МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.

Модуль: «Елементи лінійної алгебри»

методичні рекомендації до виконання самостійної роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 071 «Облік і оподаткування» денної форми навчання

МИКОЛАЇВ
2021

УДК 51
В41

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол №10 від_08.06.2021р.)

Укладачі:

В.С. Шебанін –	д.т.н., професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
І.П. Атаманюк –	д.т.н., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Бойчук –	к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський –	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов –	старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик –	к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.І. Власов –	к.ф.-м.н., ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:
Будак В.Д. – д.т.н., професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Для освоєння апарату дисципліни ,,Вища математика" самостійна робота студентів є визначальною. Результативність самостійної роботи студентів забезпечується ефективною системою контролю і викладач повинен домагатися ритмічного навчального процесу, недопускаючи перевантаження студентів у кінці семестру.

Для цього весь курс дисципліни ,,Вища математика", крім поділу на семестри згідно з навчальним планом, розбивається на модулі. Модулі, в свою чергу, розбито на певну кількість практичних занять (п.з.) та лабораторних робіт (л.р.). Кожне п.з. та л.р. має самостійний (закінчений) характер і дає змогу викладачеві контролювати засвоєння студентами основних понять та теорем за даною темою та вміння застосовувати їх на практиці. Студент повинен мати допуск на виконання п.з. чи л.р., внаслідок чого він одержує задачі та вправи для самостійної роботи. Тільки за успішного розв'язання цих задач та вправ вважається, що студент виконав це п.з. чи л.р.

Кожна лабораторна робота складається з шести розділів:

1. Основні поняття та теореми.
2. Завдання на допуск студента до проведення лабораторної роботи.
3. Приклад виконання завдання на допуск студента до лабораторної роботи.
4. Задачі та вправи до самостійної роботи студента на лабораторній роботі.

5. Приклади розв’язання задач та вправ до самостійної роботи студента на лабораторній роботі.

6. Питання для самоконтролю.

В даному посібнику приведенні методичні рекомендації до виконання лабораторних та практичних робіт: Модуль 01 „Елементи лінійної алгебри”.

Модуль 01 „Елементи лінійної алгебри”

М.01.ЛР.02. МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ

1. Основні поняття та теореми

Означення: *Прямокутна таблиця*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

складена з $m \times n$ *чисел* a_{ij} *називається матрицею з* m *рядків і* n *стовпців або матрицею розміру* $m \times n$.

Числа a_{ij} $(i = 1,2\ldots,m, \quad j = 1,2\ldots,n)$ називаються елементами матриці, перший індекс i вказує номер рядка, в якому стоїть елемент матриці, а другий індекс j – номер стовпця.

Матриця може позначатися також :

$\left[a_{ij} \right], i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n.$

Основними математичними операціями з матрицями є множення матриці на число, додавання матриць і множення матриць.

Множення матриці на число. Добутком числа λ і матриці $A = \left[a_{ij} \right]$ називається матриця $B = \left[b_{ij} \right]$ елементи якої підраховують згідно з правилом $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, тобто кожний елемент матриці b_{ij} являє собою добуток числа λ і елемента матриці a_{ij}.

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}.$$

Властивості операції множення матриці на число :

1) комутативність – $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$;

2) асоціативність – $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.

Додавання матриць. Сумою двох матриць $A = \left[a_{ij} \right]$ і $B = \left[b_{ij} \right]$, що мають відповідно рівні кількості рядків і стовпців, називається матриця $S = \left[s_{ij} \right]$ розміру $m \times n$ з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Наприклад, сумою матриць

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

є матриця

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Властивості операції додавання матриць:

1) комутативність – $A + B = B + A$;

2) асоціативність – $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) дистрибутивність відносно суми матриць –

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B ;$$

4) дистрибутивність відносно суми чисел –

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A .$$

Операція додавання матриць має обернену операцію – віднімання. Різницею матриць $A = \left[a_{ij} \right]$ і $B = \left[b_{ij} \right]$ називається матриця $C = \left[c_{ij} \right]$, складена з різниці відповідних елементів заданих матриць.

Множення матриць. Нехай матриці $\left[a_{ij} \right]$ і $\left[b_{ij} \right]$ – мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \dots & b_{2k} \\ \dots\dots\dots\dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \dots & b_{nk} \end{bmatrix},$$

тобто кількість n – стовпців матриці A збігається з кількістю n – рядків матриці B.

Добутком матриць $A = \left[a_{ij} \right]$ і $B = \left[b_{ij} \right]$ називається матриця C розміру $m \times k$, елементи якої підраховуються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj},$$
$$(i = 1,2,\dots,m; \quad j = 1,2,\dots,k).$$

Елемент, що стоїть в i – рядку і j – стовпця добутку двох матриць одержується в результаті множення першого елемента i – рядка матриці A на перший елемент j – стовпця матриці B, другого елемента i – рядка матриці A на другий елемент j – стовпця матриці B і т.д., і наступної суми таких добутків пар елементів матриць A і B.

Властивості операції множення матриць:

1) операція множення некомутативна $A \cdot B \neq B \cdot A$;

2) операція множення асоціативна $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2. Завдання на допуск студента до проведення лабораторного заняття

1. Знайти елемент c_{31} матриці $C=A+B$.

$$A=\begin{bmatrix} 2+\alpha & \alpha & -3+\alpha \\ 1+\alpha & -1+\alpha & 7+\alpha \\ 4+\alpha & 2-\alpha & 5+\alpha \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} \alpha & -4+\alpha & \alpha \\ 1+\alpha & 7+\alpha & -3+\alpha \\ -7+\alpha & 2+\alpha & -2+\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Знайти елемент c_{12} матриці $C=A-B$.

$$A=\begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ \alpha & -5+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -2+\alpha & -2-\alpha & 3+\alpha \\ 2+\alpha & 3-\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Знайти елемент c_{32} матриці $C = A\times B$.

$$A=\begin{bmatrix} 1+\alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 8+\alpha & -2+\alpha & 1+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & 4+\alpha \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3+\alpha & -2+\alpha & 1+\alpha \\ 7+\alpha & 4+\alpha & -3+\alpha \\ 2+\alpha & 1+\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

4. Знайти елемент c_{23} матриці $C = A\times B$.

$$A=\begin{bmatrix} 1+\alpha & \alpha & 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & -1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & 2+\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & \alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

5. Знайти значення елемента a_{23}^{T} матриці A^{T}.

$$A=\begin{bmatrix} 1+\alpha & 2+\alpha & -3+\alpha \\ -2+\alpha & 4+\alpha & 6+\alpha \\ 4+\alpha & 3+\alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до лабораторних занять

1. Знайти елемент c_{31} матриці $C = A + B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 8 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -11 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$c_{31} = a_{31} + b_{31};$$

$$c_{31} = 8 + 1 = 9.$$

Відповідь: $c_{31} = 9$**.**

2. Знайти елемент c_{12} матриці $C = A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$c_{12} = a_{12} - b_{12};$$

$$c_{12} = 0 - (-2) = 2.$$

Відповідь: $c_{12} = 2$**.**

3. Знайти елемент c_{32} матриці $C = A \times B$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj};$$

$$i = 1,2,\ldots,m;$$

$$j = 1,2,...,k\,.$$

В нашому випадку $c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32}$, а отже

$$c_{32} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5\,.$$

Відповідь: $c_{32} = 5$**.**

4. Знайти елемент c_{21} матриці $C = A \times B$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв’язання:

А налогічно до попередньої задачі

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41}$$

$$c_{21} = 4 \cdot 2 + 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 55\,.$$

Відповідь: $c_{21} = 55$**.**

5. Знайти значення елемента a_{23}^T матриці A^T.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Розв’язання:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & -9 \end{bmatrix};$$

$$a_{23}^T = 9\,.$$

Відповідь: $a_{23}^T = 9$**.**

4. Задачі та вправи до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A + B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} -3+\alpha & 2+\alpha & 7+\alpha \\ 1+\alpha & \alpha & \alpha \\ 5+\alpha & 4+\alpha & -6+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1+\alpha \\ 2+\alpha & 4+\alpha & 1+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & 9+\alpha \end{bmatrix}.$$

2. Знайти матрицю $C = A - 2 \cdot B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 4+\alpha & -1+2\alpha & 3+\alpha \\ 8+\alpha & -3+\alpha & 6+3\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3+\alpha & -9+\alpha & 4+\alpha \\ \alpha & 4+\alpha & -2+\alpha \\ -4+\alpha & 14+\alpha & -6+\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Знайти матрицю $C = A \times B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} -1+\alpha & 3+\alpha & 1+\alpha & 12+\alpha \\ 8+\alpha & 4+\alpha & -6+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2+\alpha & 5+\alpha & \alpha \\ \alpha & -1+\alpha & 4+\alpha \\ 3+\alpha & 2+\alpha & \alpha \\ -2+\alpha & \alpha & 7+\alpha \end{bmatrix}$$

4. Знайти матрицю $C = A \times B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5+\alpha & -4{,}5+\alpha & 2+\alpha \\ \alpha & 2+\alpha & -1+\alpha \\ -2+\alpha & 7+\alpha & -3+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 7+\alpha \\ 1+\alpha \\ -2+\alpha \end{bmatrix}.$$

5. Знайти матрицю $C = A^T \times B^T$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 3+\alpha & \alpha & 2+\alpha \\ 8+\alpha & -4+\alpha & 7+\alpha \\ 9+\alpha & -1+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -2+\alpha & 2+\alpha & 5+\alpha \\ \alpha & 1+\alpha & 3+\alpha \\ -3+\alpha & 6+\alpha & 2+\alpha \end{bmatrix}.$$

5. Приклади розв’язання задач та вправ до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A + B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Розв’язання:

$$C = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, сума елементів матриці С дорівнює 34.

2. Знайти матрицю $C = A - 2 \cdot B$ та ввести суму її елементів.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання:

$$C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2 & -4\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2\end{bmatrix}= \quad .$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 5\\ -1 & -8 & 0\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix}-2 & 6 & 5\\ -1 & -8 & 0\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$, сума елементів матриці С дорівнює 0.

3. Знайти матрицю $C = A\times B$ та ввести суму її елементів

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Розв'язання:

$$C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}12+3+0-4 & 8+0+0+0 & -8+4+0+6\\ -6+0+6-2 & -4+0+3+0 & 4+0+0+3\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, сума елементів матриці C дорівнює 25.

4. Знайти матрицю $C = A\times B$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Розв’язання:

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\cdot 2+0\cdot(-2)+5\cdot(-3) \\ 2\cdot 2+1\cdot(-2)+2\cdot(-3) \\ 1\cdot 2+3\cdot(-2)+0\cdot(-3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C=\begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$ сума елементів матриці C дорівнює -15.

5. Знайти матрицю $C = A^T\times B^T$ та ввести суму її елементів.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Розв’язання:

$$A^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = A^T \times B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2+(-1)(-1)+(-2)(-4) & 1\cdot 1+(-1)(-3)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-2)(-2) \\ 3\cdot 2+4\cdot(-1)+0\cdot(-4) & 3\cdot 1+4\cdot(-3)+0\cdot 0 & 3\cdot 1+4\cdot 2+0\cdot(-2) \\ 0\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(-4) & 0\cdot 1+2\cdot(-3)+1\cdot 0 & 0\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & 11 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & 11 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$, сума елементів матриці С дорівнює 12.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається матрицею?
2. Що називається елементом матриці?
3. Як позначаються матриці?
4. Назвіть основні математичні операції з матрицями. Поясніть їх.
5. Назвіть основні властивості математичних операцій з матрицями.
6. Яка матриця називається транспонованою до даної?
7. Які матриці не можна перемножити?

М.01.ЛР.03. ВИЗНАЧНИКИ. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Основні поняття та теореми

1) Нехай задана квадратна таблиця із чотирьох чисел a_1, a_2, b_1, b_2 (матриця А):

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Число $a_1 b_2 - a_2 b_1$ називається визначником (детермінантом) другого порядку, відповідно до (1). Даний визначник позначається символами

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \ \Delta \text{ або } \det A$$

Звідси маємо :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \qquad (2)$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 називаються елементами визначника.

2) Нехай задана квадратна таблиця із дев’яти чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Визначником (детермінантом) третього порядку, відповідно до (3), називається число, що позначається символом:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

і визначається рівністю

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2. \qquad (4)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ називаються елементами визначника.

Елементи, розміщені по вертикалі, називаються стовпцями, а по горизонталі – рядками визначника; елементи a_1, b_2, c_3 утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_3, b_2, c_1 – бічну діагональ.

Для обчислення визначника III порядку зручна схема, запропонована на рис 1.

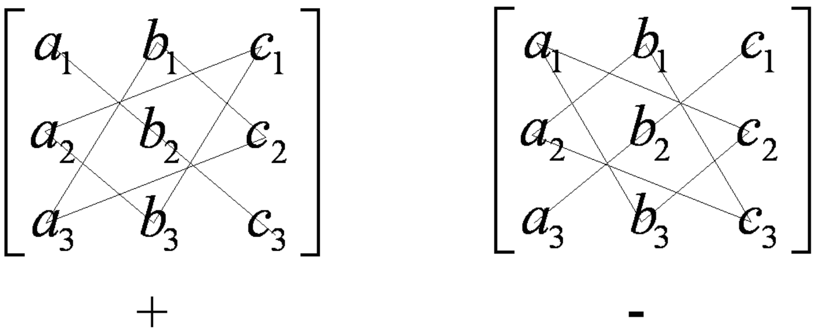

Рис.1

Добуток елементів головної діагоналі та елементів, що утворюють трикутники з основами, паралельними головній діагоналі, беруться зі знаком плюс, а добуток елементів бічної діагоналі та елементів, що лежать у вершинах трикутників з основами, паралельними бічній діагоналі, – зі знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержаних шести добутків. Дана схема дістала назву «правило трикутника».

Для обчислення визначників III порядку існує правило Саррюса, що запропоноване на рис 2.

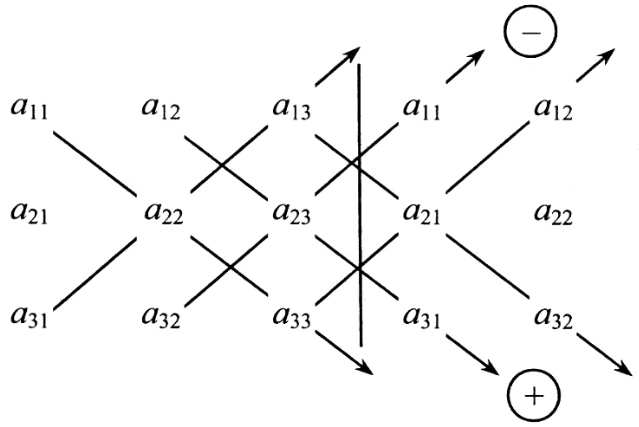

Рис.2

Якщо до таблиці визначника дописати справа перший і другий стовпці, то при обчисленні визначника добуток елементів, розміщених на головній і паралельних їй діагоналях, потрібно взяти зі знаком плюс, а добуток елементів, розміщених на бічній і паралельних їй діагоналях, – зі знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержаних шести добутків.

3) Найважливіші властивості визначників.

1**. Властивість антисиметрії**

Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. Властивість однорідності

Якщо елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число λ, то визначник помножиться на λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Властивість лінійності

Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), помножений на деяке число λ, то визначник не зміниться.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Розклад визначника за елементами рядка (стовпця)

Визначник дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\det A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3;$$

$$\det A = a_1 A_1 + b_2 B_2 + c_3 C_3.$$

Для визначників n – ого порядку маємо:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \Delta;$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \Delta,$$

де

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

2. Завдання на допуск студента до проведення лабораторного заняття

1. За якого значення елемента a_{22} визначник $|A|$ дорівнює 100?

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha + 4 & 1 \\ 2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+\alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 5+2\alpha & 2+\alpha & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ -2-2\alpha & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{34} матриці A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & 1+\alpha & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -13+\alpha & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 29-\alpha \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до лабораторного заняття

1. За якого значення елемента a_{22} визначник $|A|$ дорівнює 100 ?

$$|A| = \begin{vmatrix} -35 & 2 \\ 7 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи (2), дістанемо

$$-35\cdot a_{22}-7\cdot 2=100,$$

$$-35\cdot a_{22}-14=100,$$

$$-35\cdot a_{22}=114,$$

$$a_{22}\approx -3{,}257.$$

Відповідь: $a_{22}\approx -3{,}257$.

2. Знайти визначник III порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Віднімаємо від II рядка I рядок} \\ \text{і отримуємо стовпець нулів} \\ \text{окрім першого елемента}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 22 & -1 \\ 19 & 1 \end{vmatrix}=22+19=41.$$

Відповідь: $\Delta=41$.

3. Знайти визначник III порядку

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників, отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Àí àëî ã³÷í î äî ä³é, âèêî í àí èõ ó} \\ \text{çàâäàí í ³ ¹ 2,} \\ \text{² ð.-3} \cdot \text{²²² ð.} \\ \text{²² ð. -2} \cdot \text{²²² ð.} \end{array} \right\} \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -13 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & -7 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

Відповідь: $\Delta = 7$.

4. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{34} матриці A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -23 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 39 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи властивості визначників і означення алгебраїчного доповнення, отримаємо

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -23 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 39 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(-63 - 4) = 67.$$

Відповідь: $A_{34} = 67$.

4. Задачі та вправи до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Знайти визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 3+\alpha & 6 \\ 5 & 10-\alpha \end{vmatrix}.$$

2. Знайти визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 2 & 4 \\ -2 & 1-\alpha & 3 \\ 3 & -4 & 2-\alpha \end{vmatrix}.$$

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5+\alpha & -1 \\ 2 & -1 & 5-\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

4. Знайти визначник IV порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 2 & 3+\alpha & 4 \\ 1 & 3+\alpha & 6 & 10 \\ 1+\alpha & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

5. Приклади розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Знайти визначник другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -17 & 6 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} - ?$$

Розв'язання: Використовуючи (2), отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -17 & 6 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} = -17 \cdot 30 - 5 \cdot 6 = -510 - 30 = -540.$$

Відповідь: $\Delta = -540$.

2. Знайти визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} - ?.$$

Розв'язання: скористаємося правилом Саррюса для обчислення визначника.

$$\Delta = \left|\begin{matrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -5 & 2 \\ -2 & 7 \\ 3 & -4 \end{matrix} =$$

$$= -5\cdot 7\cdot 8 + 2\cdot(-3)\cdot 3 + 4\cdot(-2)\cdot(-4) - 4\cdot 7\cdot 3 - (-5)(-3)(-4) - 2\cdot(-2)\cdot 8 =$$
$$= -280 - 18 + 32 - 84 + 60 + 32 = -258.$$

Відповідь: $\Delta = -258$.

3. Розв'язати рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язання: використовуючи розклад визначника за елементами рядка, отримаємо

$$1\cdot\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 15 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 15 \end{vmatrix} + x\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$1\cdot(-75-1) - 3\cdot(60+2) + x\cdot(-4+10) = 0;$$

$$x = \frac{262}{6} \approx 43{,}667.$$

Відповідь: $x = \dfrac{262}{6} \approx 43{,}667$.

4. Знайти визначник IV порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання:

При обчисленні визначника замість правила Саррюса скористаємось способом зниження порядку. Якщо скупчити нулі у деякому рядку (чи стовпці) визначника, то, розклавши його за елементами такого рядка (чи стовпця) (у якому всі елементи, окрім одного, нульові обчислення визначника n (IV) порядку зведеться до обчислення визначника $n-1$ (III) порядку. Так знаходимо

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{II р.} - \text{I р.} \\ \text{III р.} - \text{I р.} \\ \text{IV р.} + 4\cdot\text{I р.} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 14 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 14 \\ 8 & 14 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{II р.} + 3\cdot\text{I р.} \\ \text{III р.} - 8\cdot\text{I р.} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 38 \\ 0 & 38 & -60 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 38 \\ 38 & -60 \end{vmatrix} =$$

$$= 240 - 1444 = -1204.$$

Відповідь: $\det A = -1204$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником матриці?

2. За яким правилом обчислюється визначник другого, третього порядків?

3. Назвіть найважливіші властивості визначників.

4. Що таке мінор?

5. Як знайти алгебраїчне доповнення?

6. Чому дорівнює визначник якщо матриця вироджена?

7. До якої матриці не можна знайти визначник?

8. Скільки ви знаєте способів обчислення визначника? Назвіть їх.

М.01.ЛР.04. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗНАХОДЖЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

1) Якщо дві матриці A і B – квадратні одного і того ж порядку, а їх добуток $A \cdot B$ – одинична матриця

$$A \cdot B = E,$$

то матриця B називається матрицею оберненою до A і позначається символом A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = E. \qquad (1)$$

Потрібно мати на увазі, що квадратна матриця A і її обернена A^{-1} комутативні, тобто

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

2) Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб визначник $|A|$ матриці A не дорівнював нулю:

$$|A| \neq 0, \qquad (2)$$

тобто матриця A не повинна бути особливою (виродженою).

3) Якщо $\widetilde{A}$ **–** союзна (приєднана) матриця для матриці A, то обернену матрицю знаходимо за формулою

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}. \qquad (3)$$

4) Для одержання приєднаної матриці необхідно із алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A скласти нову матрицю і транспонувати її. Союзну матрицю позначають символом $\widetilde{A}$ і записують так :

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

5) Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаються через мінори за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (5)$$

2. Завдання на допуск студента до проведення лабораторного заняття

1. При якому значенні елемента a_{22} у матриці

$$A = \begin{bmatrix} 25+\alpha & \alpha - 43 \\ 27 & a_{22} \end{bmatrix}$$

обернена матриця не існує?

2. Знайти значення елемента $\widetilde{a}_{31}$ союзної матриці $\widetilde{A}$ по відношенню до матриці

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 45 & 10 & 1 \\ 5 & 45-\alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Існує чи не існує у матриці

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 45 & 10 & 1 \\ 5 & 45 - \alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

обернена матриця A^{-1}? Якщо існує, то вказати значення визначника $|A|$.

4. Знайти значення елемента матриці a_{32} оберненої матриці A^{-1} по відношенню до матриці.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 45 & 10 & 1 \\ 5 & 45 - \alpha & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до лабораторного заняття

1.При якому значенні елемента a_{22} у матриці

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ -3 & a_{22} \end{bmatrix}$$

обернена матриця не існує?

Розв'язання:

Для того, щоб у матриці не існувала обернена матриця необхідно і достатньо, щоб вона була вироджена, тобто щоб визначник матриці дорівнював нулю.

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\begin{vmatrix} 11 & 12 \\ -3 & a_{22} \end{vmatrix} = 11 \cdot a_{22} + 36;$$

$$11 \cdot a_{22} + 36 = 0;$$

$$a_{22} = -\frac{36}{11} \approx -3{,}273.$$

Відповідь: $a_{22} \approx -3{,}273$.

2. Знайти значення $\tilde{a}_{31}$ союзної матриці $\tilde{A}$ по відношенню до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Використовуючи (5), дістанемо

$$\tilde{a}_{31} = A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 14 \cdot 7 - 9 \cdot 8 = 26;$$

Відповідь: $\tilde{a}_{31} = 26$.

3. Існує чи не існує у матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

обернена матриця A^{-1} ? Якщо існує, то вкажіть значення визначника $|A|$

Розв'язання: Згідно з (2), для того, щоб відповісти на поставлене запитання, необхідно знайти визначник матриці A. Обчислимо визначник матриці A за правилом Саррюса

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 11 \\ 14 & 9 \\ 8 & 7 \end{matrix} =$$

$$= 2\cdot 9\cdot 6 + 11\cdot 13\cdot 8 + 1\cdot 14\cdot 7 - 1\cdot 9\cdot 8 - 2\cdot 13\cdot 7 - 11\cdot 14\cdot 6 = 172.$$

Відповідь: Оскільки $|A| \neq 0$, то у матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

4. Знайти значення елемента a_{32}^{-1} оберненої матриці A^{-1} по відношенню до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 14 & 9 & 13 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Розв’язання: Використовуючи (5), отримаємо

$$|A| = 172,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(14-88) = 74.$$

Згідно з (3) $$a_{32}^{-1} = \frac{A_{23}}{|A|} = \frac{74}{172} \approx 0{,}43.$$

Відповідь: $a_{32}^{-1} \approx 0{,}43$.

4. Завдання та вправи до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Знайти матрицю обернену до матриці?

$$A = \begin{bmatrix} 65-\alpha & 25 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

2. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 50 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha - 45 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

3. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3+\alpha & 5 \\ 2+\alpha & 4+\alpha & 8+\alpha \\ 2 & 7+\alpha & 6 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

5. Приклади розв’язання задач та вправ до самостійної роботи студентів на лабораторному занятті

1. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

і ввести суму її коефіцієнтів.

Розв’язання: Обчислимо визначник матриці A

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 9 \cdot 14 - 2 \cdot 3 = 120 .$$

На основі (3), (5) маємо $A_{11} = 14;$ $A_{12} = -3;$ $A_{21} = -2;$ $A_{22} = 9$, тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{120}\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}117 & -0{,}017 \\ -0{,}025 & 0{,}075 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: сума коефіцієнтів оберненої матриці

$$S = 0{,}117 - 0{,}025 - 0{,}017 + 0{,}075 = 0{,}15\,.$$

2. Знайти матрицю обернену до матриці

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A

$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \cdot 9 \cdot 16 + 1 \cdot 3 \cdot 18 + 11 \cdot 4 \cdot (-3) - 18 \cdot 9 \cdot 4 - 4 \cdot 1 \cdot 16 - 12 \cdot (-3) \cdot 4 = -88\,.$$

Застосовуючи (5), обчислимо алгебраїчні доповнення матриці A

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = 144 + 9 = 153,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -(64 - 54) = -10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 162 = -174,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = -(16 - 33) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = 192 - 198 = -6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -(-36 - 18) = 54,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 99 = -96,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}12 & 11\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-(36-44)=8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}12 & 11\\ 4 & 9\end{vmatrix}=108-4=104.$$

Відповідно до (4) союзна матриця має вигляд

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}153 & -49 & -96\\ -10 & -6 & 8\\ -174 & 54 & 104\end{bmatrix}.$$

Підставляючи значення $\tilde{A}$ і $|A|$ у (3), отримаємо

$$A^{-1}=-\frac{1}{88}\cdot\begin{bmatrix}153 & -49 & -96\\ -10 & -6 & 8\\ -174 & 54 & 104\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1,739 & 0,557 & 1,091\\ 0,114 & 0,068 & -0,091\\ 1,977 & -0,614 & -1,182\end{bmatrix}$$

Відповідь: сума коефіцієнтів матриці $A^{-1}=0,182$.

6. Питання для самоконтролю

1. Що називається одиничною матрицею?

2. Що називається оберненою матрицею?

3. Яка необхідна і достатня умова існування оберненої матриці?

4. Яка матриця називається союзною?

5. За якими правилами знаходимо обернену матрицю?

6. Чому дорівнює добуток матриці на свою обернену?

7. Як позначається обернена матриця?

М.01.ЛР.05. МАТРИЧНА ФОРМА ЗАПИСУ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА

1. Основні поняття та теореми

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ ------------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Складаємо матрицю A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots & a_{3n} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

матрицю – стовпець X з невідомих та матрицю – стовпець B з вільних членів

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Враховуючи правило множення матриць та умови рівності двох матриць, систему можна записати в такому вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

або, враховуючи зроблені позначення, всю систему рівнянь (2) можна записати компактно у вигляді одного матричного рівняння

$$A \cdot X = B \qquad (3)$$

Якщо матриця A – невироджена, тобто $|A| \neq 0$, то вона має обернену матрицю A^{-1}. Перемноживши зліва обидві частини рівняння (3) на A^{-1} та, враховуючи що $A^{-1} \cdot A = E$ – одинична матриця $(E \cdot X = X)$, знаходимо стовпець невідомих X з рівності

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (4)$$

Якщо визначник $|A| = \Delta$ матриці A n-ого порядку

$$\Delta = |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\dots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

не дорівнює нулю $(\Delta \neq 0)$, то система лінійних рівнянь (1) має єдиний розв’язок, який можна знайти за методом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};\dots\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}\ , \qquad (6)$$

де $\Delta_1 = |A_1|$ – визначник, одержаний з визначника Δ заміною елементів $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \dots, a_{ni}$, i-того стовпця відповідними вільними членами $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ $(i = 1,2,3,\dots,n)$.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а серед визначників $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3, ...,\ \Delta_n$ є хоч один, що не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь (1) розв'язків не має (не сумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = ... = \Delta_n = 0$, то система (1) або зовсім не має розв'язків, або має нескінчену множину розв'язків. У цьому випадку вияснити остаточно сумісна чи не сумісна система рівнянь (1) можна або безпосередньо, або скориставшись теоремою Кронекера – Капеллі.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1,\ x_2,\ x_3, ..., x_n$, що може бути записана в такому вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ -------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (7)$$

Складаємо матрицю A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих та розширену матрицю B системи лінійних рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}... & a_{2n} \\ ---- & ---- & ---- \\ a_{m1} & a_{m2}... & a_{mn} \end{bmatrix},\ B \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ...... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ...... & a_{2n} & b_2 \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{m1} & a_{m2} & ...... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці B дорівнює рангу матриці A, тобто коли $r(B) = r(A)$.

Якщо ж $r(B) \neq r(A)$, точніше $r(A) < r(B)$, система рівнянь (2) не матиме розв'язків.

Крім того, сумісна система рівнянь (2) тоді і тільки тоді має єдиний розв'язок, коли $r(B)=r(A)=n$ – числу невідомих (це може бути тільки в тому випадку, коли $m=n$).

Рангом матриці називається найвищий порядок мінора відмінного від нуля.

У лінійній алгебрі доведено, що ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків цієї матриці (тобто рівнянь системи) чи стовпців.

Однорідною системою n лінійних рівнянь з n невідомими називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=0, \\ ------------------------ \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}, \qquad (8)$$

тобто система рівнянь виду (1), в яких усі вільні члени дорівнюють нулю. Очевидно, що така система завжди має нульовий розв'язок:

$$x_1=0,\ x_2=0,\ldots,\ x_n=0.$$

Якщо визначник $|A|=\Delta\neq 0,$ то цей розв'язок буде єдиним.

Можна довести, що однорідна система рівнянь (8) має ненульові розв'язки в тому і тільки тому випадку, коли

$$|A|=\Delta=0.$$

Метод Гаусса та його різновиди детально описано в літературі, тому його застосування буде пояснено при розв'язанні окремих конкретних систем лінійних рівнянь виду (1), (7), (8).

2. Завдання на допуск студента до лабораторного заняття

1. Користуючись формулами Крамера, знайти значення невідомого $\boldsymbol{x_1}$ системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (\alpha-65)x_1+2(\alpha-40)x_2=2, \\ -3x_1-4x_2=4. \end{cases}$$

2. Знайти значення невідомого x_2 системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (5+\alpha) & -3 \\ 0 & -1 & (\alpha-40) & 2 \\ 0 & 0 & 1 & (\alpha-45) \end{array}\right].$$

3. Визначити, сумісна чи не сумісна система рівнянь

$$\begin{cases} (\alpha-30)x_1+2(\alpha-30)x_2=-3, \\ 7x_1+14x_2=3(\alpha-40). \end{cases}$$

Вказати значення визначника Δx_1.

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки системи лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} (\alpha+5)x_1+4x_2+2x_3=0, \\ 2(\alpha+5)x_1+5x_2+4x_3=0, \\ (\alpha+5)x_1+7x_2+2x_3=0, \end{cases}$$

і обчислити значення невідомого x_1, коли відповідне значення $x_3=-30$.

5. Визначити ранг матриці

$$A=\begin{bmatrix} -9 & 4 & 18 \\ 2(\alpha-21) & 3(\alpha-21) & -4(\alpha-21) \\ -5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

3. Приклад виконання завдання на допуск студента до лабораторного заняття

1. Користуючись формулами Крамера, знайти значення невідомого x_1 системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 19x_1 + 30x_2 = 2, \\ -5x_1 - 4x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 30 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 19 & 30 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -76 + 150 = 74.$$

Оскільки $\Delta = 74 \neq 0$, то значення невідомого x_1 можна знайти, скориставшись формулами (6)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ де } \quad \Delta_1 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 30 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 90 = -98.$$

Тому $x_1 = \dfrac{-98}{74} = -\dfrac{49}{37}$, або $x_1 \approx -1,3243$.

Відповідь: $x_1 \approx -1,3243$.

2. Знайти значення невідомого x_2 системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 21 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -32 \end{array}\right]$$

Розв'язання: Систему лінійних рівнянь з даною розширеною матрицею B можна записати в такому вигляді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ 4x_3 \ \ = 3, \\ \qquad - x_2 + 21x_3 = -3, \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = -32. \end{cases}$$

Звідки

$$x_3 = -32, \quad x_2 = 21x_3 + 3 = 21 \cdot (-32) + 3 = -669.$$

Відповідь: $x_2 = -669$.

3. Визначити сумісна чи не сумісна система рівнянь

$$\begin{cases} 27x_1 + 54x_2 = -7, \\ \ 5x_1 + 10x_2 = 53. \end{cases}$$

Вказати значення визначника Δx_1.

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{bmatrix} 27 & 54 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 27 & 54 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 270 - 270 = 0.$$

Обчислюємо визначник

$$\Delta x_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} -7 & 54 \\ 53 & 10 \end{vmatrix} = -70 + 2862 = 2792 .$$

Відповідь: оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta x_1 = 2792 \neq 0$, то дана система рівнянь розв'язків не має (не сумісна).

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 46x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 69x_1 + 14x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити значення невідомого x_1, коли відповідне значення $x_3 = -2$.

Розв'язання: Оскільки третє рівняння даної системи є сумою двох перших рівнянь, то його можна виключити з системи і тоді вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 46x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 = -3x_3, \\ 46x_1 + 9x_2 = -6x_3, \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t (тобто x_3) будь-яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 23x_1 + 5x_2 = -3t, \\ 46x_1 + 9x_2 = -6t. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння системи перше рівняння, помножене на два, одержимо

$$-x_2 = 0$$

$$x_2 = 0,$$

тоді $23x_1 = -3t;\ \ x_1 = -\dfrac{3}{23}t.$

Таким чином, розв'язок даної системи рівнянь буде

$$x_1 = -\frac{3}{23}t, \quad x_2 = 0, \quad \text{та } \ x_3 = t, \quad \text{де } t \in R.$$

Відповідно до умови задачі $x_3 = -2$ при $t = -2$, а тому необхідне значення невідомого

$$x_1 = \left(-\frac{3}{23}\right)\cdot(-2) = \frac{6}{23}, \text{ або } x_1 \approx 0{,}2608.$$

Відповідь: $x_1 \approx 0{,}2608$ **;** $x_2 = 0$**;** $x_3 = -2$.

5. Визначити ранг матриці

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання: Третій рядок даної матриці є лінійною комбінацією першого та другого її рядків, тобто якщо до відповідних елементів третього рядка додати елементи першого та другого рядків, то одержимо матрицю

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ранг якої дорівнює рангу даної матриці ***A***, $r(A) = r(B)$.

Визначник

$$|B| = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

згідно з властивостями визначників, маємо $|A| = |B| = 0$.

Таким чином, $r(A) = r(B) < 3$. Оскільки мінор другого порядку матриці A (і матриці B)

$$M_2 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 21 = -26 \neq 0, \text{ то } r(A) = r(B) = 2.$$

Відповідь: $r(A) = r(B) = 2.$

4. Задачі та вправи до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Записати у матричній формі дану систему лінійних рівнянь та знайти її розв'язки матричним способом (за допомогою оберненої матриці) :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 + (\alpha - 20)x_2 - 3x_3 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

2. Розв'язати дану систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими за допомогою визначників (правило Крамера).

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = (\alpha - 30), \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + (\alpha - 31)x_3 = -5. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

3. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь. Приведення даної системи до "ступінчатого" виду виконати шляхом перетворення розширеної матриці цієї системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = (\alpha - 35), \\ 5x_1 - 8x_2 - 16x_3 = -15, \\ x_1 - 3x_2 + (\alpha - 34)x_3 = -8. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв'язки даної однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими :

$$\begin{cases} 3x_1 + (\alpha + 2)x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 + (\alpha + 2)x_2 - 9x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2(\alpha + 2)x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 2$.

5. Знайти всі розв'язки даної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2\,(\alpha + 3)x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -10, \\ 7(\alpha + 3)x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 5, \\ 3(\alpha + 3)x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 25 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 1$.

5. Приклад розв'язання задач та вправ до самостійної роботи студента на лабораторному занятті

1. Записати в матричній формі дану систему лінійних рівнянь та знайти її розв'язки матричним способом (за допомогою оберненої матриці):

$$\begin{cases} 21x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = -16, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв'язання: Якщо A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X – матриця-стовпець невідомих $x_1,\ x_2,\ x_3$. та B – матриця – стовпець з вільних членів:

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix},$$

дану систему рівнянь можна записати в матричній формі так:

$$\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

або $A \cdot X = B$.

Оскільки визначник

$$|A| = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= 21 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 21 \cdot 6 \cdot 2 = -165 \neq 0,$$

то для матриці A існує обернена матриця A^{-1}, а тому значення невідомих $x_1,\ x_2,\ x_3$ можна знайти за формулою $X = A^{-1} \cdot B$, або

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Знайшовши обернену матрицю

$$A^{-1} = -\frac{1}{165} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix},$$

одержимо, що

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 90 \\ -852 \\ -552 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{33} \\ \frac{284}{55} \\ -\frac{184}{55} \end{bmatrix}.$$

Звідки $x_1 = -\frac{18}{33}$, $x_2 = \frac{284}{55}$, $x_3 = -\frac{184}{55}$.

Перевірка : $$21 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + 3 \cdot \frac{284}{55} + 3 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = -6,$$

$$2 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + \frac{284}{55} + 6 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = -16,$$

$$3 \cdot \left(-\frac{18}{33}\right) + 2 \cdot \frac{284}{55} + 2 \cdot \left(-\frac{184}{55}\right) = 2.$$

Таким чином значення невідомих

$$x_1 = -\frac{18}{33} \approx -0,5455, \quad x_2 = \frac{284}{55} \approx 5,1636, \quad x_3 = -\frac{184}{55} \approx -3,3455$$

знайдені правильно, а їх сума $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{154}{121} \approx 1,2727.$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{154}{121} \approx 1,2727.$

2. Розв'язати дану систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими за допомогою визначників (правило Крамера):

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 19, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 8x_2 - 21x_3 = -11. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів при невідомих для даної системи рівнянь

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{bmatrix}.$$

Її визначник

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)\cdot(-21) + (-4)\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot(-8) - 3\cdot(-2)\cdot 3 -$$

$$-1\cdot(-4)\cdot(-21) - 3\cdot 1\cdot(-8) = 48.$$

Оскільки $\Delta = 48 \neq 0$, то значення невідомих x_1, x_2, x_3 можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ -11 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 64,$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 19 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & -11 & -21 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_3 = |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 19 \\ 1 & -2 & 8 \\ 3 & -8 & -11 \end{vmatrix} = 80.$$

Тому $x_1 = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}$; $x_2 = \frac{-120}{48} = -\frac{5}{2}$; $x_3 = \frac{80}{48} = \frac{5}{3}$.

Виконавши перевірку, безпосередньо можна впевнитися, що значення невідомих x_1, x_2, x_3 знайдено правильно, а їх сума

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}5.$

3. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь. Приведення даної системи до "ступінчастого" виду виконати шляхом перетворення розширеної матриці цієї системи :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -25, \\ 3x_1 - 8x_2 - 18x_3 = -15, \\ x_1 - 4x_2 - 28x_3 = 25. \end{cases}$$

В остаточній відповіді вказати суму значень невідомих

$$x_1 + x_2 + x_3.$$

Розв'язання: Складемо розширену матрицю даної системи (стовпець вільних членів цієї матриці відокремлюватимемо лінією) :

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 3 & -8 & -18 & -15 \\ 1 & -4 & -28 & 25 \end{array}\right].$$

Помножимо елементи першого рядка цієї матриці на 3 і результати додамо до відповідних елементів другого рядка, які попередньо були помножені на (-2). Потім помножимо елементи третього рядка на (-2) і додамо до них відповідні елементи першого рядка. Одержимо матрицю :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 0 & 7 & 48 & -45 \\ 0 & 5 & 60 & 75 \end{array}\right].$$

Помножимо елементи другого рядка останньої матриці на (-5) і результати додамо до відповідних елементів третього рядка, які попередньо помножимо на 7. Одержимо матрицю :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -25 \\ 0 & 7 & 48 & -45 \\ 0 & 0 & 180 & -300 \end{array}\right].$$

Таким чином, дану систему лінійних рівнянь можна записати у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -25, \\ \qquad 7x_2 + 48x_3 = -45, \\ \qquad\qquad 180x_3 = -300. \end{cases}$$

Звідки

$$x_3 = \frac{-300}{180} = -\frac{5}{3}, \text{ або } x_3 = -1{,}6667;$$

$$7x_2 = -45 + 80\ ,\ x_2 = 5;$$

$$2x_1 - 15 - \frac{20}{3} = -25\ ,\ \text{ а тому } x_1 = -\frac{5}{3}, \text{ або } x_1 = -1{,}6667.$$

Виконавши перевірку, безпосередньо можна впевнитись, що значення невідомих x_1, x_2, x_3 знайдено правильно, а їх сума

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{5}{3} + 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}6667.$$

Відповідь: $x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}6667.$

4. Методом Гаусса знайти всі ненульові розв’язки даної однорідної системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 - 3x_3 = 0, \\ 11x_1 + 80x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 64x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 128$.

Розв'язання: Складемо матрицю A з коефіцієнтів даної системи

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 4 & 64 & -5 \end{bmatrix}$$

Помножимо елементи першого рядка цієї матриці на 3 і результати додамо до відповідних елементів третього рядка. Одержимо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 22 & 160 & -14 \end{bmatrix}.$$

Розділимо елементи третього рядка на 2 і результати віднімемо від відповідних елементів другого рядка. Одержимо матрицю:

$$\begin{bmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 22 & 160 & -14 \end{bmatrix}.$$

Враховуючи властивості визначників, бачимо що вказані три матриці мають рівні визначники, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 4 & 64 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 11 & 80 & -7 \\ 22 & 160 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 32 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 22 & 160 & -14 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $|A| = 0$, а тому дана однорідна система лінійних рівнянь має ненульові розв'язки.

Друге рівняння даної системи є лінійною комбінацією першого та третього рівнянь. Дійсно, помноживши перше рівняння на 3, додавши далі до третього рівняння, та розділивши потім останній результат на 2, одержимо друге рівняння. А тому його можна виключити з системи, що не змінить її розв'язків. Одержимо рівносильну систему рівнянь

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 64x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3x_3, \\ 4x_1 + 64x_2 = 5x_3. \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t – будь-яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3t \\ 4x_1 + 64x_2 = 5t \end{cases}\left|\begin{matrix} \cdot(-4) \\ \cdot 6 \end{matrix}\right. .$$

Помножимо перше рівняння на (-4) і додамо його до другого рівняння цієї системи, яке попередньо домножимо на 6. Одержимо систему

$$\begin{cases} 6x_1 + 32x_2 = 3t, \\ \qquad 256x_2 = 18t. \end{cases}$$

Звідки $x_2 = \dfrac{9}{128}t, \quad x_1 = \dfrac{1}{8}t.$

Виконавши безпосередньо перевірку, можна впевнитись, що $x_1 = \dfrac{1}{8}t$, $x_2 = \dfrac{9}{128}t$, $x_3 = t$ є розв'язки даної системи рівнянь.

Згідно з умовою задачі $x_3 = 128$ при $t = 128$, тому при цьому $x_1 = 9$, $x_2 = 16$, а їх сума $x_1 + x_2 = 25$.

Відповідь: $x_1 + x_2 = 25$.

5. Знайти всі розв’язки даної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -7, \\ 34x_1 + 7x_2 - 9x_3 = -33, \\ 68x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 12 \end{cases}$$

і обчислити суму значень невідомих $(x_1 + x_2)$, коли відповідне значення $x_3 = 1$.

Розв’язання: Друге рівняння даної системи є лінійна комбінація першого та третього рівнянь. Дійсно, помноживши перше рівняння на 3 та віднімаючи від цього результату третє рівняння, одержимо друге рівняння, а тому його можна виключити з системи рівнянь, що не змінить її розв’язків. Одержимо рівнозначну систему рівнянь

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 - 4x_3 = -7, \\ 68x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$$

Позначимо $x_3 = t$, де t – будь – яке дійсне число, тоді одержимо систему

$$\begin{cases} 32x_1 + 4x_2 = 4t - 7, \\ 68x_1 + 5x_2 = 3t + 12. \end{cases}$$

Оскільки визначник матриці системи

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 32 & 4 \\ 68 & 5 \end{vmatrix} = -112 \neq 0,$$

то значення невідомих x_1, x_2 останньої системи рівнянь можна знайти за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

де
$$\Delta_1 = |A_1| = \begin{vmatrix} (4t - 7) & 4 \\ (3t + 12) & 5 \end{vmatrix} = 8t - 83,$$

$$\Delta_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} 32 & (4t-7) \\ 68 & (3t+12) \end{vmatrix} = -176t + 860.$$

Тому $x_1 = \dfrac{8t-83}{-112} = \dfrac{83-8t}{112}$; $x_2 = \dfrac{-176t+860}{-112}$;

Виконавши безпосередньо перевірку, можна впевнитись що це розв'язок даної системи

$$\begin{cases} 32 \cdot 0,6696 + 4 \cdot (-6,1071) - 4 \cdot 1 = -7,0012 \approx -7 \\ 68 \cdot 0,6696 + 5 \cdot (-6,1071) - 3 \cdot 1 = 11,9973 \approx 12 \end{cases}$$

Згідно з умовою задачі $x_3 = 1$ при $t = 1$, то $x_1 = \dfrac{75}{112} = 0,6696$, $x_2 = \dfrac{684}{-112} = -6,1071$, а їх сума $x_1 + x_2 = -5,4375$.

Відповідь: $x_1 = 0,6696$, $x_2 = -6,1071$.

6. Питання для самоконтролю.

1. Який вигляд має система $\boldsymbol{n}$ лінійних рівнянь з $\boldsymbol{n}$ невідомими?

2. Яким чином система лінійних рівнянь записується у матричному вигляді ?

3. Запишіть формули Крамера для знаходження розв'язків системи лінійних рівнянь.

4. Яка умова сумісності системи лінійних рівнянь?

5. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь.

6. Поясніть метод Гаусса щодо розв'язування систем лінійних рівнянь.

7. Які можливі випадки розв'язку системи?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985.-416 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1986. - 272 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. - К.: Вища школа, 1993. – 647 с.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М.: Наука, 1986.-224 с.
5. Шкіль М.І. та ін. Вища математика (МЛ. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова): У 3-х кн. - К.: Либідь, 1994. - Кн. 1 - 276 с, Кн. 2 - 351 с, Кн. 3 - 351 с.
6. Барковський В.В., Барковська Н.В. Основи елементарної математики. – К., НАУ, 1999. – 236 с.
7. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. У 2-х ч. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.
8. Бугір М.К. Математика для економістів. Посібник. – К., Академія, 2003. – 520 с.
9. Валєєв К.Г., Джаладова І.А. Вища математика: Навч. Посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001. – Ч.1. – 546с.
10. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.,: Академія, 2002. – 432 с.

Навчальне видання

Вища математика.
Модуль: «Елементи лінійної алгебри» до виконання самостійних робіт здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності
071 «Облік і оподаткування» денної форми навчання.

Формат Ум. друк. арк.
Тираж___прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.