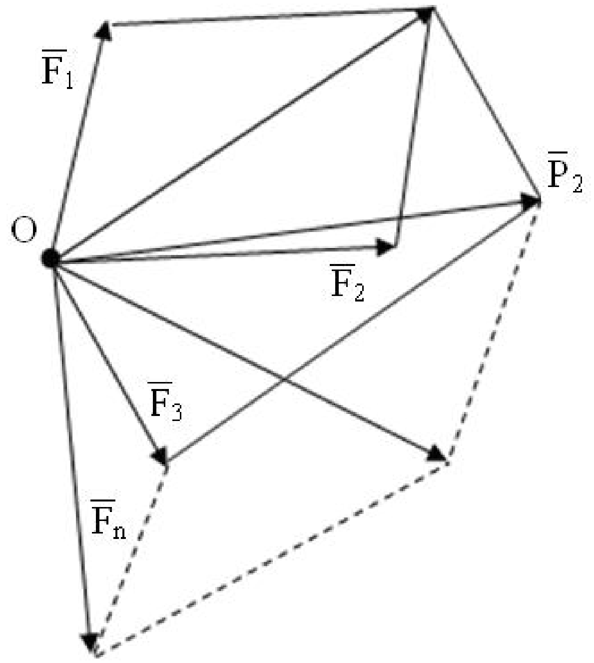
Теорема про рівновагу (*The equilibrium theorem*)**.** Система збіжних сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$ еквівалентна одній силі (рівнодійній $\overline{R}$), яка дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил $\left(\overline{R} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i\right)$ і прикладена в точці O їх збігу.

Доведення. Розглянемо (рис. 3.1, а) вихідну систему збіжних сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$ з лініями дії $a_1a_1,...,a_n$ і точками прикладання $A_1,…, A_n$.

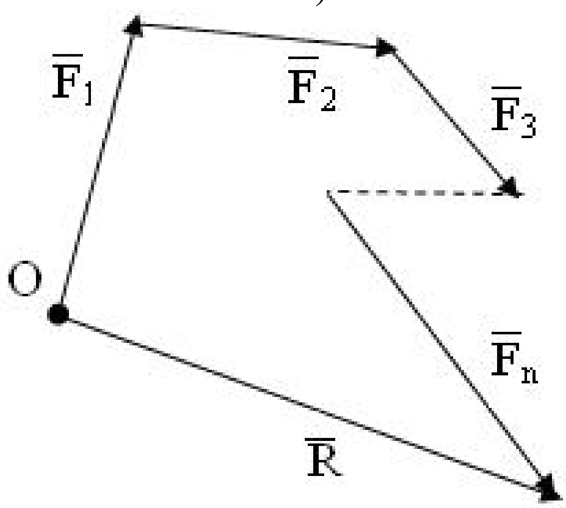
На основі аксіоми 3 про паралелограм сил будь-яку кількість сил із загальною точкою прикладання можна складати геометрично. При цьому можна використовувати або правило паралелограма, або правило трикутника (багатокутника).



а)



в)



б)

Рис. 3.1. Система збіжних сил

У першому випадку (рис. 3.1, б), застосовуючи послідовно правило паралелограма, дістанемо спочатку рівнодійну $\overline{P}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, далі отримаємо рівнодійну.

Для кожної сили системи використовуємо аксіому 2 про перенесення сили уздовж лінії дії в точку О збігу (рис. 3.1, б). У результаті отримаємо систему сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$, прикладених в одній точці О. $\overline{P}_2 = \overline{P}_1 + \overline{F}_3$ і нарешті рівнодійну

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$ заданої системи сил (рис. 3.1, б). За правилом многокутника рівнодійну сил (рис. 3.1, в) визначаємо як суму векторів цих сил: для цього з кінця вектора $\overline{F_1}$ відкладаємо вектор сили $\overline{F}_2$, і т.д. З'єднавши початок першого вектора $\overline{F}_1$ з кінцем останнього $\overline{F}_n$, визначимо рівнодійну силу $\overline{R} = \overline{F}_1 + ... + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$. Одержаний таким чином многокутник має назву *многокутника сил* (*the polygon of forces*), або силового многокутника, замикальна сторона якого виявляється рівнодійною силою системи. Таким чином, теорему доведено.

Доведена теорема дозволяє розв'язувати задачу приведення систем збіжних сил до рівнодійної сили графічно (нею зручно користуватись у разі плоскої довільної системи сил).

Рівнодійну $\overline{R}$ можна визначити також аналітично за її проекціями R_x, R_y, R_z на осі прямокутної системи координат методами векторної алгебри. У даному випадку рівнодійну $\overline{R}$ представляють так:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k} = \overline{R}_x + \overline{R}_y + \overline{R}_z, \tag{3.1}$$

де $R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$; $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$; $R_z = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{iz}$; F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} – проекції сил системи на відповідні осі координат; $\overline{R}_x, \overline{R}_y, \overline{R}_z$ – координатні складові рівнодійної.

Визначивши проекції або величину і напрямні косинуси рівнодійної, можна побудувати і сам вектор $\overline{R}$ у заданій системі координат для подальшого розв'язання задачі рівноваги тіла.

Величина (модуль) і напрямні косинуси рівнодійної сили $\overline{R}$ визначають, враховуючи (3.1), за наступними формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};\ \cos\left(Ox, \overline{R}\right) = R_x / R;\ \cos\left(Oy, \overline{R}\right) = R_y / R;$$
$$\cos\left(Oz, \overline{R}\right) = R_z / R. \tag{3.2}$$

3.2. Умови рівноваги системи збіжних сил
Equilibrium conditions of the convergent forces system

Відповідно до теореми про рівнодійну будь-яка система збіжних сил $\left(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right)$ зводиться до прикладеної у точці O збігу сили $\overline{R}$, рівної геометричній сумі сил системи. За правилом многокутника сила $\overline{R}$ складає його замикальну сторону.

Під дією лише однієї сили, згідно з аксіомою 1 статики про двійку сил, тіло перебуватиме в рівновазі. Умови його рівноваги формулюються так:

для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо[1], щоб рівнодійна сила дорівнювала нулю: $\overline{R} = 0$. (3.3)

Це геометрична (*векторна*) *умова рівноваги* [*This is a geometric* (*vector*) *equilibrium condition*].

Необхідність умови (3.3) очевидна, бо якщо вона не виконується, то тіло знаходиться під дією рівнодійної сили й не перебуватиме у рівновазі.

Достатність цієї умови доведемо так. Якщо рівнодійна системи діючих на тіло сил дорівнює нулю, то за визначенням вона є зрівноваженою

---

[1] Необхідність означає, що з фізичних умов рівноваги випливають математичні, а достатність, навпаки, - з математичних умов випливають фізичні.

(еквівалентною нулю), а тіло під дією такої системи знаходиться у стані спокою безумовно.

Слід зазначити, що з умови $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i = 0$ випливає замкненість многокутника сил: кінець останньої сили $\overline{F}_n$ повинен збігатися з початком першої (точкою O на рис. 3.1, в).

Векторна рівність (3.3) перетворюється, з урахуванням формули (3.1), у аналітичну (алгебричну) форму рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = 0; \; R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = 0;$$

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = 0. \qquad (3.4)$$

Аналітична форма рівноваги формулюється наступним чином: для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій цих сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювали нулю.

Якщо система збіжних сил є плоскою, то з трьох умов рівноваги (3.4) залишаються лише дві, наприклад,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0. \qquad (3.5)$$

Отримані умови рівноваги у випадку, коли деякі сили в рівностях (3.4), (3.5) є реакціями в’язей, перетворюються в рівняння відносно цих реакцій. При цьому кількість невідомих реакцій в’язів, якщо задача статично визначена, не повинно перевищувати числа рівнянь.

3.3. Теорема про три непаралельні сили
Theorem on three nonparallel forces

Теорему про рівновагу трьох непаралельних сил застосовують в тих випадках, коли треба знайти дві невідомі сили (реакції в’язів), які зрівноважують третю відому силу (наприклад, силу ваги тіла), якщо відомо точку прикладання однієї з невідомих сил і лінію дії іншої.

Теорема. Якщо тіло перебуває в рівновазі під дією трьох не паралельних сил, з яких принаймні дві лежать в одній площині, то лінії дії всіх трьох сил перетинаються в одній точці, а вектори сил утворюють замкнений трикутник.

Доведення. Нехай тіло перебуває в рівновазі під дією трьох непаралельних сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$, з яких $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ лежать в одній площині (рис. 3.2). Продовжимо лінії дії сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ і знайдемо їх точку перетину O. Перенесемо сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ вздовж їх ліній дії в точку O і знайдемо їх рівнодійну $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Замінивши сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ їх рівнодійною $\overline{R}$, одержимо, що дане тіло перебуває в рівновазі під дією тільки двох сил $\overline{F}_3$ і $\overline{R}$. Це можливо, враховуючи аксіому 1 про дві сили, тільки якщо сили $\overline{F}_3$ і $\overline{R}$ мають спільну лінію дії, тобто коли лінія дії сили $\overline{F}_3$ проходить через точку О. Теорему доведено.

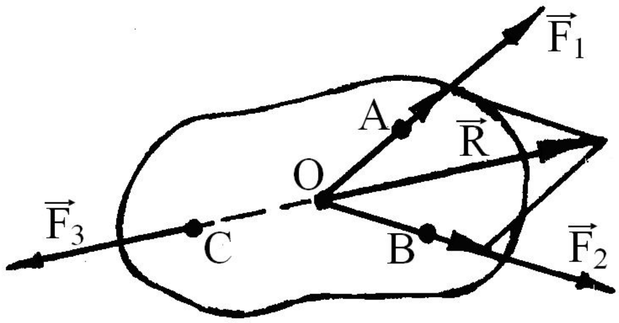


Рис. 3.2. До теореми про три непаралельні сили

Зауважимо, що доведена теорема визначає необхідну, але не достатню умову рівноваги тіла під дією трьох сил. Дійсно, тіло під дією трьох сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці, може і не перебувати в рівновазі, а здійснювати поступальний рівномірний рух, відповідно до першого закону Ньютона. Застосувавши до заданої системи трьох сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ геометричну умову рівноваги, дістаємо також, що трикутник сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$ буде замкнений: кінець третьої сили $\overline{F}_3$ буде збігатися з початком першої сили $\overline{F}_1$.

ЛЕКЦІЯ 4. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ ТА ОСІ. СКЛАДАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ. ПАРА СИЛ, ТЕОРЕМИ ПРО ПАРИ

LECTURE 4. MOMENT OF FORCE WITH RESPECT TO POINT AND AXIS. CONCLUSION OF PARALLEL FORCES. STEAM POWER, MONEY THEOREMS

4.1. Момент сили відносно точки
The moment of force relative to the point

Силовий фактор, під дією якого тіло може здійснювати обертальний рух, називається *моментом сили відносно точки* (полюса). Це фізичне поняття.

З математичної точки зору момент сили $\overline{F}$ відносно точки О (рис. 4.1) визначається вектором $\overline{M}_0(\overline{F})$, який дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\overline{r}_A$ точки А прикладання сили на її вектор $\overline{F}$:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F}\,. \tag{4.1}$$

Отже, враховуючи поняття і визначення векторної алгебри, отримаємо наступні властивості моменту сили відносно точки:

- момент сили відносно точки О є зв'язаним у точці вектором, який напрямлений перпендикулярно до площини S, що проходить через точку О і лінію дії а-а сили $\overline{F}$, у той бік, звідки обертання тіла під дією сили навколо точки видно проти ходу стрілки годинника;

- в координатній формі момент сили обчислюється так:

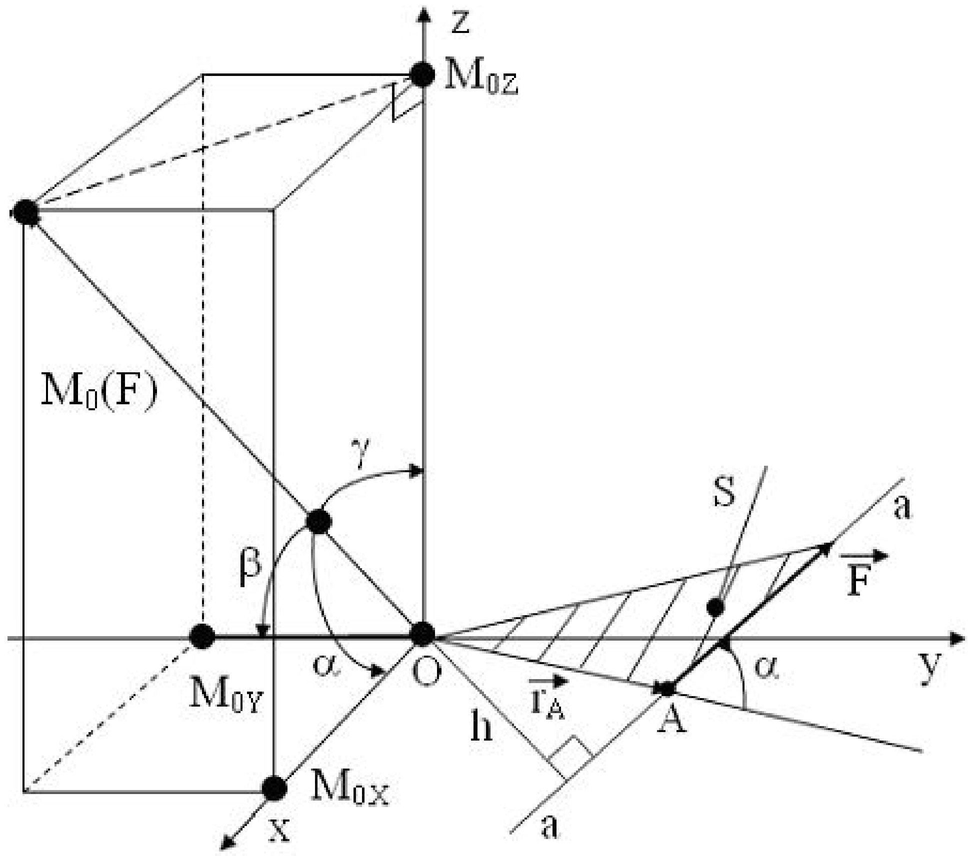


Рис. 4.1. Момент сили відносно точки

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{r}_A \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\cdot \overline{i} + \left(zF_x - xF_z\right)\cdot \overline{j} + \qquad (4.2)$$

$$+\left(xF_y - yF_x\right)\cdot \overline{k} = M_{0x}\cdot \overline{i} + M_{0y}\cdot \overline{j} + M_{0z}\cdot \overline{k},$$

де $\overline{r}_A = x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j} + z\cdot\overline{k}$; $\overline{F} = F_x\cdot\overline{i} + F_y\cdot\overline{j} + F_z\cdot\overline{k}$; M_{0x}; M_{0y}; M_{0z} – проекції моменту сили відносно точки О на осі системи координат (рис. 4.1).

Основною одиницею вимірювання моменту сили відносно точки є 1 Н·м.

За величиною момент сили дорівнює модулю вектора $\overline{M}_0(\overline{F})$:

$M_0(\overline{F}) = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}$ або $M_0(\overline{F}) = \left|\overline{M}_0(\overline{F})\right| = \left|\overline{r}_A \times \overline{F}\right| = r_A \cdot F \cdot \sin\alpha = hF.$ (4.3)

де h – плече сили $\overline{F}$ відносно точки О, тобто довжина перпендикуляра, який опущено (рис. 4.1) з точки О на лінію дії а-а сили $\overline{F}$, $h = r_A \cdot \sin\alpha$.

Відповідно до формули (4.3) момент сили відносно полюса дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через даний полюс (при цьому плече сили h = 0). Момент сили відносно точки умовимося вважати додатним (вектор $\overline{M}_0(\overline{F})$ моменту сили на рис. 4.2, а спрямуємо перпендикулярно до горизонтальної площини S вертикально догори) у випадку, якщо сила намагається викликати обертання тіла (або плеча h навколо точки) проти ходу стрілки годинника, і від'ємним – навпаки (рис. 4.2, б).

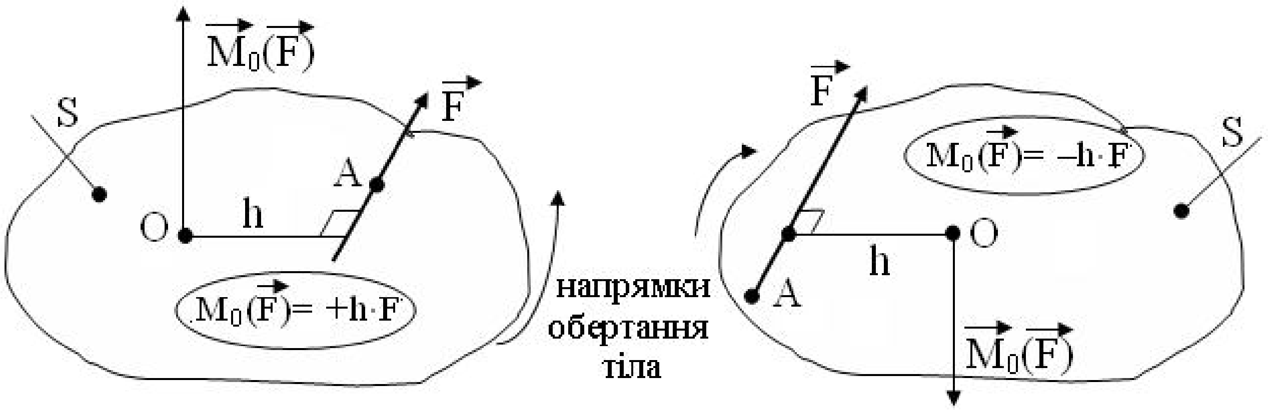


Рис. 4.2. До знаку моменту сили

4.2. Момент сили відносно осі
The moment of force relative to the axis

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі. Ним називається проекція на цю вісь вектора $\overline{M}_0(\overline{F})$ моменту сили відносно точки O, що лежить на цій осі (див. рис. 4.1).

Відповідно до схеми на рис. 4.1 і виразу (4.2) моменти сили $\overline{F}$ відносно координатних осей Ox, Oy і Oz будуть визначитися так:

$$M_{0x}(\overline{F}) = M_0(\overline{F})\cdot\cos\alpha;\; M_{0y}(\overline{F}) = M_0(\overline{F})\cdot\cos\beta;\; M_{0z}(\overline{F}) = M_0(\overline{F})\cdot\cos\gamma$$

або $M_{0x} = yF_x - zF_y$; $M_{0y} = zF_x - xF_z$; $M_{0z} = xF_y - yF_x$.

На практиці момент сили відносно осі звичайно визначають за наступними правилом:

-проводять площину S, перпендикулярну до осі Oz, і знаходять точку O перетину осі з площиною (рис. 4.3);

-проектують задану силу $\overline{F}$ на зазначену площину, отримуючи силу $\overline{F}_s$;

-обчислюють момент сили $\overline{F}_s$ відносно точки O перетину площини S з осью Oz, враховуючи наведені в розд. 4.2 його властивості:

$$M_0(\overline{F}_s) = \pm h\cdot F_s;$$

-момент заданої сили $\overline{F}$ відносно осі Oz визначають за формулою $\overline{M}_{0z}(\overline{F}) = \overline{M}_0(\overline{F}_s)$.

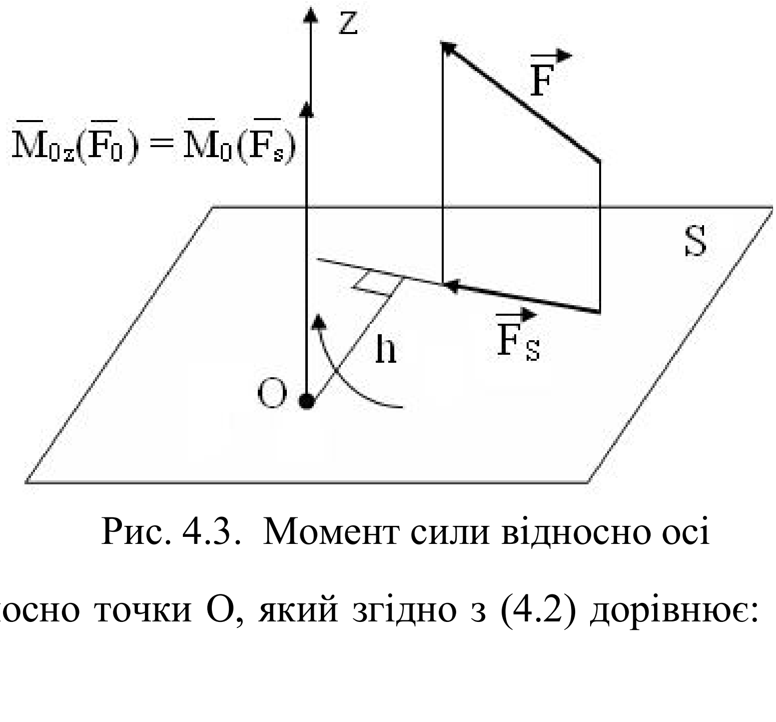


Рис. 4.3. Момент сили відносно осі

На рис. 4.3 момент $\overline{M}_{0z}(\overline{F})$-координатна складова $\overline{M}_{0z}$ вектора моменту сили відносно точки O, який згідно з (4.2) дорівнює: $\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{M}_{0x} + \overline{M}_{0y} + \overline{M}_{0z}$.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо: сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили $\overline{F}$ на площину S дорівнює нулю: $\overline{F}_s = 0$); лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

4.3. Алгебричний момент сили відносно точки
Algebraic moment of force relative to point

При розв’язанні задач статики у площині при складанні рівнянь моментів використовують поняття алгебричного моменту сили відносно точки.

Алгебричним моментом сили відносно точки називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Береться знак «+», якщо сила намагається повернути плече проти ходу стрілки годинника.

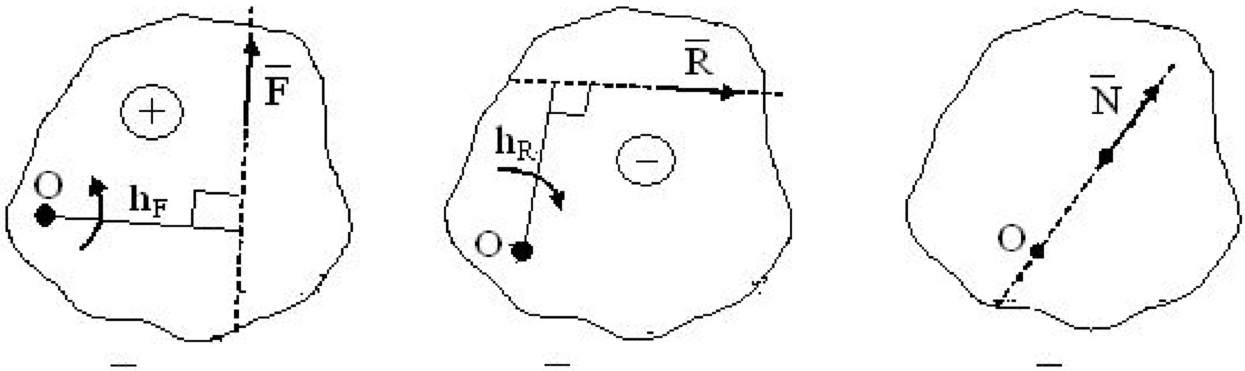
Таким чином, для визначення алгебричного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 4.4, а, б):

1) провести лінію дії сили;

2) з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра h – плече сили);

3) скласти добуток плеча на модуль сили;

4) взяти знак «+», якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти ходу стрілки годинника (рис. 4.4, а) і знак «–»-за ходом стрілки годинника (рис. 4.4, б).



$M_0(\overline{F}) = +F \cdot h_F$ $\qquad$ $M_0(\overline{R}) = +F \cdot h_R$ $\qquad$ $M_0(\overline{N}) = 0$

а) $\qquad$ б) $\qquad$ в)

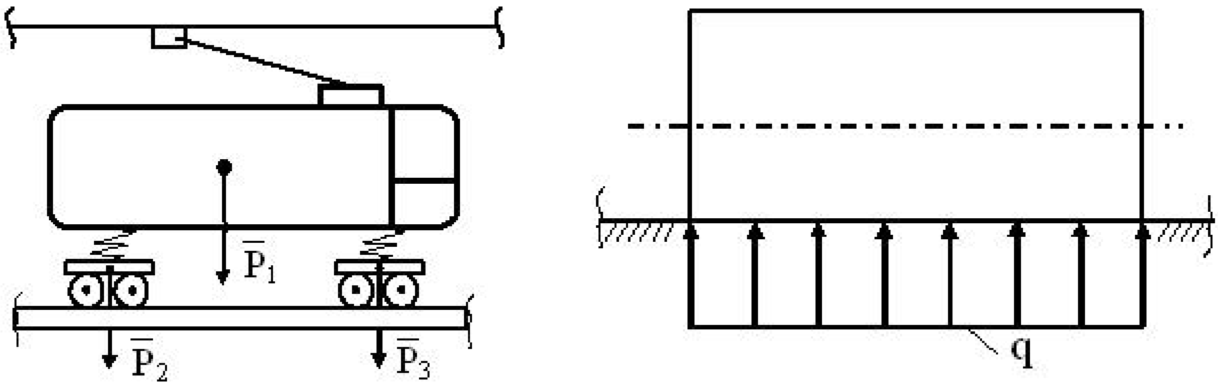
Рис. 4.4. До визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки

Окремий випадок (рис. 4.4, в): алгебричний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече $h = 0$).

Зрівнюючи правила визначення алгебричного моменту сили відносно точки і моменту сили відносно осі, робимо висновок, що алгебричний момент сили відносно точки є не чим іншим, як моментом сили відносно осі, яка проходить через точку перпендикулярно до площини рисунка і спрямпвана до спостерігача.

4.4. Складання паралельних сил. Addition of parallel forces

Прикладами паралельних сил є сили ваги вузлів машини, трамваю (рис. 4.5, а), реакції поверхні шляху на коток (рис. 4.5, б) та ін.



а) б)

Рис. 4.5. Складання паралельних сил

1. Складання двох сил, напрямлених в один бік. Addition of two forces directed to one side. Розглянемо тверде тіло, на яке в точках А і В діють дві паралельні сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ (рис. 4.6). Приведемо вихідну систему паралельних сил до еквівалентної системи збіжних сил $\overline{Q}_1$ і $\overline{Q}_2$.

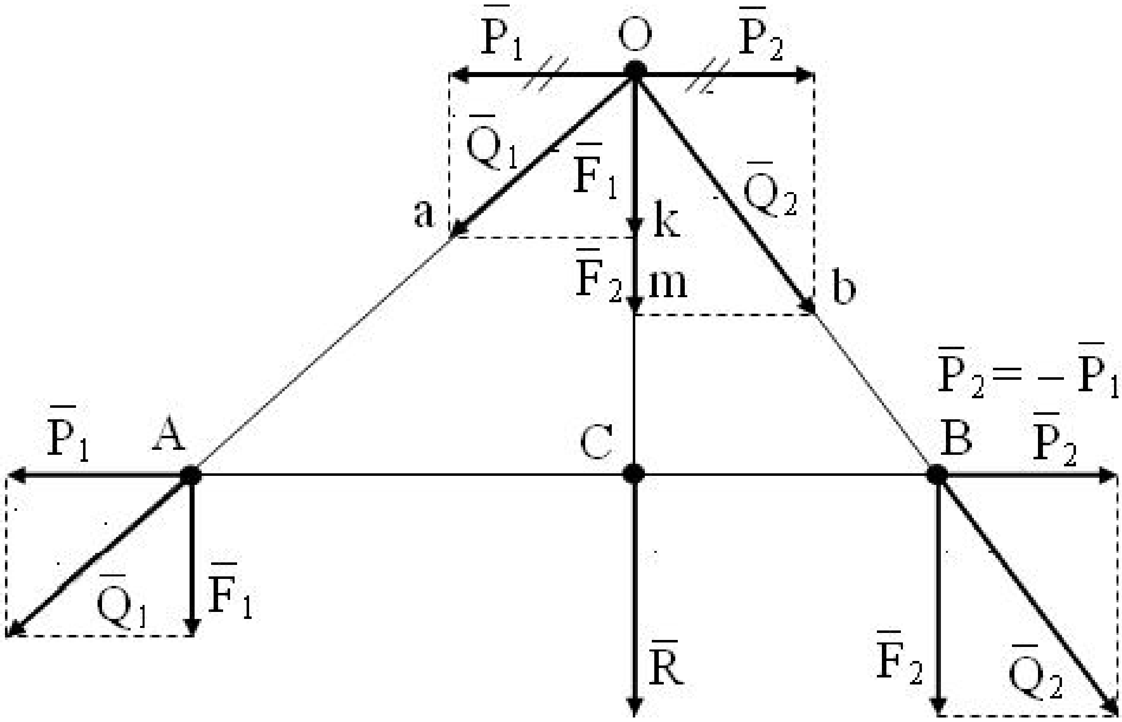


Рис. 4.6. Складання двох сил, спрямованих в один бік

Для цього прикладемо в точках А і В дві зрівноважені, довільні за величиною сили $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2 = -\overline{P}_1$) і складемо їх за правилом паралелограма. Одержані сили $\overline{Q}_1$ і $\overline{Q}_2$ перенесемо до точки О перетину їх ліній дії. Після цього кожну з сил $\overline{Q}_1$ і $\overline{Q}_2$ розкладемо на дві складові, кожна з яких дорівнює аналогічним складовим сил $\overline{Q}_1$ і $\overline{Q}_2$ у точках А і В.

За побудовою і визначенням отримані складові сили $\overline{P}_1$ і $\overline{P}_2$ складуть двійку сил, тому їх можна відкинути (закреслено на рис. 4.6). Залишені сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, за побудовою, будуть мати загальну лінію дії. Тому перенесемо їх у точку С перетину зазначеної лінії дії з відрізком АВ. У точці С їх складемо і замінемо рівнодійною: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.

Для визначення положення точки С на відрізку АВ розглянемо трикутники ОАС, Oak, ОВС, Obm. Вони подібні за побудовою, тому будуть виконуватись наступні пропорційні співвідношення їх сторін:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{ak}{Ok}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{bm}{Om}. \tag{4.4}$$

Розв’язавши пропорції (4.4) та враховуючи, що ÂÑ+ÀÑ=ÀÂ, а $Ok = F_1$, $Om = F_2$, одержимо

$$BC = AB \cdot \frac{F_1}{F_1 + F_2}; \; AC = AB \cdot \frac{F_2}{F_1 + F_2}; \; \frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2}. \tag{4.5}$$

У результаті виконаних перетворень початкову систему паралельних сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ зведено до однієї сили рівнодійної $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Отримано також, що рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, дорівнює за модулем сумі модулей складових сил, їм паралельна і напрямлена у той же бік; лінія дії рівнодійної проходить між точками прикладання складових сил на відстані від цих точок, обернено пропорційній (4.5) силам.

2. Складання двох сил, напрямлених в різні боки. Addition of two forces directed in different directions. Зобразимо прикладені до тіла у точках А, В сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, причому нехай за величиною $F_1 > F_2$ (рис. 4.7). Візьмемо на продовженні відрізка ВА точку С і прикладемо в ній двійку сил $\overline{R}$ і $\overline{R}'$, які паралельні силам $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$. При цьому модулі сил і положення точки С оберемо так, щоб виконувались рівності:

$$R = F_1 - F_2; \quad \frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \tag{4.6}$$

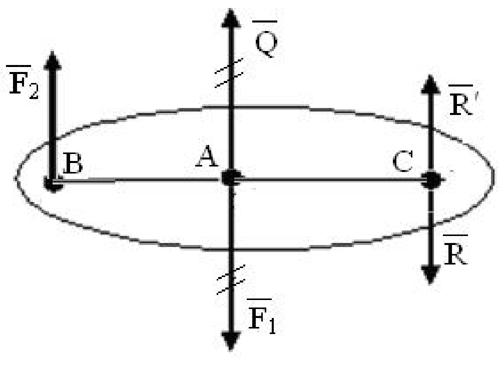


Рис. 4.7. Складання двох сил, спрямованих в різні боки

Отже, складаючи сили $\overline{F}_2$ і $\overline{R}'$, знайдемо, що їх рівнодійна $\overline{Q} = \overline{F}_2 + \overline{R}'$, тобто дорівнює за величиною силі $\overline{F}_1$, протилежно їй спрямована і прикладена в точці А. Сили $\overline{F}_1$ і $\overline{Q}$, як зрівноважені, можна відкинути (закреслено на рис. 4.7). У результаті задані сили $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$ будуть замінені однією силою $\overline{R}$, яка і є їх рівнодійною. Модуль цієї рівнодійної та точка її прикладання С визначається формулами (4.6).

Таким чином, рівнодійна двох спрямованих в різні боки паралельних сил дорівнює за величиною різниці модулів заданих сил, їм паралельна і направлена в бік більшої з сил; лінія дії рівнодійної проходить поза відрізком, який з'єднує точки прикладання складових сил, на відстані, обернено пропорційній силам. Коли на тіло діють декілька паралельних сил, то їх рівнодійну можна знайти послідовно, використовуючи правила складання двох паралельних сил.

У випадку розподілених сил діють наступним способом. Силу ваги тіла показують у вигляді рівнодійної, яка має початок у центрі С ваги і спрямована завжди вертикально донизу (рис. 4.8, а).

Якщо сили розподілені за довжиною, то діють так: у випадку прямокутної епюри (рис. 4.8, б) сили замінюють рівнодійною $Q = q \cdot l$ (l–довжина відрізка АВ прикладання сил), яка прикладена у середині відрізка АВ; при лінійному законі розподілу сили (рис. 4.8, в) рівнодійна $Q = q_1 \cdot l/2$ прикладена у точці з координатою $2l/3$; при довільному законі (рис. 4.8, г) – величину рівнодійної сили визначають формулою $Q = \int_0^l q(x)dx.$ Однак завжди лінія дії рівнодійної проходить через центр ваги площи епюри розподілених сил [(наприклад, у випадку лінійного закону розподілу сил (рис. 4.8, в) вона проходить через точку перетину медіан трикутника)]. а координату її прикладання- $x_c = \int_0^l q(x) \cdot x \cdot dx / \int_0^l q(x)dx$.

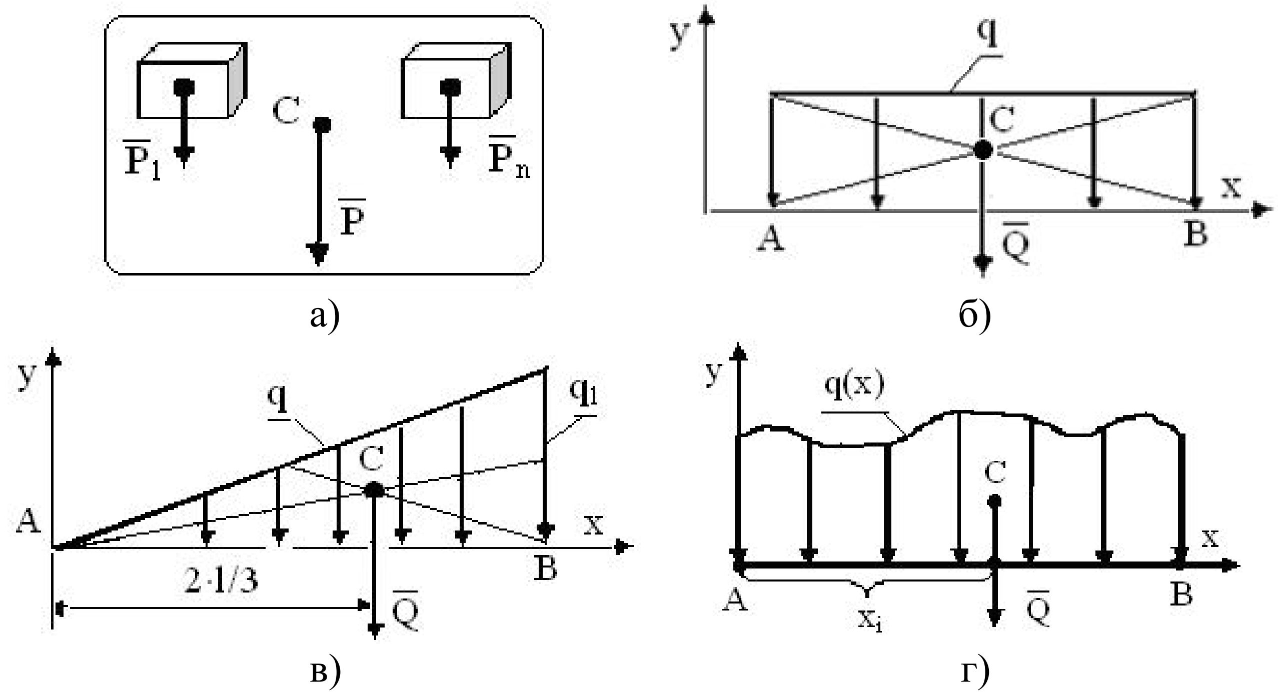


Рис. 4.8. Визначення рівнодійної

4.5. Пара сил. Момент пари. Теореми про пари сил
A couple of forces. Moment of money. Money Theorems

1. Визначення пари сил. Determination of a pair of forces

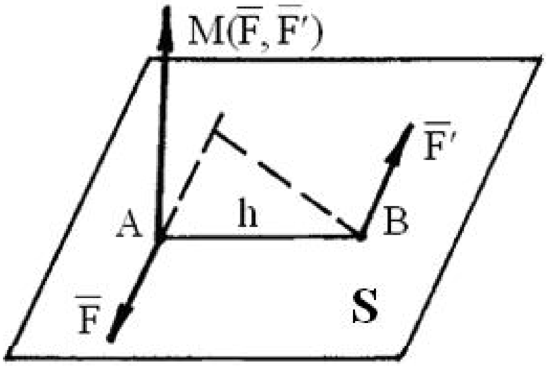


Рис. 4.8. Визначення пари сил

Парою сил називається система двох, розталованих в одній площині паралельних сил $(\overline{F},\overline{F}')$, які рівні за величиною і протилежно направлені.

Площина S, яка проходить через лінії дії сил пари (рис. 4.8), називається *площиною дії пари.* Дія пари сил на тіло призводить до його обертання навколо осі, яка перпендикулярна до площини дії пари сил.

Момент пари сил $(\overline{F},\overline{F}')$ математично визначається вектором $\overline{m}(\overline{F},\overline{F}')$ (рис. 4.8), рівним векторному добутку $\overline{h}\times\overline{F}$. Отже, враховуючи його властивості, отримаємо, що вектор $\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')$ моменту пари сил спрямований перпендикулярно до площини S дії пари сил у той бік, звідки обертання пари відбувається проти ходу стрілки годинника.

Відповідно до механічної схеми на рис. 4.8 отримаємо наступні властивості моменту пари сил:

-за величиною момент пари сил дорівнюватиме модулю вектора $\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')$: $\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')=\left|\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')\right|=\left|\overline{h}\times\overline{F}\right|=h\cdot F\cdot\sin\alpha$.

Звичайно при побудові схеми на рис. 4.8 приймають кут $\alpha=90^0$, тоді матимемо $\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')=h\cdot F$. У цьому випадку h визначають *плечем пари сил* (найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару);

- пара сил не має рівнодійної, тому що при $\overline{F}=-\overline{F}'$ виконується рівність $\overline{R}=\overline{F}+\overline{F}'=0$; при цьому властивості сумісної механічної (обертальної) дії сил пари на тіло зберігаються і проявляються у вигляді моменту $\overline{m}(\overline{F},\overline{F}')=\overline{h}\times\overline{F}$ пари, рівному сумі моментів $\overline{M}_0(\overline{F})+\overline{M}_0(\overline{F}')$ заданих сил відносно будь-якої точки O тіла. Нехай, наприклад, точка O на рис. 4.8 – довільна точка простору, а $\overline{r}_1,\overline{r}_2$ радіуси-вектори точок прикладання сил $\overline{F}'$ і $\overline{F}$ пари. З визначення моменту сили відносно точки маємо $\overline{M}_0(\overline{F}')+\overline{M}_0(\overline{F})=\overline{r}_1\times\overline{F}'+\overline{r}_2\times\overline{F}=\overline{r}_1\times(-\overline{F})+\overline{r}_2\times\overline{F}=(\overline{r}_2-\overline{r}_1)\times\overline{F}=\overline{h}\times\overline{F}$ або

$$\overline{M}(\overline{F},\overline{F}')=\overline{M}_0(\overline{F})+\overline{M}_0(\overline{F}'). \tag{4.7}$$

З виразу (4.7) виходить, що момент прикладеної до тіла пари сил $(\overline{F},\overline{F}')$ дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки O і не залежить від її положення у просторі.

Інші властивості пари сил визначаються наступними теоремами.

Теорема про еквівалентність пар (The equivalence theorem for pairs). Не змінюючи дії на тіло, пару сил можна замінити іншою парою, яка лежить в цій самій площині і має такий самий момент за величиною і напрямом.

Доведення. Нехай на тіло діє пара сил $(\overline{F}, \overline{F}')$ з плечем d_1 (рис. 4.9).

Проведемо у площині дії пари сил через довільні точки D і C дві паралельні прямі до перетину їх з лініями дій сил пари в точках A і B. Відстані між прямими AC і BD позначимо як d_2. Розкладемо сили $\overline{F}$ і $\overline{F}'$ за напрямами AB, BD і AC. За побудовою очевидно, що $\overline{P} = -\overline{P}', \overline{Q} = -\overline{Q}'$, тоді сили $\overline{Q}$ і $\overline{Q}'$, як зрівноважені, можна відкинути. Сили $\overline{P}$ і $\overline{P}'$ перенесемо уздовж їх ліній дій у точки D і C. У результаті проведених перетворень задану пару сил $(\overline{F}, \overline{F}')$ було замінено новою парою $(\overline{P}, \overline{P}')$ з іншим плечем d_2 та іншими силами. Через довільність вибору точок D, C і напрямів прямих BD і AC нова пара сил може бути розташована у площині її дії де завгодно.

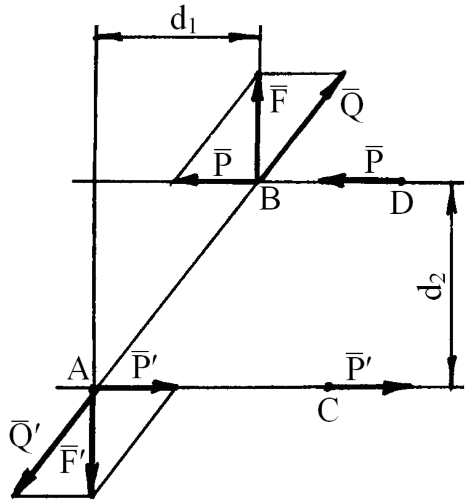


Рис. 4.9. Теорема про еквівалентність пар

Покажемо, що моменти нової і заданої пар сил $(\overline{P}, \overline{P}')$ і $(\overline{F}, \overline{F}')$ рівні. За побудовою сила $\overline{F} = \overline{P} + \overline{Q}$, а сила $\overline{Q}$ проходить через точку A, тому буде виконуватись: $\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}') = \overline{M}_A(\overline{F}) = \overline{M}_A(\overline{P}) + \overline{M}_A(\overline{Q}) = \overline{M}_A(\overline{P}) = \overline{m}(\overline{P}, \overline{P}'),$

тобто $$\overline{M}(\overline{F}, \overline{F}') = \overline{M}(\overline{P}, \overline{P}'); \; Fd_1 = Pd_2. \qquad (4.8)$$

З рівностей (4.8) випливають такі додаткові властивості пар сил:

- задану пару сил, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити як завгодно у площині її дії;
- у заданої пари сил можна змінювати сили і довжину плеча, щоб залишався незмінним її момент;
- дві пари, що лежать в одній площині і мають однакові моменти, є еквівалентними;
- момент пари сил є вільним вектором: його можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла.

Теорема про перенесення пари в паралельну площину (*The theorem on the transfer of steam into a parallel plane*). Дія пари сил на тіло не порушиться, якщо її перенести із заданої площини у довільну іншу площину, яка паралельна заданій. *The action of a pair of forces on the body will not be disturbed if it is transferred from a given plane to an arbitrary plane that is parallel to the given plane.*

Доведення. Розглянемо пару сил $(\overline{F}, \overline{F}')$ з площиною дії S_1 (рис. 4.10).

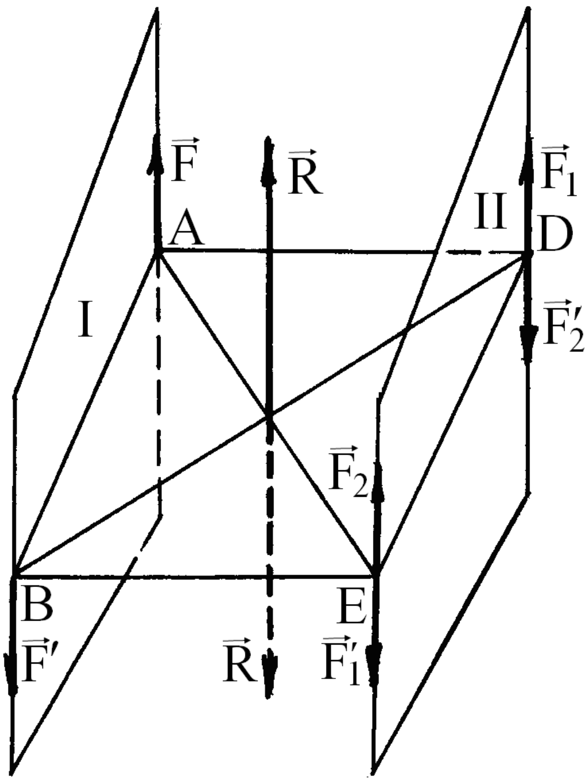


Рис. 4.10. До теореми про перенесення пари в паралельну площину

Побудуємо площину S_2, паралельну площині S_1, і визначимо на ній відрізок ED, рівний і паралельний відрізку AB у площині S_1. У точках D і E прикладемо двійку сил, в яких $F_1 = F_1' = F_2' = F_2 = F$.

За побудовою фігура АВЕД є паралелограмом. Далі додамо паралельні сили $\overline{F}$ і $\overline{F}_2$. Їх рівнодійна $\overline{R}$ буде прикладена в точці C–середині відрізка AE. Аналогічно сили $\overline{F}'$ і $\overline{F}_2'$ зводяться до рівнодійної $\overline{R}'$, прикладеної в середині відрізка BD, тобто в точці C. За побудовою і визначенням рівнодійні сили $\overline{R}$ і $\overline{R}'$ будуть рівними і протилежно спрямованими, тому їх можна відкинути. У результаті задана пара сил $(\overline{F}, \overline{F}')$ перетворюється в пару сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$, яка розміщена у площині S_2.

З доведеної теореми випливає, що дві пари, які лежать в одній площині або в паралельних площинах і мають однакові моменти, еквівалентні.

Теорема про додавання пар сил (*the theorem on adding pairs of forces*). Довільну систему двох пар сил можна замінити рівнодійною парою. Момент рівнодійної пари дорівнює векторній сумі моментів початкових пар.

An arbitrary system of two pairs of forces can be replaced by an even pair. The moment of an equivalent pair is equal to the vector sum of the moments of the initial pairs.

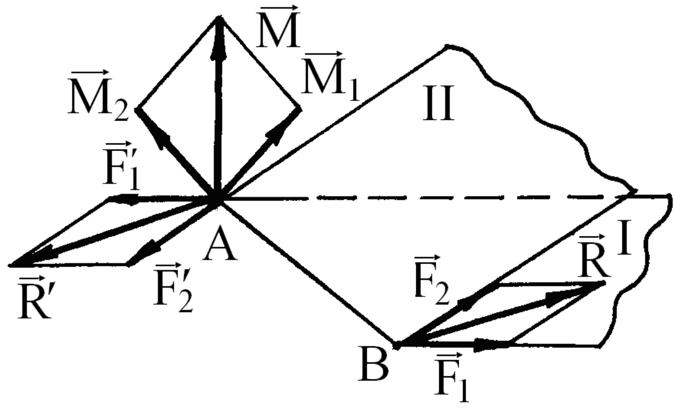


Рис. 4.11. До теореми про додавання пар сил

Доведення. Розглянемо пари сил з моментами $\overrightarrow{M_1}$ і $\overrightarrow{M_2}$, які лежать у довільних площинах S_1 і S_2, що перетинаються (рис. 4.11). Визначимо на лінії перетину цих площин відрізок AB = d і позначимо його вектором $\overline{AB}$. Визначимо пару сил з моментом $\overline{m}_1$ силами $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$, а пару сил з моментом $\overline{m}_2$ -силами $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$, прикладеними в точках A і B. При цьому виконуватиметься $M_1=F_1 \cdot d$,, $M_2=F_2 \cdot d$. Додаючи прикладені в точках A і B сили, замінимо системи сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_1')$ і $(\overline{F}_2, \overline{F}_2')$ силами $\overline{R}, \overline{R}'$, які за визначенням складуть пару сил $(\overline{R}, \overline{R}')$. Момент рівнодійної пари $(\overline{R}, \overline{R}')$, оскільки $\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2'$, визначатиметься як

$$\overrightarrow{M}(\vec{R}, \overline{R}') = \overline{AB} \times \overline{R}' = \overline{AB} \times (\overline{F}_1' + \overline{F}_2') = (\overline{AB} \times \overline{F}_1') + (\overline{AB} \times \overline{F}_2') = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}. \qquad (4.9)$$

Якщо на тіло діє n пар сил з моментами $\overrightarrow{M_1}$, $\overrightarrow{M_2}$,…, $\overrightarrow{M_n}$, то, застосовуючи послідовно формулу (4.9), одержимо (рис. 4.12), що задана система пар сил зводиться до результуючої пари з моментом

$$\overrightarrow{M_1} + M_2 + M_n = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_n}. \qquad (4.10)$$

Тут результуючу пару $\overline{M}$ визначають (див. силовий багатокутник у розділі 3) замикаючою стороною многокутника векторів $\overline{M}_n$.

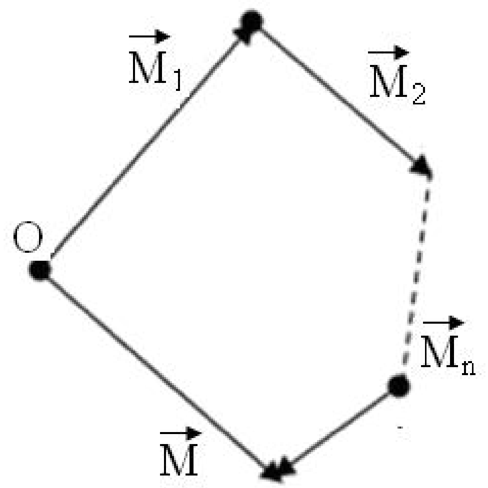


Рис. 4.12. Момент результуючої пари

Якщо пари сил лежать в одній площині, то вектори їх моментів будуть паралельні. Тому момент результуючої пари $\overline{m}$ дорівнює алгебричній сумі складових моментів: $M = \sum_{k=1}^{n} M_k$. Момент результуючої пари сил $\overrightarrow{M}$ можна визначити аналітично, спроектувавши векторне рівняння (4.10) на осі системи координат:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = M_{1x} + \ldots + M_{nx};$$

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = M_{1y} + \ldots + M_{ny}.$$

Величину (модуль вектора $\overrightarrow{M}$) результуючої пари визначають як $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$. При побудові вектора $\overrightarrow{M}$ у просторі, тобто при визначенні площини дії результуючої пари сил звичайно використовують його напрямні косинуси:

$$\cos\left(\widehat{Ox, \overline{M}}\right) = M_x / M; \cos\left(\widehat{Oy, \overline{M}}\right) = M_y / M; \cos\left(\widehat{Oz, \overline{M}}\right) = M_z / M.$$

2. Умови рівноваги системи пар сил. The equilibrium conditions of a pair of forces

Враховуючи властивості рівнодійної збіжних сил, результуючої пари сил, властивості вектора моменту пари сил як вільного вектора, а також умови рівноваги збіжної системи сил, отримаємо наступні необхідні й достатні умови рівноваги тіла під дією системи пар сил $(\overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_n)$:

- векторна (геометрична) форма рівноваги:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} M_k = \overline{M_1} + \ldots + \overline{M_n} = 0. \qquad (4.11)$$

тобто многокутник моментів пар сил початкової системи (рис. 4.12) повинен бути замкненим: кінець останнього вектора $\overline{m}_n$ повинен збігатися з початком (точкою О) першого;

- аналітична (алгебраїчна) форма рівноваги:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} M_{kx} = M_{1x} + M_{2x} + \ldots + M_{nx} = 0; \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} M_{ky} = M_{1y} + M_{2y} + \ldots + M_{ny} = 0;$$

$$M_z = \sum_{k=1}^{n} M_{kz} = M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz} = 0, \qquad (4.12)$$

тобто суми проекцій $M_{kx}, M_{ky}, , M_{kz}$ моментів пар сил системи на кожну з трьох координатних осей $(Ox,\ Oy, Oz)$ дорівнюватимуть нулю.

ЛЕКІЯ 5. ДОВІЛЬНА СИСТЕМА СИЛ У ПРОСТОРІ Й ПЛОЩИНІ. ПРИВЕДЕННЯ ДО ЗАДАНОГО ЦЕНТРА (ТЕОРЕМА ПУАНСО)

LEKTURE 5. A ARBITRARY SYSTEM OF FORCES IN SPACE AND PLANE. BRINGING IT TO A GIVEN CENTER (PUANCE THEOREM)

У реальних умовах експлуатації на тіло, нехай-то електродвигун, кузов трамваю, лопатка турбіни, гребля, каркас будинку чи ін., діє система зовнішніх сил.

Існує декілька типових систем сил, що використовуються в розрахунках на практиці. Це довільна система сил у просторі, довільна система сил у площині, система паралельних сил і будь-яка їх комбінація.

Цей розділ присвячено питанням приведення вихідної системи сил у про-сторі й площині до найпростішого вигляду в загальному і окремих випадках.

5.1. Лема про паралельне перенесення сили
Lemma on the parallel transfer of force

Відповідно до аксіоми 2 статики (див. розд. 1) прикладену до тіла силу можна переносити вздовж її лінії дії в будь-яку іншу його точку. При цьому дія сили на тіло, а також стан тіла не змінюються.

У ряді практичних задач рівноваги, пов'язаних зі спрощенням заданої системи сил, часто виникає необхідність перенесення сили до заданого цент-ра паралельно самій до себе.

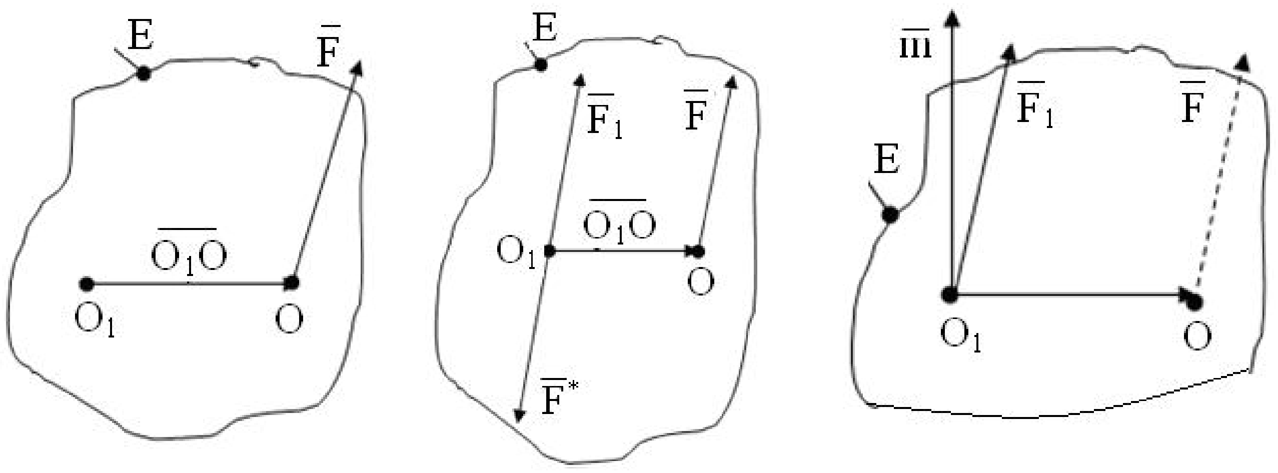
На відміну від попереднього випадку паралельне перенесення сили призводить в умовах збереження початкового механічного стану тіла до зміни системи діючих на нього силових факторів: до тіла необхідно додатково додати пару сил, параметри якої визначає наступна лема.

Лема. Прикладену до тіла в точці O (рис. 5.1, а) силу $\overline{F}$ можна перенести паралельно самій собі в будь-яку його іншу точку O_1 (центр приведення), додаючи при цьому, для збереження механічного стану тіла, пару сил $(\overline{F}, \overline{F}^*)$ з моментом $\overline{m}_{O_1} = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^*)$, рівним моменту $\overline{M}_{O_1}(\overline{F})$ вихідної сили $\overline{F}$ відносно центра приведення O_1.

Доведення. Нехай у точці O (рис. 5.1, а) до тіла прикладена розташована в площині E сила $\overline{F}$. Позначимо систему сил, діючу на тіло, як $(\overline{F})$. Виберемо в тілі, в пл. E, довільну точку O_1, положення якої визначимо вектором $\overline{O_1O}$.

Позначимо її як центр приведення "O_1". Прикладемо далі в пл. E у цьому центрі (рис. 5.1, б) еквівалентну нулю систему $(\overline{F}_1, \overline{F}^*) \sim 0$ двох сил (двійку сил) з параметрами: $\overline{F}_1 = -\overline{F}^*$, $\overline{F}^* = -\overline{F}$. При цьому, відповідно до аксіоми 2 статики, стан тіла не зміниться, а вихідна система сил $(\overline{F})$ перетвориться в еквівалентну систему трьох сил:

$(\overline{F}) \sim \left(\overline{F}, (\overline{F}_1, \overline{F}^*)\right) \sim \left(\overline{F}_1, (\overline{F}, \overline{F}^*)\right)$.



а) б) в) $\overline{m}_{O_1} = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^*) = \overline{M}_{O_1}(\overline{F})$

Рис. 5.1. До леми про паралельне перенесення сили

За побудовою на рис. 5.1, б, сила $\overline{F}_1$ прикладена в точці приведення O_1 і дорівнює $\overline{F}$, а система двох сил $(\overline{F}, \overline{F}^*)$ створює пару сил, що називається приєднаною парою сил. Далі в центрі приведення O_1 на рис. 5.1, в побудуємо вектор $\overline{m}_{O_1} = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^*) = \overline{O_1O} \times \overline{F}$, рівний моменту отриманої пари сил, і вектор $\overline{M}_{O_1}(\overline{F}) = \overline{O_1O} \times \overline{F}$, рівний моменту вихідної сили $\overline{F}$ відносно полюса O_1. За визначенням вони є перпендикулярними до площини E, прикладеними в точці O_1 і рівними. Тобто момент приєднаної пари сил дорівнює моменту вихідної сили відносно нового центра приведення O_1:

$$\overline{m}_{O_1} = \overline{m}(\overline{F}, \overline{F}^*) = \overline{M}_{O_1}(\overline{F}). \tag{5.1}$$

Отже лему доведено.

Рівняння (5.1) використовують на практиці при визначенні параметрів приєднаної пари сил $(\overline{F}_1, \overline{F}^*)$ і сили $\overline{F}_1$, які в більшості випадків являють собою прикладений до ланки механізму крутний момент і силу тиску ланки на вісь.

Розглянемо, наприклад, барабан радіуса R (рис. 5.2, а), до якого в точці А з боку намотаної нитки прикладено силу $\overline{F}$. Використуємо для сили $\overline{F}$ доведену лему, прийнявши за центр приведення точку О. У результаті отримаємо, що вихідна система сил $(\overline{F})$ зводиться: до сили $\overline{F}_1$ (рівній $\overline{F}$) і до пари сил $(\overline{F}, \overline{F}^*)$ з моментом $m_0 = m(\overline{F}, \overline{F}^*)$ (рис. 5.2, а). При цьому на барабан діють: момент $m_0 = R \cdot F$, який обертає барабан, і сила $\overline{F}_1$, що здійснює тиск на вісь барабана (рис. 5.2, б). Їх величини використовуються в подальшому при розв’язанні задач динаміки і міцності системи «опора-вісь-барабан-нитка».

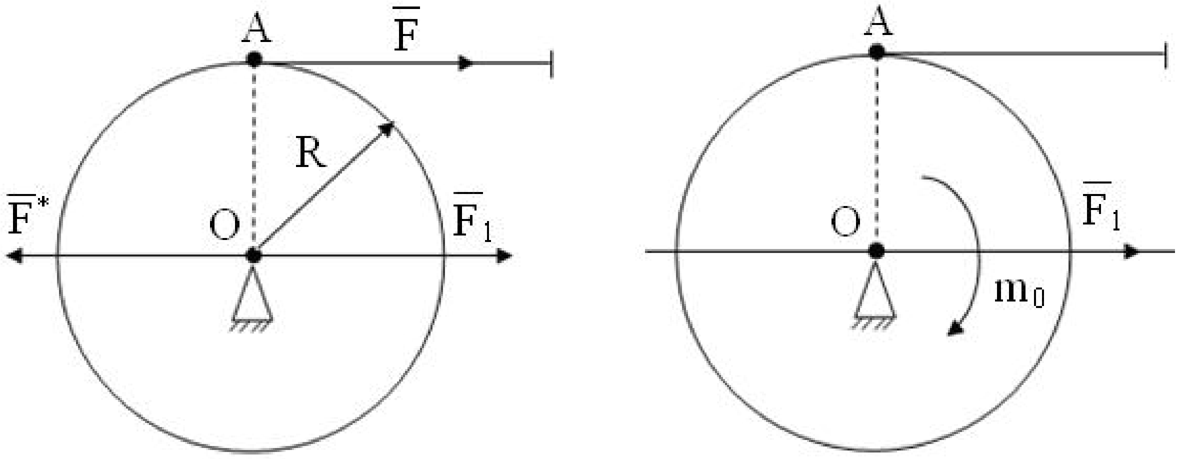


Рис. 5.2.

5.2. Приведення довільної системи сил у просторі до заданого центра. Теорема Пуансо (Основна теорема статики)

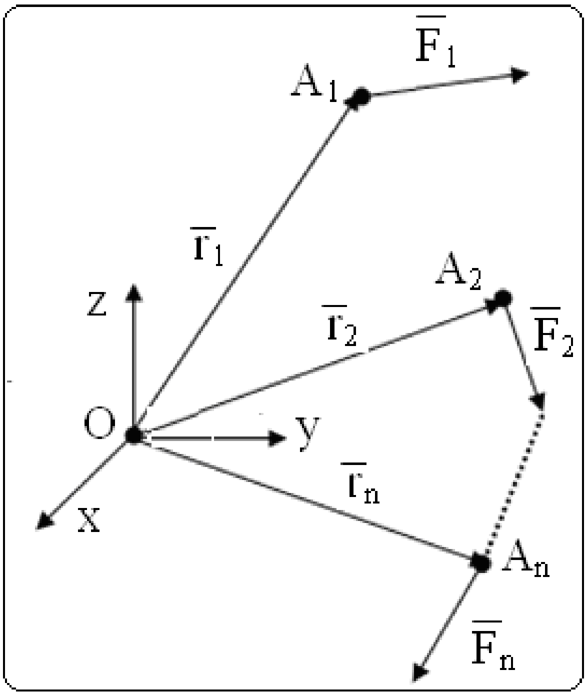
Bringing an arbitrary system of forces in space to a given one center. Poincess Theorem (Basic Statics Theorem)

Розглядаючи системи збіжних і паралельних сил у просторі, ми переконалися, що вони приводяться лише до одного силового фактора: рівнодійної сили або до пари сил.

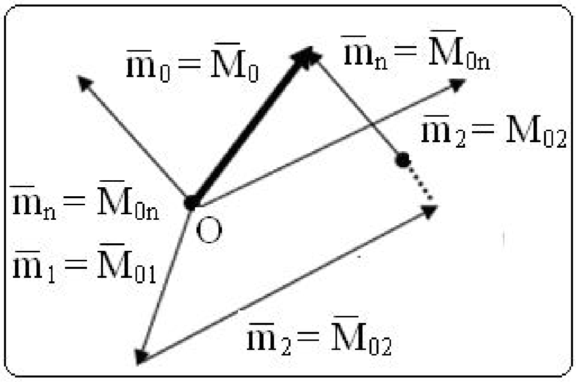
Розглянемо тепер задачу приведення довільної систем сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F})$ у просторі до заданого центра *О* (теорема належить Пуансо, 1777 - 1859 pp.).

Теорема: Довільна система сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F})$ у просторі зводиться до заданого центра О сукупністю двох силових факторів: сили $\overline{R}$, рівній головному вектору $\overline{F}_0$ вихідної системи сил і прикладеній у центрі приведення О, і пари сил, момент $\overline{m}_0$ якої дорівнює головному моменту $\overline{M}_0$ системи сил відносно того ж центра.

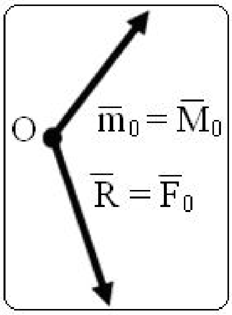
Доведення. Розглянемо вихідну довільну систему сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F})$ у просторі (рис. 5.3, а). Нехай сили є прикладеними до тіла в точках $A_{1,...,n}$, координати яких визначено радіусами-векторами $\overline{r}_{1,...,n}$ у системі координат Oxyz, полюс якої співпадає з центром приведення О.



а)



в)



г)

Введемо такі позначення і поняття.

Головний вектор системи сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2,..., \overline{F}_n\right)$ - вектор $\overline{F}_0$, який дорівнює геометричній сумі прикладених до тіла сил системи:

$$\overline{F}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\,, \tag{5.2}$$

де індекс О визначає точку прикладання вектора $\overline{F}_0$ до тіла.

Головний момент системи сил відносно точки О - вектор $\overline{M}_0$, що дорівнює геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї ж точки:

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k\,. \tag{5.3}$$

б)

Рис. 5.3.

Таким чином, за визначенням вектори $\overline{F}_0$ і $\overline{M}_0$ відносяться, з точки зору векторної алгебри, до зв'язаних у точці О векторів.

Для кожної з сил системи використуємо лему про паралельне перенесення сили у полюс О. У результаті перетворень отримаємо систему збіжних у точці О (рис. 5.3, б) сил $\left(\overline{F}_1', \overline{F}_2',..., \overline{F}_n'\right)$, що, як нам відомо, еквівалентна одній силі $\overline{R}$ (рівнодійній), що дорівнює їх геометричній сумі:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}'_k \ . \qquad (5.4)$$

Між векторами $\overline{F}'_k$ збіжної і $\overline{F}_k$ вихідної систем сил існують співвідношення: $\overline{F}'_k = \overline{F}_k (k = \overline{1;n})$. Якщо розглянути геометричну суму векторів $\overline{F}_n$ сил вихідної системи у точці О як вектор математичний і позначити його, відповідно до (5.2), як головний вектор $\overline{F}_0$ вихідної системи сил, то отримаємо наступну рівність $\overline{R} = \overline{F}_0$. (5.5)

З рівнянь (5.2), (5.4) і (5.5) виходить, таким чином, що сила $\overline{R}$ за математичним змістом дорівнює головному вектору $\overline{F}_0$ вихідної системи. У свою чергу, на відміну від сили $\overline{R}$, головний вектор $\overline{F}_0$ не має, стосовно розглядуваного тіла фізичного змісту, тому що точки A_k прикладання складаючих сил $\overline{F}_k$ (рис. 5.3, а) не співпадають з центром приведення О, в якому прикладений головний вектор. При паралельному перенесенні сили $\overline{F}_k$ до тіла необхідно приєднати одночасно пару сил $(\overline{F}_k, \overline{F}^*_k)$ з моментом $\overline{m}_k = \overline{m}(\overline{F}_k, \overline{F}^*_k) = \overline{r}_k \times \overline{F}_n$, прикладеним (рис.5.3, в) у точці О. Система приєднаних пар $(\overline{m}_1, ..., \overline{m}_n)$, відповідно до теореми про додавання пар сил, зводиться до результуючої пари з моментом

$$\overline{m}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k \qquad (5.6)$$

у точці О.

Відповідно до (5.3) і (5.6) отримаємо, що момент $\overline{m}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k$ приєднаної пари дорівнює головному моменту $\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{0k}$ $\left(\overline{M}_{ok} = \overline{M}_o(\overline{F}_k)\right)$ вихідної системи сил відносно центра приведення *O*, тобто (рис. 5.3,в)

$$\overline{m}_0 = \overline{M}_0 \ . \qquad (5.7)$$

Отже (рис. 5.3, г) вихідну систему сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ зведено в довільно обраній точці О до еквівалентної системи $(\overline{R}, \overline{m}_0)$ двох силових факторів: сили $\overline{R}$, яка дорівнює головному вектору $\overline{F}_0$ цієї системи сил, і пари сил з моментом $\overline{m}_0$, який дорівнює головному моменту $\overline{M}_0$ системи сил відносно центра приведення.

Таким чином, теорему доведено. Ця теорема має назву *основної теореми статики* (теорема Пуансо). З доведеної вище теореми випливає, що дві системи сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ і $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_k)$ будуть статично еквівалентними, якщо їх головні вектори й головні моменти у довільно обраному центрі приведення рівні між собою. Отже, для характеристики системи діючих на тіло сил є абсолютно достатнім визначити у довільному центрі О головний вектор $\overline{F}_0$ і головний момент $\overline{M}_0$ вихідної системи сил і задати їх на розрахунковій схемі (рис. 5.3, г). При цьому будемо враховувати, по-перше, те, що точки приведення сили $\overline{R}$ і моменту $\overline{m}_0$, а також точки прикладання головних векторів $\overline{F}_0$ і $\overline{M}_0$ співпадають за визначенням, а по-другому, що вектор $\overline{R}$ і вектор $\overline{m}_0$, на відміну від зв'язаних у точці O векторів $\overline{F}_0$ і $\overline{M}_0$, є відповідно ковзним і вільним векторами.

5.3. Властивості головного вектора, головного момента і результуючої приєднаної пари системи сил. Статичні інваріанти

The properties of the head vector, the head moment, and the resulting coupled pair of forces. Static invariants

Величини і напрямки головних векторів $\overline{F}_0$ і $\overline{M}_0$ у системі координат Oxyz (рис. 5.4) визначаються за правилами векторної алгебри формулами

$$F_0 = \sqrt{F_{0x}^2 + F_{0y}^2 + F_{0z}^2}\,;\; M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}\,, \tag{5.8}$$

де $F_{0x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}$; $F_{0y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}$; $F_{0z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}$; $M_{0x} = \sum_{k=1}^{n} M_{0x}\left(\overline{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(y_k F_{kz} - z_k F_{ky}\right)$

; $M_{0y} = \sum_{k=1}^{n} M_{0y}\left(\overline{F}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(z_k F_{kx} - x_k F_{kz}\right)$; $M_{0z} = \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}\right)$;

$$\cos\left(\widehat{Ox, \overline{F}_0}\right) = \frac{F_{0x}}{F_0};\; \cos\left(\widehat{Oy, \overline{F}_0}\right) = \frac{F_{0y}}{F_0};\; \cos\left(\widehat{Oz, \overline{F}_0}\right) = \frac{F_{0z}}{F_0};\; \cos\left(\widehat{Ox, \overline{M}_0}\right) = \frac{M_{0x}}{M_0};$$

$$\cos\left(\widehat{Oy, \overline{M}_0}\right) = \frac{M_{0y}}{M_0};\; \cos\left(\widehat{Oz, \overline{M}_0}\right) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

Кут φ між векторами $\overline{F}_0$ і $\overline{M}_0$ визначається за допомогою формули їх скалярного добутку:

$$\varphi = \arccos\frac{\overline{F}_0 \cdot \overline{M}_0}{F_0 \cdot M_0} = \arccos\frac{F_{0x} \cdot M_{0x} + F_{0y} \cdot M_{0y} + F_{0z} \cdot M_{0z}}{F_0 \cdot M_0}.$$

Якщо на практиці при вирішенні задач рівноваги твердого тіла виникає питання зміни центра приведення системи сил з точки О у наперед задану точку O_1, то головний вектор, головний момент і момент результуючої приєднаної пари системи сил мають наступні властивості.

Враховуючи вирази (5.2), (5.8) є очевидним, що головний вектор системи сил ні за величиною, ні за напрямком не залежить від положення центра приведення, тобто завжди виконуватиметься рівність $\overline{F}_{O_1} = \overline{F}_O$ (точка O_1-новий центр приведення).

Це обумовлено тим, що за формулою визначення ($\overline{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$) головний вектор є функцією тільки параметрів сил початкової системи і не залежить від положення точки O на тілі.

У механіці головний вектор $\overline{F}_O$ називається *першим статичним інваріантом*. Це означає, що для будь-якої вихідної системи сил його величина і напрямок є сталими величинами, тобто незалежними (інваріантними) до вибору центра приведення:

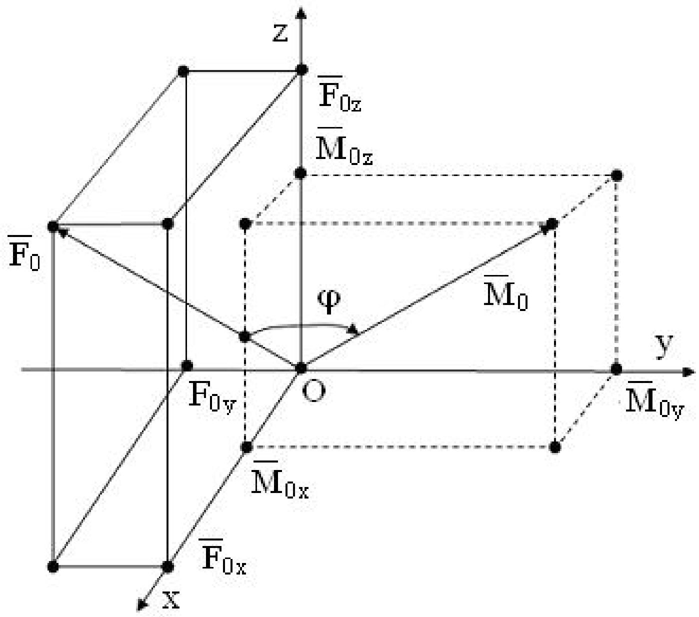


Рис. 5.4. Напрямки головних векторів

$$\overline{F}_O = \overline{F}_{O_1} = ... = \overline{F}_{O_n},$$

де n – номер поточної точки приведення.

Момент результуючої приєднаної пари вихідної системи сил при перенесенні центра приведення буде визначатися (рис. 5.5) за формулою

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_O + \overline{m}_{O_1}. \quad (5.9)$$

Тут $\overline{m}_{O_1} = \overline{r} \times \overline{R}$ – момент приєднаної пари сил.

На рис. 5.5 вектор $\overline{m}_{O_1}$ є, за правилом векторного добутку, перпендикулярним що площини E, якій належать вектори $\bar{r}$ і $\overline{R}$, тобто $\overline{m}_{O_1} \perp \overline{R}; \perp \bar{r}$.

Вираз (5.9) отримано за допомогою наступних еквівалентних системних перетворень: $(\overline{R}, \overline{m}_O) \sim (\overline{R}_1, \overline{m}_O, \overline{m}_{O_1} = \overline{M}_{O_1}(\overline{R})) \sim (\overline{R}_1, \overline{m}_1)$, де $\overline{R}_1 = \overline{R}$.

При цьому використано лему про паралельне перенесення сили $\overline{R}$ в точку O_1 з одночасним додаванням у центрі O_1 пари сил з моментом $\overline{m}_{O_1}$, рівним моменту $M_{O_1}(\overline{R})$ вихідної сили $\overline{R}$ відносно точки O_1, а також враховано властивості моменту $\overline{m}_O$ (моменту приєднаної пари сил у точці O) як вільного вектора, який можна переносити паралельно самому собі в будь-яку точку тіла (в даному випадку з точки O у точці O_1). Крім того, використано властивості геометричного додавання векторів моментів пар сил у точці O_1, тобто:

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_O + \overline{m}_{O_1}. \quad (5.10)$$

З рівняння (5.10) виходить, що момент $\overline{m}_O$ приєднаної пари сил при перенесенні центра приведення змінюється на величину моменту $\overline{m}_{O_1}$ пари сил, рівному моменту сили $\overline{R}$ відносно нового центра приведення O_1.

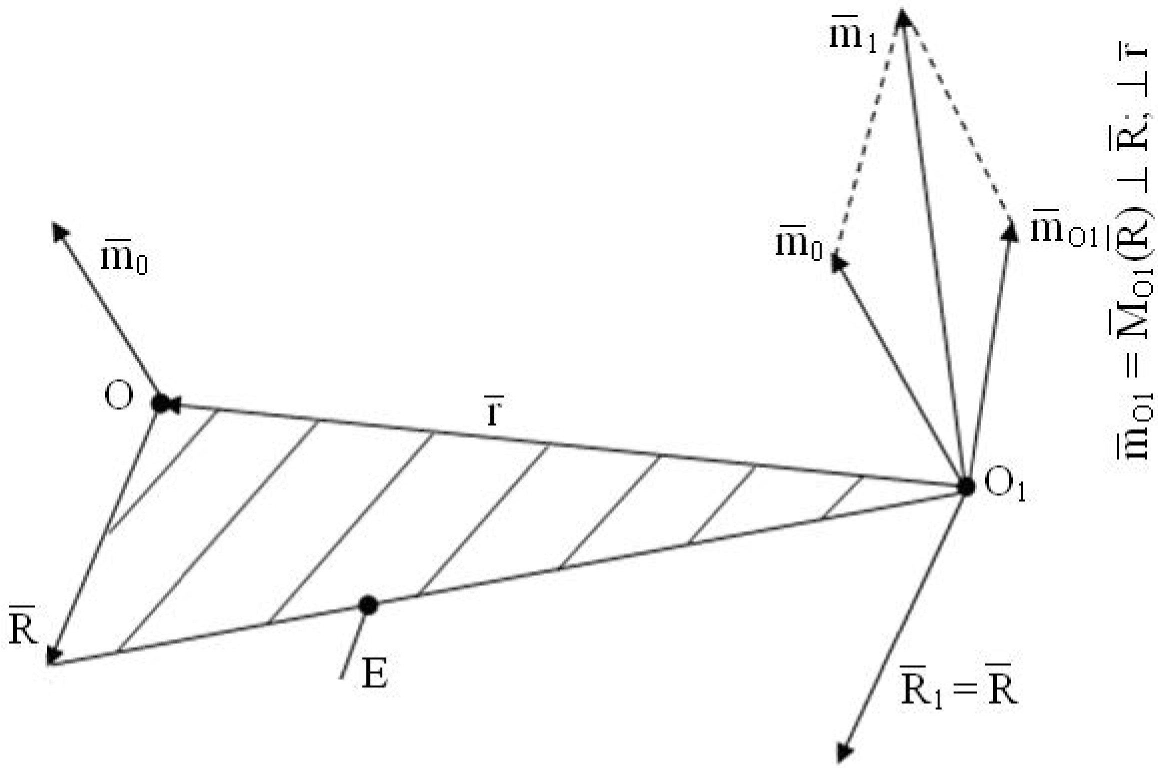


Рис. 5.5. вектор $\overline{m}_{O_1}$

Головний момент системи сил при перенесенні центра приведення вихідної системи сил матиме, в свою чергу, наступну властивість.

Враховуючи вираз (5.3) і рис. 5.6, отримаємо:

$$\overline{M}_{O_1} = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_{k_1} \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{O_1O} + \overline{r}_k\right) \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k + \overline{O_1O} \times \left(\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k\right) =$$

$$= \overline{M}_O + \overline{O_1O} \times \overline{F}_O = \overline{M}_O + \overline{M}_{O_1}\left(\overline{F}_O\right). \tag{5.11}$$

З рівняння (5.11) випливає, що головний момент вихідної системи сил при перенесенні центра приведення до точки O_1 змінюється на величину моменту $\overline{M}_{O_1}\left(\overline{F}_O\right)$ головного вектора $\overline{F}_O$ відносно нового центра приведення O_1.

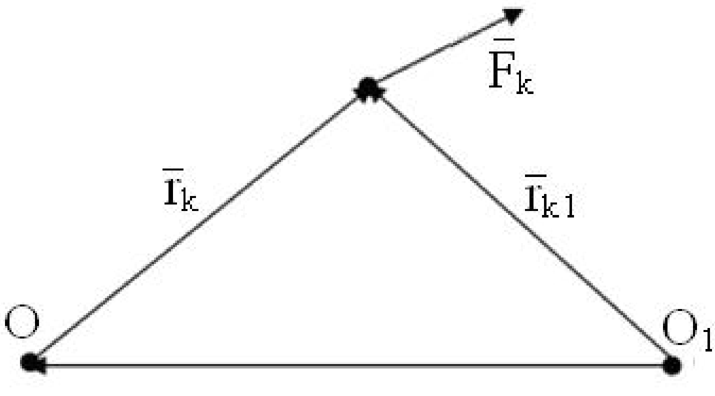


Рис. 5.6. Головний момент вихідної системи сил

Враховуючи рівняння (5.5) і (5.7) отримаємо вирази:

$$\overline{m}_O + \overline{m}_{O_1} = \overline{M}_O + \overline{M}_{O_1}(\overline{F}_O); \;\; \overline{m}_{O_1} = \overline{M}_{O_1}. \tag{5.12}$$

З виразу (5.12) випливає рівність моментів результуючої пари і головного моменту системи сил відносно нового центра зведення O_1, а також справедливість приведених на рис. 5.7 системних перетворень.

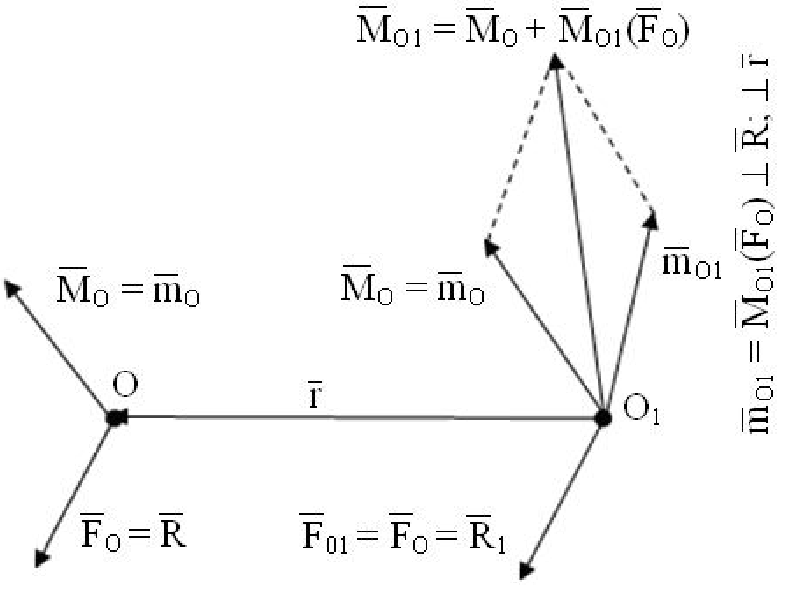


Рис. 5.7. Системни перетворення

Однак, на практиці виявилось, що більш зручним у використанні є рівняння (5.11), яке стосується головного моменту системи сил.

Розглянемо далі інші властивості головного вектора $\overline{F}_o$ і головного моменту $\overline{M}_o$ системи сил, які мають суттєве теоретичне і практикне значення.

Важливою властивістю головних вектора $\overline{F}_o$ і моменту $\overline{M}_o$ системи сил є незалежність їх скалярного добутку від положення точки приведення на тілі.

Дійсно, для будь-якої точки приведення O_1 отримаємо:

$$\overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_{O_1} = \overline{F}_{O_1} \cdot \left(\overline{M}_O + \overline{M}_{O_1}\left(\overline{F}_O\right)\right) = \overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_O + \overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_{O_1}\left(\overline{F}_O\right). \qquad (5.13)$$

За визначенням вектор $\overline{M}_{O_1}\left(\overline{F}_O\right)$ і вектор $\overline{r}$ (рис. 5.7) є перпендикулярними. Тому формула (5.13) приводиться, враховуючи що $\cos 90^0 = 0$, до виду

$$\overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_{O_1} = \overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_O + F_{O_1} \cdot M_{O_1}\left(\overline{F}_O\right) \cdot \cos 90^0 = \overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_O . \qquad (5.14)$$

Вираз (5.14), в результаті незалежності головного вектора системи сил від зміни полюса приведення, перетворюється у рівність

$$\overline{F}_{O_1} \cdot \overline{M}_{O_1} = \overline{F}_O \cdot \overline{M}_O , \qquad (5.15)$$

яка і доводить зазначену властивість.

У механіці цю властивість скалярного добутку головного вектора і голов-ного моменту системи сил визначають як *другий статичний інваріант* (*перша форма*).

Розглянемо другу форму другого статичного інваріанта системи діючих на тіло сил, які зведено в центрі O до головного вектора $\overline{F}_O$ і головного моменту $\overline{M}_O$.

З векторної алгебри відомо, що за величиною скалярний добуток двох векторів може бути визначеним через проекцію одного з векторів добутку на напрямок іншого:

$$\overline{F}_O \cdot \overline{M}_O = F_O \cdot M_O \cdot \cos\left(\overline{F}_O \widehat{,\ } \overline{M}_O\right) = \overline{F}_O \cdot \text{Ï}\ \rho_{\overline{F}_o}\left(\overline{M}_O\right), \qquad (5.16)$$

де $\text{Ï}\ \rho_{\overline{F}_o}\left(\overline{M}_O\right) = \overline{M}_O \cdot \cos\left(\overline{F}_O \widehat{,\ } \overline{M}_O\right)$ – проекція вектора $\overline{M}_O$ на напрямок головного вектора $\overline{F}_O$. Тоді з формул (5.15) і (5.16) випливає вираз

$$\overline{F}_{O_1} \cdot \text{Ï}\ \rho_{\overline{F}_{o_1}}\left(\overline{M}_{O_1}\right) = \overline{F}_O \cdot \text{Ï}\ \rho_{\overline{F}_o}\left(\overline{M}_O\right),$$

який, з урахуванням рівності $\overline{F}_{O_1} = \overline{F}_O$ першого статичного інваріанта, перетворюється до вигляду

$$Ï\ \rho_{\overline{F}_{O_1}}\left(\overline{M}_{O_1}\right) = Ï\ \rho_{\overline{F}_O}\left(\overline{M}_O\right). \qquad (5.17)$$

Співвідношення (5.17) виявляє, що проекція головного моменту систем сил на напрямок її головного вектора не залежить від положення точки приведення. У механіці цю властивість визначають як *другий статичний інваріант (друга форма).*

5.4. Окремі випадки приведення просторової системи сил
Some cases of reduction of the spatial system of forces

Відповідно до теореми Пуансо довільна система сил у просторі в загальному випадку зводиться у центрі О до двох силових факторів: сили, яка дорівнює головному вектору $\overline{F}_O$, і пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту $\overline{M}_O$ вихідної системи сил. Однак, на практиці між параметрами (величинами і взаємним напрямком) векторів $\overline{F}_O$ і $\overline{M}_O$ виникають різні співвідношення, що призводять до окремих випадків приведення довільної системи сил.

Приведення системи сил до пари сил $(\overline{F}, \overline{F}^*)$ *з моментом* $\overline{m}_O = \overline{OA} \times \overline{F}$ (рис. 5.8). *Bringing the force system to a pair of forces with torque.*

У цьому випадку в центрі приведення О головний вектор системи $\overline{F} = 0$, а головний момент $\overline{M}_0 = \overline{m}_0$ є перпендикулярним до площини *E* дії пари сил $(\overline{F}, \overline{F}^*)$.

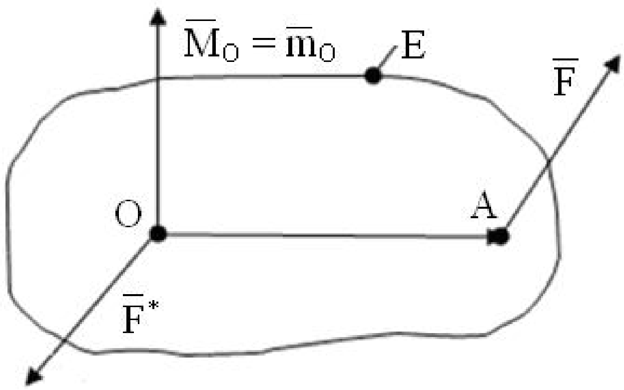


Рис. 5.8

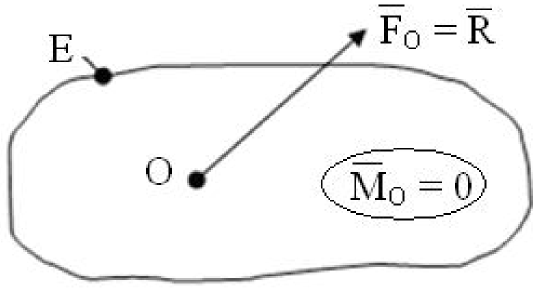


Рис. 5.9

Приведення до рівнодійної $\overline{R}$ *у центрі О. Bringing to the equilibrium in the center.* Тут (рис. 5.9) виконується наступне: головний момент системи сил $\overline{M}_O = 0;$ головний вектор $\overline{F}_O = \overline{R} \neq 0$ і належить пл. Е; система діючих на тіло сил відноситься до збіжної у точці О.

Зрівноважена (нульова) система сил. The balanced (zero) system of forces. У цьому випадку в центрі приведення О (рис. 5.10 і 5.11) отримаємо:

головний вектор $\overline{F}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0$ і головний момент $\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{O_k} = 0$; вихідна система сил у будь-якій точці O тіла зводиться до еквівалентної нулю $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim 0$ зрівноваженої системи; многокутники сил вихідної системи і многокутники векторів моментів сил відносно довільної точки O тіла є замкненими.

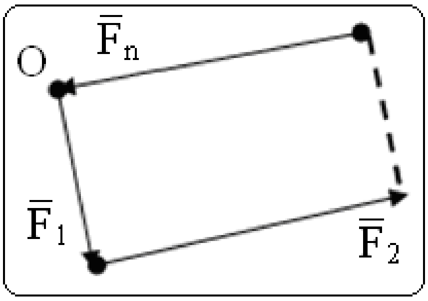


Рис. 5.10

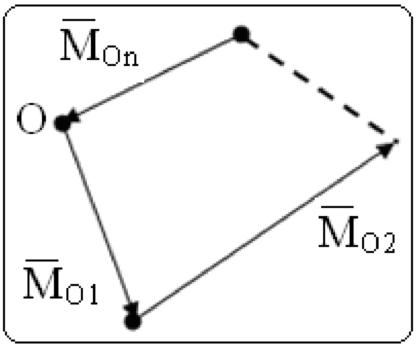


Рис. 5.11

Приведення системи сил до головного вектора $\overline{F}_O \neq 0$ *і головного моменту* $\overline{M}_O \neq 0$**,** коли $(\overline{F}_1, ..., \overline{F}_n) \sim (\overline{F}_O, \overline{M}_O)$. *Bringing the system of forces to the principal vector* $\overline{F}_O \neq 0$ *and the principal moment* $\overline{M}_O \neq 0$**.**

Тут мають місце, залежно від взаємної орієнтації векторів $\overline{F}_O$ і $\overline{M}_O$, три окремі випадки.

Приведення до динами (Bringing the Dynamics), коли вектори $\overline{F}_O$ $\overline{M}_O$ не є перпендикулярними, тобто (рис. 5.12) кут і $\varphi(\overline{F}_O, \overline{M}_O) \neq \pm\pi/2$ і скалярний добуток векторів $\overline{F}_O \cdot \overline{M}_O \neq 0$.

Розкладемо головний момент $\overline{M}_O$ на дві ортогональні складові $\overline{M}_O \sim (\overline{M}_1, \overline{M}_2)$, одна з яких спрямована вздовж головного вектора $\overline{F}_O$. Представимо момент $\overline{M}_2$ (закреслено на рис. 5.13) у вигляді пари сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_1^*)$, в якій плече $h = M_2 / F_0$, а сила $\overline{F}_1 = \overline{F}_O$ прикладена в точці O_1.

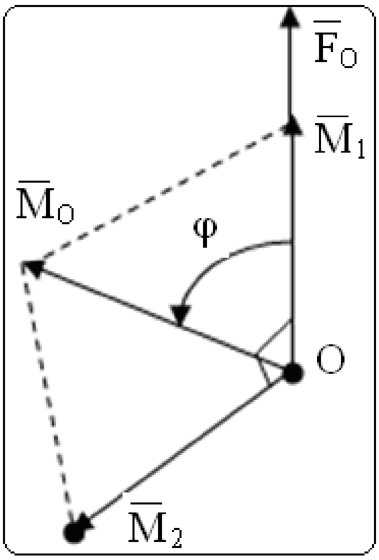


Рис. 5.12

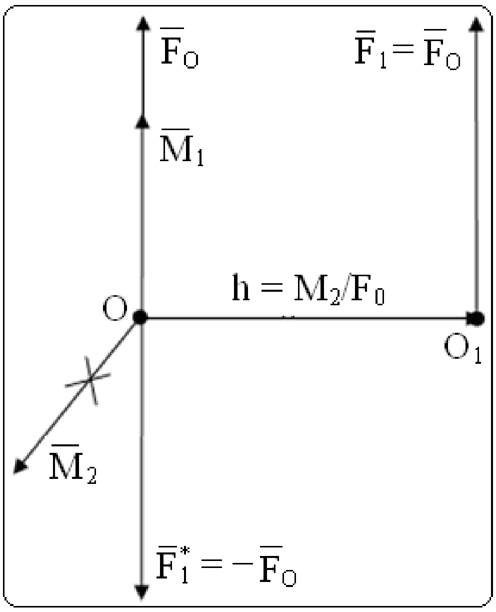


Рис. 5.13

У цьому випадку буде виконуватись умова еквівалентності:
$(\overline{F}_O, \overline{M}_O) \sim (\overline{F}_O, \overline{M}_1, \overline{M}_2) \sim ((\overline{F}_O, \overline{F}_1^*), \overline{M}_1, \overline{F}_1) \sim (\overline{M}_1, \overline{F}_1)$, тому що сили $\overline{F}_O$ і $\overline{F}_1^*$ за визначенням складають двійку сил, тобто $(\overline{F}_O, \overline{F}_1^*) \sim 0$.

Представимо далі вектор $\overline{M}_1$ у вигляді моменту пари сил і перенесемо його, як вільний вектор, з точки О в точку O_1 прикладання сили $\overline{F}_1$ (показано на рис. 5.14 штриховою стрілкою).

У результаті початкова система сил перетворилась в центрі O_1 в систему силових факторів $\left(\overline{F}_1, \overline{M}_1\right)$. Тут сила $\overline{F}_1$ дорівнює головному вектору $\overline{F}_O$ за визначенням, а момент $\overline{M}_1$ пари сил за величиною - проекції головного моменту $\overline{M}_0$ на напрямок головного вектора $\overline{F}_0$ (рис. 5.15) системи сил: $M_1 = \text{Ï}\ \rho_{\overline{F}_0}(\overline{M}_O) = M_O \cdot \cos\varphi$. На рис. 5.15 момент $\overline{M}_1$ для наочності показано одночасно у вигляді пари сил $(\overline{P}_1, \overline{P}_1^*)$.

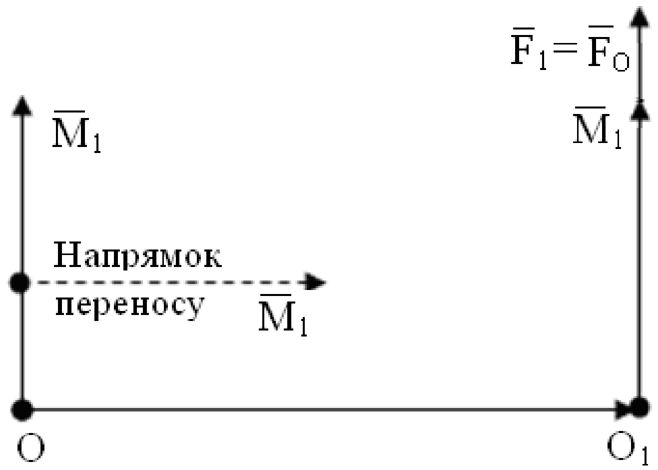


Рис. 5.14

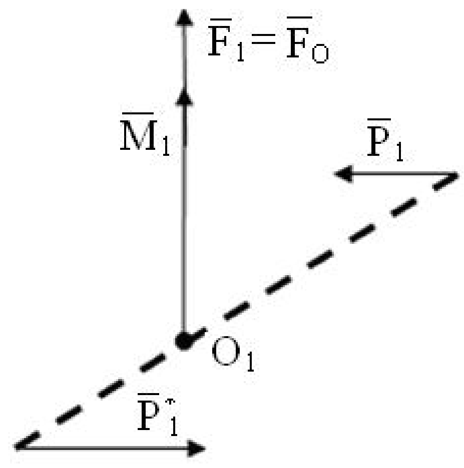


Рис. 5.15

Сукупність діючих на тіло силових факторів у вигляді сили $\overline{F}_1$ і пари сил $(\overline{P}_1, \overline{P}_1^*)$, вектори яких колінеарні (лежать на одній прямій), називають *динамою* чи *динамічним гвинтом*. Лінія, яка проходить через центр приведення O_1 вздовж даної прямої, називається *осью динами*.

У просторі рівняння осі динами отримаємо з урахуванням умови паралельності векторів $\overline{F}_1$ і $\overline{M}_1$ (рис. 5.14):

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 &= \overline{M}_O - \overline{OO_1} \times \overline{F}_O = M_{1x} \cdot \overline{i} + M_{1y} \cdot \overline{j} + M_{1z} \cdot \overline{k} = \\ &= \rho \cdot \overline{F}_1 = \rho \cdot \overline{F}_O = \rho \cdot F_{O_x} \cdot \overline{i} + \rho \cdot F_{O_y} \cdot \overline{j} + \rho \cdot F_{O_z} \cdot \overline{k}, \end{aligned} \qquad (5.18)$$

де векторний добуток $\overline{OO_1} \times \overline{F}_O = \overline{M}_2$, ρ - параметр гвинта (скаляр);

$$\rho = M_1 \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{F_O} = M_O \cdot \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{F}_O}{M_O \cdot F_O} \cdot \frac{1}{F_O} = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{F}_O}{F_O^2}; \ \cos\varphi = \frac{\overline{M}_O \cdot \overline{F}_O}{M_O \cdot F_O}.$$

Враховуючи (5.18), отримаємо такі співвідношення між координатними складовими векторів $\overline{F}_O$, $\overline{M}_O$ і $\overline{M}_1$:

$$M_{1x} = \rho \cdot F_{O_x} = M_{O_x} - \left(y \cdot F_{O_z} - z \cdot F_{O_y}\right); \ M_{1y} = \rho \cdot F_{O_y} = M_{O_y} - \left(z \cdot F_{O_x} - x \cdot F_{O_z}\right);$$

$$M_{1z} = \rho \cdot F_{O_z} = M_{O_z} - \left(x \cdot F_{O_y} - y \cdot F_{O_x}\right), \qquad (5.19)$$

де x, y, z – координати точки O_1 на осі динами.

Співвідношення (5.19) дозволяють отримати рівняння прямої лінії, осі динами, у формі

$$\frac{M_{Ox}-\left(y\cdot F_{Oz}-z\cdot F_{Oy}\right)}{F_{0x}}=\frac{M_{Oy}-\left(z\cdot F_{Ox}-x\cdot F_{Oz}\right)}{F_{Oy}}-=\frac{M_{Oz}-\left(x\cdot F_{Oy}-y\cdot F_{Ox}\right)}{F_{Oz}}. \qquad (5.20)$$

Отже, існує пряма з канонічним рівнянням (5.20) у проекціях, в будь-якій точці якої система діючих на тіло сил $\left(\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_n\right)$ зводиться до динами.

Таким чином встановлено, що прикладена до тіла вихідна довільна система сил, якщо другий статичний інваріант першої форми не дорівнює нулю, тобто при $\overline{F}_O\cdot\overline{M}_O=F_O\cdot M_O\cdot\cos\varphi\neq 0$ $(\varphi\neq\pi/2)$, зводиться у точці O_1 до динами, яка є сукупністю двох силових факторів: сили $\overline{F}_1$ і моменту пари сил $\overline{M}_1$, вектори яких колінеарні. При цьому здається, що за величиною момент $\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_1$ пари динами у точці O_1 буде найменшим (рис. 5.16), порівняно з моментами $\overline{M}_{O_k}$ у будь-яких інших точках приведення $O_к$ на осі Оу, тобто буде виконуватися співвідношення $M_{O_1}<M_{O_k}<M_O$. Цю важливу властивість динами використовують на практиці при вирішенні задач зрівноваження твердого тіла, а також відтворенні динамою заданого його руху за допомогою зовнішніх сил найменшої потужності.

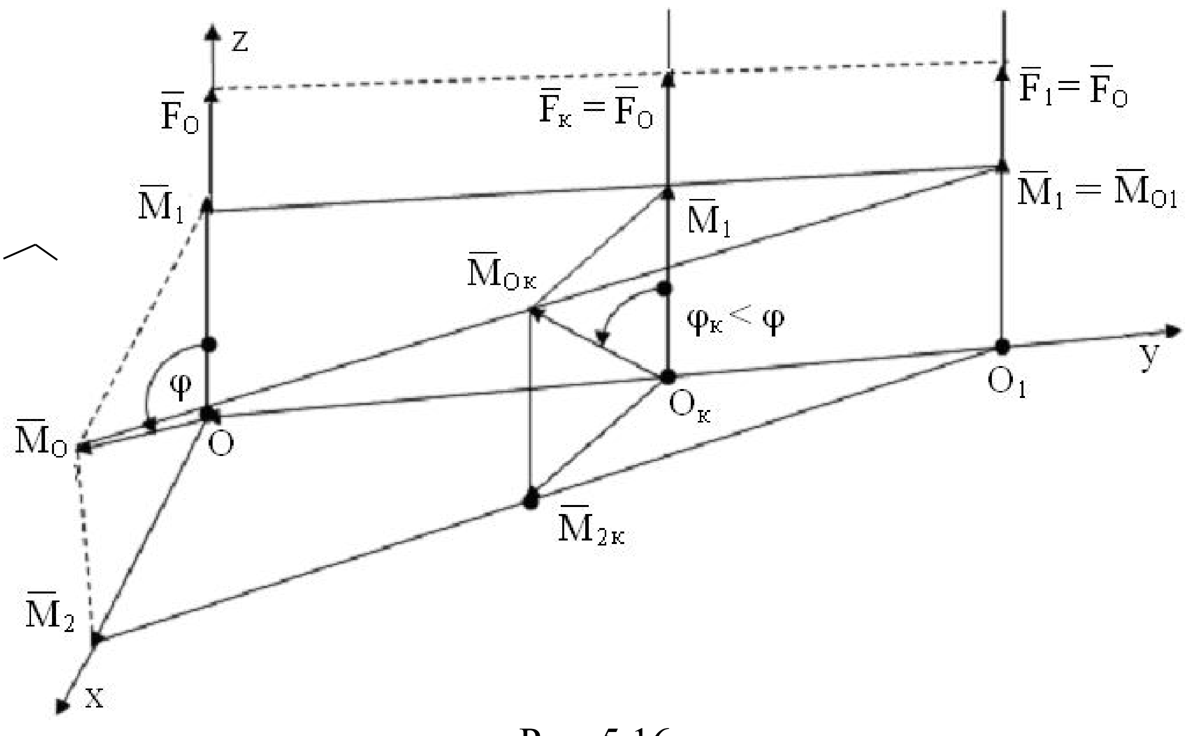


Рис. 5.16

Приведення до схрещеної системи двох сил. Bringing to a crossed system two forces. Цей випадок має місце, коли вихідна система сил приводиться у центрі $\left(\overline{P}_1,\overline{P}_2,...,\overline{P}_n\right)$ О до головного вектора $\overline{F}_O$ і головного моменту $\overline{M}_O$ (рис. 5.17), а кут φ між векторами, як і у випадку приведення до динами, задовольняє співвідношенню $\varphi\left(\overline{F}_O,\overline{M}_O\right)\neq\pm\pi/2$.

Представимо момент $\overline{M}_O$ (закреслено на рис. 5.17) у вигляді пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$ з площиною дії E і плечем h=M$_0$/P (за величиною сила $\overline{P}$ пари може бути будь-якою). Далі додамо за правилом паралелограмма вектори $\overline{F}_O$ і $\overline{P}$, отримавши силу $\overline{Q}=\overline{F}_O+\overline{P}^*$. Виконані перетворення призводять до наступної, еквівалентної до вихідної системи двох сил $\overline{Q}$ і $\overline{P}$: $(\overline{F}_O,\overline{M}_O)\sim(\overline{F}_O,\overline{P}^*,\overline{P})\sim(\overline{Q},\overline{P})$.

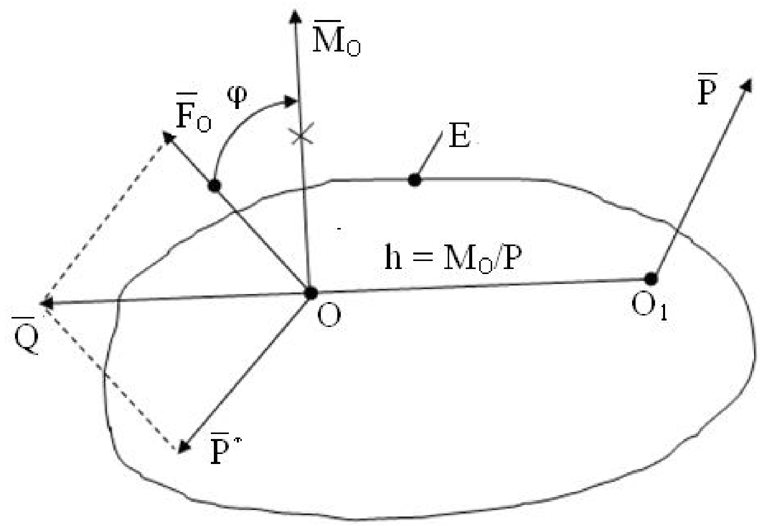


Рис. 5.17. Приведення до схрещеної системи двох сил

При цьому сила $\overline{Q}$ є прикладеною у центрі приведення O, а точкою прикладання сили $\overline{P}$ є точка O$_1$ кінця плеча *h* пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$. Важливою властивістю сили $\overline{Q}$ є, однак, те, що вона не належить площині E дії пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$. Така сукупність діючих на тіло двох сил складає систему сил, щоі схрещуються (не лежать в одній площині) і не мають рівнодійної.

На відміну від динами отримана система силових факторів включає лише дві сили $\overline{Q}$, $\overline{P}$, тобто тут відсутня пара сил.

Приведення до однієї сили (рівнодійної). Alignment to one force (isotope), коли вектори $\overline{F}_O$ і $\overline{M}_O$ є перпендикулярними, тобто $\varphi=\pm\pi/2$ (рис. 5.18). У цьому випадку головний вектор $\overline{F}_O$, лежить у площині E, яка перпендикулярна головному моменту $\overline{M}_O$ системи, тобто в площині дії результуючої приєднаної пари сил. Представимо момент $\overline{M}_O$ (закреслено на рис. 5.18) у вигляді пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$ з плечем h=M$_0$/F$_0$ і силою $\overline{P}^*=-\overline{F}_O$. У результаті отримаємо, що сили $\overline{F}_O$ і $\overline{P}^*$ складають двійку сил, тобто систему сил $(\overline{F}_O,\overline{P}^*)\sim 0$, а вихідна система виявляється еквівалентною одній силі $\overline{P}$, яка належить площині E, прикладена у точці O$_1$, що знаходиться на відстані

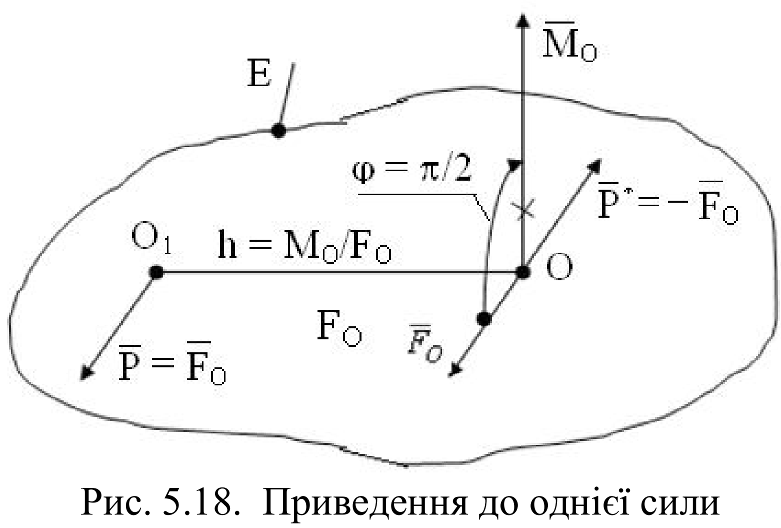


Рис. 5.18. Приведення до однієї сили

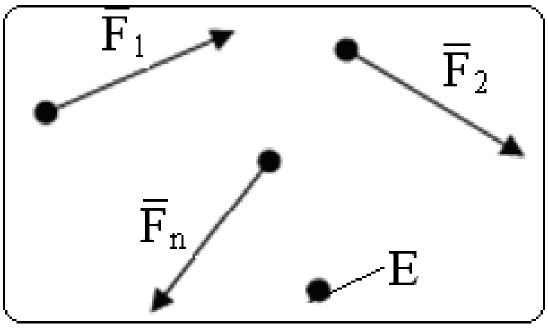
$h=M_0/F_0$ від початкового центра приведення O. Проведені еквівалентні перетворення мають наступний вигляд:

$$\left(\overline{F}_O, \overline{M}_O\right) \sim \left(\overline{F}_O, \left(\overline{P}^* = -\overline{F}_O, \overline{P}\right)\right) \sim \left(\left(\overline{F}_O, \overline{P}^*\right) \sim 0, \overline{P}\right) \sim \left(\overline{P}\right).$$

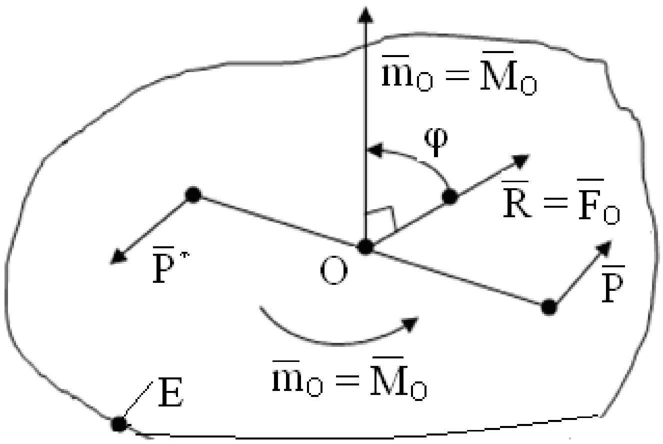
Вони зводять вихідну систему сил $\left(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right)$ до однієї сили $\overline{P}$ (рівнодійної), яка дорівнює головному вектору $\overline{F}_O$ системи і прикладена у новому центрі приведення O_1.

5.5. Довільна система сил у площині
An arbitrary system of forces in the plane

Особливістю розглядуваної системи сил $\left(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right)$ є приналежність ліній дій всіх сил системи площині E (рис. 5.19, а). У цьому випадку вихідну систему сил, використовуючи теорему Пуансо, в центрі приведення O (рис. 5.19, б) можна звести взагалі до двох силових факторів: сили $\overline{R}$, яка дорівнює головному вектору $\overline{F}_0$, і результуючої приєднаної пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$ з моментом $\overline{m}_O$ (показано також дуговою стрілкою на рис. 5.19, б), рівним головному моменту $\overline{M}_O$ вихідної системи сил.



а)



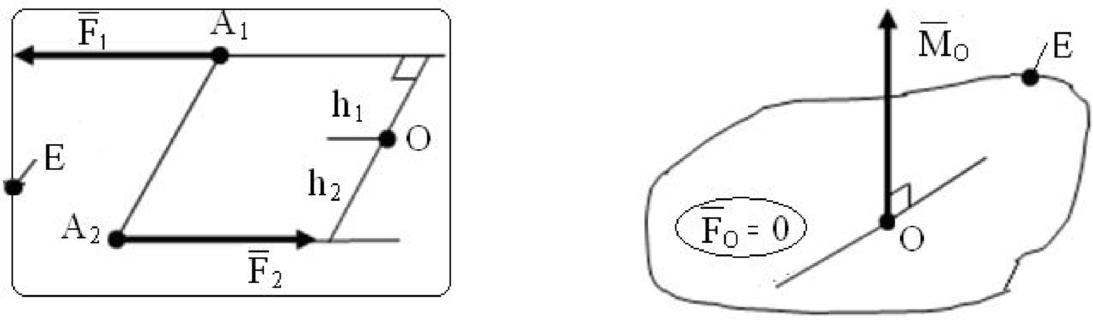
б)

Рис. 5.19. Довільна система сил у площині

На відміну від довільної системи сил у просторі тут: головний вектор $\overline{F}_O$ довільної плоскої системи сил завжди належить площині E, яка є площиною дії пари $(\overline{P},\overline{P}^*)$; головний момент $\overline{M}_O \perp \overline{F}_O$, тобто кут φ між векторами дорівнюватиме $\varphi\left(\widehat{\overline{F}_O,\overline{M}_O}\right) = \pm\pi/2.$.

Відповідно до зображених на рис. 5.19, б силових факторів матимуть місце, залежно від величин головних векторів $\overline{F}_O$, $\overline{M}_O$ зведеної у центрі O системи сил, такі випадки приведення довільної системи сил у площині.

1. Приведення до пари сил $(\overline{P},\overline{P}^*)$. Bringing up a pair of forces. Коли головний вектор системи $\overline{F}_O$=0, а головний момент $\overline{M}_O = \overline{M}(\overline{P},\overline{P}^*) \neq 0$. Цей випадок за сукупністю діючих на тіло силових факторів повністю співпадає з випадком приведення довільної системи сил у просторі, розглянутому у підрозділі 5.4 і на рис. 5.8. Наприклад, для зображених на рис. 5.20, а системи двох сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2 = -\overline{F}_1\right)$ отримаємо для центру приведення О (рис. 5.20, б): $\overline{F}_O = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_1 - \overline{F}_1 = 0$; $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = F_1(h_1 + h_2) \neq 0$; $\overline{M}_O \perp$ пл.Е; система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim \overline{M}_O$.



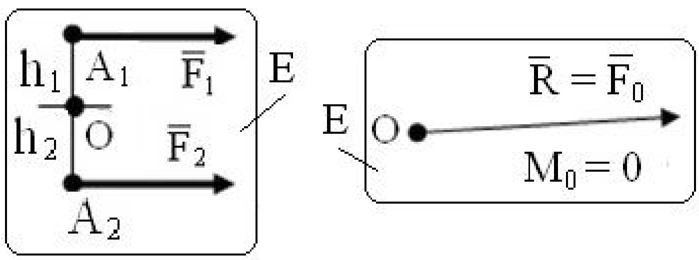
а) б)

Рис. 5.20. Приведення до пари сил

2. Приведення до рівнодійної $\overline{R}$ у центрі О (Bringing to the equilibrium in the center O).

Тут головний момент системи $\overline{M}_O$=0, головний вектор $\overline{F}_O \neq 0$, а вихідна система сил зводиться тільки до однієї сили $\overline{F}_O$, що є рівнодійною $\overline{R}$, прикладеною у точці О. Випадок ідентичний розглянутому у п. 5.4.2 і на рис. 5.9.

Приклад приведення: $\overline{F}_1 = \overline{F}_2$ (рис. 5.21, а), h_1=h_2. У точці О буде: $M_O = -h_1 \cdot F_1 + h_2 \cdot F_2 = 0$; $\overline{F}_O = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 \neq 0$ (рис. 5.21, б); рівнодійна сила $\overline{R} = \overline{F}_O$ прикладена у центрі приведення *O*; системи сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim \overline{R}$.

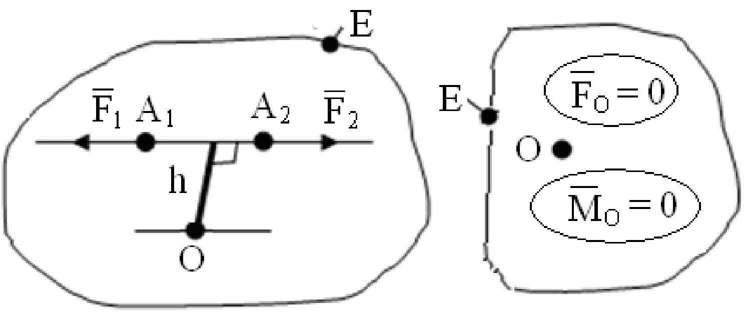


а) б)

Рис. 5.21. Приведення до рівнодійної

3. Зрівноважена систе-ма сил (The balanced system of forces). У центрі приведення О маємо $\overline{F}_O$=0 і $\overline{M}_O$ = 0. При цьому (див. підрозділ 5.4 і рис. 5.10 і 5.11) багатокутники діючих на тіло сил $\overline{F}_n$ і моментів приєднаних пар сил $\overline{m}_k$ є замкненими і вихідна система сил еквівалентна нулю $\left(\left(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right) \sim 0\right)$, тобто є зрівноваженою. Тут, наприклад, для системи двох сил:
$\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$ (рис. 5.22, а), буде: $\overline{F}_O = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}_1 - \overline{F}_1 = 0$;
$M_O = h_1 \cdot F_1 - h_2 \cdot F_2 = 0$ (рис. 5.22, б); система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right) \sim 0$.

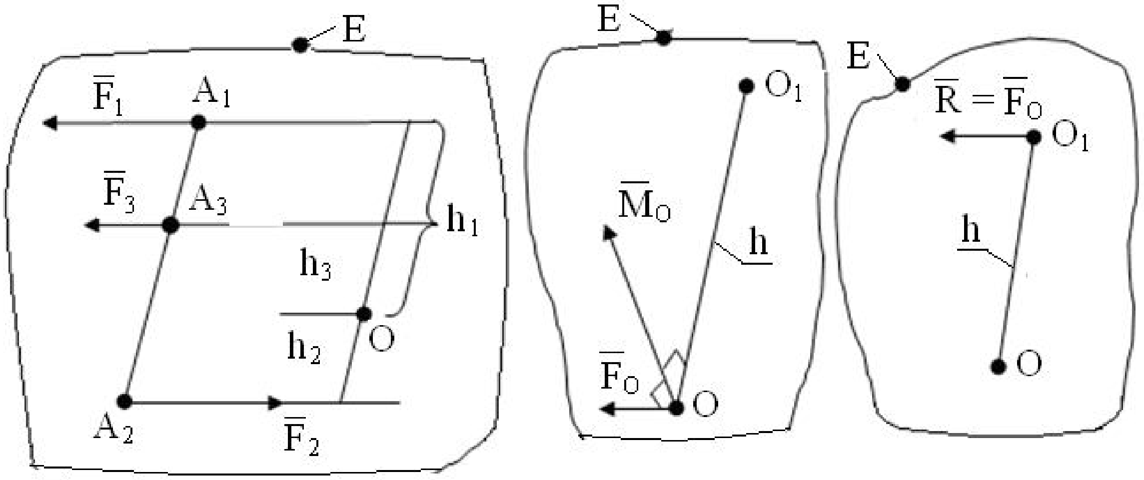
У загальному випадку, зведену в центрі О до головного вектора $\overline{F}_O \neq 0$ і головного моменту $\overline{M}_O \neq 0$ вихідну систему сил можна подальшими спрощеннями звести до однієї сили, рівнодійної $\overline{R} = \overline{F}_O$, яка прикладена, на відміну від п. 5.5.2 у новому центрі O_1 на відстані $h = M_O / F_O$ від точки O.



а) б)

Рис. 5.22. Зрівноважена система сил

Цей випадок повністю співпадає за доведенням з випадком приведення, який розглянуто стосовно довільної системи сил у просторі у п. 5.4.4.3 і на рис. 5.18. Наприклад, для зображеної на рис. 5.23, а системи трьох сил: ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2 = -\overline{F}_1$, $\overline{F}_3 = k\overline{F}_1$) отримаємо у центрах приведення O, O_1: $\overline{F}_O = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = \overline{F}_3$ (рис. 5.23, б); $M_O = h_1 \cdot F_1 + h_3 \cdot F_3 + h_2 \cdot F_2$; $h=M_0/F_0$; $\overline{R} = \overline{F}_O = \overline{F}_3$ (рис. 5.23, в), система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3\right) \sim \overline{R}$.



а б в

Рис. 5.23. Система трьох сил

5.6. Теорема Варіньона про момент рівнодійної Varignon's theorem on the moment of equilibrium

На практиці важливе використання, наприклад, при визначенні координат ваги тіла, має наступна властивість головного вектора системи сил (*теорема Варіньона про момент рівнодійної*).

Теорема. Якщо є точка O, в якій система діючих сил $\left(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n\right)$ зводиться тільки до головного вектора $\overline{F}_O$, тобто рівнодійної $\overline{R} = \overline{F}_O$, то момент цієї рівнодійної відносно будь якої іншої точки O_1 дорівнюватиме геометричній сумі моментів сил вихідної системи відносно тієї самої точки O_1.

При доведенні теореми врахуємо вираз (5.5), а також те, що за умовою в точках O і O_1 на рис. 5.24 вектор $\overline{M}_O = 0$. У результаті отримаємо: в точці O $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2,..., \overline{F}_n\right) \sim (\overline{F}_O) \sim (\overline{R})$; в точці O_1

$$\overline{M}_{O_1}=\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_O)=\overline{M}_{O_1}(\overline{R})=\overline{r}\times\overline{F}_O=\sum_{k=1}^{n}\overline{r}\times\overline{F}_k=\sum_{k=1}^{n}\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_k)$$

або $\overline{M}_{O_1}(\overline{R})=\sum_{k=1}^{n}\overline{M}_{O_1}(\overline{F}_k).$ (5.21)

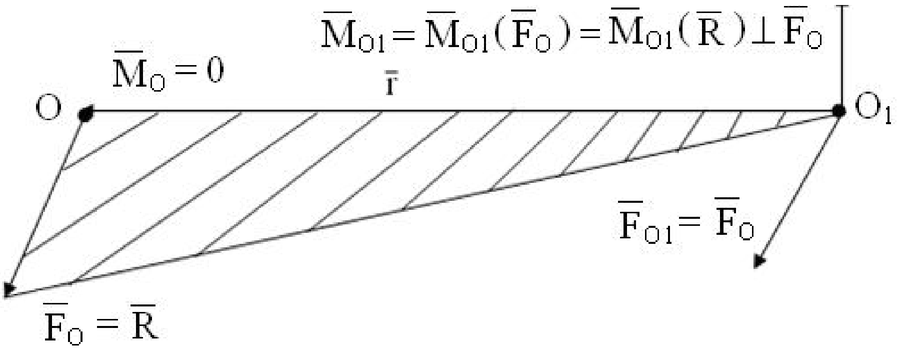


Рис. 5.24

Рівняння (5.21) справедливе для будь-якої точки O_1 тіла в просторі чи площині. Отже теорему доведено. Особливості використання теореми Варіньона розглянемо на наступних прикладах (див. розділ 3 с. 153).

Примітка. Визначити момент сили $\overline{F}$ *відносно полюса за загальною формулою* $M_O(\overline{F})=\pm h\cdot F$ *дуже складно, тому що невідомим є її плече h відносно точки О. Для його визначення спочатку необхідно скласти рівняння* (5.23) або (5.24) *лінії дії сили. Потім рівняння перпендикуляра з точки О на цю пряму, і далі визначити його довжину, яка і являтиме собою плече h сили* $\overline{F}$ *відносно полюса О.*

ЛЕКЦІЯ 6. Умови рівноваги системи сил. окремі випадки рівноваги
LECTURE 6. Conditions of the equilibrium system of forces. certain cases of equilibrium

На практиці розв’язання задач про рівновагу невільного твердого тіла дозволяє визначити невідомі зовнішні сили та реакції в’язей.

Згідно з аксіомою статики про звільнення твердого тіла від в’язей тіло перебуває у стані спокою, тобто рівновазі, коли система прикладених до нього сил (в тому числі реакцій в’язів) еквівалентна нулю $\left((\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_n)\sim 0\right)$, тобто зрівноважена.

6.1. Рівновага довільної системи сил у просторі
The equilibrium of an arbitrary system of forces in space

Відповідно до теореми Пуансо (п. 5.4.3) умови перебування твердого тіла в рівновазі формулюються наступним чином: для рівноваги довільної системи сил у просторі необхідно і достатньо, щоб одночасно головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю:

$\overline{M}_0=0\ \overline{F}_0=0,$ (6.1) де O – будь-яка точка приведення у просторі, тому що при $\overline{F}_0 = 0$ величина головного моменту від вибору центра *O* не залежить. Це *геометричні (векторні) умови рівноваги* [*geometric* (*vector*) *equilibrium conditions*].

Умови (6.1) є необхідними, бо якщо одна з них не буде виконуватись, то система діючих на тіло сил зведеться або до пари сил з моментом $\overline{m}_0 = \overline{M}_0$ (п. 5.4.1), або до рівнодійної $\overline{R} = \overline{F}_0$ (п. 5.4.2), тобто не буде зрівноваженою.

Одночасно умови (6.1) є і достатніми, тому що, наприклад, при $\overline{F}_0 = 0$, система відповідно до п. 5.4.1. зводиться до пари сил з моментом $\overline{m}_0$, рівним головному моменту $\overline{M}_0$. Але завдяки умовам (6.1) одночасно виконується і рівність $\overline{M}_0 = 0$, тому рівновага тіла забезпечується безумовно.

Однак, на практиці широко використовується інша форма умов рівноваги (*аналітична чи алгебраїчна форма*), суть якої полягає в наступному: якщо при рівновазі системи діючих на тіло сил головний вектор і головний момент системи дорівнюють нулю, то і їх проекції $(F_{0x}, F_{0y}, F_{0z}, M_{0x}, M_{0y}, M_{0z})$ на координатні осі також дорівнюватимуть нулю:

$$F_{0x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0;$$

$$F_{0y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0;$$

$$F_{0z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0; \quad M_{0x} = \sum_{k=1}^{n} M_{0x}(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k F_{kz} - z_k F_{ky}\right) = 0;$$

$$M_{0y} = \sum_{k=1}^{n} M_{0y}(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k F_{kx} - x_k F_{kz}\right) = 0; \quad M_{0z} = \sum_{k=1}^{n} M_{0z}(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}\right) = 0. \quad (6.2)$$

де $x_k, y_k, z_k (k = \overline{1, n})$ – проекції радіуса-вектора точки прикладання k-ої сили на осі системи координат.

При цьому перші три рівняння складають умови відсутності поступального руху тіла в напрямку осей Ox, Oy, Oz, а останні рівняння-відсутності його обертального руху навколо перелічених осей.

У загальному випадку при розв'язанні задачі на рівновагу конкретного твердого тіла з шісти рівнянь (6.2) можна визначити шість невідомих величин реакцій в'язів, наприклад, у задачах прикладної механіки при визначенні геометричних і механічних характеристик опорних стрижнів, підшипників, підп'ятників та ін.

6.2. Окремі випадки рівноваги системи сил

Some cases of equilibrium of the system of forces

1. Рівновага довільної системи паралельних сил у просторі. The equilibrium of an arbitrary system of parallel forces in space.

У випадку, коли всі сили паралельні між собою (*система паралельних сил*), осі системи координат доцільно вибрати так, щоб одна з осей (наприклад вісь Oz) була паралельна силам (рис. 6.1).

Тоді перші дві і остання умови (6.2) будуть виконуватись як тотожності, що дає наступні (три) умови рівноваги:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_{0x}(\overline{F}_k) = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_{0y}(\overline{F}_k) = 0 \,. \qquad (6.3)$$

Отже, відповідно до виразу (6.3), для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій сил на вісь, паралельну силам, і суми моментів цих сил відносно двох інших координатних осей, дорівнювали нулю.

2. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил. The equilibrium conditions of an arbitrary plane system of forces.

Як відомо (п. 5.5), довільна система сил (рис. 6.1) у площині в загальному випадку зводиться у центрі O до сили $\overline{R}$, яка дорівнює головному вектору $\overline{F}_0$ системи, і пари сил з моментом $\overline{m}_0$, який дорівнює головному моменту $\overline{M}_0$ системи. При цьому головний вектор належить площині дії пари $\overline{m}_0$, що співпадає з площиною дії сил системи.

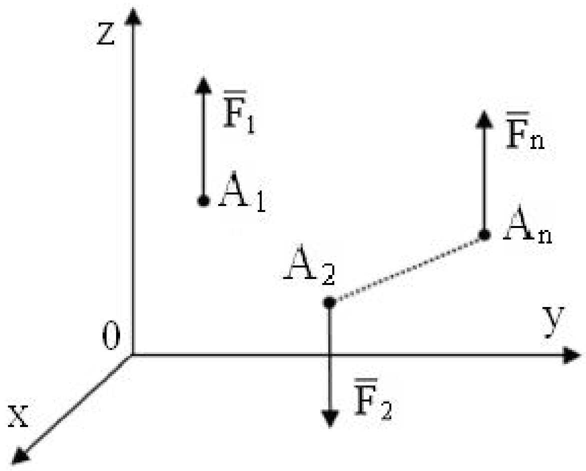


Рис. 6.1. Система паралельних сил

Для даної системи сил існують три окремі випадки рівноваги.

Перша (основна) форма умов рівноваги [*The first (basic) form of equilibrium conditions*]. Припустимо, що площина дії системи сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ співпадає з координатною площиною xOy (рис. 6.2) системи координат Oxyz. Проекції сил системи, а також радіусів-векторів точок їх прикладання на вісь Oz в даному випадку дорівнюють нулю. Тому система умов рівноваги (6.2) перетворюється в наступну:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \ \sum_{k=1}^{n} M_0(\overline{F}_k) = 0 \,. \qquad (6.4)$$

Система (6.4) аналітичних (алгебраїчних) умов рівноваги твердого тіла формулюється таким чином:

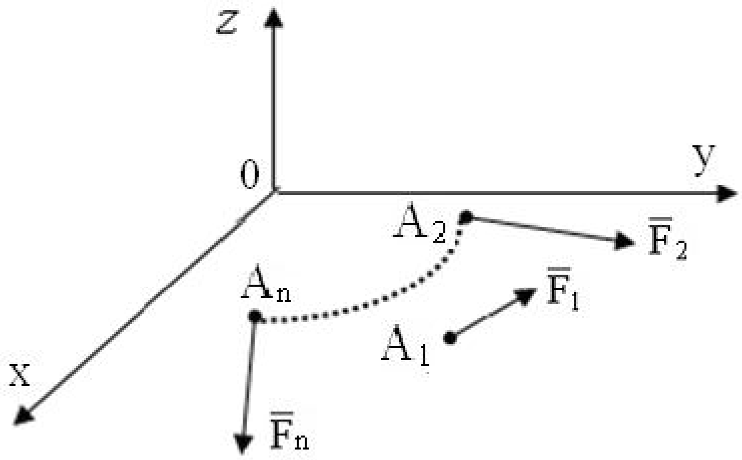


Рис. 6.2. До першої (основної) форми умов рівноваги

для рівноваги довільної системи сил у площині необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з координатних осей Ox і Oy і алгебрична сума їх моментів відносно осі Oz (або довільного центра O в площині дії сил системи $\sum_{k=1}^{n} M_0(\overline{F}_k) = 0$, дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги (*The second form of equilibrium conditions*). У даному випадку умови рівноваги формулюються так: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми моментів сил відносно будь-яких двох точок у площині дії сил і сума проекцій цих сил на вісь, яка не перпендикулярна до прямої, що проходить через обрані точки, дорівнювали нулю.

Для площини E дії сил системи, точок B, C на ній і осі Ox (рис. 6.3) буде:

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = 0; \; M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i) = 0; \; F_{Bx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0. \qquad (6.5)$$

де F_{Bx} – проекція головного вектора системи сил у точці B на вісь Ox.

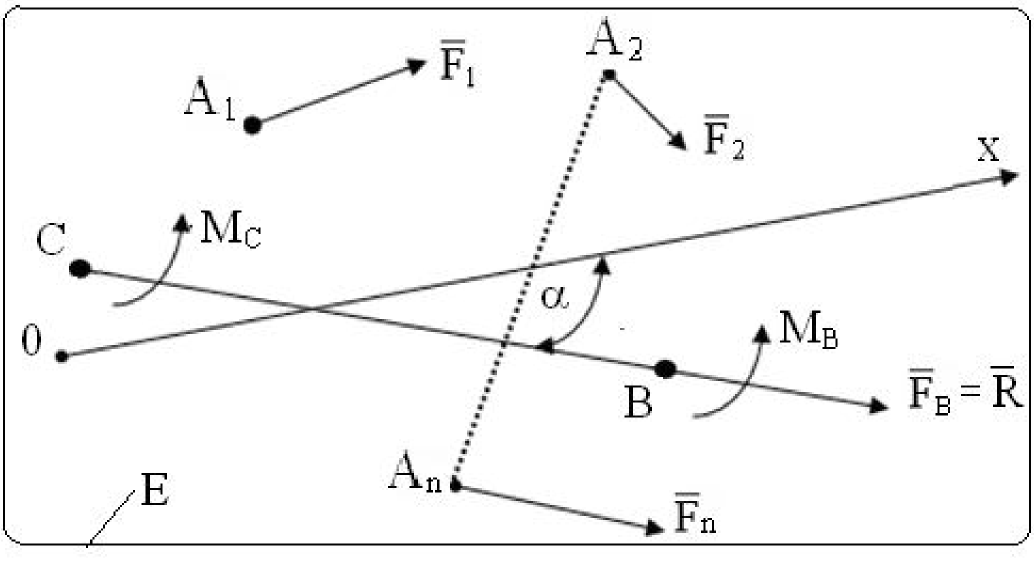


Рис. 6.3. До другой форми умов рівноваги

Необхідність цих умов очевидна, бо якщо будь-яка з умов не буде виконуватися, то або в точці B головний вектор системи $\overline{F}_B \neq 0$, або головний момент $\overline{M}_B \neq 0$ (чи $\overline{M}_C \neq 0$), і тоді рівноваги тіла не відбувається.

Достатність умов (6.5) доведемо наступним чином. Якщо виконуються тільки перші з двох умов (6.5), тобто $M_B = 0$ і $M_C = 0$, то така система сил може мати лише рівнодійну $\overline{R} = \overline{F}_B$ (рис. 6.3), лінія дії якої проходить через точки B і C. Оскільки вісь Ox проходить під кутом $\alpha \neq \pi/2$ до відрізка BC, то остання умова (6.5) може бути виконана тільки коли $F_{BX} = F_B \cdot \cos\alpha = R \cdot \cos\alpha = 0$, тобто коли $\overline{R} = \overline{F}_B = 0$. Це призводить до одночасного виконання всіх умов (6.5), що забезпечують рівновагу тіла безумовно.

Третя форма умов рівноваги (*The third form of equilibrium conditions*). Ця форма умов рівноваги формулюється таким чином: для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок, наприклад B, C, D, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю (рис. 6.4):

$$M_B = \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = 0;\ M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i) = 0;\ M_D = \sum_{i=1}^{n} M_D(\overline{F}_i) = 0, \qquad (6.6)$$

де B, C, D – точки приведення системи сил.

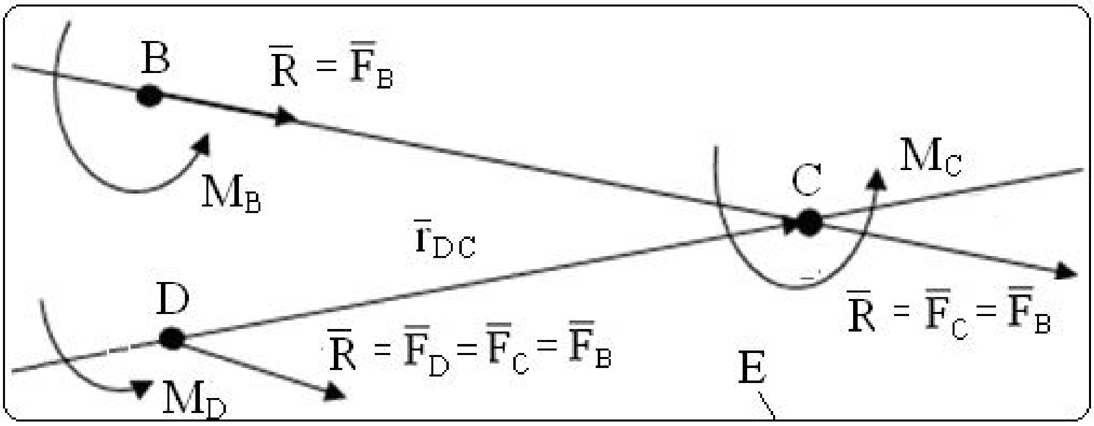


Рис. 6.4. До третій форми умов рівноваги

Необхідність цих умов, враховуючи (5.11), очевидна, бо при одночасному виконанні, наприклад, двох перших умов, головний момент системи при $\overline{r}_{DC} \neq 0$ може дорівнювати нулю у третій точці D ($\overline{M}_D = \overline{M}_C + \overline{r}_{DC} \times \overline{F}_B$) тільки коли головний вектор $\overline{F}_B$ системи сил дорівнює нулю. Тому, при одночасному виконанні умов (6.6), виконуються умови (6.1) рівноваги тіла і воно буде у рівновазі.

Достатність умов (6.6) випливає з того, що при їх виконанні система сил не знаходилася б у рівновазі тільки у випадку, коли її відмінна від нуля рівнодійна $\overline{R}$ проходила одночасно через всі три точки B, C, D площини E, що неможливо за визначенням.

ЛЕКЦІЯ 7. ТЕРТЯ КОВЗАННЯ І ТЕРТЯ КОЧЕННЯ
LECTURE 7. FRICTION OF SLIP AND FRICTION OF ROLLING

7.1. Закони тертя ковзання. The laws of sliding friction

Сили тертя виникають між поверхнями твердих тіл при їх взаємних рухах, між частинками рідини і газів при їх внутрішніх взаємодіях та при їх взаємодіях з поверхнями твердих тіл.

У теоретичній механіці розглядаються два види тертя твердих тіл: тертя ковзання і тертя кочення.

При намаганні перемістити одне тіло по поверхні другого в дотичній площині стичних поверхонь виникає сила тертя ковзання.

В 1781 році французький вчений Кулон експериментально встановив основні наближені *закони для сухого тертя ковзання при спокої* (*laws for dry friction slip at rest*). Закони Кулона можна встановити на приладі, схема якого показана на рис. 7.1. Для тіла A поверхня B є в’яззю. Якщо міняти вагу гир Q, то можна міняти силу, яка намагається рухати тіло A вздовж поверхні B. Якщо сила Q = 0, то тіло знаходиться в рівновазі і сила тертя $F_{тер} = 0$.

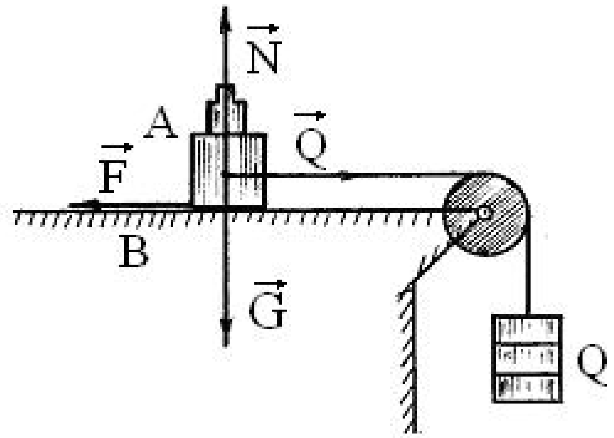


Рис. 7.1. Схема прилада

Якщо збільшувати силу Q (при цьому тіло A не переміщується по поверхні B, а знаходиться в рівновазі), то по умові рівноваги виникає сила тертя $\overline{F}$, яка дорівнює активній силі $\vec{Q}$ і протилежно їй спрямована. Збільшуючи силу $\vec{Q}$ при одному і тому ж нормальному тиску $\overline{G}$, можна досягти такого моменту, коли сила $\vec{Q}$ виведе тіло A з рівноваги і воно почне рухатись по в’язі B. Отже, буде досягнуто граничне положення, при якому сила тертя стане найбільшою і не зможе зрівноважити силу $\vec{Q}$ при її подальшому збільшенні. Міняючи силу нормального тиску (normal pressure force) $\vec{G}$, можна дослідити, як змінюється при цьому *гранична сила тертя* (*extreme force of friction*) F_{max}. Можна також дослідити вплив на граничну силу тертя площі стичних поверхонь, зберігаючи при цьому нормальний тиск, а також дослідити вплив матеріалу тіл, що стикаються, і інше.

Закони Кулона (*the Coulomb act*):

1. *Сила тертя ковзання* (*slip friction*) знаходиться в дотичній площині стичних поверхонь тіл і спрямована в протилежну сторону можливого переміщення тіла під дією активних сил. Величина сили тертя може змінюватись від нуля до максимального значення, при якому тіло починає рухатись $0 \le F \le F_{max}$.

The force of slip friction (slip friction) is in the tangent plane of the contact surfaces of the bodies and directed in the opposite direction of the possible movement of the body under the action of active forces. The magnitude of the friction force can vary from zero to the maximum at which the body begins to move $0 \le F \le F_{max}$.

2. *Максимальна сила тертя ковзання* (*maximum slip friction*) не залежить від площі стичних поверхонь.

The maximum slip friction does not depend on the surface area of the joint surfaces.

3. Максимальна сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску (нормальній реакції).

The maximum sliding friction force is proportional to the normal pressure (*normal reaction*).

$$F_{max} = f \cdot N, \tag{7.1}$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання, безрозмірна величина.

4.Коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалу і фізичного стану поверхні стичних тіл. Для абсолютно гладких тіл f = 0. Для реальних тіл він знаходиться в межах $0 \le f \le 1$.

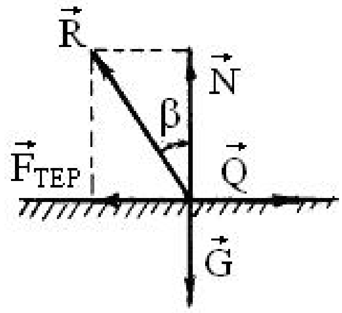
The sliding friction coefficient depends on the material and physical state of the surface of the contact bodies. For absolutely smooth bodies f = 0. For real bodies, it is within $0 \le f \le 1$.

Закон Кулона (7.1) справедливий і при ковзані одного тіла по поверхні другого з деякою відносною швидкістю. В наближених технічних розрахунках вважають, що коефіцієнт тертя не залежить від відносної швидкості ковзання

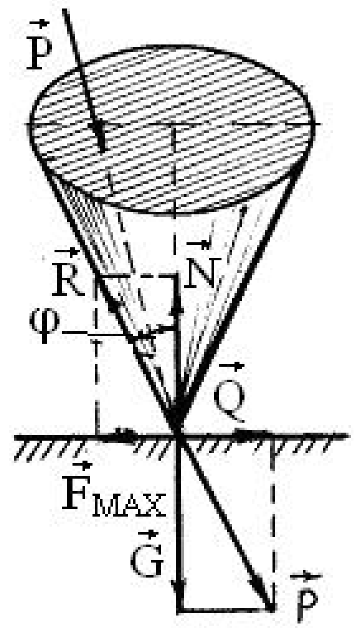
Повна реакція $\vec{R}$ *шорсткої поверхні* (*complete reaction of rough surface*) при наявності тертя визначається по величині і по напряму діагоналлю прямокутника, побудованого по *нормальній реакції* (*normal reaction*) $\overline{N}$ і *силі тертя* (*friction force*) $\overline{F}_{ÒÅÐ}$: $\overline{R} = \overline{N} + \overline{F}_{ÒÅÐ}$. (7.2)

Повна реакція $\overline{R}$ відхилена від нормалі до опорної поверхні на кут β в сторону, протилежну зсувній силі $\overline{Q}$ (рис. 7.2, а).

З збільшенням зсувної сили $\overline{Q}$ (тобто одночасно з збільшенням сили тертя $\overline{F}_{ÒÅÐ}$) повна реакція $\overline{R}$ все більш відхиляється від нормалі, досягаючи найбільшого відхилу, коли $\overline{F}_{ÒÅÐ}$ стане рівною $\overline{F}_{MAX}$. Найбільше значення кута відхилу β повної реакції $\vec{R}$ від нормалі називається *кутом тертя* (*angle of friction*) φ. З рис. 7.2, б і формули (7.1) маємо $tg\varphi = F_{max}/n = f$.



а)



б)

Рис. 7.2

Чим менший коефіцієнт тертя ковзання f, тим менший кут тертя φ; коли f = 0, то і φ = 0. В цьому ідеальному випадку поверхні стичних тіл називаються абсолютно гладкими. Реакція абсолютно гладкої поверхні спрямована по нормалі до цієї поверхні. Конус з вершиною в точці дотику тіл, твірна якого складає кут тертя з нормаллю до поверхні, називається *конусом тертя* (*friction cone*) (рис. 7.2, б).

Якщо коефіцієнт тертя ковзання в спокої при ковзанні тіла по поверхні, яка є в'яззю, в різних напрямах один і той же, то реакція $\overline{R}_{max}$ цієї в'язі відхиляється від нормальної реакції $\vec{N}$ у всіх напрямах на однаковий кут тертя φ, і конус тертя буде круглим з кутом при вершині, рівним 2φ.

Використовуючи конус тертя, можна сформулювати умову рівноваги тіла на шорсткій поверхні.

Якщо активні сили, що діють на тіло, приводяться до рівнодійної активних сил $\overline{P}$, то при рівновазі тіла на шорсткій поверхні рівнодійна активних сил $\overline{P}$ по аксіомі про рівновагу двох сил, прикладених до твердого тіла, врівноважується повною реакцією $\overline{R}$ шорсткої поверхні (рис. 7.2, б).

Повна реакція проходить через вершину конуса, а це означає, що і лінія дії рівнодійної активних сил проходить через вершину конуса.

Тепер можна зробити висновок: люба активна сила $\overline{P}$, яка проходить через вершину конуса тертя і знаходиться в ньому, не може визивати рух тіла по шорсткій поверхні. Є багато експериментальних методів знаходження коефіцієнта тертя ковзання. Приведемо для ілюстрації один з цих методів (рис. 7.3). Рухома площина AB може обертатись навколо шарніра A, змінючи кут нахилу α.

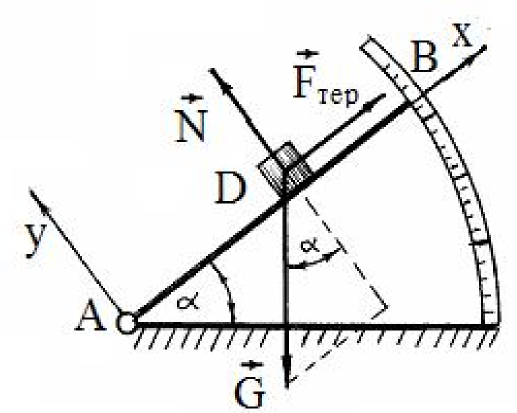


Рис. 7.3. Знаходження коефіцієнта тертя ковзання

Нехай треба знайти коефіцієнт тертя ковзання між тілом D і похилою площиною AB. Будемо збільшувати кут α до тих пір, поки не виведемо тіло D з рівноваги. Зафіксуємо цей кут α.

Запишемо рівняння рівноваги тіла D.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0; \quad F_{TEP} - G\sin\alpha = 0. \qquad (7.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0; \quad N - G\cos\alpha = 0. \qquad (7.4)$$

Допишемо сюди формулу (7.1) $F_{TEP} = f \cdot N.$ (7.5)

З виразу (7.4) $N = G\cos\alpha$, з виразу (7.5) $F_{TEP} = f \cdot G\cos\alpha$.

Підставимо силу F_{TEP} в (7.1) : $Gf\cos\alpha - G\sin\alpha = 0$. Маємо $f = tg\alpha$.

Так як кут α відомий, то можна знайти значення *коефіцієнта тертя ковзання* (*friction coefficient of slip*).

7.2. Тертя кочення. Roll rolling

Тертя кочення (*rolling friction*) виникає тоді, коли одне тіло котиться по поверхні другого (рис. 7.4). Нехай циліндричний коток вагою $\vec{G}$ радіуса r знаходиться на горизонтальній площині. До центра С катка прикладена активна сила $\overline{Q}$. Під дією катка опорна поверхня деформується і точка прикладання нормальної реакції $\vec{N}$ і сили тертя $\overline{F}_{\text{ÒÅÐ}}$ з точки В переміщується в деяку точку А (рис.6.4).

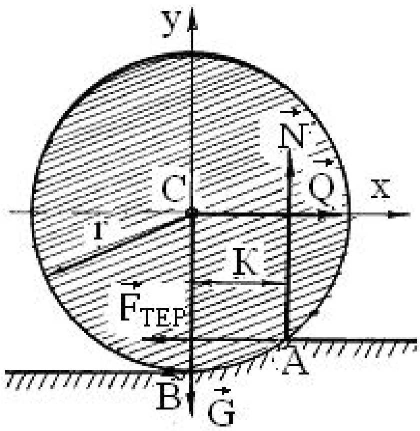


Рис. 7.4

Складемо рівняння рівноваги котка

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0; \quad Q - F_{ТЕР} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0; \quad N - G = 0.$$

Звідки маємо: $F_{ТЕР} = Q;\ N = G$.

Отримали дві пари сил: перша пара $(\vec{Q}, \overline{F}_{\text{ÒÅÐ}})$ намагається привести коток в рух, а друга пара $(\overline{N}, \overline{G})$ протидіє цьому руху.

Момент протидіючої пари називається *моментом опору при коченні* (*moment of resistance during rolling*) $M_к$ і дорівнює добутку сили N на плече пари к.

$$M_к = k \cdot N. \tag{7.6}$$

Коефіцієнт к називається *коефіцієнтом тертя кочення* (*coefficient of rolling friction*). Він має розмірність довжини. Коефіцієнт k показує, на який відрізок зміщується нормальна реакція $\vec{N}$ при коченні в граничному випадку рівноваги.

Коефіцієнт тертя кочення знаходиться експериментально і залежить від властивостей даної пари стичних поверхонь.

Аналітичний метод розв'язування задач статики з урахуванням сил тертя залишається таким самим, як і в тих випадках, коли тертя не враховується. Різниця тільки в тому, що в рівняннях рівноваги з'являються, крім нормальних реакцій, сили тертя. При цьому максимальне значення сили тертя ковзання знаходиться по формулі $F_{max} = f \cdot N$, а при коченні максимальний момент опору $M_к = K \cdot N$.

ЛЕКЦІЯ 8. РОЗРАХУНОК ПЛОСКОЇ ФЕРМИ LECTURE 8. CALCULATION OF A FLAT FARM

8.1. Основні визначення і припущення Basic definitions and assumptions

Фермою (*farm*) називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних брусів, з'єднаних між собою шарнірами, і служить для сприйняття зовнішніх навантажень і передачі їх на опори.

A farm is called a geometrically invariable structure, consisting of rectilinear beams interconnected by hinges and used to perceive external loads and transfer them to supports.

Ферми являють собою досить розповсюджені складові частини промислових і цивільних споруд. Їх використовують як опори трубопроводів і ліній електропередач (рис. 8.1), радіовежі (рис. 8.2), конструкції кранів, елементи великих прольотів будівельних та спортивних споруд, елементи мостів (рис. 8.3, 8.4, 8.5) та ін.

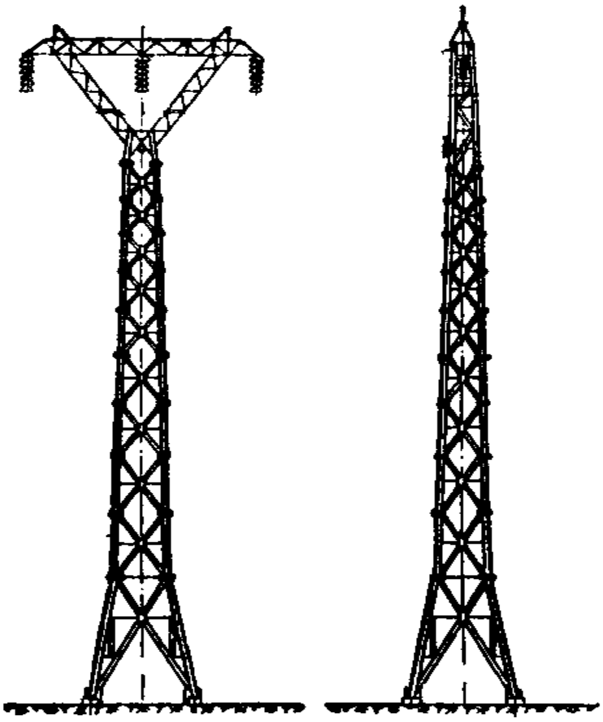


Рис. 8.1. Опори ЛЕП

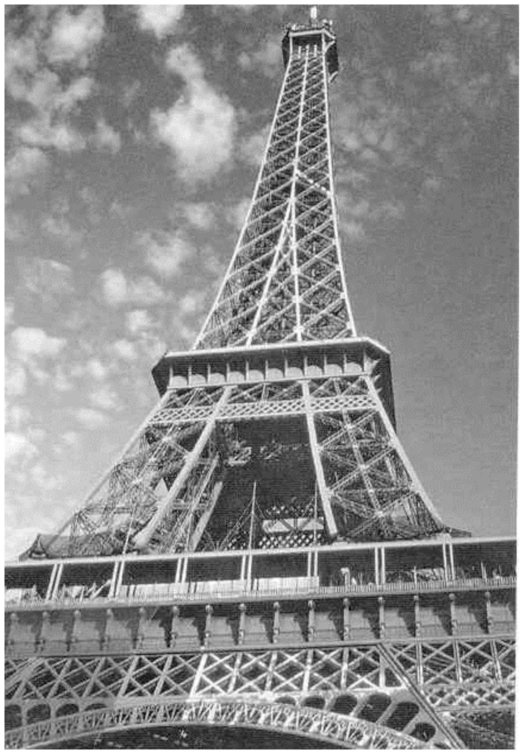


Рис. 8.2. Ейфелева вежа (Париж, Франція)

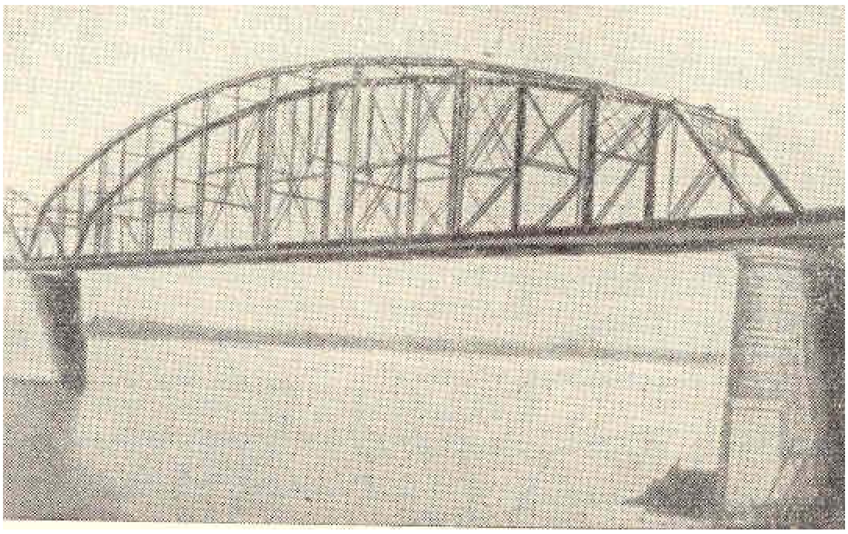


Рис. 8.3. Мостова ферма

Якщо всі *стрижні ферми* (*rod farm*) розташовані в одній площині, ферму називають плоскою. З'єднання стрижнів ферми між собою називається *вузлами* (*knots*). Якщо зовнішні сили прикладені тільки до *шарнірів* (*hinges*), то ферма називається *стрижневою* (*rod farm*), а її бруси-*стрижнями* (*bars-rods*).

Якщо зовнішні сили прикладені не тільки до шарнірів, а і до точок самих стрижнів, то така ферма називається *балочною* (*farm beam*), а бруси її – балками.

Балки балочної ферми крім розтягу – стиску зазнають ще і згин.

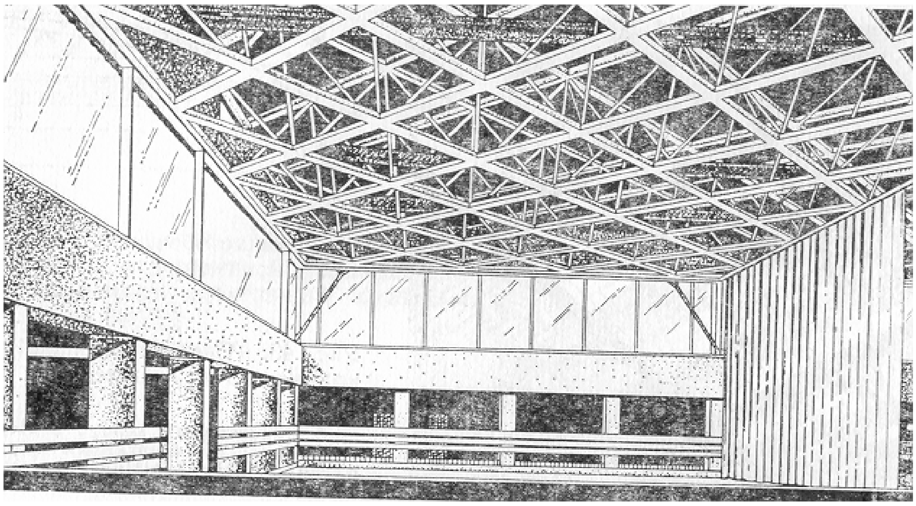
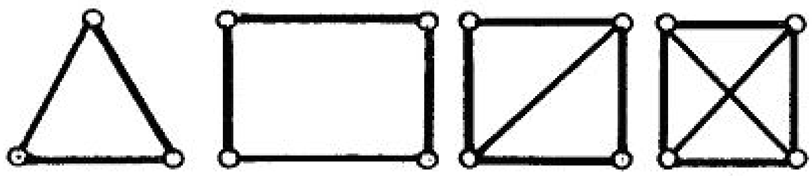


Рис. 8.4. Елемент даху спортивного залу в Парижі (Франція)

Рис. 8.5. Залізничний міст в Единбурзі (Шотландія)

Плоскою називається ферма (*flat farm*), бруси якої розміщені в одній площині. Ми будемо розглядати тільки *плоскі стрижневі ферми* (*flat rod frames*). Точка, де стрижні з'єднуються шарнірами, називається вузлом. Не всяке шарнірне з'єднання стрижнів є фермою. По означенню ферма повинна забезпечувати незмінність її форми (жорсткість). Самою простою фермою є *стрижневий трикутник* (*rod triangle*) (рис. 8.6, а). Якщо з'єднати чотири стрижні шарнірами (рис. 8.6, б), то таке шарнірне з'єднання під дією прикладених в вузлах сил буде змінювати свою форму і не являється фермою. Таке з'єднання в механіці називається *механізмом* (*mechanism*).



а) б) в) г)

Рис. 8.6. Види ферм

Щоб прямокутник зробити фермою, достатньо з'єднати дві протилежні вершини стрижнем (рис. 8.6, в). На рис. 8.6, г прямокутник також являється фермою. Між останніми фермами є різниця: ферма на рис. 8.6, в не має зайвого стрижня, а ферма на рис. 8.6, г має один зайвий стрижень. Якщо з ферми неможливо зняти ні одного стрижні, не змінивши її жорсткості, то таку ферму називають *фермою без зайвих стрижнів* (*farmwithout extra rods*). Ми будемо розглядати ферми без зайвих стрижнів.

Основним завданням розрахунку ферми є визначення зусиль, що виникають у стрижнях при дії зовнішнього навантаження.

The main task of the farm calculation is to determine the forces arising in the cores under the action of external loading.

При цьому розрахунки виконують при наступних припущеннях:

- усі зовнішні навантаження прикладені тільки у вузлах;
- вагою стрижнів і тертям у вузлах, які є ідеальними шарнірами, нехтують.

Тоді на підставі першої аксіоми статики можна вважати, що стиржні ферми працюють тільки на розтяг або стиск.

Наведені припущення вносять певну похибку в розрахунки у порівнянні з дійсним напруженим станом стрижнів, але ця похибка невелика і отримані результати можна використовувати для технічних розрахунків елементів ферми на міцність.

Найпростішим прикладом ферми є система трьох стрижнів, з'єднаних між собою шарнірами (рис. 8.7).

Простою плоскою фермою (simple flat farm) називається ферма, яка може бути побудована з трикутної шляхом послідовного приєднання кожного нового вузла за допомогою двох нових стрижнів (рис. 8.8).

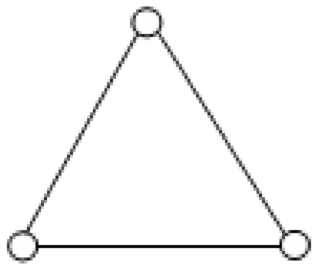


Рис. 8.7

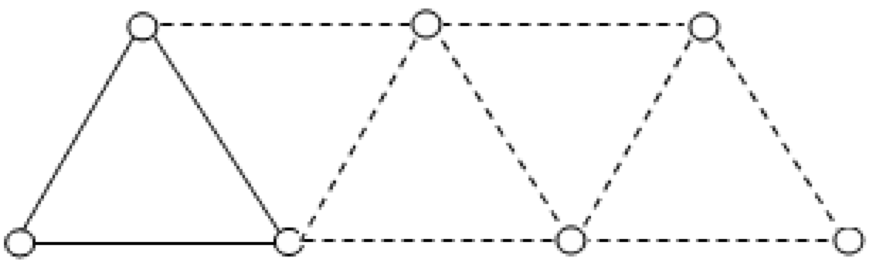


Рис. 8.8. Приклади ферм

Розглянемо зв'язок між кількістю вузлів n і кількістю стрижнів k у простих фермах. Основний трикутник (рис. 8.7) має три вузли і три стрижні.

Для незмінного з'єднання з основним трикутником кожного з решти n-3 вузлів потрібно приєднати два стрижні. Отже, загальна кількість стрижнів (total number of rods) у простої ферми з урахуванням трьох стрижнів основного трикутника визначається так:

$$k = 2(n-3) + 3 = 2n - 3 \,. \qquad (8.1)$$

Покажемо, що проста ферма статично означена, якщо число опорних реакцій дорівнює трьом. Дійсно, для кожного вузла можна скласти два рівняння рівноваги, оскільки на нього діє збіжна система сил.

Таким чином, усього можна скласти 2n рівнянь рівноваги. У ці рівняння будуть входити k невідомих зусиль у стрижнях і три реакції опор.

З урахуванням формули (8.1) загальне число невідомих буде:

$$k + 3 = 2n - 3 + 3 = 2n \,,$$

тобто дорівнюватиме числу рівнянь рівноваги. Таким чином, задачу розрахунку простих ферм можна розв'язати методами теоретичної механіки.

Зазначимо, що якщо число стрижнів k менше, ніж підраховане за формулою (8.1), то така конструкція буде механізмом, тобто матиме можливість рухатися. Якщо число стрижнів більше, ніж підраховане за формулою (8.1), або число опорних реакцій більше трьох, ферма буде статично неозначена і для її розрахунку треба застосувати методи будівельної механіки.

Зробити розрахунок ферми – це знайти реакції опор і зусилля в усіх стрижнях ферми. При цьому повинні виконуватись такі умови:

To make a farm calculation is to find the reactions of supports and efforts in all the cores of the farm. The following conditions must be met:

а) всі стрижні ферми невагомі і прямолінійні;

a) *all core farms are weightless and straight*;

б) тертя в шарнірах відсутнє;

b) *there is no friction in the hinges*;

в) навантаження, які діють на ферму, лежать в її площині і прикладені тільки в вузлах.

c) *the loads acting on the farm lie in its plane and are applied only at the nodes.*

При виконанні таких умов стрижні ферми будуть зазнавати тільки стиск або розтяг.

8. 2. Порядок розрахунку простої ферми
The procedure for calculating a simple farm

1. Спочатку складають три рівняння рівноваги для визначення реакцій опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій бажано скласти перевірочне рівняння.

Формально умови рівноваги вузлів ферми включають у себе умови рівноваги ферми в цілому, тобто дають змогу знайти і реакції опор.
Але попереднє визначення опорних реакцій суттєво спрощує розв'язання задачі.

2. Далі визначають зусилля у стрижнях ферми.

Звичайно використовують два способи: вирізання вузлів і Ріттера.

а) *спосіб вирізання вузлів* (*way to cut knots*). Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в усіх стрижнях ферми.
Він зводиться до послідовного розгляду умов рівноваги збіжних систем сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох.

Для визначеності припускають, що всі зусилля направлені від вузла, тобто стрижні розтягнуті. Якщо в результаті розрахунків значення зусилля буде від'ємним, то це означатиме, що стрижень стиснутий.

Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки.

Зусилля в окремих стрижнях можуть виявитись нульовими, тобто стрижні будуть ненавантаженими. Такі стрижні можна визначити за допомогою кількох лем.

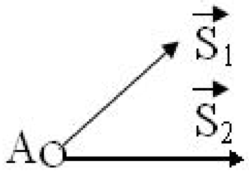


Рис. 8.9. До леми 1

Лема 1 (*Lemah 1*). Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються два стрижні (рис. 8.9), то зусилля в цих стрижнях дорівнюватимуть нулю, тобто $S_1 = 0$ і $S_2 = 0$.

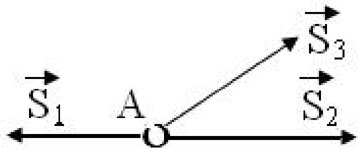


Рис. 8.10. До леми 2

Лема 2 (*Lemah 2*). Якщо в ненавантаженому вузлі ферми збігаються три стрижні (рис. 8.10), з яких два розташовані на одній прямій, то зусилля у третьому стрижні дорівнює нулю $S_3 = 0$.

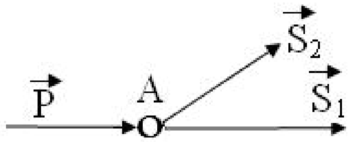


Рис. 8.11. До леми 3

Лема 3 (*Lemah 3*). Якщо до вузла, в якому збігаються два стрижні, прикладена зовнішня сила $\overline{P}$ у напрямку одного з стрижнів (рис. 8.11), то зусилля у другому стрижні дорівнює нулю $S_2 = 0$.

б) спосіб Ріттера (*Ritter's way*). Цим способом зручно користуватись, коли треба знайти зусилля в окремих стрижнях ферми, зокрема, для перевірочних розрахунків. Згідно з цим способом ферму розподіляють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стрижні, і розглядають рівновагу однієї з частин.

Зусилля в перерізаних стрижнях направляють від перерізу, тобто припускають (як і в способі вирізання вузлів), що всі стрижні розтягнуті.

Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стрижня, через який пройшов переріз. Для цього складають рівняння моментів відносно точки площини (цю точку називають точкою Ріттера), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стрижнів, які потрапили в переріз. Якщо два інших стрижні перерізу виявляються паралельними, то складають рівняння проекцій сил на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стрижнів.

Таким чином, спосіб Ріттера дає змогу визначить зусилля в будь-якому стрижні ферми незалежно від зусиль в інших стрижнях.

Thus, the Ritter method allows you to determine the effort in any rod of the farm, regardless of the effort in other rods.

Аналізуючи вищеназвані способи визначення зусиль у стрижнях, зазначимо, що зусилля способом вирізання вузлів визначають послідовно, переходячи від одного вузла до сусіднього. Це може призвести до накопичення похибок, тому бажано значення знайдених зусиль при розгляді наступних вузлів брати якомога точнішими.

Крім того, помилка у визначенні одного зусилля призведе до неправильних розрахунків усіх інших стрижнів, що залишились.

Спосіб Ріхтера, на відміну від попереднього, не призводить до накопичення похибок, бо всі зусилля визначаються незалежно одне від одного. Але одночасно це не дає можливості помітити грубі помилки, що можуть трапитись при обчисленні.

У деяких фермах також не всі зусилля можуть бути визначені способом Ріттера незалежно одне від одного.

Таким чином, найкраща методика визначення зусиль у стрижнях ферми полягає в поєднанні способів вирізання вузлів і Ріттера. При цьому всі зусилля визначаються за способом вирізання вузлів і деякі з них перевіряють способом Ріттера.

ЛЕКЦІЯ 9. ЦЕНТР ПАРАЛЕЛЬНИХ СИЛ І ЦЕНТР ТЯЖІННЯ
LECTURE 9. THE CENTER OF PARALLEL FORCES AND THE CENTER OF HEAVY AGE

9.1.Окремі випадки зведення просторової системи паралельних сил
Separate cases of the construction of a spatial system of parallel forces

Нехай в просторі діє n паралельних сил (parallel forces) (рис 9.1). Візьмемо за центр зведення точку O. Введемо одиничний орт (unit ort) $\vec{e}$, який паралельний силам. Тоді силу можна записати $\vec{F}_k = F_{k\vec{e}}$, де F_k – модуль сили (power module).

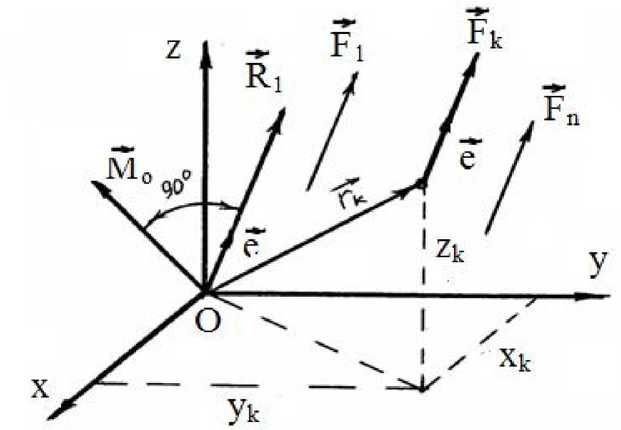


Рис. 9.1.

Головний вектор (*main vector*)

$$\vec{R}^1 = \sum_{\hat{e}=1}^{n} \vec{F}_k = (\sum_{\hat{e}=1}^{n} F_{k\vec{e}}).$$

Головний момент(*the main point*)

$$\vec{M}o = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_{\hat{e}} \times \vec{F}_{\hat{e}}).$$

Головний вектор і головний момент можна записати в такому вигляді:

$$\vec{R}^1 = R^1 \cdot \vec{e}, \quad \vec{M}o = (\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot r_k) x \bar{e}.$$

Із означення векторного добутку видно, що векторний момент $\vec{M}o \perp \vec{e}$.

Виясниmo, чи приводиться система паралельних сил до динамічного гвинта.

Розглянемо скалярний добуток $\vec{R}^1$.

$$\vec{M}o = (R^1 \cdot \vec{e}) \cdot \vec{M}o = R^1 \cdot Mo \cdot \cos 90^o = 0.$$

Система паралельних сил не зводиться до динамічного гвинта.

З цього можна зробити висновок: просторова система паралельних сил зводиться або до рівнодійної $(\vec{R}^1 \neq 0)$, або до пари сил $(\vec{R}^1 = 0, \vec{M}o \neq 0)$, або знаходиться в рівновазі $(\vec{R}^1 = 0, \vec{M}o = 0)$.

9.2. Центр паралельних сил. Center of parallel forces

Розглянемо дві паралельні сили $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, направлені в один бік (рис. 9.2). Згідно з п. 4.4.1 така система сил зводиться до рівнодійної $\overline{R}$. При цьому виконуються співвідношення:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2; \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{CA}. \tag{9.1}$$

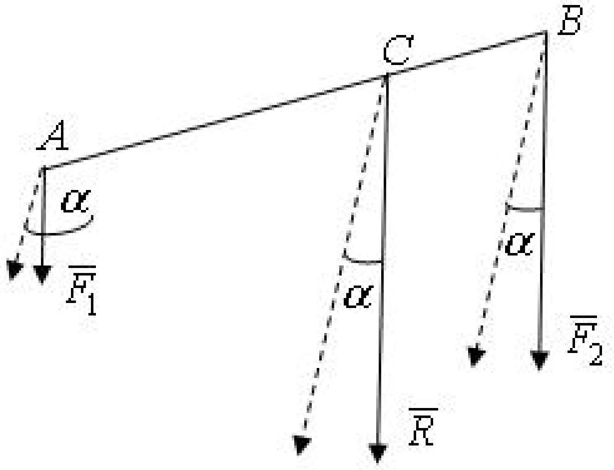


Рис. 9.2

Якщо сили $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ повернути на однаковий кут α навколо точок їх прикладання A і B, то рівнодійна $\overline{R}$ повернеться на той самий кут навколо точки C, оскільки співвідношення (9.2) не зміняться. Такі ж міркування можна привести і для двох паралельних сил, направлених у різні боки. Точка C, через яку проходить лінія дії рівнодійної системи паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо точок їх прикладання на однаковий кут, називається *центром паралельних сил* (*the center of parallel forces*).

У яких випадках існує така точка C і як знайти їх координати? На це запитання дає відповідь теорема про *центр паралельних сил*.

Теорема. Якщо головний вектор системи паралельних сил не дорівнює нулю, то центр паралельних сил (точка C) існує і його положення визначається за формулою

T*heorem. If the main vector of the system of parallel forces does not equal zero, then the center of parallel forces (point C) exists and its position is determined by the formula*

$$\overline{r}_c = \sum_{k=1}^{n} F_k^* \overline{r}_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} F_k^*, \tag{9.2}$$

де $\overline{r}_k$ – радіуси-вектори точок прикладання сил; $\overline{r}_c$ – радіус-вектор центра паралельних сил; F_k^* – модулі паралельних сил, які відрізняються знаком для сил, направлених у різні боки.

Доведення. Розглянемо систему n паралельних сил $(\overline{F}_1,...,\overline{F}_n)$. Якщо її головний вектор не дорівнює нулю, то, як показано у п. 5.4.4.3, така система паралельних сил зводиться до рівнодійної $\overline{R}$. Нехай точка O_1-це якась точка лінії дії цієї рівнодійної (рис. 9.3), $\overline{r}, \overline{r}_k$ - відповідно радіуси-вектори точки O_1 і тси $\overline{F}_k$ відносно вибраного центра O.

Згідно з теоремою Варіньона про момент рівнодійної (п. 5.6), отримаємо

$$\overline{M}_O(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k) \text{ або}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_O(\overline{F}_k) - \overline{M}_O(\overline{R}) = 0,$$

або $$\sum_{k=1}^{n} (\overline{r}_k - \overline{r}) \times \overline{F}_k = 0. \qquad (9.3)$$

Рівність (9.3) запишемо у наступній формі

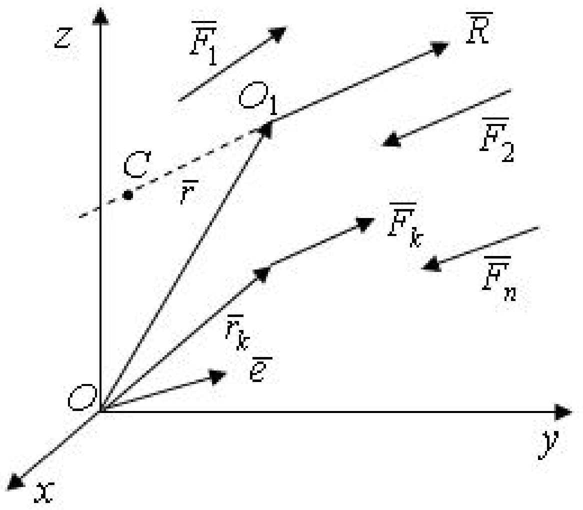


Рис. 9.3

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{r} \times \overline{F}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k - \overline{r} \times \sum \overline{F} /_k = 0. \qquad (9.4)$$

Введемо у розгляд одиничний вектор $\overline{e}$, паралельний лініям дії сил $\overline{F}_k$. Тоді кожна із заданої системи сил може бути виражена через вектор $\overline{e}$:

$$\overline{F}_k = F_k^* \overline{e}, \qquad (9.5)$$

де $F_k^* = F_k$, якщо напрями векторів $\overline{F}_k$ и $\overline{e}$ збігаються, і $F_k^* = -F_k$, якщо ці напрями протилежні. При цьому очевидно, що

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = \overline{e} \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^*. \qquad (9.6)$$

Підставляючи (9.5) і (9.6) у рівняння (9.4), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times F_k^* \overline{e} - \overline{r} \times \overline{e} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0 \text{ або } \left[\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k F_k^* - \overline{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^* \right] \times \overline{e} = 0.$$

Остання рівність виконується при будь-якому напрямі сил (напрямі вектора $\overline{e}$) тільки за умовою, що перший множник дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k F_k^* - \overline{r} \sum_{k=1}^{n} F_k^* = 0. \qquad (9.7)$$

Ця рівність має єдиний розв’язок відносно радіуса-вектора $\overline{r}$, який визначає точку прикладання рівнодійної. Такою точкою і є центр паралельних сил, чим доводиться його існування. Позначимо радіус-вектор центра паралельних сил як $\overline{r}_c$. Тоді з рівняння (9.7) отримаємо вираз:

$$\bar{r}_c = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k F_k^* / \sum_{k=1}^{n} F_k^*.$$

Теорему доведено.

Центром паралельних сил називається точка на лінії дії рівнодійної цих сил, яка не змінює свого місцезнаходження при одночасному повороті всіх сил на один і той же кут навколо точок прикладання сил.

Center of parallel forces is called a point on the line of action of the equivalent of these forces, which does not change its location while simultaneously rotating all forces at the same angle around the points of application of forces.

Формулу (9.2) можна подати у скалярній формі:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k F_k^*}{\sum_{k=1}^{n} F_k^*}. \tag{9.9}$$

де x_c, y_c, z_c, x_k, y_k, z_k – відповідно декартові координати центра С паралельних сил і точок прикладання сил $\bar{F}_k$.

Вирази $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot F_k^*$, $\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot F_k^*$, $\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot F_k^*$ у формулах (9.9) називаються відповідно *статичними моментами* (*static moments*) заданої системи сил відносно координатних площин yOz, xOz, xOy. Зазначимо, що коли початок координат сумістити з центром паралельних сил, то $x_c = y_c = z_c = 0$ і статичні моменти заданої системи сил дорівнюватимуть нулю.

9.3. Центр ваги твердого тіла. Solid Weight Center

Розглянемо тверде тіло, яке знаходиться в полі сил тяжіння. Якщо розмірами тіла можна знехтувати порівняно з розмірами Землі, то можна вважати, що на частки цього тіла діють сили ваги $\bar{P}_k$, які складають систему паралельних сил (рис. 9.4). Центром ваги твердого тіла називається центр ваги паралельних сил.

Для центра ваги тіла формула (9.9) набудуть вигляду:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P_k}{P};, y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot P_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot P_k}{P}, \tag{9.10}$$

де P – сила ваги (тіла), $P = \sum_{k=1}^{n} P_k$; x_k, y_k, z_k – координати точки прикладання сили ваги $\bar{P}_k$ окремої частини тіла.

1. Центр ваги однорідного твердого тіла. Center of gravity of homogeneous solid body. Якщо тіло однорідне, то вага кожної частки тіла пропорційна його об'єму:

$$P_k = \gamma_1 \cdot V_k, \qquad (9.11)$$

де V_k – об'єм елементарної частки тіла; γ_1 – вага одиниці об'єму тіла.

Підставивши (9.11) у (9.10), отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \gamma_1 \cdot V_k}{\gamma_1 V} =$$

$$= \frac{\gamma_1 \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot V_k}{\gamma_1 V} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot V_k}{V};$$

$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot V_k}{V}; \; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot V_k}{V}, \qquad (9.12)$$

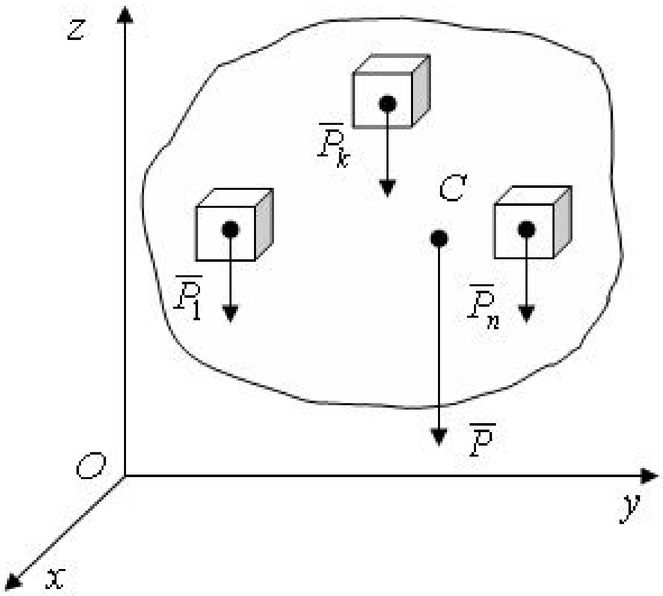


Рис. 9.4. Центр ваги твердого тіла

де V – об'єм тіла, V = $\sum_{k=1}^{n} V_k$.

Із формул (9.12) видно, що положення центра ваги однорідного тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів тіла. Тому точку С, яка визначається за формулами (9.12), називають *центом ваги об'єму тіла* (*center body weight*).

2. Центр ваги однорідної пластини. Center of gravity of the homogeneous plate. *Пластиною* (рис. 9.5) називають плоске тіло, один розмір якого (товщина) набагато менше двох інших (довжини і ширини):

A plate (*fig.* 9.5) *is called a flat body whose size (thickness) is much smaller than the other two (length and width*):

$$P_k = \gamma_2 S_k. \quad (9.13)$$

Тут S_k – площа елементарної частки пластини; γ_2 – вага одиниці площі.

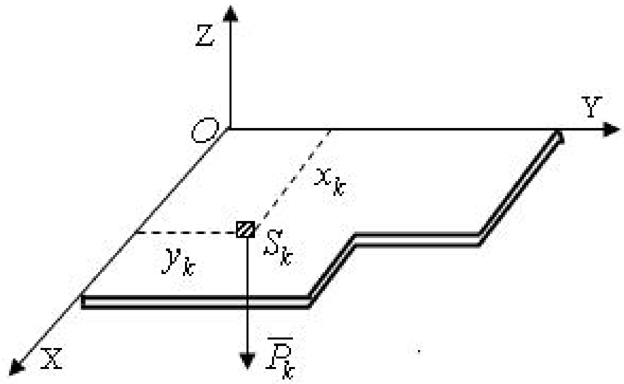


Рис. 9.5. Центр ваги однорідної пластини

Підставивши (9.13) у (9.10) і вважаючи, що координатна площина xOy збігається з площиною пластини, отримаємо:

$$x_C = \frac{\sum_{K=1}^{N} x_k \cdot P_k}{P} = \frac{\sum_{K=1}^{N} x_k \cdot \gamma_2 \cdot S_k}{\gamma_2 \cdot S_k} = \frac{\gamma_2 \cdot \sum_{K=1}^{N} x_k \cdot S_k}{\gamma_2 \cdot S_k} = \frac{\sum_{K=1}^{N} x_k \cdot S_k}{S_k};$$

$$y_c = \frac{\sum_{K=1}^{N} y_k \cdot S_k}{S_k}. \qquad (9.14)$$

де S – площа пластини, $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$. Точку C, координати якої визначаються за формулами (9.14), називають *центром ваги площі* (*the center of gravity of the area*).

Вирази у чисельниках формулах (9.14) називають відповідно *статичними моментами площі* (*static moment of area*) S_y і S_x відносно осей x і y: $S_y = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot S_k = x_c \cdot S; \quad S_x = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot S_k = y_c \cdot S.$ (9.15)

3. Центр ваги однорідного стрижня. Center of gravity of a homogeneous rod. Стрижнем називають тіло, один розмір якого (довжина) набагато більше двох інших. У цьому випадку вага елементарної частки тіла пропорційна її довжині (рис. 9.6): $P_k = \gamma_3 \cdot l_k,$ (9.16)

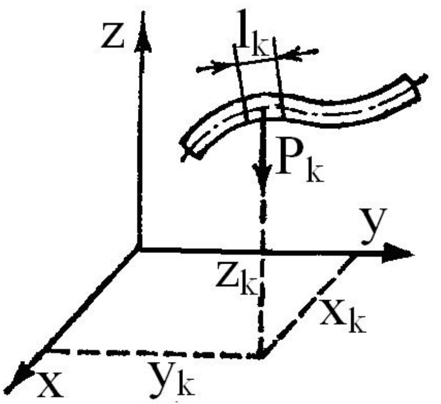


Рис. 9.6. Центр ваги однорідного стрижня

де l_k – довжина елементарної частки стрижня; γ_3 – вага одиниці довжини.

Підставивши (9.16) у (9.10), отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P_k}{P} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \gamma_3 \cdot l_k}{\gamma_3 L} = \frac{\gamma_3 \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot l_k}{\gamma_3 L} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot l_k}{L}; y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot l_k}{L}; z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot l_k}{L}. \qquad (9.17)$$

де $L = \sum_{k=1}^{n} l_k$ - довжина стрижня (*the length of the rod*).

Точку C, координати якої визначаються за формулами (9.17), називають *центром ваги лінії* (*center of gravity line*).

4. Центр ваги тіла. The center of gravity of body. Всі тіла, які знаходяться на Землі, зазнають дію сили ваги, яка напрямлена до центра Землі (рис. 9.7). Ці сили, як видно з рисунка, не паралельні. Будемо розглядати тіла, розміри яких набагато менші розмірів поверхні Землі. Тоді можна ввести гіпотезу про паралельність сил тяжиння (див. рис. 9.7).

Рівнодійна сил ваги, прикладених до всіх частин тіла, називається силою ваги, її модуль-вагою тіла, а центр цих сил-центром ваги тіла. Центр ваги твердого тіла-центр паралельних сил ваги, які діють на всі частини тіла.

Для знаходження центра ваги тіла можна використати формулу (9.2) для центра паралельних сил, де $F_k = G_k$.

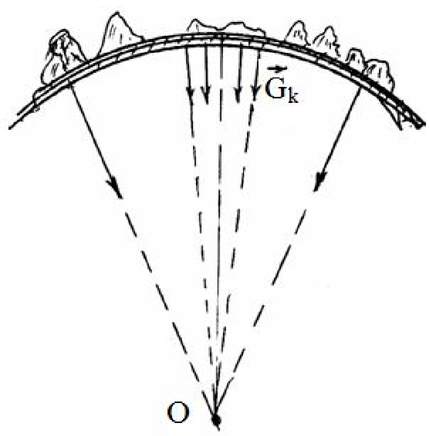


Рис. 9.7. Центр ваги тіла

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k \cdot x_k}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k \cdot y_k}{G},$$

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k \cdot z_k}{G}, \qquad (9.18)$$

де G_k – вага окремих частин тіла; x_k, y_k, z_k – координати k-го елемента тіла; G – вага тіла.

5. Центр мас. Center of masses. Якщо позначити масу тіла через M, а маси окремих його частин- через m_1, $m_2, \ldots, m_n$, то будемо мати

$G = Mg$, $G_k = m_k g$ (k=1, 2, …, n),

де g – прискорення вільного падіння.

Підставивши ці значення в (9.3), отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k}{M}. \qquad (9.19)$$

Точка, координати якої знаходяться по формулам (9.4), називається центром маси або центром інерції тіла.

Положення центра маси залежить тільки від розподілу маси в тілі і є однією із характеристик цього розподілу.

В той час як поняття про центр тяжіння має зміст тільки для тіла, яке розміщене в однорідному полі сили тяжіння, поняття центра маси не пов'язане з поняттям про силове поле, і в цьому розумінні є більш загальним.

6. Центр ваги об'єму. Center of gravity of volume.

Розіб'ємо тіло на n достатньо малих об'ємних елементів. Позначи-мо координати довільної точки, яка лежить в границях k-го елемента через x_k, y_k, z_k (рис. 9.8). Якщо об'ємне тіло однорідне, то

$G_k = g \cdot \gamma . V_k$, $G = g \cdot \gamma \cdot V$,

де γ – об'ємна густина тіла, γ=const. Тоді із формули (9.3) маємо:

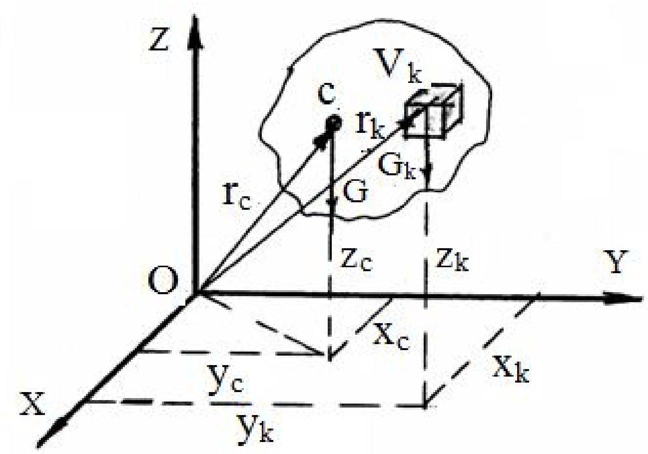


Рис. 9.8. Центр ваги об'єму

$$x_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k \cdot x_k}{V}; \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k \cdot y_k}{V};$$

$$z_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k \cdot z_k}{V}, \qquad (9.20)$$

де V – об'єм тіла.

Із формули (9.5) видно, що положення центра тяжіння тіла залежить тільки від геометричної форми і розмірів твердого тіла. Тому центр тяжіння однорідного твердого тіла можна назвати центром об'єма тіла. Якщо тіло складної форми, то в виразі (9.5) суми, що знаходяться в чисельнику, доцільно замінити інтегральними сумами:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(V)} xd \cdot V}{V}; \; y_c = \frac{\int\limits_{(V)} y \cdot dV}{V}; \; z_c = \frac{\int\limits_{(V)} z \cdot dV}{V}. \qquad (9.21)$$

Тут x, y, z – координати елементарного об'єму dv.

7. Центр ваги однорідної оболонки. **Center of gravity of a homogeneous shell**. Для однорідної оболонки (поверхнева густина γ=const) (рис. 9.9): $G_k = g \cdot \gamma \cdot S_k$, $G = g \cdot \gamma \cdot S$. Тоді із формули (9.3) маємо:

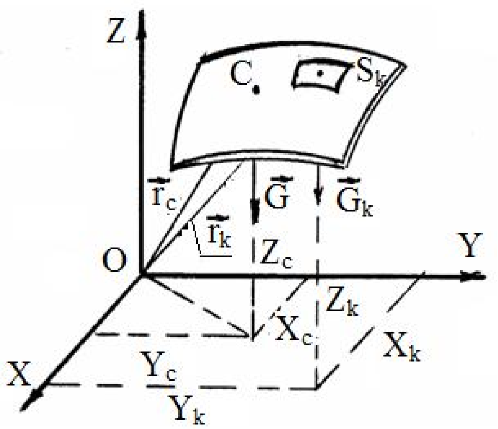


Рис. 9.9. Однорідна оболонка

$$x_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k \cdot x_k}{S}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k \cdot y_k}{S},$$

$$z_c = \frac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k \cdot z_k}{S}, \qquad (9.22)$$

де S – площа всієї оболонки; $S_к$ – площа k-го елемента оболонки;

$x_к$, $y_к$, $z_к$ – координати елемента $S_к$.

Якщо оболонка складної форми, то краще користуватись слідуючими формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(s)} x \cdot ds}{S}; \; y_c = \frac{\int\limits_{(s)} y \cdot ds}{S}; \; z_c = \frac{\int\limits_{(s)} z \cdot ds}{S}, \qquad (9.23)$$

де $x_к$, $y_к$, $z_к$ – координати елементарної площі ds.

8. Центр ваги площі плоскої фігури. The center of gravity of the area of the flat figure. Для плоскої однорідної фігури осі координат Ох і Оу виберемо в серединній площині (рис. 9.10)

$G_k = g\gamma S_k$, $G = g\gamma S$,

де γ–густина одиниці площі, γ=const. Тоді з формули (9.3) маємо:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{ê=1}^{n} S_k \cdot x_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum\limits_{ê=1}^{n} S_k \cdot y_k}{S}. \qquad (9.24)$$

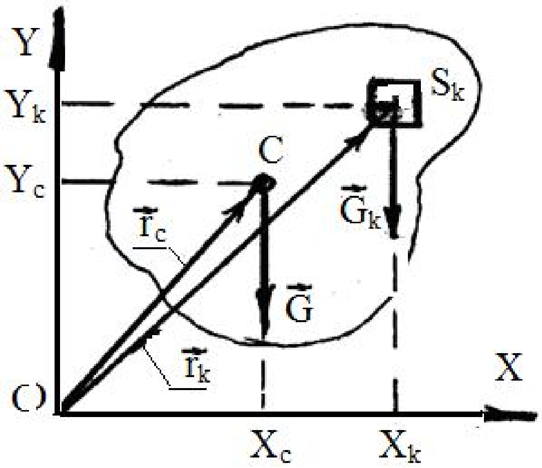


Рис. 9.10. Площа плоскої фігури

Для плоскої фігури складної форми потрібно користуватися слідуючими формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(s)} x \cdot ds}{S}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(s)} y \cdot ds}{S}, \qquad (9.25)$$

9. Центр ваги лінії. Center of gravity of the line. Для однорідного криволінійного стрижня лінійна густина γ=const (рис. 9.11)

$G_k = g\cdot\gamma\cdot l_k$, $G = g\cdot\gamma\cdot L$.

Тут L – довжина стрижня; l_k – елемент стрижня.

З формули (9.3) маємо:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{ê=1}^{n} l_k \cdot x_k}{L}; \; y_c = \frac{\sum\limits_{ê=1}^{n} l_k \cdot y_k}{L}; \; z_c = \frac{\sum\limits_{ê=1}^{n} l_k \cdot z_k}{L}. \qquad (9.26)$$

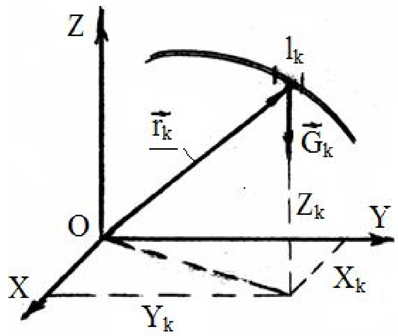


Рис. 9.11. Центр ваги лінії

Для стрижня складної форми:

$$x_c = \frac{\int\limits_{(L)} xdl}{L}; \; y_c = \frac{\int\limits_{(L)} ydl}{L}; \; z_c = \frac{\int\limits_{(L)} zdl}{L}. \qquad (9.27)$$

Зауважимо, що чисельники в формулах (9.5), (9.7), (9.9) і (9.11) називаються статичними моментами об'єму, поверхні, площі і довжини тіла відносно координатних осей.

Візьмемо для прикладу формулу (9.9). Позначимо через S_x і S_y статичні моменти площі фігури відносно координатних осей X і У:

$$S_x = \sum_{ê=1}^{n} S_k \cdot y_k ; S_y = \sum_{ê=1}^{n} S_k \cdot x_k . \qquad (9.28)$$

Тоді формула (9.9) запишеться у такому вигляді: $x_c = S_y / S; \; y_c = S_x / S.$ (9.29)

9. 4. Способи знаходження координат центра ваги тіл
Methods of finding the coordinates of the center of gravity of the bodies

1.Якщо однорідне тіло має площину геометричної симетрії, то центр тяжіння цього тіла знаходиться в цій площині симетрії (рис. 9.12).

If a homogeneous body has a plane of geometric symmetry, then the center of gravity of this body is in this plane of symmetry.

2.Якщо однорідне тіло має вісь геометричної симетрії, то центр тяжіння знаходиться на цій осі.

If a homogeneous body has an axis of geometric symmetry, then the center of gravity is on that axis.

3.Якщо однорідне тіло має центр геометричної симетрії, то центр тяжіння знаходиться в центрі симетрії.

If a homogeneous body has a center of geometric symmetry, then the center of gravity is at the center of symmetry.

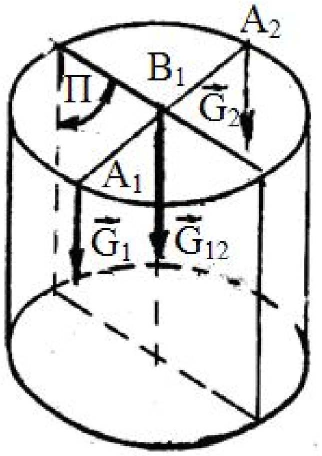


Рис. 9.12.
Спосіб симетрії

Доведемо це. Якщо тіло симетричне відносно деякої площини П (рис. 9.12), то кожній частинці тіла по одну сторону цієї площини відповідає рівна їй по вазі і симетрично розміщена частинка по другу сторону площини. Візьмемо яку-небудь частинку A_1 по одну сторону площини П і знайдемо симетричну їй частинку A_2 по другу сторону. На ці частинки будуть діяти однакові по модулю сили тяжіння $\vec{G}_1$ і $\vec{G}_2$. Рівнодійна $\vec{G}_{1,2}$ цих двох рівних і паралельних сил буде прикладена в середині B_1 відрізка A_1A_2, т.б. в площині симетрії.

Складаючи подібним чином сили тяжіння кожної пари симетричних частинок, отримаємо систему паралельних сил, які лежать в площині симетрії тіла. В цій площині і буде лежати центр тяжіння тіла.

Для випадків, коли тіло має вісь або центр симетрії, доведення теореми аналогічне.

Висновки:

1. Центр тяжіння відрізка матеріальної прямої лінії лежить в його середині.

The center of gravity of a segment of a material straight line lies in its middle.

2.Центр тяжіння круглого кільця, круглої або прямокутної пластинки, площі правильного многокутника і еліпса, об’єма прямокутного паралелепіпеда і кулі і других тіл, які мають центр симетрії, лежить в їх геометричних центрах (в центрах симетрії).

The center of gravity of a circular ring, a circular or rectangular plate, the area of a regular polygon and an ellipse, the volume of a rectangular *parallelepiped, and the balls and other bodies having a center of symmetry, lie at their geometric centers (at the centers of symmetry*.

1. Спосіб симетрії. Якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр ваги знаходиться відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії. Доведемо це твердження для тіла, що має площину симетрії (рис. 9.13). Розташуємо координатну площину xOy у площині симетрії (на рис. 9.13 ця площина заштрихована).

Візьмемо в тілі дві точки M_k і M'_k, які розташовані симетрично відносно площини xOy. У цих точок збігаються координати x_k, y_k, а координати z_k розрізняються тільки знаком. Виділимо навколо точок M_k, M'_k рівні елементарні об'єми V_k.

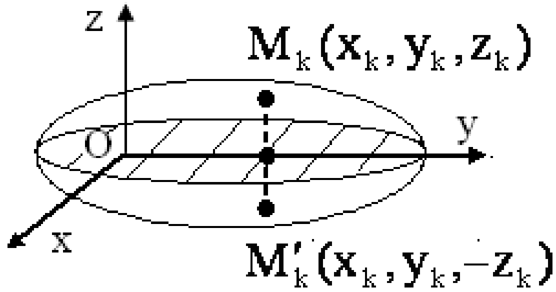


Рис. 9.13. Спосіб симетрії

Підсумуємо додатки:

$$z_k \cdot V_k + z'_k \cdot V_k = z_k \cdot V_k - z'_k \cdot V_k = 0 .$$

Розглянувши всі елементарні об'єми, отримаємо:

$\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot V_k = 0$ і обчислимо координату z_c центра ваги тіла за формулою:

$$z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot V_k}{V} = 0.$$

Це означає, що центр ваги розглядуваного тіла знаходиться у площині симетрії.

Аналогічно можна довести твердження для тіла, що має вісь або центр симетрії.

Similarly, a statement can be proved for a body having an axis or center of symmetry.

2. Спосіб розбиття. Method of splitting. Цей спосіб використовується для знаходження центра тяжіння тіл складної геометричної форми. Один із прикладів тіла складної форми приведено на рис. 9.14. Розіб'ємо дану фігуру на ряд простих фігур, центри тяжіння яких можна знайти. В даному випадку фігура розбилась на три прямокутника, площі яких S_1, S_2, S_3, а центри тяжіння C_1, C_2, C_3. Виберемо систему координат. Тоді центри тяжіння мають координати $C_1(x_1;y_1)$, $C_2(x_2;y_2)$, $C_3(x_3;y_3)$. Для знаходження центра тяжіння площі використаємо формулу (9.9):

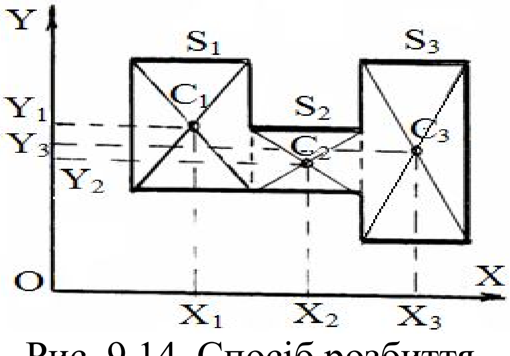


Рис. 9.14. Спосіб розбиття

$$x_c = \frac{s_1 \cdot x_1 + s_2 \cdot x_2 + s_3 \cdot x_3}{s_1 + s_2 + s_3}; \quad y_c = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3}{s_1 + s_2 + s_3}.$$

Після обчислення, отримаємо центр тяжіння площі $C(x_c; y_c)$.

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких часток, для яких положення центрів ваги відомі, то координати центра ваги тіла можна обчислити за формулами (9.10), (9.12), (9.14) або (9.17).

3. Спосіб доповнення. Method of addition. Цей спосіб застосовується для тіл, в яких є отвори, якщо центри тяжіння тіла без отворів і вирізаних отворів відомі.

This method is applicable to bodies with openings if the centers of gravity of the body without openings and cutouts are known.

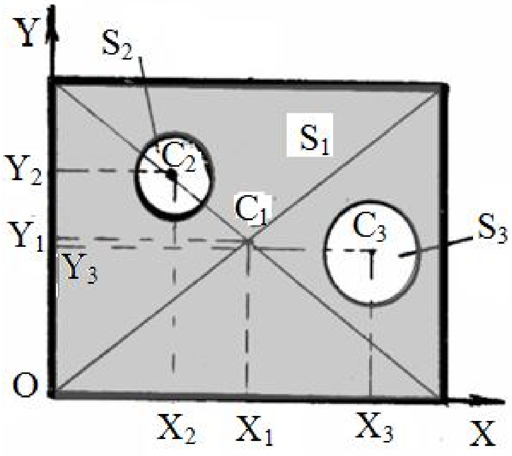


Рис. 9.15. Спосіб доповнення

Розглянемо фігуру, яка показана на рис. 9.15. В пластині є два отвори. Ці отвори доповнимо до пластинки, яка після цього доповнення стала суцільною. Самі ж отвори будемо вважати тілами з від'ємними площами. Для знаходження центра тяжіння площі використаємо формулу (9.9):

$$x_c = \frac{s_1 \cdot x_1 - s_2 \cdot x_2 - s_3 \cdot x_3}{s_1 - s_2 - s_3};$$

$$y_c = \frac{s_1 \cdot y_1 - s_2 \cdot y_2 - s_3 \cdot y_3}{s_1 - s_2 - s_3}.$$

Якщо тіло має порожнину (виріз), то цю порожнину (виріз) можна розглядати як тіло з від'ємною вагою (площею) і для розрахунків використовувати спосіб розбиття.

4. Спосіб інтегрування. The method of integration. Якщо тіло складної форми і його неможливо розбити на ряд частин, положення центрів яких можна знайти, то використовують спосіб інтегрування. Розглянемо спосіб інтегрування на конкретному прикладі. Знайдемо центр ваги дуги кола. Нехай є дуга AB кола радіуса R з центральним кутом 2α (рис. 9.16). Початок координат виберемо в центрі кола і вісь Ox спрямуємо по осі симетрії. Так як вісь Ox є осью симетрії, то центр тяжіння дуги лежить на цій осі. $y_c = 0$. Знайдемо координату x_c способом інтегрування. Виділимо на дузі AB елемент дуги $dl = Rd\varphi$.

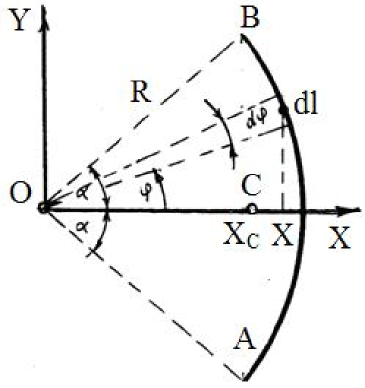


Рис. 9.16. Спосіб інтегрування

Положення дуги dl визначається кутом φ. Координата x цього елемента буде $x = R\cos\varphi$. Використаємо першу із формул (9.12):

$$X_c = \int_{(L)} x dl / \int_{(L)} dl = R^2 \int_{(-\alpha)}^{\alpha} \cos\varphi d\varphi / \int_{(-\alpha)}^{\alpha} d\varphi = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}.$$

Остаточно $x_c = \dfrac{R\sin\alpha}{\alpha}$, (9.30)

де кут α вимірюється в радіанах.

Для півкола ($\alpha = \pi/2$) маємо $x_c = 2R/\pi$. (9.31)

Якщо тіло неможливо розбити на скінченне число часток, у формулах (9.10), (9.12), (9.14), (9.14) переходять до інтегралів.

Наприклад, формули (9.14) матимуть вигляд:

$$x_c = \frac{\int_{(S)} x \cdot dS}{S}; \quad y_c = \frac{\int_{(S)} y \cdot dS}{S}. \tag{9.32}$$

де інтеграли поширюються на площу S,

9.5. Центри ваги простіших фігур. Weight centers of simpler figures

Розглянемо декілька простих фігур, з яких можуть складатись більш складні фігури.

1. Трикутник. Triangle. Скористаємось способом розбиття і розділимо трикутник АВД на елементарні смужки, провівши лінії, паралельні стороні AD (рис. 9.17). Кожну таку смужку можна прийняти за прямокутник, центр симетрії якого лежить у середині, тобто на медіані ВК трикутника. Розглядаючи смужки, паралельні стороні ВД, приходимо до висновку, що центр ваги трикутника має лежати на медіані AL. Отже, центр ваги трикутника знаходиться у точці перетину його медіан. Ця точка, як відомо, ділить кожну із медіан у відношенні 1:2, тобто $CK:CB = 1:2$, $CL:CA = 1:2$.

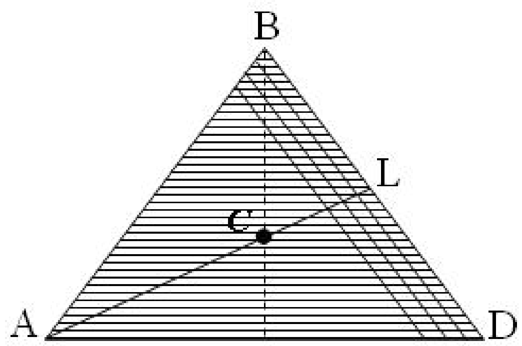


Рис. 9.17. Трикутник

Центр тяжіння площі трикутника (center of gravity of the square of the triangle) лежить в точці перетину його медіан (рис. 9.12). Як відомо із геометрії

$$CL = \frac{1}{3}BL; \; CE = \frac{1}{3}AE; \; CK = \frac{1}{3}DK.$$

2.Дуга кола. Car Circle. Розглянемо дугу АВ кола радіусом R з центральним кутом 2α (рис. 9.18). Направимо вісь Ox по осі симетрії дуги, яка є бісектрисою кута 2α. Центр ваги дуги кола лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$, і залишається знайти x_c. Для цього скористаємось формулою

$$x_c = \int_A^B x dl / L, \tag{9.33}$$

яка вийде, якщо у формулі (9.17) перейти до інтеграла. Для елементарної частки довжини dl, як виходить з рис. 9.13, $x = R\cos\varphi$, $dl = Rd\varphi$, $L = R\cdot 2\alpha$.

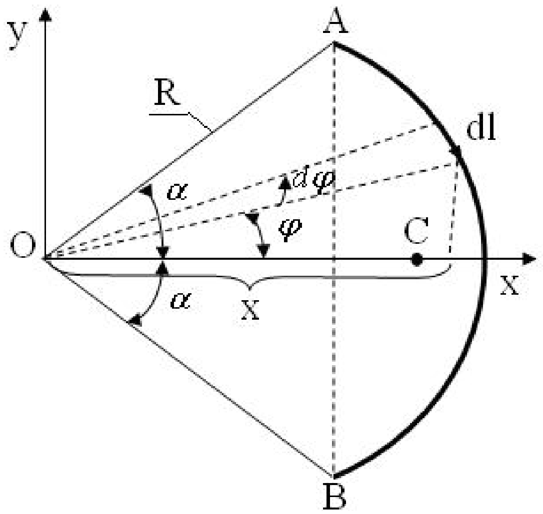


Рис. 9.18. Дуга кола

Тоді $$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi}{R\cdot 2\alpha} = \frac{R^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi}{R\cdot 2\alpha} =$$

$$= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi}{R\cdot 2\alpha} = \frac{R^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi}{R\cdot 2\alpha} = \frac{R^2 \sin\alpha\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{R\cdot 2\alpha} =$$

$$= \frac{R^2 2\sin\alpha}{R\cdot 2\alpha} = \frac{R\cdot \mathrm{Sin}\alpha}{\alpha}. \qquad (9.34)$$

3. Коловий сектор. Circular sector. Розглянемо коловий сектор з центральним кутом 2α і радіусом R (рис. 9.19). Спрямуємо вісь Ox по осі симетрії сектора, яка є бісектрисою кута 2α. Центр ваги сектора лежить на осі симетрії, тобто $y_c = 0$.

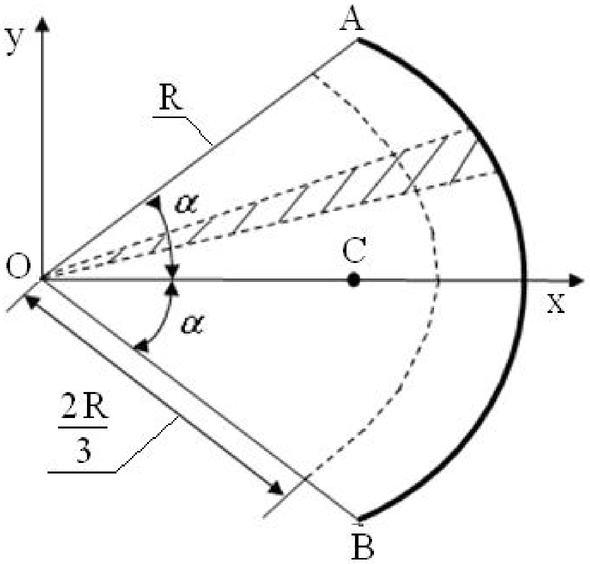


Рис. 9.19. Коловий сектор

Розіб'ємо коловий сектор на елементарні сектори (заштрихований на рис. 9.14), кожен з котрих можна прийняти за рівнобедрений трикутник. Отже, центр ваги кожного елементарного трикутника лежить на відстані 2R/3 від початку координат. Геометрричним місцем центрів ваги всіх елементарних трикутників буде дуга кола радіусом 2R/3. У цьому випадку можна скористатись формулою для центра ваги дуги кола (9.34):

$$x_c = 2\cdot R\cdot \sin\alpha / 3. \qquad (9.35)$$

Для півкола $(\alpha = \pi/2)$ $x_c = 4R/3\pi$. (9.36)

Зауваження. У формулах (9.34) і (9.35) кут α треба брати в радіанах.

4. Центр тяжіння об'єма однорідної призми, циліндра. Center of gravity of the volume of a homogeneous prism, cylinder. Центр тяжіння С однорідної призми (циліндра) знаходиться в середині відрізка, що з'єднує центри тяжінь верхньої і нижньої основ призми (циліндра).

The center of gravity C of a homogeneous prism (cylinder) is in the middle of the segment connecting the centers of gravity of the upper and lower bases of the prism (cylinder).

5. Центр тяжіння об'єма піраміди, конуса. Center of gravity of the volume of the pyramid, coneю Центр тяжіння об'єма піраміди або конуса лежить на відрізку, що з'єднує вершину з центром тяжіння основи, на відстані одної четвертої висоти піраміди (конуса) від площі основи, або Z_c = 3/4h, якщо відстань рахувати від вершини.

The center of gravity of the volume of the pyramid or cone lies on the segment connecting the top with the center of gravity of the base, at a distance of one-fourth the height of the pyramid (cone) from the area of the base, or Zc = 3 / 4h, if the distance is calculated from the top

6. Центр тяжіння об'єма півкулі. Center of gravity of the volume of the hemisphere. Центр тяжіння об'єма півкулі лежить на осі симетрії z: $z_c = 3R/8$.

Тут R – радіус півкулі.

Координата Z_c відраховується від діаметральної площини півкулі.

9.6. Стійкість твердого тіла при його перекиданні
The stability of the solid body when it is tipped

Визначення положення центра ваги тіла пов'язано з розв'язанням задач на стійкість тіла при його перекиданні.

Determining the position of the center of gravity of the body is associated with the solution of the problems of stability of the body during its overturning. Розглянемо, наприклад, тверде тіло, яке має нерухому точку O і знаходиться під дією довільної плоскої системи активних сил $\overline{F}_1,...,\overline{F}_n$ (рис. 9.20) у стані спокою. Візьмемо точку O за початок системи координат Oxy. При зведенні системи активних сил до центра O отримаємо, що при цьому головний вектор активних сил зрівноважиться реакцією нерухомої точки, а головний момент активних сил має дорівнювати нулю:

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} M_O(\overline{F}_k) = 0. \quad (9.37)$$

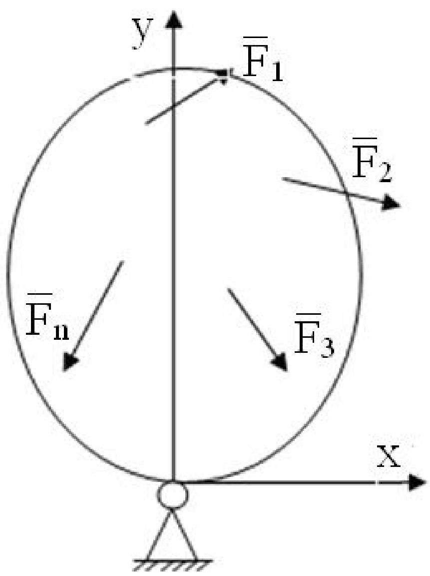


Рис. 9.20. До стійкості твердого тіла

Це рівняння не містить реакцій в'язів (нерухомого шарніра) і є умовою рівноваги твердого тіла з нерухомою точкою O.

This equation does not contain bond reactions (fixed joint) and is a condition of equilibrium of a solid with a fixed point O.

Рівняння (9.37) є також *умовою стійкості твердого тіла при його перекиданні*.

Equation (9.37) *is also a condition for the stability of a solid upon its overturning*.

3. ТЕСТИ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ СТУДЕНТІВ
3. STUDENTS KNOWLEDGE CONTROL TESTS

3.1. Довільна плоска система сил
An arbitrary planar system of forces

1. Що вивчає дисципліна «Теоретична механіка»?

1.Теоретична механіка вивчає явища, які відбуваються в середині тіла під дією прикладених сил.

2.Теоретична механіка вивчає загальні закони механічного руху тіл, або системи тіл і взаємодію цих тіл.

3.Теоретична механіка вивчає загальні закони механічного руху тіл під дією земного тяжіння.

2. Що є предметом вивчення статики?

1.Якщо під дією системи сил тіло рухається по заданим законам.

2.Якщо тіло рухається без якого-небудь зовнішнього фактора.

3.Якщо під дією системи сил тіло знаходиться в рівновазі, або рухається прямолінійно і рівномірно.

3. Вибрати з приведених нижче визначень, які основні дві задачі розв'язує статика?

1.Якщо на тверде тіло діє система сил, то яким чином цю систему сил можна спростити?

2.Якщо тверде тіло рухається під дією зовнішніх сил, то яким чином звільнитися від дії цих сил? 3.В яких випадках тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією системи сил?

4.В якому випадку на тверде тіло не діють зовнішні сили?

5.Якщо тверде тіло рухається без дії зовнішнього навантаження, то яким чином воно рухається?

4. Яке тіло називається абсолютно твердим?

1.Абсолютно твердим називається таке тіло, відстань між точками якого не змінюється при любих механічних діях з боку інших тіл.

2.Абсолютно твердим називається таке тіло, яке не руйнується під дією зовнішнього навантаження.

3.Абсолютно твердим називається таке тіло, яке не змінює свою форму під дією зовнішнього навантаження або повертається в свою первинну форму після припинення дії сил.

5. Що таке матеріальна точка?

1.Це тіло в якого вага на багато менше за його розміри.

2.Це тіло, розмірами якого можна знехтувати при вивченні його руху.

3.Це точка на поверхні речовини, рух якої вивчається в даний момент часу.

6. Що називається силою?

1.Це добуток маси тіла на його переміщення.

2.Це характеристика взаємодії двох тіл.

3.Це характеристика інтенсивності взаємодії тіл.

7. Тіла, які перешкоджають вільному переміщенню даного тіла, називають…

1.В’язями. 2.Реакціями в’язей. 3.Активними силами.

8. На яких з рисунків вказані вірні напрями реакції шарнірно-нерухомої опори?

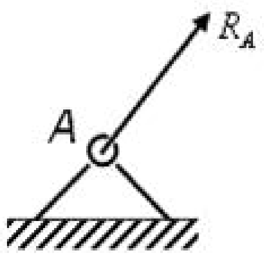


Рис. 1

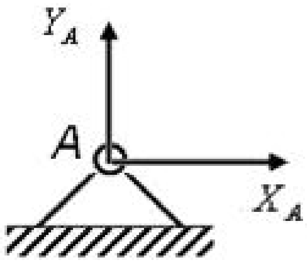


Рис. 2

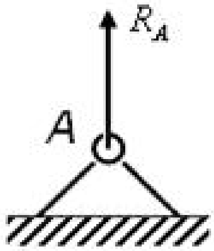


Рис. 3

9. Яке тіло називається вільним?

1.Тіло називається вільним, якщо на нього в просторі не діють сили.

2.Тіло називається вільним, якщо другі тіла не взаємодіють з ним.

3.Тіло називається вільним, якщо воно в просторі може займати довільне положення.

10.Яка система сил називається збіжною?

1.Якщо одна з сил перпендикулярна іншій, то така система сил називається збіжною.

2.Збіжною називається система сил, яка утворює замкнутий багатокутник.

3.Збіжною називається система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

11. Які з аксіом статики відповідають приведеним нижче рисункам?

1. Аксіома 1. Абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією двох сил тільки тоді, коли ці сили рівні по величині і напрямлені по одній прямій в протилежні сторони. $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$

2. Аксіома 2. Не змінюючи дію системи сил на абсолютно тверде тіло, можна добавити до цієї системи сил (або відкинути з неї) довільну врівноважену систему сил.

3. Аксіома 3. Два тіла взаємодіють між собою з силами, рівними по величині і напрямленими по одній прямій в протилежні сторони

4. Аксіома 4. Якщо на тверде тіло в одній точці діють дві сили, то дію цих сил можна замінити дією однієї сили, яка спрямована по діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах, і чисельно дорівнює довжині діагоналі.

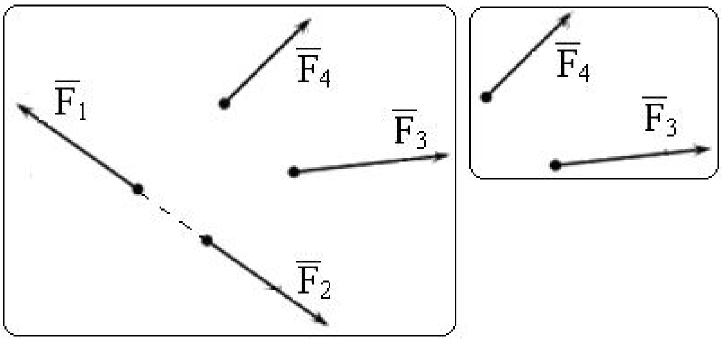


Рис. 1. До питання 11

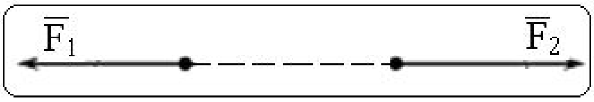


Рис. 2. До питання 11

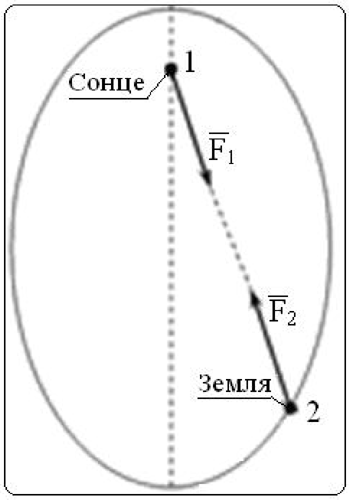


Рис. 4. Рис. 2. До питання 11

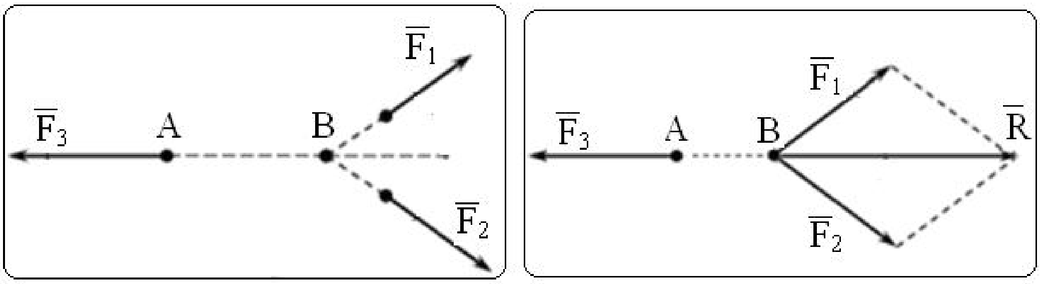


Рис. 3. До питання 11

12. Які з приведених нижче формул виражають аналітичні умови рівноваги збіжної системи сил?

1. $R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}F_{k_X}\right)^2+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}F_{k_Y}\right)^2}$. 2. $\sum\limits_{k=1}^{n}F_{k_X}=0;\quad \sum\limits_{k=1}^{n}F_{k_Y}=0$.

3. $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{F}_K$.

13.На яких з рисунків вказані вірні напрями реакції шарнірно-рухомої опори?

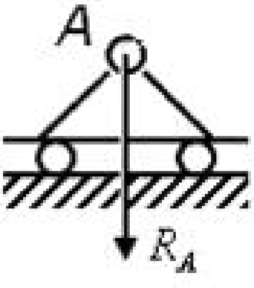


Рис. 1

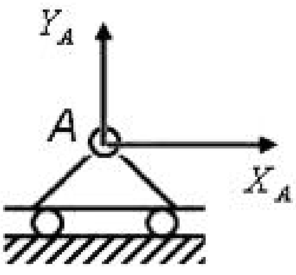


Рис. 2

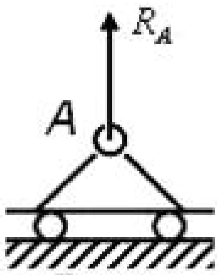


Рис. 3

14.Які з приведених нижче виразів відповідають формулі рівнодійної всієї системи сил?

1. $\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+...+\vec{F}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{F}_K$. 2. $\cos\left(\vec{R},\vec{i}\right)=\dfrac{R_x}{R};\ \cos\left(\vec{R},\vec{j}\right)=\dfrac{R_y}{R}$.

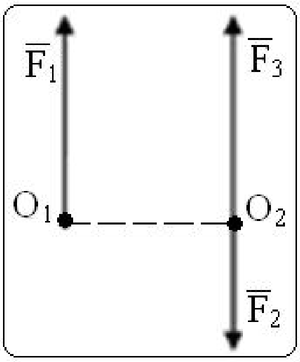
3. $\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0$. 4. Вірної відповіді немає.

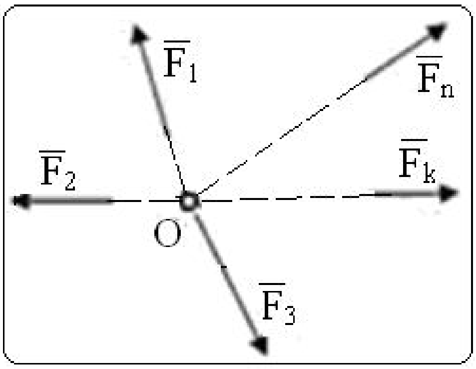
15.За якими формулами знаходиться напрям рівнодійної системи збіжних сил?

1. $\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0;\quad \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0$. 2. $R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k}^{n} F_{kx}$;

3. $\cos(\vec{R},\bar{i}) = \frac{R_x}{R};\quad \cos(\vec{R},\vec{j}) = \frac{R_y}{R}$. 4. $R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{k}^{n} F_{ky}$.

16. На якому з рисунків приведена збіжна система збіжних сил?





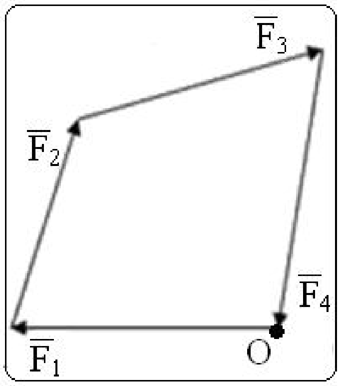


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

17. Вказати порядок дій при розв'язанні задач статики аналітичним способом:

1. Проаналізувати отриману систему активних сил і реакцій в'язей.
2. Виявнити, рівновагу якої точки або тіла необхідно розглянути.
3. Якщо тіло (точка) не вільне, то необхідно звільнитися від в'язей і замінити дію в'язей на тіло реакціями в'язей.
4. Вибрати осі координат.
5. Записати аналітичні умови рівноваги отриманої системи сил і скласти рівняння рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь.

18.Що називається моментом сили відносно довільної точки О?

1.Моментом сили відносно довільної точки О називається відношення сили на відстань від сили до осі, яка проходить через цю точку.
2. Моментом сили відносно довільної точки О дорівнює добутку цієї сили на плече (найкоротша відстань від точки до лінії дії сили).
3. Це є добуток сили на її переміщення до точки О.

19.Вказати, які з формул відповідають моменту сили відносно точки.

1. $\vec{F} = -\vec{F'}$. 2. $M_0(\vec{F}) = \pm\frac{F}{s}$. 3. $M_0(\vec{F}) = \pm Fd$.

20. На якому з рисунків вказано вірно плече для моменту сили $\overline{F}$ *відносно точки* О?

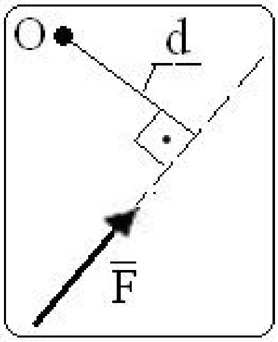


Рис. 1

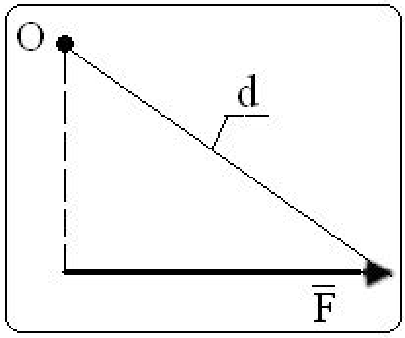


Рис. 2

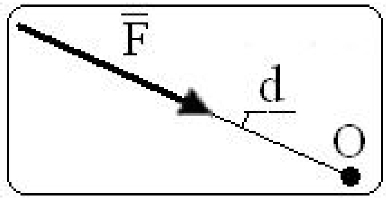


Рис. 3

21. Момент сили відносно точки дорівнює нулю тільки тоді, коли…

1.Модуль сили дорівнює нулю; кут між силою і відстанню до точки складає 90°.

2.Лінія дії сили проходить через точку. 3.Вірної відповіді немає.

22. Дві сили, які рівні по величині, протилежно спрямований, лінії дії їх паралельні і знаходяться на відстані d одна від одної називаються…

1.Парою сил. 2. Збіжними силами. 3. Рівнодійною силою.

23. Розставити в відповідності які з визначень відповідають приведеним нижче формулам.

1. Формула рівнодійної системи сил.
2. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.
3. Формула напряму рівнодійної системи збіжних сил.
4. Момент сили відносно точки.

1. $M_0(\vec{F}) = \pm Fd$. 2. $\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0$.

3. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K$. 4. $\cos(\vec{R}, \vec{i}) = \frac{R_x}{R}; \; \cos(\vec{R}, \vec{j}) = \frac{R_y}{R}$.

24. На якому з рисунків момент сили $\vec{F}$ відносно точки O *дорівнює нулю?*

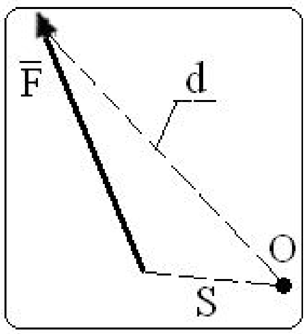


Рис. 1

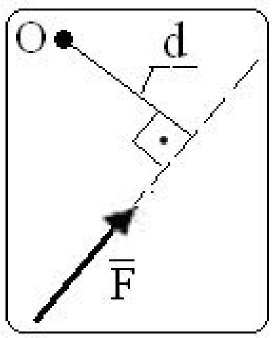


Рис. 2

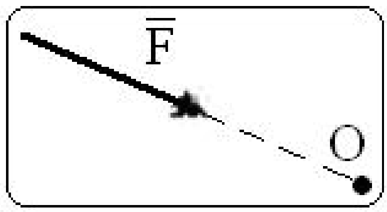


Рис. 3

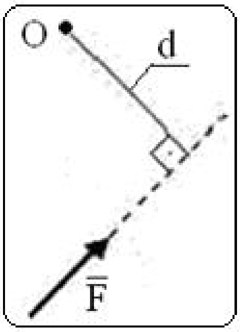
25. Які дві пари сил називаються еквівалентними?

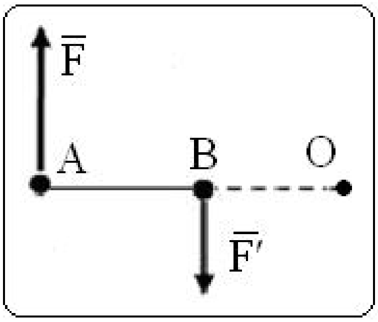
1.Якщо вони спрямовані назустріч одна одній.

2.Якщо в них однакові моменти як по величині, так і по знаку.

3.Якщо вони паралельні і спрямовані назустріч одна одній.

26. На якому з рисунків зображена пара сил?





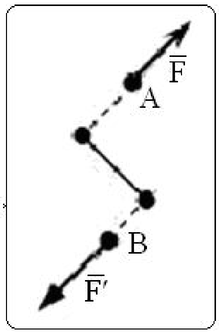


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

27. Вибрати з приведених нижче формул умову рівноваги системи пар сил, розташованих в одній площині.

1. $\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0$. 2. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K$. 3. $M = \sum_{k=1}^{n} M_k = 0$.

4. Вірної формули не приведено.

28. Які з формул відповідають аналітичним умовам рівноваги довільної плоскої системи сил?

1. $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_K$. 2. $\sum_{k=1}^{n} F_{k_X} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y} = 0; \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F_k}) = 0$.

3. $M = \sum_{k=1}^{n} M_k = 0$.

29. Вказати, яка з приведених нижче формул відповідає теоремі Варіньона?

1. $M = \sum_{k=1}^{n} M_k = 0$. $\vec{R'} \neq 0$; 2. $\overrightarrow{M_0} \neq 0$. 3. $M_0(\vec{R}) = \sum_{k=1}^{n} M_0(\vec{F_k})$.

30. Яке з визначень відповідає теоремі Варіньона?

1.Якщо рівнодійна плоскої довільної системи сил існує, то її момент відносно довільної точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил цієї системи відносно тієї ж точки.

2.Довільну плоску систему сил, що діє на тверде тіло , в загальному випадку можна замінити однією силою, рівною головному вектору $\overline{R'}$ системи і прикладеній в довільно вибраному центрі приведення O, і однією парою з моментом, рівним головному моменту M_0 системи відносно центра приведення O.

3. Якщо в одній площині діє декілька пар сил, то їх дію можна замінити дією однієї пари сил, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів заданих пар сил.

31. Розставити в відповідності визначення.

1. Рівнодійна. 2. Головний вектор. 3. Головний момент відносно центра приведення O.

1. Це сила, що замінює дію приведеної збіжної системи сил, і крім нього, діє ще пара сил (головний момент).
2. Це одна сила, що замінює дію всієї системи сил.
3. Величина, яка дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил відносно центру.

32. Статично визначеними називаються такі задачі..

1. Які відносяться до задач статики. 2. Де кількість невідомих реакцій в'язей дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги. 3. В яких відомі напрями дії реакцій в'язей.

33. Яка конструкція називається фермою?

1.Фермою називається залізобетонна конструкція, яка служить загоном для худоби.
2.Фермою називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних брусів, з'єднаних між собою шарнірами, і служить для сприйняття зовнішніх навантажень і передачі їх на опори.
3.Фермою називається геометрично незмінна конструкція, яка складається з прямолінійних брусів, з'єднаних між собою за допомогою зварювання, і служить для сприйняття зовнішніх навантажень і передачі їх на опори.
4.Вірної відповіді немає.

34. Який кут називається кутом тертя?

1.Кут між силою тертя і вагою тіла називається кутом тертя.
2.Кут, тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, називається кутом тертя. 3.Кут, синус якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, називається кутом тертя.

35.. Що називається важелем?

1.Це тверде тіло, яке служить для допомоги при піднятті вантажів.
2.Це тверде тіло, яке має нерухому вісь обертання і знаходиться під дією сил, які діють в площині, перпендикулярній до цієї осі;
3.Це пристрій, за допомогою якого перемикаються швидкості в автомобілі.

36. На якому з рисунків вказана статично визначена конструкція?

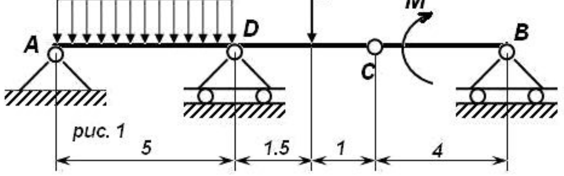


Рис. 1

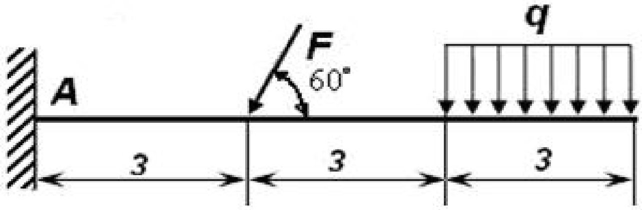


Рис. 2

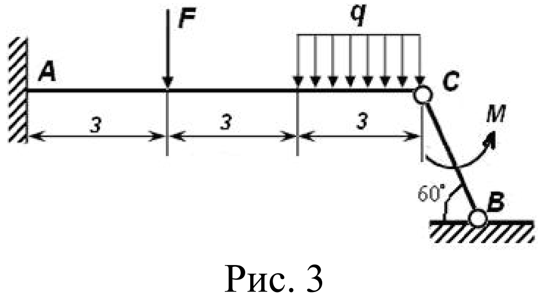


Рис. 3

37. Точка, де стрижні з'єднуються шарнірами, називається…

1. Зварним швом.
2. З'єднанням.
3. Вузлом.

38. Вказати, яка з формул відповідає залежності в плоскій фермі між числом стрижнів і числом вузлів.

1. $k/n = 2.$. 2. $\ddot{i} = 2\hat{e} - 3$. 3. $\hat{e} = 2\ddot{i} - 3$.

39. Яка з формул відповідає силі тертя.

1. $F = fN$. 2. $F = ma$. 3. $F = mg$.

40. В яких межах знаходиться коефіцієнт тертя ковзання?

1. $f \geq 1$. 2. $0 \leq f \leq 1$. 3. $-1 \leq f \leq 1$.

3.2. Довільна просторова система сил
Arbitrary spatial system of forces

1. За якою формулою знаходиться рівнодійна просторової системи збіжихї сил?

1. $\cos\left(\vec{R}, \vec{i}\right) = \dfrac{R_x}{R}; \quad \cos\left(\vec{R}, \vec{j}\right) = \dfrac{R_y}{R}; \quad \cos\left(\vec{R}, \vec{k}\right) = \dfrac{R_z}{R}.$

2. $\mathrm{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Z_k)^2}$.

3. $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$.

2. Вказати яка з рівностей відповідає умові рівноваги просторової системи збіжних сил?

1. $\mathrm{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Z_k)^2}$.

2. $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$.

3. $\mathrm{R}_x = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mathrm{R}_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $\mathrm{R}_z = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

3.В яких випадках момент сили $\vec{\mathrm{F}}$ *відносно осі дорівнює нулю*?

1.Якщо лінія дії сили $\vec{\mathrm{F}}$ перетинає вісь.

2.Якщо сила $\vec{\mathrm{F}}$ перпендикулярна осі.

3.Якщо сила $\vec{\mathrm{F}}$ паралельна даній осі.

4. Яка з формул відповідає моменту сили відносно осі?

1. $\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$. 2. $M_z(\vec{F}) = M_z(\overrightarrow{F_{xy}}) = M_0(\overrightarrow{F_{xy}}) = F_{xy}d$. 3. $M = F \cdot d$.

5. Вказати умови рівноваги системи сил довільно розташованих в просторі.

1. $R^* = 0; \quad M_0 = 0.$ 2. $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0.$

3. $R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0; \quad M_0 = \sqrt{{M_x}^2 + {M_y}^2 + {M_z}^2} = 0.$

6.На якому з рисунків показана просторова система збіжних сил?

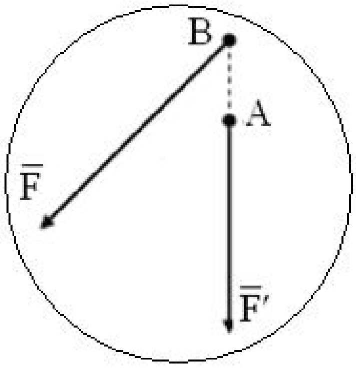


Рис. 1

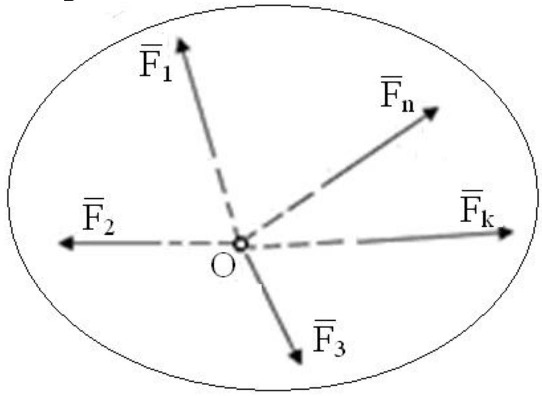


Рис. 2

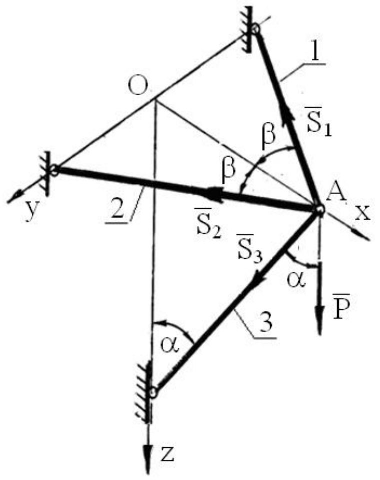


Рис. 3

7.Розставити в відповідності, які з теорем відповідають приведеним нижче графічним інтерпретаціям.

1. Пару сил можна перенести в паралельну площину і від цього дія пари сил на тіло не зміниться.
2. Дві пари сил, що лежать в площинах, які перетинаються, еквівалентні одній парі сил, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів двох даних пар сил.

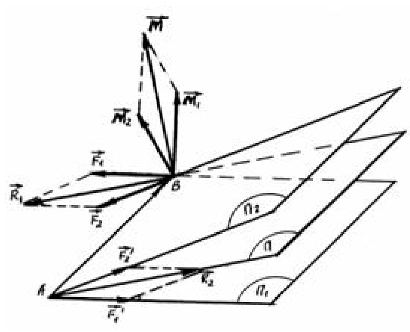


Рис. 1

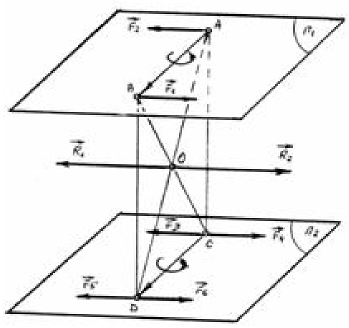


Рис. 2

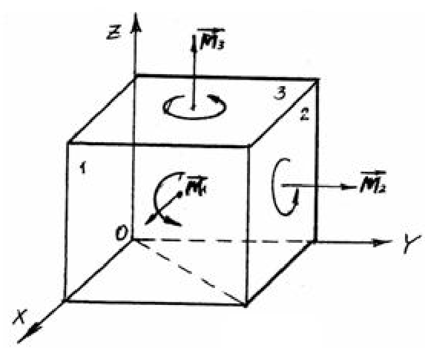


Рис. 3

8. Вказати рівняння рівноваги просторової системи сил.

1. $\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0.$

2. $$\sum_{k=1}^{n} X_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$$
$$\sum_{k=1}^{n} M_{k_A} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_{k_A} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_{k_A} = 0.$$

3. $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Y_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} Z_k)^2}$.

*9. Вказати вірне визначення основної теореми статики (теореми Пуансо)***.**

1.Силу можна переносити паралельно самій собі в довільну точку твердого тіла, якщо при цьому добавити пару сил, векторний момент якої дорівнює векторному моменту сили, що переноситься, відносно нової точки прикладання сили.

2.Якщо при приведенні просторової системи сил до даного центра О виявиться, що головний вектор $\overrightarrow{R'} = 0$, а головний момент $\overline{M}_O \neq 0$, то ця система сил зводиться до однієї пари сил. Причому, момент цієї пари сил не залежать від вибору центра приведення.

3.Довільну систему сил, що діє на абсолютне тверде тіло, можна привести до сили, рівній головному вектору системи сил, і до пари сил, векторний момент якої дорівнює головному моменту системи сил відносно точки, вибраної за центр приведення.

10. Дати вірне визначення леми про паралельне перенесення сил.

1.Силу можна переносити паралельно самій собі в довільну точку твердого тіла, якщо при цьому добавити пару сил, векторний момент якої дорівнює векторному моменту сили, що переноситься, відносно нової точки прикладання сили.

2.Силу можна переносити паралельно самій собі в довільну точку твердого тіла, якщо при цьому добавити дві збіжні сили, які будуть напрямлені одна одній назустріч.

3.Довільну систему сил, що діє на абсолютне тверде тіло, можна привести до сили, рівній головному вектору системи сил, і до пари сил, векторний момент якої дорівнює головному моменту системи сил відносно точки, вибраної за центр приведення.

11. Дати вірне визначення теореми Варіньона про момент рівнодійної.

1.Довільну плоску систему сил, що діє на тверде тіло , в загальному випадку можна замінити однією силою, рівною головному вектору $\overrightarrow{R'}$ системи і прикладеній в довільно вибраному центрі приведення О, і однією парою з моментом, рівним головному моменту M_0 системи відносно центра приведення О.

2.Якщо довільна просторова система сил приводиться до рівнодійної, то момент цієї рівнодійної відносно довільного центра дорівнює геометричній сумі моментів всіх сил системи відносно того ж центра.

3.Довільну систему сил, що діє на абсолютне тверде тіло, можна привести до сили, рівній головному вектору системи сил, і до пари сил, векторний момент якої дорівнює головному моменту системи сил відносно точки, вибраної за центр приведення.

12. Встановити послідовність розв'язування задач з просторовою системою сил.

1.Знайти проекції головного вектора $\vec{R}'$ і головного моменту M_0 на кожну із трьох координатних осей.

2.Вибрати за центр приведення початок системи координат і осі спрямувати так, щоб можна було простіше знаходити проекції сил на осі і моменти сил відносно цих осей.

3.Встановити, до якого найпростішого вигляду приводиться дана система сил.

13. Формула для радіус - вектора центра паралельних сил.

1. $\vec{r}_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k \vec{r}_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$. 2. $\vec{r}_c = \dfrac{d\vec{V}_C}{dt}$. 3. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k x_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$.

14. Координати центра паралельних сил.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} X_k x_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} Y_k y_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} Z_k z_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$.

2. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k x_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k y_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k z_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$.

3. $x_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k x_k$, $y_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k y_k$, $z_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k z_k$.

15. Вказати вірну формулу координат центра мас.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k x_k}{M}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k y_k}{M}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k z_k}{M}$.

2. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} X_k x_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} Y_k y_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} Z_k z_k}{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} F_k}$.

3. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k x_k}{V}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k y_k}{V}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k z_k}{V}$.

16. Вказати формулу центра тяжіння об'єму.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k x_k}{M}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k y_k}{M}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k z_k}{M}$.

2. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k x_k}{V}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k y_k}{V}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k z_k}{V}$.

3. $x_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} xdV}{V}$, $y_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} ydV}{V}$, $z_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} zdV}{V}$.

17. Центр тяжіння однорідної оболонки.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k x_k}{S}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k y_k}{S}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k z_k}{S}$.

2. $x_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} xdV}{V}$, $y_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} ydV}{V}$, $z_c = \dfrac{\int\limits_{(V)} zdV}{V}$.

3. $x_c = \dfrac{\int\limits_{(s)} xds}{S}$, $y_c = \dfrac{\int\limits_{(s)} yds}{S}$, $z_c = \dfrac{\int\limits_{(s)} zds}{S}$.

18. Центр тяжіння лінії.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k x_k}{S}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k y_k}{S}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k z_k}{S}$.

2. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k x_k}{L}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k y_k}{L}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k z_k}{L}$

3. $x_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k x_k$, $y_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k Y_k$, $z_c = \sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k z_k$.

19. Сума добутків елементарних площ, які входять до складу площі плоскої фігури, на алгебраїчне значення їх відстаней до деякої осі називається.

1.Головним вектором системи сил.

2.Статичним моментом площі плоскої фігури.

3.Головним моментом площі плоскої фігури.

20. Розставити в відповідності формули з визначенням.

1.Формула координат центра мас.

2.Формула центра тяжіння об’єму.

3.Центр тяжіння однорідної оболонки.

4.Центр тяжіння лінії.

1. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k x_k}{V}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k y_k}{V}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} V_k z_k}{V}$.

2. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k x_k}{M}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k y_k}{M}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} m_k z_k}{M}$.

3. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k x_k}{L}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k y_k}{L}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} l_k z_k}{L}$

4. $x_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k x_k}{S}$, $y_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k y_k}{S}$, $z_c = \dfrac{\sum\limits_{\hat{e}=1}^{n} S_k z_k}{S}$.

Запитання для самоконтролю
Questions for self-control

1. Що є предметом статики?
2. Дайте фізичне і геометричне визначення поняття сили, вкажіть її розмірність.
3. Яке тіло називається абсолютно твердим?
4. Які системи сил називаються статично еквівалентними? Визначте формулою системи сил, еквівалентні нулю, а також одній силі. Як називається стан тіла, що знаходиться під дією системи сил першого типу? Як називається сила, до якої приводиться система другого типу?
5. Сформулюйте і проаналізуйте аксіоми статики.
6. Чи зміниться стан тіла, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії її дії?
7. Що таке двійка сил ? Чому вона еквівалентна ?
8. Дайте визначення в'язі.
9. Яке тіло називається вільним ?
10. Наведіть приклади технічної реалізації в'язів. Що таке реакція в'язі? Покажіть реакції типових в'язів: абсолютно гладка поверхня, нитка, ідеальний стержень, циліндричний шарнір, сферичний шарнір, нерухома опора з циліндричним шарніром, рухома опора з циліндричним шарніром, жорстке защемлення.
11. У чому полягає «Принцип визволення від в'язів»? Наведіть приклад.
12. Дайте визначення системи сил, що сходиться у просторі і на площині. Що таке точка сходу системи сил?
13. Чому еквівалентна система сил, що сходяться ? Покажіть це на прикладі трьох сил.
14. Проаналізуйте на прикладі теорему про три сили (приклад задається викладачем).
15. Дайте визначення проекції сили на вісь і площину. Визначите проекції сил, що паралельні, перпендикулярні й розташовані під кутом до горизонтальної осі Ox.

16. Як формулюються умови рівноваги системи сил, що сходяться, у геометричній і алгебраїчній формах?
17. Визначте момент сили відносно точки і проаналізуйте його властивості. Що таке плече сили?
18. Як направлений вектор-момент сили відносно даної точки?
19. Запишіть векторну формулу, яка визначає модуль і напрям вектора моменту сили відносно даної точки.
20. Визначите момент сили відносно осі, проаналізуйте його властивості.
21. Коли момент сили відносно точки дорівнює нулю?
22. Яка залежність між моментом сили відносно точки і моментом тієї ж сили відносно осі, яка проходить через цю точку?
23. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
24. При якому напрямі сили її момент відносно даної осі є найбільшим?
25. Дайте визначення алгебраїчного моменту сили.
26. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил , спрямованих в одну сторону, і точку її прикладання.
27. Знайдіть рівнодіючу двох паралельних сил, спрямованих у різні сторони, і точку її прикладання.
28. Знайдіть рівнодіючу системи рівномірно розподілених сил зао довжиною для прямокутної епюри їхнього розподілу.
29. Знайдіть рівнодіючу системи розподілених за довжиною сил для трикутної епюри їхнього розподілу при $q(0) = 0$.
30. Дайте визначення центра паралельних сил. Запишіть формули для визначення координат центра паралельних сил у геометричній формі в просторі й в алгебраїчній формі – у площині xOy.
31. Дайте визначення центра ваги твердого тіла. Як знайти координати центра ваги тіла.
32. Як визначаються координати ваги однорідної пластини.
33. Сформулюйте способи визначення координат центра ваги твердого тіла (площі, лінії), дайте їхню математичну інтерпретацію.
34. Що називається статичним моментом площини відносно осі?
35. Якою формулою визначається положення центра ваги площини сектора кола?
36. Як визначається положення центра ваги складеного тіла.
37. Дайте визначення парі сил. Чому пара сил не має рівнодіючої?
38. Які властивості мають пари сил? Сформулюйте теорему про перенесення пари сил у паралельну площину.
39. Чи залежить момент пари сил від її розташування у площини?
40. Складіть дві пари сил, що лежать у пересічних площинах.
41. Які пари сил називаються еквівалентними? Коли дві пари будуть еквівалентними?

42. Як формулюються умови рівноваги системи пар сил у геометричній і алгебра їчній формах?
43. Сформулюйте лему про паралельне переносення сили.
44. Дайте визначення головного вектора системи сил.
45. Що називається головним моментом системи сил?
46. Чому дорівнюють головний момент і головним момент відносно даної точки довільної системи сил.
47. Що мають спільного і чим відрізняються головний вектор системи сил і рівнодійна?
48. До яких двох силових факторів можна звести довільну систему сил у просторі?
49. Які можливі випадки зведення просторової системи сил?
50. Що називається динамою (силовим гвинтом)?
51. У чому суть необхідних і достатніх умов рівноваги твердого тіла?
52. Як змінюється головний вектор системи сил при перенесенні центра зведення?
53. Якою властивістю володіє головний момент системи сил при перенесенні центра зведення?
54. Коли плоска довільна система сил приводиться тільки до пари сил?
55. Сформулюйте умови зведення плоскої довільної системи сил тільки до однієї сили (рівнодіючої).
56. Як орієнтовані в просторі головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил? Наведіть їх механічну схему.
57. Чому рівні головний вектор і головний момент плоскої довільної системи сил, що за визначенням еквівалентна нулю?
58. Сформулюйте геометричні й алгебраїчні умови рівноваги твердого тіла.
59. Скільки рівнянь рівноваги в алгебраїчній формі для довільної просторової системи сил? Запишіть їх.
60. Наведіть плоску довільну систему сил до найпростішого вигляду з використанням теореми Пуансо.
61. Сформулюйте теорему Варіньона для плоскої довільної системи сил.
62. Сформулюйте першу форму умов рівноваги для плоскої довільної системи сил.
63. Сформулюйте другу форму умов рівноваги плоскої довільної системи сил.
64. Сформулюйте третю форму умов рівноваги довільної системи сил у площині.
65. Дайте механічне поняття сил тертя спокою, ковзання і кочення.
66. Що таке трибометр?
67. Сформулюйте і дайте формульне визначення закону Амонтона – Кулона. Якими властивостями володіють сили тертя ковзання?

68. Що таке коефіцієнт тертя спокою і тертя ковзання? Укажіть розмірності зазначених коефіцієнтів.
69. Що таке кут тертя і конус тертя?
70. Якими властивостями володіє коефіцієнт тертя катання? Укажіть його розмірність.
71. Укажіть цифрові значення для коефіцієнтів тертя спокою і кочення для типових кінематичних пар.
72. Для чого і чому в техніці при конструюванні вузлів машин прагнуть перейти від коефіцієнта тертя ковзання до коефіцієнта тертя кочення?
73. Дайте поняття ферми як технічної конструкції. Наведіть приклади статично визначених плоских ферм,
74. Сформулюйте принцип розрахунку плоскої ферми методом вирізання вузлів.
75. Як розраховують плоскі ферми методом Ріттера? Чим він відрізняється від методу вирізання вузлів?
76. Дайте поняття стійкості твердого тіла при його перекиданні. Наведить приклади.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ
LIST OF USED LITERATURE

1. Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В., Головач І. В. Теоретична механіка : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури. 2018. 760 с.

2. Теоретична механіка / І. В. Кузьо та ін. Харків : Фоліо, 2017. 347 с.

3. Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки : навчальний посібник. Вінниця : Нова книга, 2006. 380 с.

4. Пастушенко С. І., Руденко О. Г., Іщенко В. В. Практикум з теоретичної механіки. Частина ІІ. Динаміка. Вінниця : Нова книга, 2007 р. 543 с.

5. Шпачук В. П., Золотов М. С., Рубаненко О. І., Гарбуз А. О. Теоретична механіка : навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей і завдання для контрольних робіт студентів факультету післядипломної освіти. Харків : ХДАМГ, 2001. 124 с.

4. Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник. Вінниця : ВДТУ, 2002. 108 с.

5.Лобас Л. Г., Ковальчук В. В. Теоретична механіка у прикладах і задачах. Частина 1. Статика. Київ : ДЕТУТ, 2008. 96 с.

7. Павловский М. А. Теоретична механіка. Київ : Техніка, 2002. 512 с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. СТАТИКА.

Методичні рекомендації

Іванов Геннадій Олександрович.

Полянський Павло Миколайович.

Степанов Сергій Миколайович.

Баранова Олена Володимірівна.

Технічний редактор – П. М. Полянський

Дизайн обкладинки – П. М. Полянський

Комп'ютерний набір – Г. О. Іванов, П. М. Полянський

Комп'ютерна верстка – П. М. Полянський
Формат 60x84/1/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 6,50. Наклад 100 прим. Зам. №39

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.
Тел./факс: (0512) 341082

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.