

Д. В. Бабенко, О. А. Горбенко, Н. А. Доценко

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ:
ПРАКТИКУМ ДЛЯ НАВЧАННЯ В УМОВАХ
ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО
СЕРЕДОВИЩА**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

За редакцією проф. Д. В. Бабенка

Миколаїв

МНАУ

2018

УДК 539.3/6

Б12

Авторський колектив:

Д. В. Бабенко, О. А. Горбенко, Н. А. Доценко

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Миколаївського національного аграрного університету від 05.06.18 р., протокол №10.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

Р. М. Тріщ – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри стандартизації, сертифікації та метрології, Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків);

С. А. Устенко – д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського;

В. С. Блінцов – д-р техн. наук, професор, перший проректор, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова (м. Миколаїв).

Бабенко Д. В.

Б12 Механіка матеріалів і конструкцій: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища: навчальний посібник / Д. В. Бабенко, О. А. Горбенко, Н. А. Доценко. – Миколаїв : МНАУ, 2018. – 384 с.

ISBN 978-617-7149-30-8

Електронні освітні ресурси і створене на їх базі інформаційно-освітнє середовище мають чималий потенціал для підвищення якості навчання. У навчальному посібнику представлено завдання, які можна виконати, використовуючи інформаційно-освітнє середовище, що містить в собі мультимедійні презентації до практичних робіт, електронні тестові навчальні тренажери, онлайн лабораторні роботи з мультимедійним супроводом, інтерактивні лекції з аудіовізуальним супроводом, онлайн глосарій тощо. У посібнику висвітлено основні питання курсу механіки матеріалів і конструкцій, а саме: деформації стрижнів, статично невизначені системи, складний опір та стійкість рівноваги деформованих систем. При виконанні наведених в посібнику завдань здобувач вищої освіти має навчитися визначати переміщення балок при згині, розраховувати статично невизначені рами за методом сил, виконувати розрахунок стрижнів на позацентровий розтяг і стиск та визначати стійкість стиснутих стрижнів. Розроблений для вищих закладів освіти III і IV рівнів акредитації, фахівців, науково-педагогічних працівників та здобувачів вищої освіти.

УДК 539.3/6

ISBN 978-617-7149-30-8

© Миколаївський національний аграрний університет, 2018

©Бабенко Д. В., Горбенко О. А., Доценко Н. А., 2018

ВСТУП

Навчальний посібник відповідає програмі курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» і призначений для підготовки спеціалістів з технічних спеціальностей вищих аграрних закладів освіти III-IV рівнів акредитації.

Застосування комп'ютерних технологій у навчанні є необхідною умовою досягнення цілей інформатизації освіти. Пріоритетом для розвитку системи освіти нині є впровадження сучасних інформаційно-комп'ютерних технологій, впровадження яких здійснюється шляхом використання можливостей Інтернет, упровадження гнучких технологій дистанційної та змішаної освіти.

Інформаційно-освітнє середовище поєднує широкий вибір навчального програмного забезпечення та мережних технологій, включаючи електронну пошту, форуми, програмне забезпечення колективного використання, чати, відео конференції, записи аудіо та відео, та широке коло навчальних інструментів, що базуються на використанні Веб-технологій.

Важливою умовою підвищення якості навчання є систематичний контроль за процесом навчальної діяльності, її своєчасна корекція. Інформаційно-освітнє середовище має досить широкі можливості для цього. Воно допомагає здійснювати поточну, тематичну і підсумкову перевірку, постійно накопичувати інформацію про результати навчальної діяльності, зокрема, результатах розв'язання навчальних завдань. Засоби контролю в умовах інформаційно-освітнього середовища можуть виступати як засіб формування самооцінки і самоконтролю.

Розробка навчальних матеріалів нового покоління створює можливість широкого представлення, обговорення та використання матеріалів у мережі. Створення інформаційно-освітнього середовища передбачає наявність і функціонування інформаційних освітніх середовищ навчальних закладів на основі сучасних інформаційних технологій, систем і засобів навчання.

У навчальному посібнику викладено загальні положення курсу механіки матеріалів і конструкцій, а саме: поняття геометричних характеристик плоских перерізів та їх знаходження, розрахунок інженерних об'єктів на центральний розтяг та стиск, кручення, згин,

знаходження основних параметрів інженерних об'єктів у випадку складного опору та визначення стійкості стиснутих стрижнів.

Вивчаючи даний курс, слід зосередити увагу на засвоєнні матеріалу з розрахунку інженерних об'єктів, які підлягають впливу найбільш поширених в інженерній практиці видів деформацій, а саме: розтяг, стиск, кручення, зсув та згин. Навчальний посібник містить необхідний теоретичний матеріал, розділи посібника супроводжуються вирішенням практичних прикладів. Для закріплення теоретичних положень курсу та формування вмінь і навичок представлено варіанти завдань для самостійного розв'язання, тестові завдання, інтерактивні лабораторні роботи та навчальні тренажери. Матеріал навчального посібника може використовуватися здобувачами вищої освіти для самостійної роботи по вивченню курсу та вирішення практичних задач, для виконання навчальних завдань, при підготовці до екзаменів.

Поряд з іншими фундаментальними дисциплінами механіка матеріалів і конструкцій допомагає формувати інженерну думку, необхідну при розробленні та виготовленні інженерних об'єктів різного призначення. В навчальному посібнику розглядаються найпростіші розрахункові моделі конструктивних елементів, вивчаються загальні методи розрахунку інженерних конструкцій, використовуються прості і прозорі підходи до оцінки міцнісних можливостей різних конструктивних елементів при зовнішніх впливах. При проектуванні реальних конструкцій необхідно вирішувати питання міцності, жорсткості та стійкості конструктивних елементів, що визначає можливості всієї конструкції витримувати зовнішні навантаження та знаходиться у стані рівноваги. В механіці матеріалів і конструкцій розглядаються тіла, що деформуються, тобто такі тіла, що можуть змінювати свої розміри і форму при зовнішніх впливах. При цьому широко використовуються методи теоретичної механіки, розрахунковий апарат вищої математики. Нерозривний зв'язок з іншими науками, їх постійний розвиток дозволяють вдосконалювати методи аналізу в механіці матеріалів і конструкцій, використовувати можливості обчислювальної техніки, а також розширити коло загальних питань, необхідних для підготовки сучасних спеціалістів інженерного профілю.

Розділ 1. Основні поняття курсу «Механіка матеріалів і конструкцій»

1.1. Основні положення та гіпотези курсу «Механіка матеріалів і конструкцій»

1.1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Коротка історична довідка. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Дисципліну Механіка матеріалів і конструкцій (ММіК) називають «абеткою» інженера, необхідною для формування інженерної думки майбутнього фахівця технічних спеціальностей.

Під час проектування інженерних об'єктів до них висувається вимога надійності, що передбачає виконання умов міцності, жорсткості та стійкості.

ММіК – це наука про інженерні методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Міцність – це здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій.

Стійкість – це здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги.

Завдання інженера: для того, щоб конструкція у цілому відповідала вимогам надійності, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми, і знаючи властивості матеріалу, з якого вона буде виготовлятися, визначити відповідні розміри залежно від величини і характеру сил, що діють на неї. На перший погляд може здаватися, що для надійності конструкції достатньо збільшити розміри. Дійсно, інколи це призводить до бажаного результату. Але у тих випадках, коли власна вага складає суттєву частину діючих на конструкцію навантажень, збільшення розмірів її елементів, а значить і ваги, не призведе до підвищення міцності. Збільшення розмірів деталей механізмів, які рухаються, призводить до збільшення сил інерції, підвищує навантаження, що є небажаним. З іншого боку, збільшення розмірів конструкції – це збільшення її вартості.

Тому завдання інженерних розрахунків полягає в тому, щоб при менших витратах матеріалу забезпечити більшу надійність конструкції. Взагалі наука базується на теоретично-експериментальних засадах. У теоретичній частині наука базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній – на фізиці й матеріалознавстві.

Виникнення науки ММіК пов'язують з ім'ям видатного італійського вченого Галілео Галілея (1564 – 1642), який проводив досліди щодо вивчення міцності, хоча джерела цієї науки ми бачимо вже в творіннях великого Леонардо да Вінчі. У 1678 р. англійський вчений Роберт Гук (1635 – 1703) установив закон деформування пружних тіл, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон є основним у теорії ММіК.

Швидкий розвиток науки механіки твердих тіл почався наприкінці XVIII століття у зв'язку з бурхливим розвитком промисловості й транспорту. Проблемами міцності займалися академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер, видатні вчені М. О. Белелюбський, М. Г Бубнов, А. М. Воропаєв, А. В. Гадолін, Х. С. Головін, Д. І. Журавський, Ф. С. Ясинський та ін. Розвитку ММіК сприяли роботи іноземних вчених Д. Бернуллі, Т. Кармана, А. Кастільяно, О. Коши, Ш. Кулона, Г. Ламе, А. Лява, Д. Максвелла, К. Мора, Л. Нав'є, Л. Прандтля, С. Пуасона та інших. У XX ст. значну роль у розвитку механіки й поширенні наукових знань у галузі ММіК відіграли підручники видатних учених В. Л. Кирпичова, С. П. Тимошенка, М. М. Беляєва, О. О. Уманського, В. І. Феодосьєва, О. А. Ільюшина, І. А. Біргера, Г.С. Писаренка та інших.

1.1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему

Усі зовнішні навантаження поділяються за:

а) характером прикладання

Зосереджена сила – якщо площа її прикладання досить мала і вважають, що вона прикладена в точці (рис. 1.1, а), має розмірність – (Н, кН).

Розподілене навантаження (рівномірно (рис. 1.1, б) та нерівномірно розподілене (рис. 1.1. в), яке може бути розподілене по

поверхні, довжині і по об'єму. Навантаження розподілене по об'єму – це і є власна вага тіла, сила магнітних полів і т.д.

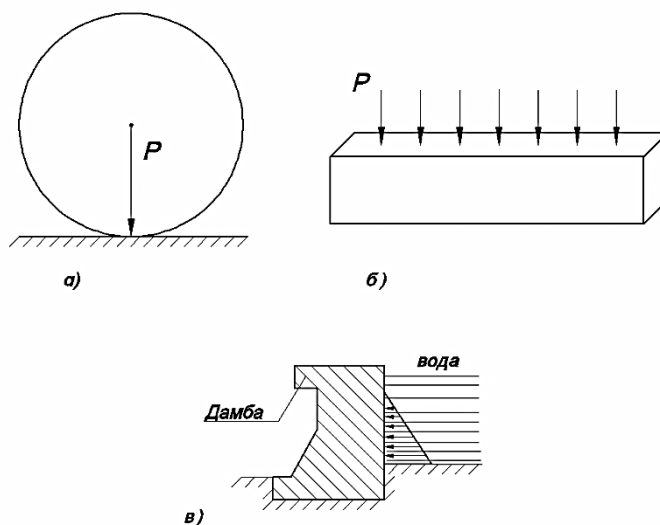


Рис. 1.1. Прикладання навантаження:

а – зосереджене навантаження; б – рівномірно розподілене навантаження; в – нерівномірно розподілене навантаження.

б) за характером зміни

Статичне навантаження – швидкість прикладання незначна і не призводять до появи інших побічних навантажень.

Динамічні навантаження – швидкість прикладання яких значна і вони приводять до появи інерційних сил:

в) за тривалістю дії

Постійної дії (сталі).

Тимчасової дії: можуть бути тривалої дії і короткотривалі.

Перш ніж почати розрахунок будь-якої конструкції (рис. 1.2, а, б) складають так звану розрахункову схему (рис. 1.3, а, б), де конструкцію відображають у вигляді осьової лінії з ідеалізованими опорами. Складаючи розрахункову схему можливими є відхилення від реальних умов: сила прикладається до осі, а не до верхньої площини балки, тому не враховуємо тертя в опорах.

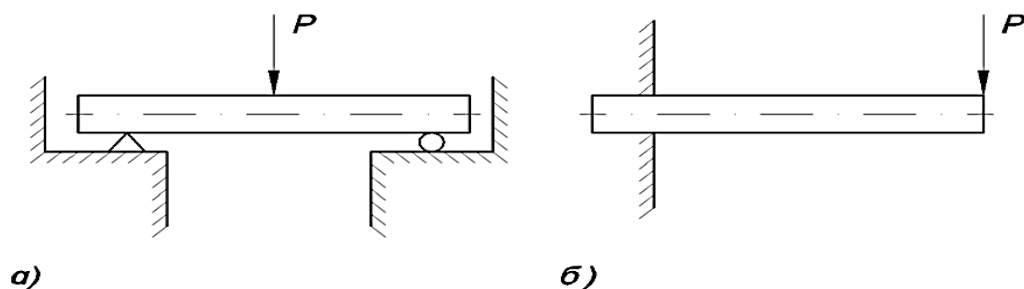


Рис. 1.2. Завантаження конструкцій.

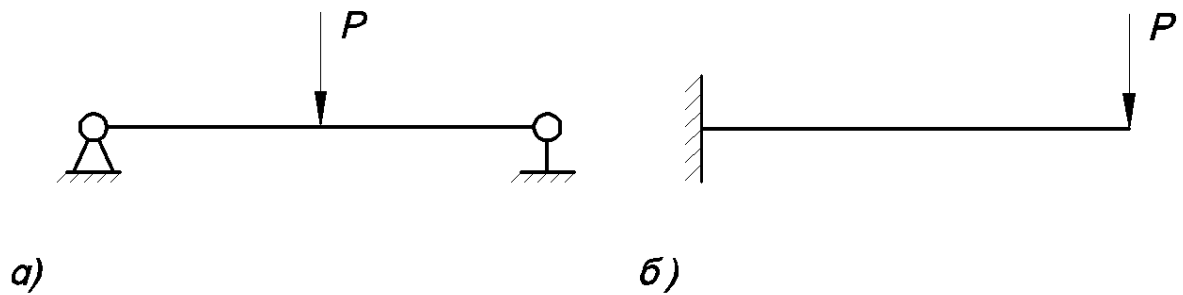


Рис. 1.3. Відповідні розрахункові схеми конструкцій.

1.1.3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Незважаючи на велике розмаїття інженерних рішень, інженерні об'єкти складаються з окремих деталей, вузлів, які мають відповідну (подібну) форму, що можна узагальнити чотирьох видах, які є об'єктами розрахунку ММіК.

До них належать:

а) стрижень (брус) – це геометричне тіло, два розміри якого малі порівняно з третім – довжиною.

Розрізняють такі види стрижнів: прямолінійні, криволінійні, призматичні, постійного і змінного поперечного перерізу (рис.1.4).

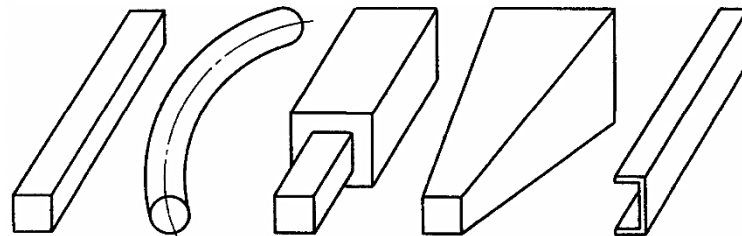


Рис. 1.4. Види стрижнів.

б) пластина – це геометричне тіло, два розміри якого досить великі порівняно із третім – товщиною (рис. 1.5). Пластинами можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд та інше.

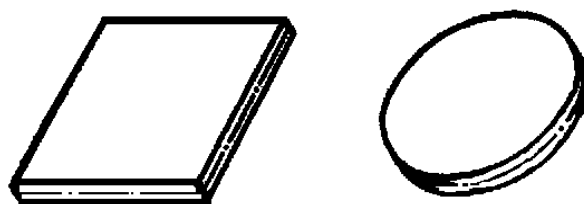


Рис. 1.5. Види пластин.

в) оболонка – це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій поверхні одна від одної. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні, конічні, сферичні та ін. До оболонок належать неплоскі стінки резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу літаків та інше (рис. 1.6).

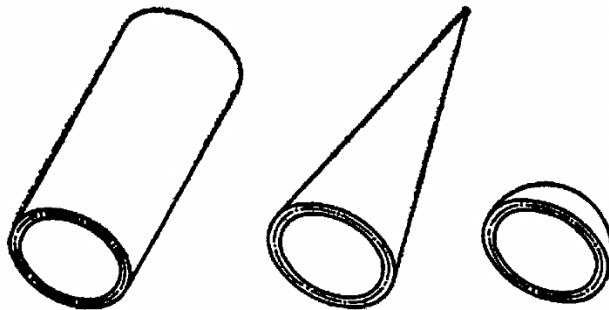


Рис. 1.6. Види оболонок

г) масивне тіло – якщо всі три розміри тіла (об'єкта) одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпирні стіни тощо (рис. 1.7).

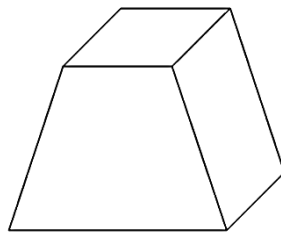


Рис. 1.7. Масивне тіло

1.1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла

Під дією зовнішнього навантаження в результаті зміни взаємного розташування внутрішніх частин тіла, відбувається зміна форми, розмірів і об'єму деталі, тобто відбувається його *деформація*. Але маса тіла при цьому не змінюється.

Таким чином, під деформацією розуміють зміну взаємного розташування внутрішніх частин, що призводить, як правило, до зміни його розмірів, форми та об'єму.

Основними властивостями твердого деформованого тіла є:

Пружність – здатність матеріалу деформуватись під дією зовнішнього навантаження і поновлювати свою форму і розміри після його зняття.

Пластичність – здатність тіла деформуватися і залишатися в деформованому стані після зняття навантаження.

Крихкість – здатність матеріалу до руйнування при малих деформаціях (прикладом такого матеріалу є скло).

Однорідність – якщо механічні властивості матеріалу однакові у всіх його точках.

Ізотропність – якщо властивості матеріалу не залежать від напрямку дії навантаження (прикладом такого матеріалу є сталь, чавун, крейда).

Анізотропність – якщо властивості матеріалу залежать від напрямку дії стислого навантаження (прикладом такого матеріалу є дерево).

Повзучість – це здатність матеріалу до деформування за умови тривалої дії навантаження (рис. 1.8).

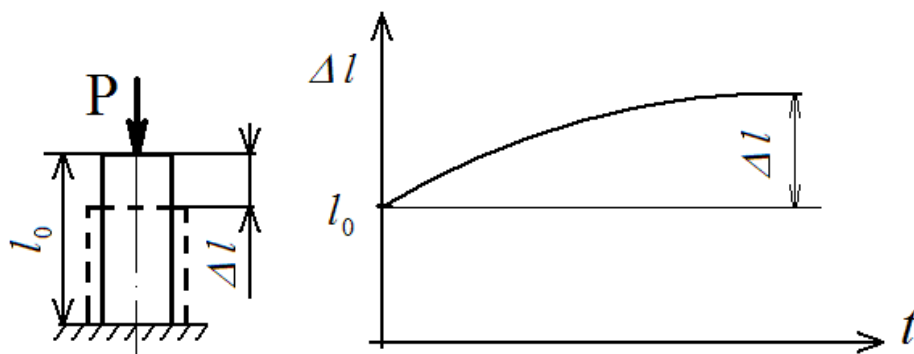


Рис. 1.8. Графічне зображення повзучості.

Релаксація напружень – це зменшення напружень у матеріалі з часом за умови обмеження деформації (рис. 1.9).

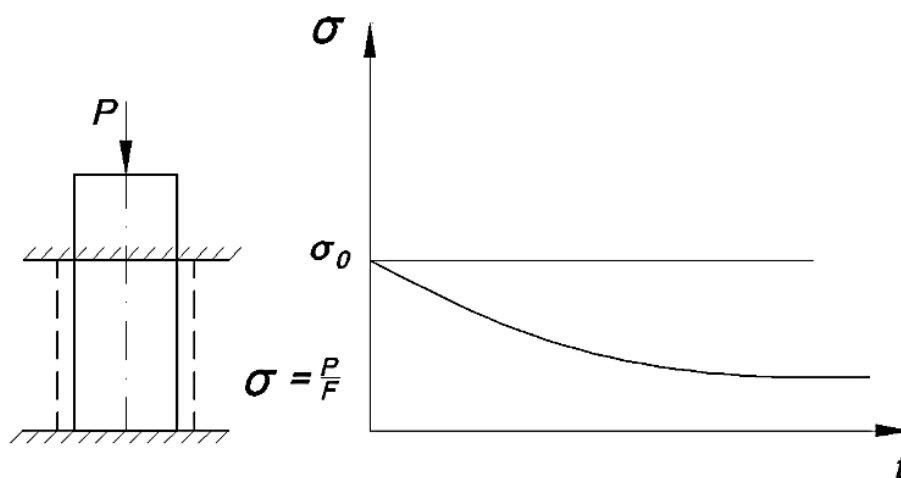


Рис. 1.9. Графічне зображення релаксації.

1.1.5. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Для спрощення методики розрахунків приймають низку гіпотез і принципів щодо властивостей матеріалів і характеру деформування, які в кінцевому результаті не призводять до значних похибок.

Існує низка гіпотез:

1. Гіпотеза про однорідність матеріалу вважає, що у всіх точках тіла властивості однакові.
2. Гіпотеза про ізотропність матеріалу вважає, що для деяких матеріалів їх властивості не залежать від напрямку дії сили.
3. Гіпотеза про абсолютну пружність матеріалу вважає, що після зняття навантаження деталей повністю відновлює свою форму.
4. Гіпотеза про суцільність матеріалу вважає, що матеріал повністю заповнює форму без порожнин та тріщин.
5. Гіпотеза про незначність деформацій щодо до розмірів тіла вважає, що деякі деформації надто малі, щодо розмірів тіла значить ними можна нехтувати. Ця гіпотеза дає можливість застосування умов рівноваги для деформованих систем (рис. 1.10.).

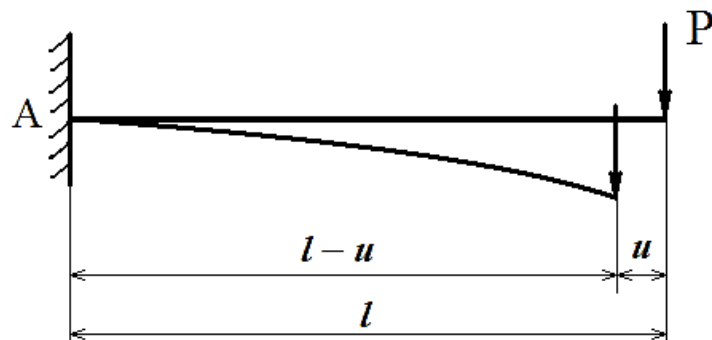


Рис. 1.10. Графічне зображення гіпотези незначності деформацій.

Згинальний момент в точці А:

$$M_A = P(l - u);$$

в якому два невідомих (M_A і u). Приймавши $u = 0$, отримаємо

$$M_A = Pl.$$

6. Гіпотеза про лінійну залежність між деформацією і зусиллям (закон Гука): $\Delta l = kP$.

7. Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції), з яким величина будь-якого зусилля чи деформації від дії кількох

зовнішніх сил може бути знайдена як алгебраїчна сума цих величин від дії кожної сили окремо (рис. 1.11).

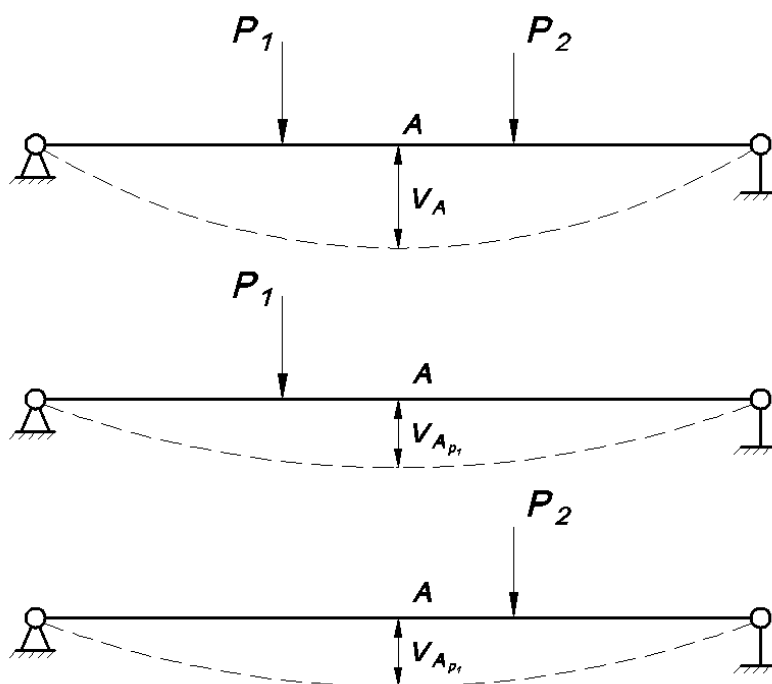


Рис. 1.11. Графічне зображення принципу суперпозиції.

Тобто прогин в точці A від дії двох сил P_1 і P_2 знайдемо:

$$V_A = V_{AP_1} + V_{AP_2} .$$

де: V_{AP_1} – прогин від дії сили P_1 ;

V_{AP_2} – прогин від дії сили P_2 .

8. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі), згідно з якою поперечний переріз, плоский і нормальний до осі перед деформацією і залишається таким же і після деформації (рис. 1.12).

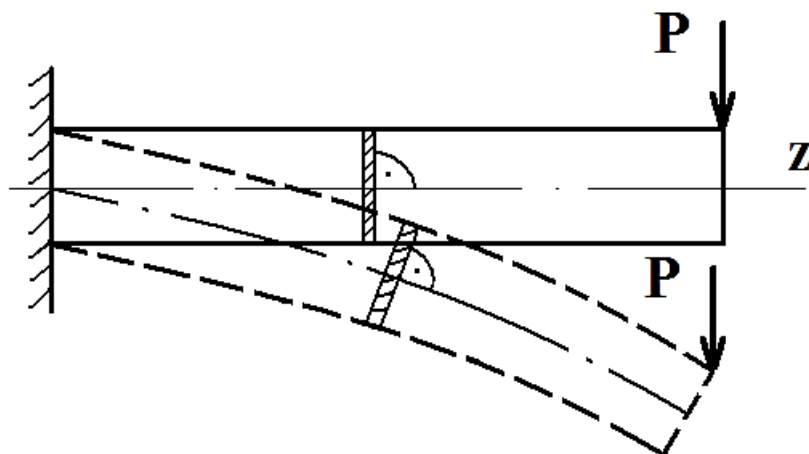


Рис. 1.12. Графічне зображення гіпотези плоских перерізів.

1.2. Основні поняття курсу ММіК

1.2.1. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів

У результаті дії зовнішнього навантаження в будь-якому перерізі деталі виникають внутрішні зусилля, які є результатом взаємодії внутрішньої частини тіла і забезпечують його цілісність і сумісність деформації. Для визначення внутрішніх зусиль застосовують метод перерізів, згідно з яким розтинають стрижень перерізом нормальним до осі на дві частини (рис. 1.13), відкидаючи одну із них, і розглядають рівновагу залишеної частини стрижня.

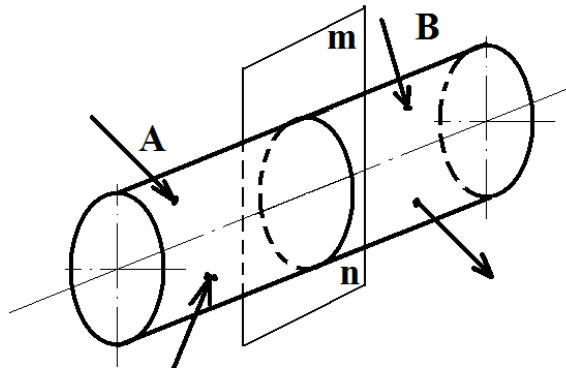


Рис. 1.13. Загальний випадок дії на тіло сил.

Дію відкинутої частини тіла на залишену заміняють внутрішніми зусиллями (рис. 1.14), величину і напрям яких визначають за допомогою рівнянь статки, використовуючи гіпотезу про малість деформації. Внутрішні зусилля узагальнюються до двох силових факторів: \vec{R} – головний вектор; \vec{M} – головний момент. Спроектувавши головний вектор і головний момент на координатній осі отримаємо *шість внутрішніх зусиль*:

N_z – поздовжня сила;

Q_x, Q_y – поперечні сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;

M_z – крутний момент.

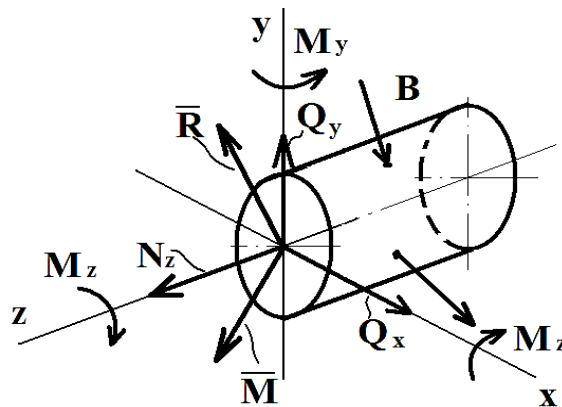


Рис. 1.14. Рівновага залишеної частини стрижня.

Внутрішні зусилля знаходять із рівнянь рівноваги:

$$\Sigma X = 0, \Rightarrow Q_x;$$

$$\Sigma Y = 0, \Rightarrow Q_y;$$

$$\Sigma Z = 0, \Rightarrow N_z;$$

$$\Sigma M_x = 0, \Rightarrow M_x;$$

$$\Sigma M_y = 0, \Rightarrow M_y;$$

$$\Sigma M_z = 0, \Rightarrow M_z.$$

Тобто із шести рівнянь статички знаходимо шість внутрішніх зусиль.

1.2.2. Види простих деформацій стрижня

У разі, коли із шести внутрішніх зусиль не дорівнює нулю тільки одне, стрижень знаходиться в умовах простої деформації, до якої належать:

а) Центральний розтяг (рис. 1.15.).

У поперечному перерізі діє лише поздовжня сила ($N_z \neq 0$).

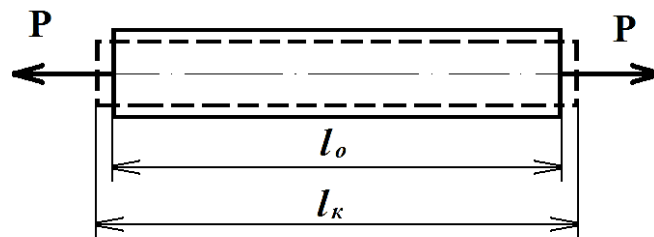


Рис. 1.15. Центральний розтяг.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_k - l_0$ – абсолютне подовження при розтягу;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ – відносне подовження при розтягу.}$$

б) Центральний стиск (рис. 1.16.).

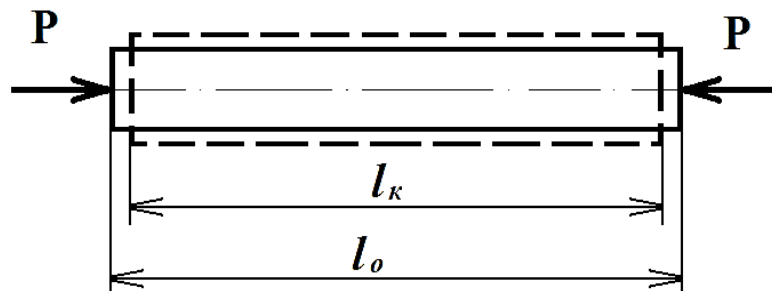


Рис. 1.16. Центральний стиск.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_k - l_o$ – абсолютне укорочення при стиску;

$\varepsilon = - \frac{\Delta l}{l_0}$ – відносне укорочення при стиску.

в) Зріз і зсув (рис. 1.17.–1.18.).

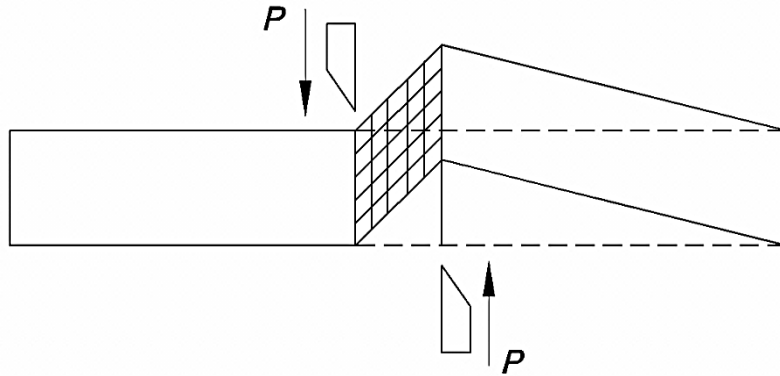


Рис. 1.17. Зріз (зсув).

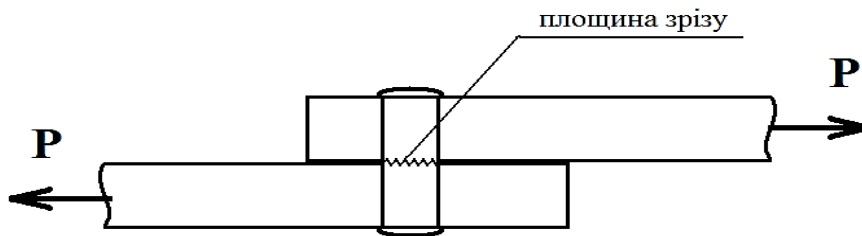


Рис. 1.18. Зріз заклепкового з'єднання.

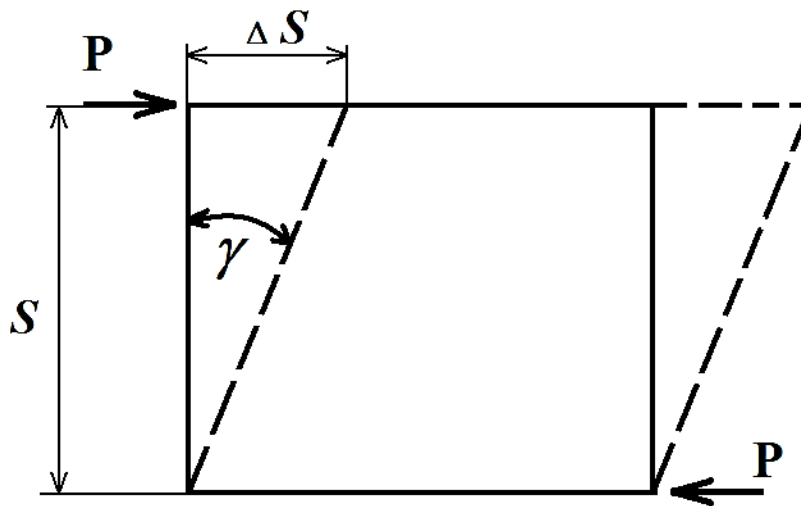


Рис. 1.18. Деформації зсуву.

При зсуві присутні такі деформаційні характеристики (рис.1.18):

ΔS – абсолютний зсув;

$\frac{\Delta S}{S} = \text{tg } \gamma \approx \gamma$ – відносний зсув (кут зсуву)

г) Кручення (рис. 1.19).

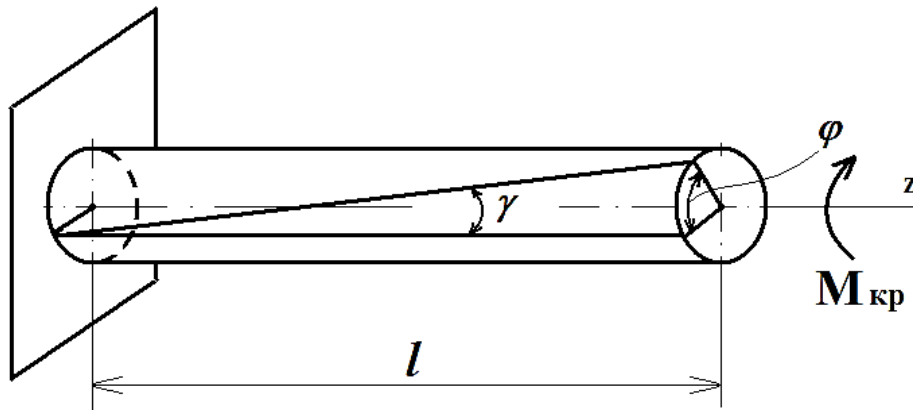


Рис. 1.19. Кручення.

Основні деформаційні характеристики при крученні:

γ – кут зсуву;

φ – кут повороту перерізу;

$\theta = \frac{\varphi}{l}$ – відносний кут повороту.

д) Чистий згин (рис. 1.20).

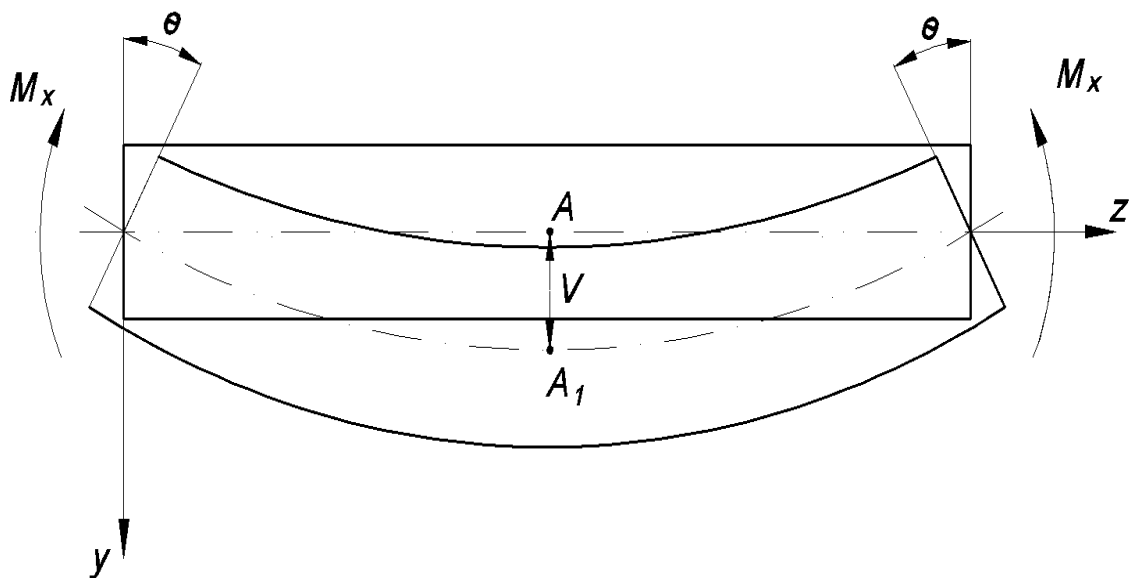


Рис. 1.20. Чистий згин.

При чистому згині у поперечному перерізі виникають деформації, викликані згинальними моментами $M_x \neq 0$.

Основні характеристики при деформаціях чистого згину:

$V_{(z)}$ – прогин;

$\theta_{(z)}$ – кут повороту перерізу.

1.2.3. Поняття про напруження та деформацію в точці

На підставі гіпотези про суцільність матеріалу можна припустити, що внутрішні зусилля розподіленні по всьому поперечному перерізу. Виділимо точку К з елементарною площиною ΔF і прикладемо в цій точці рівнодіючу внутрішніх зусиль ΔR (рис. 1.21).

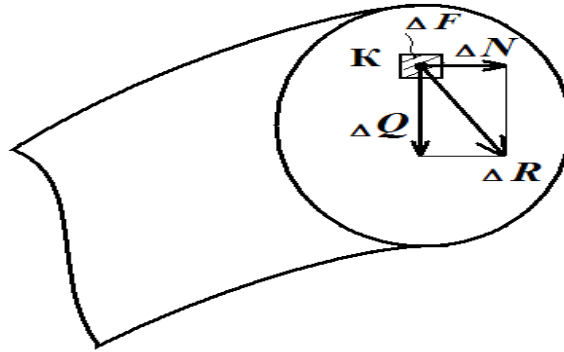


Рис. 1.21. Рівновага внутрішніх зусиль.

$$\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{cp} \text{ – середнє напруження на площадці } \Delta F.$$

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = P \text{ – напруження в точці К.}$$

Напруження – це міра інтенсивності внутрішнього зусилля (яка величина внутрішньої сили припадає на одиницю площі), (вимірюється в Н/м² чи Па (МПа), або за старою системою вимірів кгс/см²).

Розкладено ΔR на складові: нормальну і дотичну. Отримаємо:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \sigma \text{ – нормальне напруження;}$$

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \tau \text{ – дотичне напруження.}$$

Оскільки τ може мати довільний напрямок, то спроектувавши його на координатні осі, отримаємо τ_x , τ_y (рис. 1.22).

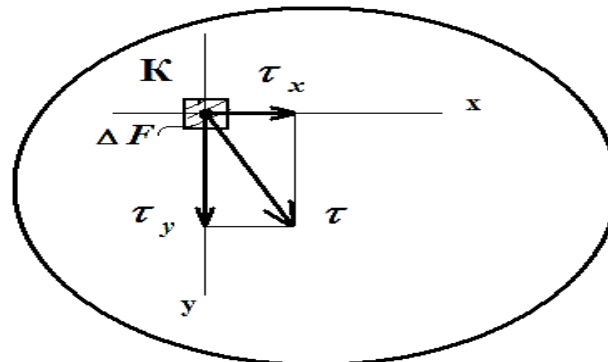


Рис. 1.22. Дотичні напруження.

У результаті прикладання до тіла зовнішнього зусилля та його деформування точка K переміститься в положення K_1 , а відрізок S змінить свій напрямок і величину на ΔS (рис. 1.23).

$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S} = \varepsilon$ – відносна лінійна деформація в точці K за напрямом S .

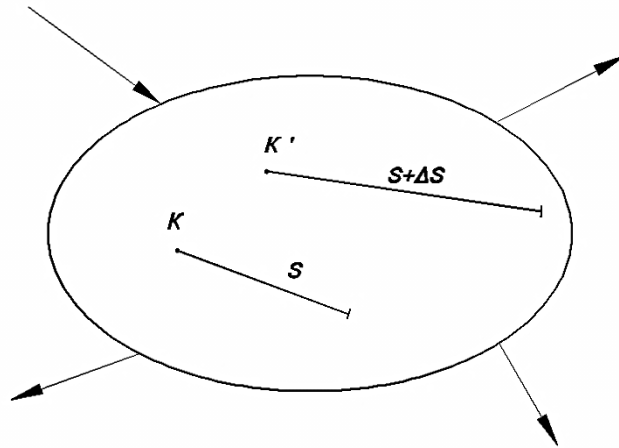


Рис. 1.23. Прикладання до тіла зовнішнього навантаження та його деформування.

Провівши в точці K уявно осі і спроектувавши ε на них, отримаємо три складові лінійної деформації (рис. 1.24).

Якщо уявно в точку K провести координатні осі, то в результаті деформації тіла, прямі кути між осями змінюються.

Таким чином, мають місце і кутові деформації (рис. 1.25), яких всього три.

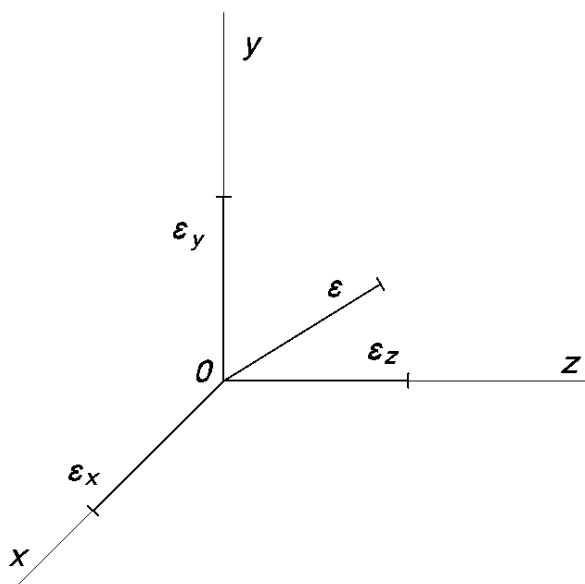


Рис. 1.24. Складові лінійної деформації.

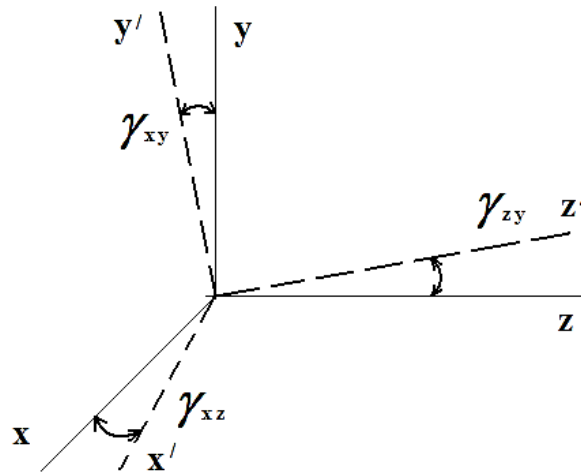


Рис. 1.25. Кутові деформації.

При цьому тензор деформації у математичному виразі для точки має вигляд:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Це свідчить про те, що всього в точці може виникати три лінійні і три кутові деформації.

1.3. Завдання для самоконтролю

Для того, щоб відповісти на контрольні питання, пропонується ще раз переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після кожного пункту лекції. Тому необхідно увійти на платформу дистанційного навчання MOODLE, ввести свій логін та пароль, зайти на свою сторінку користувача та зареєструватися на курс «Механіка матеріалів і конструкцій». Також на смартфоні повинен бути завантажений додаток для читання QR-кодів. Наступним кроком є сканування зображення кода та ознайомлення з теорією або виконання завдання до пройденого матеріалу.

У завданні для самоконтролю матеріал до 1 розділу посібника у вигляді інтерактивної лекції з аудіовізуальним супроводом. Після кожного пункту лекції пропонується пройти тестове завдання. Посилання на ресурс наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36412>



Інтерактивна лекція з аудіовізуальним супроводом «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»

1.4. Тестові завдання

У тестовому завданні представлено електронний тестовий навчальний тренажер до 1 розділу посібника. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно навести телефон на зображення кода та пройти тест. Після проходження теста здобувач вищої освіти побачить результат.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=35806>



Електронний тестовий навчальний тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»

Розділ 2. Геометричні характеристики плоских перерізів

2.1. Поняття геометричних характеристик плоских перерізів

2.1.1. Загальні поняття

На відміну від центрального розтягу-стиску, площа поперечного перерізу не може характеризувати опір стрижня при згині або крученні. Тому вводять інші характеристики, що називаються геометричними характеристиками плоских перерізів (ГХПП).

До них належать:

а) Статичний момент площі (рис. 2.1)

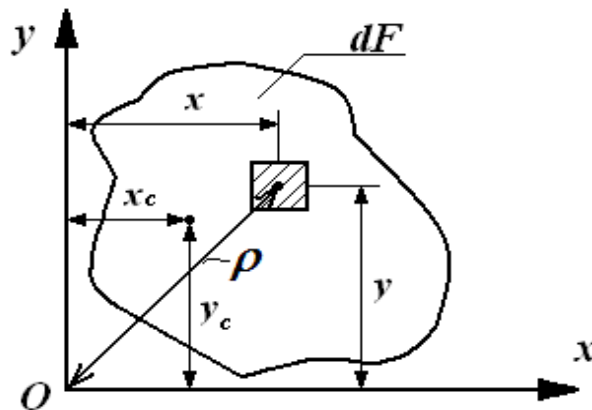


Рис. 2.1. Поняття про геометричні характеристики плоских перерізів.

який визначається за формулою 2.1:

$$S_x = \int_F y \cdot dF ; \quad S_y = \int_F x \cdot dF . \quad (2.1)$$

Із курсу теоретичної механіки відомо, що координати центра ваги можна визначити за формулами 2.2, що виходять з виразу 2.1:

$$X_C = \frac{S_y}{F} ; \quad Y_C = \frac{S_x}{F} ; \quad (2.2)$$

Звідси маємо:

$$S_x = y_c \cdot F ; \quad S_y = x_c \cdot F . \quad (2.3)$$

Одиниці виміру (довжина)³.

б) Осьові моменти інерції (рис. 2.1), визначають за формулою:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF ; \quad I_y = \int_F x^2 \cdot dF . \quad (2.4)$$

$$I_x > 0 .$$

Одиниці виміру (довжина)⁴.

в) Відцентровий момент інерції (рис. 2.1):

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF. \quad (2.5)$$

Відцентровий момент інерції може приймати як додатне, так і від'ємне значення. Це означає, що можна знайти таке положення осей, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції $I_{xy} = 0$, називаються головними осями інерції. Дві взаємно перпендикулярні осі, із яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть її головними осями інерції.

Одиниці виміру (довжина)⁴.

г) Полярний момент інерції (рис. 2.2):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF = I_x + I_y \quad (2.6)$$

$$I_\rho > 0.$$

Одиниці виміру (довжина)⁴.

Теорема: якщо через точку К провести дві пари координатних осей (рис. 2.2.), то в результаті матимемо відповідну рівність (2.7):

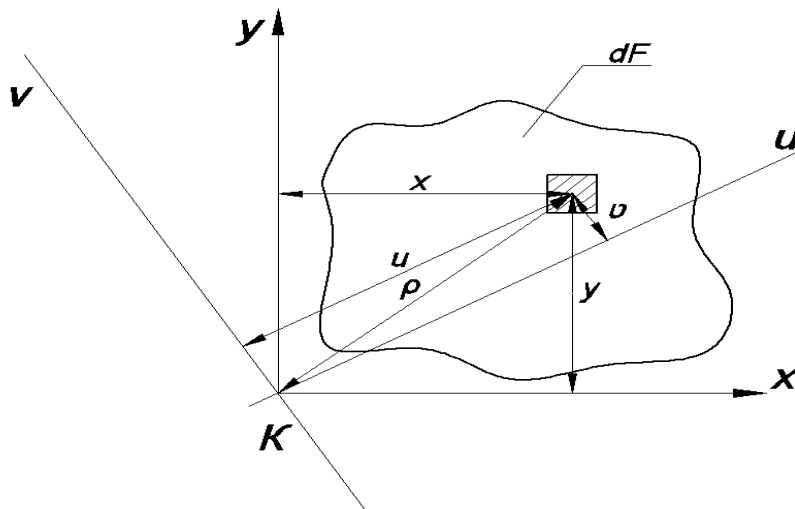


Рис. 2.2. Рисунок до теореми.

$$\underbrace{I_x + I_y}_{I_\rho} = \underbrace{I_u + I_v}_{I_\rho}. \quad (2.7)$$

д) Момент опору перерізу:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (2.8)$$

Одиниці виміру (довжина)³.

2.1.2. Моменти інерції простих фігур

Для деяких простих поперечних перерізів обчислимо значення осьових моментів інерції за загальними виразами:

Прямокутник (рис. 2.3):

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF, \quad dF = b \cdot dy, \quad (2.9)$$

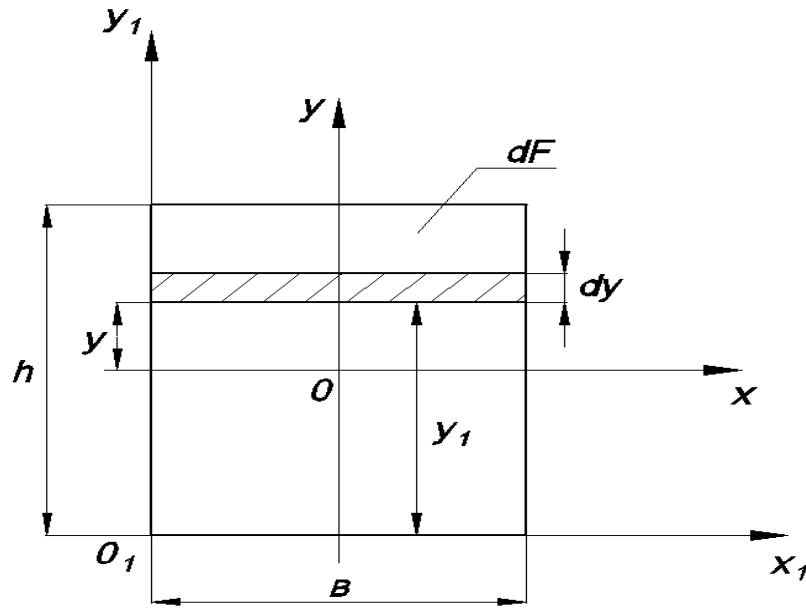


Рис. 2.3. Прямокутний поперечний переріз.

$$I_x = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12}, \quad \text{відповідно.} \quad I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (2.10)$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}, \quad \text{відповідно} \quad W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad (2.11)$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y_1^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{3}, \quad \text{відповідно} \quad I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (2.12)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 \cdot y_1 \cdot dF = \frac{b^2 h^2}{4}. \quad (2.13)$$

$$I_{xy} = 0. \quad (2.14)$$

Трикутник (рис. 2.4):

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{48}. \quad (2.15)$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.16)$$

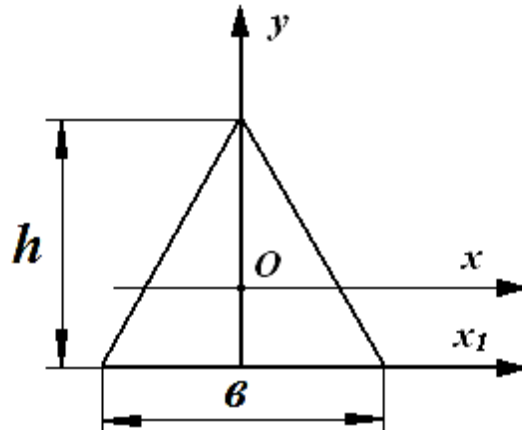


Рис. 2.4. Поперечний переріз трикутної форми.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{36} : \frac{2}{3}h = \frac{bh^2}{24} \\ W_y = \frac{I_x}{x_{\max}} = \frac{hb^3}{48} : \frac{b}{2} = \frac{hb^2}{24} \end{array} \right\}, \quad (2.17)$$

Круг (рис. 2.5):

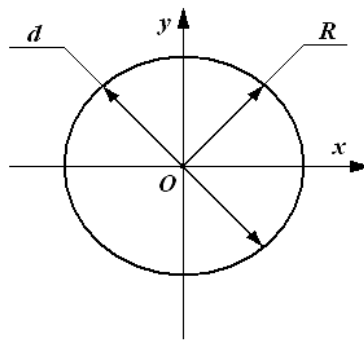


Рис. 2.5. Поперечний переріз форми круга

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.18)$$

$$I_x = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.19)$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (2.20)$$

Кільце (рис. 2.6):

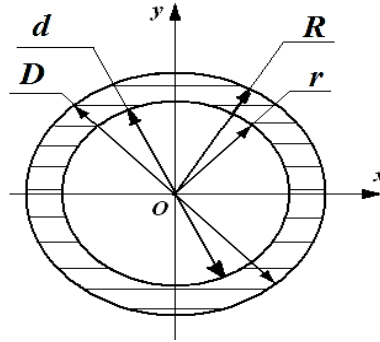


Рис. 2.6. Поперечний переріз форми кільця.

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha)^4 = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4), \quad (2.21)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{D}{d}.$$

$$I_\rho = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4). \quad (2.22)$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4). \quad (2.23)$$

2.1.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

Припустимо, що нам відома площа поперечного перерізу та значення осьових моментів інерції відносно осей x і y . Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей, паралельних заданим (рис. 2.7).

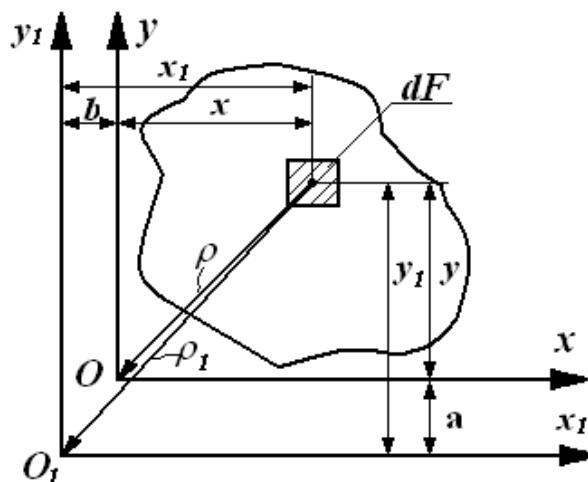


Рис. 2.7. Залежність між осьовими моментами інерції відносно паралельних осей.

$$y_1 = y + a, \quad x_1 = x + b.$$

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a \int_F y \cdot dF + a^2 \int_F dF \quad (2.24)$$

Отримаємо вираз (2.25):

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2F$$

$$\text{ВІДПОВІДНО : } I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2F; \quad (2.25)$$

$$I_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1 dF = \int_F (x + b)(y + a)dF = \dots = I_{xy} + aS_y + bS_x + ab. \quad (2.26)$$

Припустимо, що осі x і y – центральні, тоді $S_x = 0$, $S_y = 0$. Відповідно до цього вирази (2.25) і (2.26) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2F \\ I_{y_1} &= I_y + b^2F \\ I_{x_1y_1} &= I_{xy} + abF \end{aligned} \quad (2.27)$$

Склавши два перших рядки виразу (2.27), отримаємо:

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y + (a^2 + b^2)F; \quad (2.28)$$

або ж, враховуючи (2.6) отримуємо:

$$I_{\rho_1} = I_{\rho} + (a^2 + b^2)F \quad (2.29)$$

Якщо припустити, що відомі осьові моменти інерції відносно довільних осей, то можемо знайти їх значення відносно центральних осей паралельних даним.

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_1} - a^2F \\ I_y &= I_{y_1} - b^2F. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Як видно із виразу (2.30): із всіх паралельних осей, момент інерції буде найменшим відносно центральної осі (рис. 2.8).

2.1.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Припустимо, що відома площа поперечного перерізу, значення осьового моменту інерції відносно осей x і y . Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей u та v (рис. 2.10), повернутих на кут α .

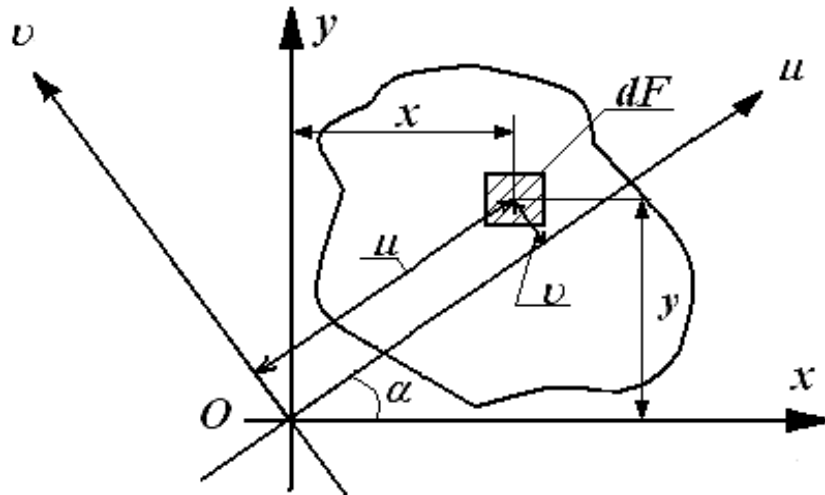


Рис. 2.8. Поворот координатних осей на кут α .

Із рис. 2.8 видно, що:

$$\begin{aligned} v &= y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha \\ u &= y \cdot \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.31)$$

Звідки матимемо:

$$\begin{aligned} I_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \cdot \underbrace{\int_F y^2 dF}_{I_x} + \sin^2 \alpha \cdot \underbrace{\int_F x^2 dF}_{I_y} - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \underbrace{\int_F xy dF}_{I_{xy}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

За аналогією знайдемо I_v

Враховуючи, що $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, маємо

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \\ I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Знайдемо відцентровий момент інерції:

$$\begin{aligned} I_{uv} &= \int_F v u dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \cdot (y \sin \alpha + x \cos \alpha) dF = \dots \\ \dots &= - \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (2.34)$$

Склавши два рядки виразу (2.33), отримаємо, що

$$I_u = I_v = I_x + I_y = \text{const}. \quad (2.35)$$

Вираз (2.35) це – властивість інваріантності осьових моментів інерції.

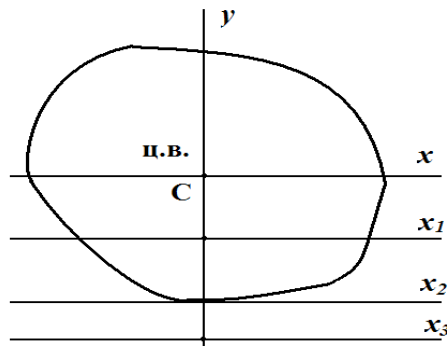


Рис. 2.9. Порівняльні осі.

$$I_x = \min < I_{x1} < I_{x2} < I_{x3}.$$

2.1.5. Головні осі та головні моменти інерції

Із виразу (2.33) очевидно, що осьові моменти інерції змінюються відносно кута α , тобто є функцією кута α .

Очевидно, що існує таке значення кута α_0 , при якому згідно з виразом (2.35) моменти інерції набувають екстремальних значень (максимального та мінімального). При цьому візьмемо похідну виразу (2.33) і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dI_u}{d\alpha_0} = -2I_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2I_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \quad (2.36)$$

Враховуючи, що $\sin\alpha_0 \cdot \cos\alpha_0 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0$ отримаємо:

$$I_x \sin 2\alpha_0 - I_y \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

або

$$(I_x - I_y) \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (2.37)$$

Поділимо вираз 3.37 на $\cos 2\alpha_0$, отримаємо:

$$(I_x - I_y) \operatorname{tg} 2\alpha_0 + 2I_{xy} = 0. \quad (2.38)$$

Звідси кут, що визначається положенням головних осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (2.39)$$

Існує дві перпендикулярні осі, відносно яких осьові моменти інерції набувають екстремального значення. Ці осі називаються головними, а моменти інерції відносно них – головними моментами інерції перерізу.

Значення головних осьових моментів інерції визначається:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} . \quad (2.40)$$

Формула для визначення положення осей *max* та *min*:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = - \frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\max}} ; \quad \operatorname{tg} 2\alpha_2 = - \frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\min}} . \quad (2.41)$$

2.1.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості

Введемо нову геометричну характеристику – *радіус інерції*, а також припустимо, що осі *x* і *y* – головні осі. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно вісі *u*, повернутої на кут α , що відносно осі *x* (рис. 2.10).

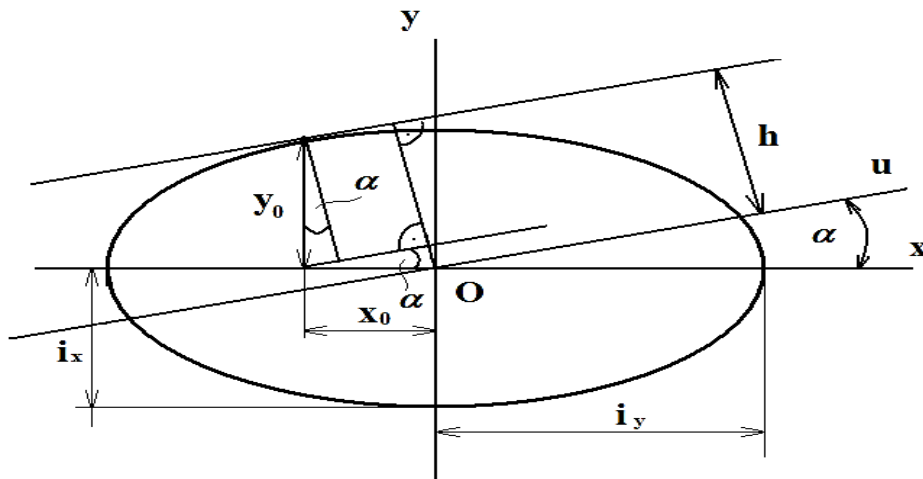


Рис. 2.10. Еліпс інерції.

Введемо нову величину – радіус інерції фігури відносно якої-небудь осі. Радіусом інерції відносно, наприклад, осі *x* називається величина

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} , \quad (2.42)$$

де I_x – момент інерції відносно осі *x*, а *F* – площа фігури.

Звідси:

$$I_x = i_x^2 \cdot F .$$

Момент інерції I_u відносно осі *u* визначається за формулою (2.33). Але вісь *ox* є головною віссю, та відцентровий момент I_{xy} .

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha \quad (2.43)$$

Розділимо вираз (2.43) на *F*, отримаємо:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha \quad (2.44)$$

Побудуємо еліпс, напіввісі якого є радіусами інерції (рис. 2.10).

$$\text{Рівняння еліпса: } \frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1 \quad (2.45)$$

Проведемо дотичну до еліпса, паралельну осі u , і знайдемо відстань від центру еліпса до цієї дотичної.

Рівняння дотичної до еліпса:

$$\frac{yy_0}{i_x^2} + \frac{xx_0}{i_y^2} = 1 \quad (2.46)$$

Відстань h знайдемо за формулою:

$$h = y_0 \cos \alpha + x_0 \sin \alpha ; \quad (2.47)$$

Розділимо на h обидві частини рівності (2.47):

$$\frac{y_0 \cos \alpha}{h} + \frac{x_0 \sin \alpha}{h} = 1 \quad (2.48)$$

Прирівняємо вирази (2.46) і (2.48) і отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{y}{i_x^2} &= \frac{\cos \alpha}{h} ; \\ \frac{x}{i_y^2} &= \frac{\sin \alpha}{h} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Піднесемо до квадрату вираз (2.49):

$$\frac{y^2}{i_x^2} = \frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} ; \quad \frac{x^2}{i_y^2} = \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} \quad (2.50)$$

Підставивши вираз (2.50) в вираз (2.45), отримаємо:

$$\frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} + \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} = 1. \quad (2.51)$$

Перетворивши вираз (3.51):

$$i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha = h^2 \quad (2.52)$$

Порівнявши (2.52) і (2.44), можемо отримати такі рівності:

$$i_u = h ; \quad I_u = h^2 F. \quad (2.53)$$

Це дає нам можливість графічним шляхом знаходити значення осьових моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної головній осі.

2.2. Завдання для самоконтролю

Для того, щоб відповісти на контрольні питання, необхідно ще раз переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після кожного пункту інтерактивної лекції з аудіовізуальним супроводом. Необхідно навести телефон на зображення QR кода та пройти матеріал до 2 розділу посібника. Посилання на ресурс наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=34706&pageid=26506&startlastseen=no>



*Інтерактивна лекція з аудіовізуальним супроводом,
«Геометричні характеристики плоских перерізів»*

2.3. Приклади розв'язання задач

2.3.1. Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі

На рис. 2.12 зображено плоский переріз конструкції, яка складається з двох швелерів №12 (вони позначені позиціями 1 та 3) та двох швелерів №18 (вони позначені позиціями 2 та 4). Необхідно знайти осьові моменти інерції I_{xc} , I_{yc} для даного перерізу, моменти опору перерізу W_{xc} , W_{yc} та радіуси інерції i_x , i_y .

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та вибираємо осі координат з початком в центрі ваги кожного елемента конструкції (рис. 2.11).

2. Випишуємо дані з таблиці сортаменту (додаток 2). Для швелерів №12 та 18 переводимо значення всіх параметрів із мм в см. Необхідно пам'ятати про приведення всіх показників до однакових одиниць виміру.

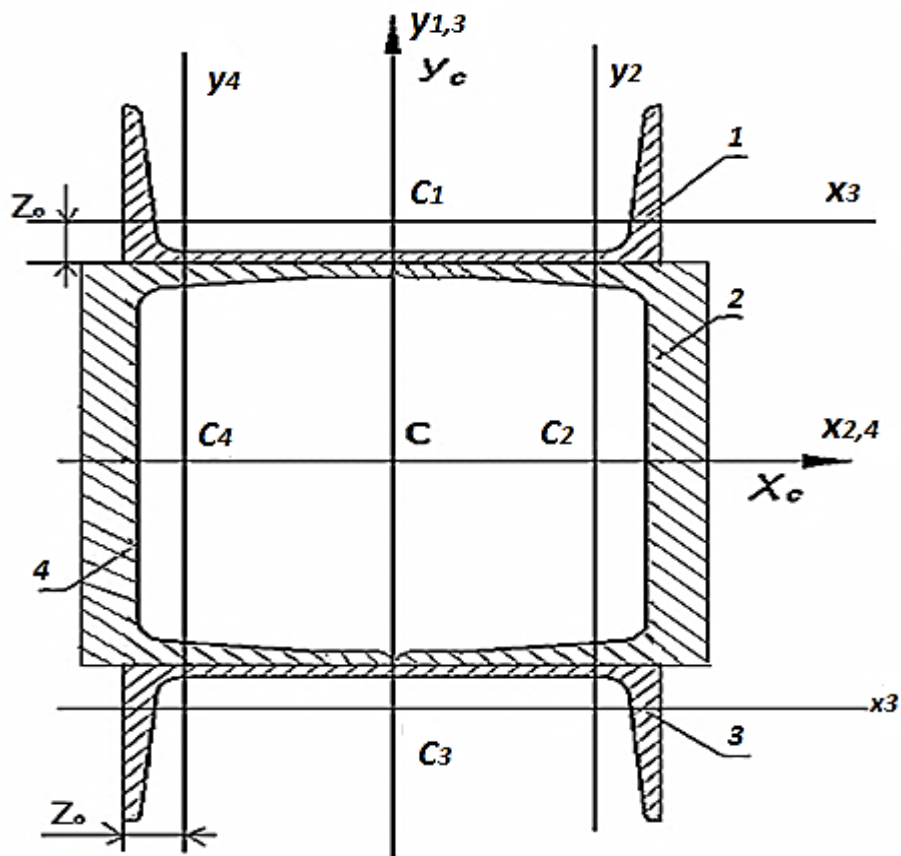


Рис.2.11. Плоский симетричний переріз
Розв'язання

Позиція 2,4 - профіль № 18: Позиція 1,3 профіль - № 12:

$$h_2 = 180 \text{ мм} = 18 \text{ см};$$

$$b_2 = 70 \text{ мм} = 7 \text{ см};$$

$$d_2 = 5,1 \text{ мм} = 0,51 \text{ см};$$

$$t_2 = 8,7 \text{ мм} = 0,87 \text{ см};$$

$$F_2 = 20,7 \text{ см}^2;$$

$$I_{y2} = 86 \text{ см}^4;$$

$$I_{x2} = 1090 \text{ см}^4;$$

$$Z_{02} = 1,94 \text{ см}$$

$$h_1 = 120 \text{ мм} = 12 \text{ см};$$

$$b_1 = 52 \text{ мм} = 5,2 \text{ см};$$

$$d_1 = 4,8 \text{ мм} = 0,48 \text{ см};$$

$$t_1 = 7,8 \text{ мм} = 0,78 \text{ см};$$

$$F_1 = 13,3 \text{ см}^2;$$

$$I_y = 31,2 \text{ см}^4 = I_{x1} = I_{x3};$$

$$I_x = 304 \text{ см}^4 = I_{y1} = I_{y3};$$

$$Z_{01} = 1,54 \text{ см}$$

3. Дана конструкція є симетричною. Центром симетрії є точка С. Введемо систему координат $X_c Y_c$ з початком в точці С. Осі $X_c Y_c$ називаються центральними осями. Знайдемо координати центра ваги кожного елемента конструкції в цій системі координат.

$$C_1 = \begin{cases} X_{C1} = 0; \\ Y_{C1} = \frac{h_2}{2} + Z_{01} = 9 + 1,54 = 10,54 \text{ см}; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{C_2} = b_2 - Z_{02} = 7 - 1,94 = 5,06 \text{ см}; \\ Y_{C_2} = 0; \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} X_{C_3} = 0; \\ Y_{C_3} = -10,54 \text{ см}; \end{cases} \quad C_4 = \begin{cases} X_{C_4} = -5,06 \text{ см}; \\ Y_{C_4} = 0. \end{cases}$$

4. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції. Центральні моменти інерції – це моменти інерції перерізу відносно центральних осей. Для визначення центральних моментів інерції складної фігури потрібно скористатись теоремою про моменти інерції відносно паралельних осей (див. формулу 2.27). Так як переріз включає в себе чотири складові фігури, то формула буде виглядати наступним чином:

$$I_u = I_{xc} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} + I_{x4} + F_1 \cdot (Y_{c1})^2 + F_2 \cdot (Y_{c2})^2 + F_3 \cdot (Y_{c3})^2 + F_4 \cdot (Y_{c4})^2;$$

$$I_v = I_{yc} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4} + F_1 \cdot (X_{c1})^2 + F_2 \cdot (X_{c2})^2 + F_3 \cdot (X_{c3})^2 + F_4 \cdot (X_{c4})^2.$$

$I_{xcy_c} = 0$, тому що осі $X_c Y_c$ є головними центральними осями.

Підставляємо числові дані і отримуємо:

$$I_{xc} = 31,2 + 31,2 + 1090 + 1090 + 13,3 \cdot (10,54)^2 + 13,3 \cdot (-10,54)^2 + 20,7 \cdot 0 + 20,7 \cdot 0 = \\ = 2242,4 + 1477,5 + 1477,5 = 5197,44 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc} = 86 + 86 + 304 + 304 + 13,3 \cdot 0 + 13,3 \cdot 0 + 20,7 \cdot (5,06)^2 + 20,7 \cdot (-5,06)^2 = \\ = 1840 \text{ см}^4.$$

5. Визначаємо момент опору перерізу. Формула для знаходження моменту опору перерізу має вигляд:

$$W_x = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \quad W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}.$$

Необхідно визначити y_{max} та x_{max} :

$$y_{max} = 9 + 5,2 = 14,2 \text{ см}; \quad x_{max} = 7 \text{ см};$$

$$W_x = \frac{5197,44}{14,2} = 366,02 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{1840}{7,0} = 262,86 \text{ см}^3.$$

6. Визначаємо радіуси інерції за формулами:

$$i_{xc} = \sqrt{\frac{I_{xc}}{F}}; \quad i_{yc} = \sqrt{\frac{I_{yc}}{F}}.$$

Також необхідно знайти суму площ всіх фігур перерізу:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4; \quad \Sigma F = 13,3 + 20,7 + 13,3 + 20,7 = 68 \text{ см}^2.$$

Підставляємо числові значення в формули для знаходження радіусів інерції:

$$i_{xc} = \sqrt{\frac{5197,44}{68}} = 8,74 \text{ см}; \quad i_{yc} = \sqrt{\frac{1840}{68}} = 5,2 \text{ см.}$$

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

Відповідь: $I_{xc}=5197,44 \text{ см}^4$; $I_{yc}=1840 \text{ см}^4$; $W_{xc}=366,02 \text{ см}^3$;
 $W_{yc}= 262,86 \text{ см}^3$; $i_{xc}=8,74 \text{ см}$; $i_{yc}=5,2 \text{ см}$.

Висновок: якщо переріз фігури має дві осі симетрії, то ці осі є головними центральними осями і відцентрові моменти інерції відносно них дорівнюють нулю.

Посилання на мультимедійну презентацію до практичної роботи наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=37851>



Мультимедійна презентація «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів»

2.3.2. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів

На рис. 2.12 зображено плоский несиметричний переріз із зміщеним центром ваги. Переріз складається з прямокутника, висота якого $h=40 \text{ мм}$, ширина $b=80 \text{ мм}$ та вирізаного напівкруга з діаметром $d=20 \text{ мм}$. Необхідно знайти координати центру ваги конструкції (X_c ; Y_c), осьові моменти інерції (I_{xc} ; I_{yc}) моменти опору перерізу (W_{xc} ; W_{yc}) та радіуси інерції (i_{xc} ; i_{yc}).

Розв'язання

1. Представимо переріз у вигляді простих фігур: прямокутника зі сторонами 40 мм і 80 мм, виріз якого є напівкругом з діаметром 20 мм, центр якого знаходиться на відстані $0,212d$ від краю прямокутника.

2. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та позначаємо осі. Здійснюємо переведення одиниць виміру, отримуємо: $h=40\text{мм}=4\text{см}$, $b=80\text{ мм}=8\text{см}$, $d=20\text{ мм}=2\text{ см}$.

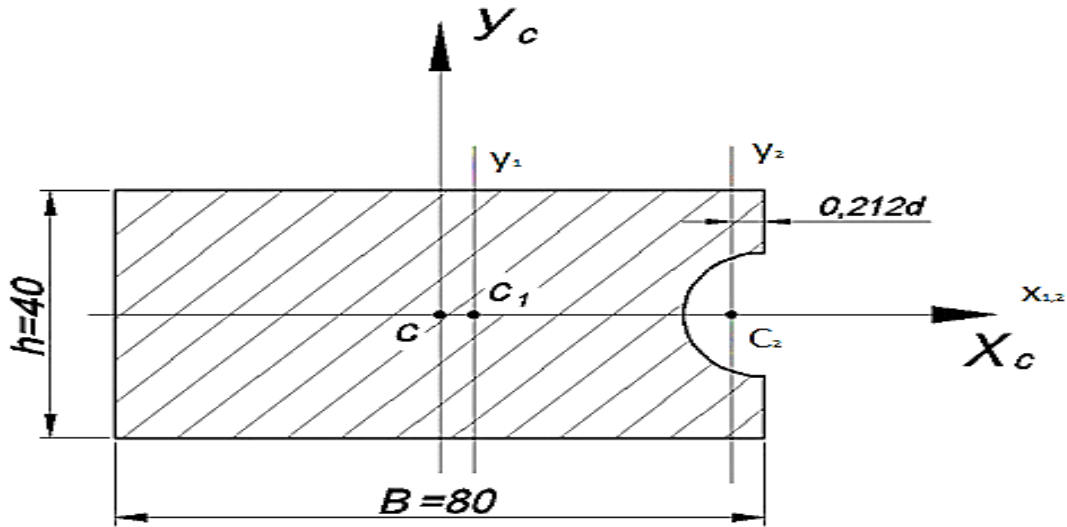


Рис. 2.12. Плоский несиметричний переріз

3. Визначаємо величину площі кожної з фігур:

$$F_1 = h \cdot b = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$F_2 = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{3,14 \cdot (2)^2}{8} = 1,57 \text{ см}^2.$$

Для вирізаного напівкруга значення площі F_2 та осьових моментів інерції I_{xc2} , I_{yc2} приймається як від'ємне.

4. Визначаємо координати центра ваги кожної з фігур:

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = 0; \\ Y_1 = 0; \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} X_2 = 4 - 0,212 \cdot d = 3,576 \text{ см}; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

5. Визначаємо координати центру ваги складної фігури за формулами:

$$Y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F}; \quad X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F}.$$

Невідомими є статичні моменти площі S_{x1} , S_{x2} , S_{y1} , S_{y2} :

$$S_{x1} = F_1 \cdot Y_1 = 0; \quad S_{x2} = F_2 \cdot Y_2 = 0;$$

$$S_{y1} = F_1 \cdot X_1 = 0; \quad S_{y2} = F_2 \cdot X_2 = (-1,57) \cdot 3,576 = -5,614 \text{ см}^3.$$

Підставляємо значення статичних моментів площі у формулу координат центру ваги.

$$Y_c = 0; \quad X_c = \frac{-5,614 + 0}{32 - 1,57} = \frac{-5,614}{30,43} = -0,185 \text{ см}.$$

6. Запишемо координати центрів ваги простих фігур відносно координат центра ваги всієї конструкції ($X_c Y_c$).

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = -X_c = -(-0,185) = 0,185\text{см}; \\ Y_1 = -Y_c = 0\text{см}. \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_2 = X_2 - X_c = 3,576 - (-0,185) = 3,761\text{см}; \\ Y_2 = Y_2 - Y_c = 0\text{см}. \end{cases}$$

7. Запишемо власні моменти інерції кожної фігури. Для прямокутника осьові моменти інерції визначаються за формулами:

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = 170,7 \text{ см}^4.$$

Для напівкруга осьові моменти інерції I_{xc} та I_{yc} приймаються від'ємними.

$$I_{x2} = -0,393 \cdot R^4 = -0,393 \text{ см}^4;$$

$$I_{y2} = -0,11 \cdot R^4 = -0,11 \text{ см}^4.$$

8. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу:
 $I_u = I_{xc} = I_{x1} + F_1 \cdot y_{c1}^2 + I_{x2} + F_2 \cdot y_{c2}^2 = 42,7 + 32 \cdot 0 - 0,393 + (-1,54) \cdot 0 = 42,3 \text{ см}^4;$

$$I_v = I_{yc} = I_{y1} + F_1 \cdot X_{xc}^2 + I_{y2} + F_2 \cdot X_{c2}^2 = 170,7 + 32 \cdot (0,185)^2 + (-0,393) + (-1,57) \cdot (3,761)^2 = 170,6 + 1,0952 - 0,11 - 27,2 = 149,21 \text{ см}^4.$$

9. Визначаємо моменти опору перерізу, де y_{max} та x_{max} — це відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених від неї точок перерізу. Максимальна відстань від центра ваги по осі y буде $y_{max} = 2 \text{ см}$, по осі x буде дорівнювати $x_{max} = 4,185 \text{ см}$.

$$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{y_{max}}; \quad (y_{max} = 2 \text{ см});$$

$$W_{xc} = \frac{42,2}{2} = 21,15 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_{yc}}{x_{max}}; \quad (X_{max} = 4,185 \text{ см});$$

$$W_y = \frac{149,21}{4,185} = 35,66 \text{ см}^2.$$

10. Визначаємо радіуси інерції перерізу за формулами:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xc}}{F}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_{yc}}{F}}.$$

Необхідно обчислити сумарну площу всього перерізу.

$$\Sigma F = F_1 + (-F_2) = 32 - 1,57 = 30,43 \text{ см}^2.$$

Обчислюємо значення радіусів інерції перерізу:

$$i_x = \sqrt{\frac{42,3}{30,43}} = \sqrt{1,39} = 1,18 \text{ см}; \quad i_y = \sqrt{\frac{149,21}{30,48}} = \sqrt{4,9} = 2,21 \text{ см}.$$

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

Відповідь: $I_{xc}=42,3 \text{ см}^4$; $I_{yc}=149,21 \text{ см}^4$; $W_{xc}= 21,15 \text{ см}^3$;
 $W_{yc}=35,66 \text{ см}^3$; $i_{xc}=1,18 \text{ см}$; $i_{yc}=2,21 \text{ см}$.

Посилання на мультимедійну презентацію до практичної роботи наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/theme/image.php/lambda/assign/1527572706/icon>



Мультимедійна презентація «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів»

2.3.3. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для двох елементів

На рис. 2.14 зображено конструкцію, яка складається зі швелера №24 та нерівностороннього кутника №14/9 (додаток 2). Необхідно визначити координати центра ваги конструкції (x_c ; y_c), осьові моменти інерції (I_{xc} ; I_{yc}), відцентрові моменти інерції (I_{xcyc}).

Розв'язання

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері з вказанням розмірів, показуємо осі.

2. Випишуємо дані з сортаменту, приводимо значення розмірів профілів до одних одиниць виміру.

Швелер [№24 (позиція 2):

$h_2 = 240 \text{ мм} = 24 \text{ см}$;
 $b_2 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$;
 $d_2 = 5,6 \text{ мм} = 0,56 \text{ см}$;
 $t_2 = 10 \text{ мм} = 0,1 \text{ см}$;
 $F_2 = 30,6 \text{ см}^2$;
 $I_{x2} = 2900 \text{ см}^4$;
 $I_{y2} = 208 \text{ см}^4$;
 $Z_{02} = 2,42 \text{ см}$;
 $I_{xy2} = 0$

Нерівнобокий кутник L

№14/9(позиція 1):
 $B_1 = 140 \text{ мм} = 14 \text{ см}$;
 $b_1 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см}$;
 $d_1 = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см}$;
 $F_1 = 22,2 \text{ см}^2$;
 $I_{y1} = 146 \text{ см}^4 = I_x$;
 $I_{x1} = 444 \text{ см}^4 = I_y$;
 $I_{min1} = 85,5 \text{ см}^4$;
 $\text{tg} \alpha = 0,406$; $\alpha = 22^{\circ}15'$
 $X_{01} = 2,12 = Y_0$;
 $Y_{01} = 4,58 = X_0$.

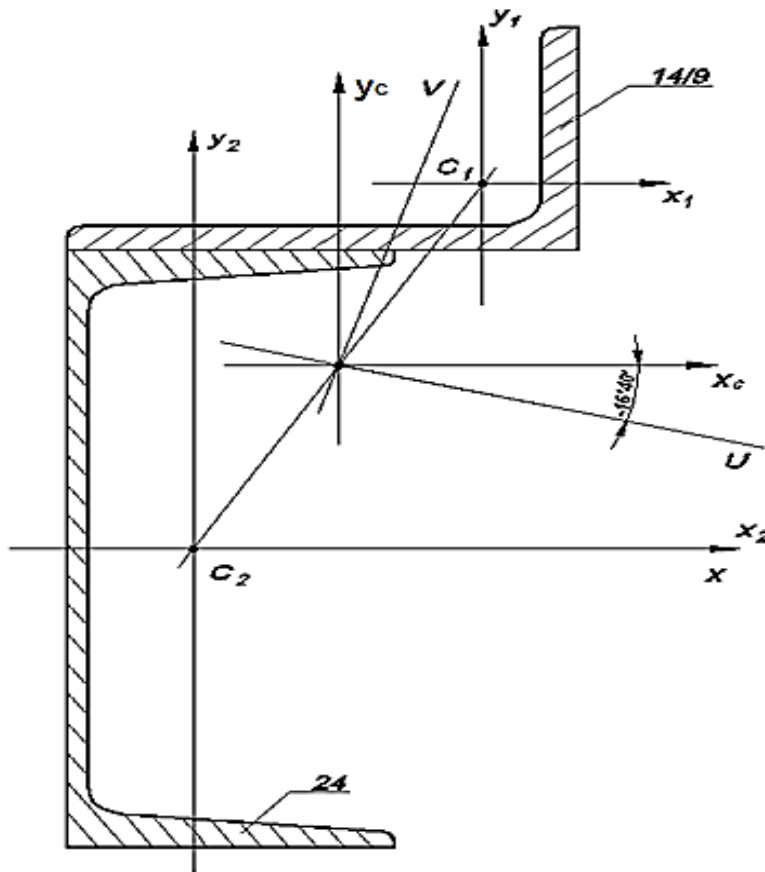


Рис. 2.13. Плоский несиметричний переріз прокатної сталі

3. Через центр ваги C_1 кутника проведемо осі x_1y_1 , а через центр ваги C_2 швелера – осі x_2y_2 (рис. 2.13). Так як початок координатних осей x_2y_2 вибрано в центрі ваги C_2 швелера, тоді за початок відліку прийемо координати C_2 . Запишемо координати центра ваги кожної фігури відносно осей порівняння, це осі x_2y_2 .

$$C_1 = \begin{cases} X_1 = B_1 - Z_{01} - X_{02} = 14 - 2,42 - 4,58 = 7 \text{ см}; \\ Y_1 = \frac{h_1}{2} + Y_{02} = 12 + 2,12 = 14,12 \text{ см}; \end{cases} \quad C_2 = \begin{cases} X_2 = 0; \\ Y_2 = 0. \end{cases}$$

4. Визначаємо координати центра ваги всього перерізу за формулами:

$$X_c = \frac{\sum S y_i}{\sum F}; \quad Y_c = \frac{\sum S x_i}{\sum F}.$$

Обчислюємо значення статичних моментів площі:

$$S_{X1} = y_1 \cdot F_1 = 14,12 \cdot 22,2 = 313,5 \text{ см}^3; \quad S_{X2} = y_2 \cdot F_2 = 0;$$

$$S_{Y1} = X_1 \cdot F_1 = 7 \cdot 22,2 = 155,4 \text{ см}^3; \quad S_{Y2} = X_2 \cdot F_2 = 0.$$

За формулою розрахуємо координати центра ваги даної конструкції:

$$X_c = \frac{155,4}{22,2+30,6} = \frac{155,4}{52,8} = 2,94 \text{ см}; \quad Y_c = \frac{313,4}{22,2+30,6} = 5,95 \text{ см}.$$

5. В системі координат x_2y_2 покажемо положення центра ваги всієї фігури. Це точка С з координатами $x_c = 2,94$ см; $y_c = 5,95$ см. Виберемо в точці С початок центральних осей x_cy_c , які паралельні осям x_1y_1 і x_2y_2 . В системі координат x_cy_c знайдемо координати центрів ваги C_1 і C_2 .

$$C_1 = \begin{cases} X_{C1} = 7 - 2,94 = 4,06 \text{ см}; \\ Y_{C1} = 14,12 - 5,95 = 8,17 \text{ см}; \end{cases}$$

$$C_2 = \begin{cases} X_{C2} = -2,94 \text{ см}; \\ Y_{C2} = -5,95 \text{ см}. \end{cases}$$

6. Визначаємо центральні моменти інерції всього перерізу, а також відцентрові моменти інерції за формулами (2.27):

$$I_{Xc} = I_{X1} + F_1 \cdot Y_{c1}^2 + I_{X2} + F_2 \cdot Y_{c2}^2 = 146 + 22,2 \cdot (8,17)^2 + 2900 + 30,6 \cdot (-5,95)^2 = 5611,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{Yc} = I_{Y1} + F_1 \cdot X_{c1}^2 + I_{Y2} + F_2 \cdot X_{c2}^2 = 444 + 22,2 \cdot (4,06)^2 + 208 + 30,6 \cdot (-2,94)^2 = 1282,44 \text{ см}^4;$$

$$I_{XcYc} = I_{X1Y1} + F_1 \cdot X_{c1} \cdot Y_{c1} + I_{X2Y2} + F_2 \cdot X_{c2} \cdot Y_{c2};$$

$$I_{X2Y2} = 0;$$

$$I_{X1Y1} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin \alpha_0;$$

$$I_{max} = I_{X1} + I_{Y1} - I_{min} = 444 + 146 - 85,5 = 504,5;$$

$$I_{X1Y1} = \frac{504,5 - 85,5}{2} \cdot \sin(22^\circ 15') = 146,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{XcYc} = 146,7 + 22,2 \cdot 4,06 \cdot 8,18 + 30,6 \cdot (-2,94) \cdot (-5,94) = 1417,5 \text{ см}^4.$$

7. Знайдемо положення головних осей інерції. Головні осі – це ті осі, відносно яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю. На рисунку 2.14 побудовані осі u, v . Визначаємо кут нахилу головних центральних осей перерізу відносно центральних осей X_c, Y_c :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{XcYc}}{I_{Yc} - I_{Xc}} = \frac{2 \cdot 1417,5}{1282,4 - 5611,1} = -0,66;$$

$$2\alpha = -33^\circ 20'; \quad \alpha = 16^\circ 40'.$$

Оскільки: $I_{Xc} > I_{Yc}$, то I_u буде максимальним.

8. Визначаємо головні моменти інерції перерізу, тобто знайдемо моменти інерції перерізу відносно осей u, v .

$$I_{\min}^{\max} = I_{u/v} = \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4 \cdot I_{X_C Y_C}^2};$$

$$I_{u/v} = \frac{5611,1 - 1282,4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5611,1 - 1282,4)^2 + 4 \cdot (1417,3)^2} =$$

$$34450,0 \pm 2585,6;$$

$$I_u = I_{\max} = 7173,64 \text{ см}^4; \quad I_v = I_{\min} = -280,1 \text{ см}^4.$$

Після виконання всіх необхідних розрахунків виконується перевірка правильності виконання задачі.

На першому етапі перевірки повинна виконуватись рівність:

$$I_{X_C} + I_{Y_C} = I_u + I_v.$$

Підставляємо числові значення у формулу:

$$5611,1 + 1282,4 = 7173,64 + (-280,1).$$

$$6893,54 = 6893,54$$

В ході другої частини перевірки повинна виконуватись наступна рівність:

$$I_{uv} = 0; \quad I_{uv} = \frac{I_{X_C} - I_{Y_C}}{2} \sin 2\alpha + I_{X_C Y_C} \cdot \cos 2\alpha.$$

Підставляємо числові значення в формулу:

$$I_{uv} = \frac{5607,6 - 1282,4}{2} \cdot (-0,55) + 1417,3 \cdot 0,836 = -1189,9 + 1184,9 = 0.$$

Також необхідно обчислити похибку розрахунків.

$$\Delta = \left| \frac{-1189,4 + 1184,9}{1184,9} \right| \cdot 100\% = 0,4\%$$

Значення похибки допускається до 5 %.

Таким чином, ми визначили значення для даного перерізу всіх заданих невідомих величин.

$$\text{Відповідь: } I_{X_C} = 5611,1 \text{ см}^4; \quad I_{Y_C} = 1282,44 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_C Y_C} = 1417,5 \text{ см}^4; \quad \alpha = 16^\circ 40'.$$

2.3.4. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів

Для поперечного перерізу, що складається із декількох фігур, необхідно:

1) накреслити переріз в відповідному масштабі, вказати всі необхідні розміри і вибрати осі. (При розрахунку всі необхідні дані потрібно брати із таблиці сортаменту);

2) визначити координати центра ваги;

3) обчислити осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей;

4) знайти положення головних центральних осей інерції;

5) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;

6) зробити перевірку правильності виконання.

Дано:

1) Двотавр № 22;

2) Лист № 12;

3) Кутник нерівносторонній № 100/63/10.

Схема розташування фігур зображена на рис. 2.15.

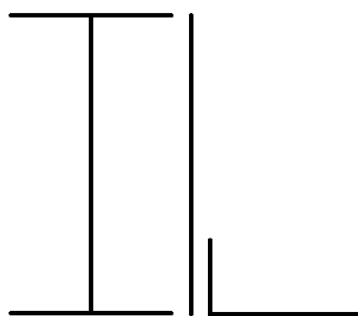


Рис.2.14. Схема розташування фігур

Розв'язання

1. Випишуємо необхідні дані із таблиці сортаменту (додаток 2) та зводимо значення параметрів профілю до єдиних одиниць виміру (см):

Фігура 1	Фігура 2	Фігура 3 (кутник)	
(двотавр) № 22:	(лист) № 12:	№ 100/63/10:	
$h_2 = 22 \text{ см};$	$h_1 = 22 \text{ см};$	$h_3 = 6,3 \text{ см};$	$b_3 = 10 \text{ см};$
$b_1 = 11 \text{ см};$	$b_1 = 1,2 \text{ см};$	$d_3 = 1 \text{ см};$	$I_{\text{umin}} = 28,3 \text{ см}^4;$
$d_1 = 0,54 \text{ см};$	$F_2 = 22 \cdot 1,2 =$	$F_3 = 15,5 \text{ см}^2;$	
$F_1 = 30,6 \text{ см}^2;$	$26,4 \text{ см}^2;$	$I_{x_3} = 47,1 \text{ см}^4;$	$I_{y_3} = 154 \text{ см}^4;$
$I_{x_1} = 2550 \text{ см}^4;$		$X_0 = 3,4 \text{ см};$	$Y_0 = 1,58 \text{ см};$
$I_{y_1} = 157 \text{ см}^4;$		$\text{tg} \alpha = 0,387 \rightarrow \alpha = 21,15^\circ$	

2. Креслимо переріз на міліметровому папері, вказуємо всі розміри і вибираємо осі координат з початком в точках C_1, C_2, C_3 – центрах ваги (рис. 2.15).

3. Визначаємо координати центру ваги всієї фігури. За початок координат приймаємо центр ваги двотавра C_1 і проводимо осі $X_1C_1Y_1$.

Визначаємо координати центрів ваги простих фігур відносно цієї системи координат:

$$\mathbf{C}_1 \begin{cases} x_1 = 0; \\ y_1 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_2 \begin{cases} x_2 = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} = \frac{11}{2} + \frac{1,2}{2} = 6,1\text{см}; \\ y_2 = 0; \end{cases}$$

$$\mathbf{C}_3 \begin{cases} x_3 = \frac{b_1}{2} + b_2 + x_0 = \frac{11}{2} + 1,2 + 3,4 = 5,5 + 1,2 + 3,4 = 10,1\text{см}; \\ y_3 = -\left(\frac{h_1}{2} - y_0\right) = -\left(\frac{22}{2} - 1,58\right) = -(11 - 1,58) = -9,42\text{см}; \end{cases}$$

Визначаємо координати $X_c Y_c$ центра ваги складної фігури в системі координат $X_1 C_1 Y_1$.

$$X_c = \frac{\Sigma S_Y}{\Sigma F} = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + x_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 6,1 \cdot 26,4 + 10,1 \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = 4,38\text{см};$$

$$Y_c = \frac{\Sigma S_X}{\Sigma F} = \frac{y_1 \cdot F_1 + y_2 \cdot F_2 + y_3 \cdot F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{0 \cdot 30,6 + 0 \cdot 26,4 + (-9,42) \cdot 15,5}{30,6 + 26,4 + 15,5} = -2,01\text{см}.$$

Введемо нову систему координат. Координати центрів ваги простих фігур відносно центру ваги складної фігури: $X_c Y_c$ з початком в точці С (центром ваги системи тіл). В координатній системі $X_c Y_c$ точки мають такі значення.

$$\text{по осі } x: \quad l_1 = -4,38 \text{ см}; \quad l_2 = 1,72 \text{ см}; \quad l_3 = 5,72 \text{ см}.$$

$$\text{по осі } y: \quad a_1 = 2,01 \text{ см}; \quad a_2 = 2,01 \text{ см}; \quad a_3 = -7,41 \text{ см};$$

4. Визначаємо осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей $X_c Y_c$.

$$I_{X_c} = I_{X_1} + a_1^2 \cdot F_1 + I_{X_2} + a_2^2 \cdot F_2 + I_{X_3} + a_3^2 \cdot F_3 =$$

$$= 2550 + 2,01^2 \cdot 30,6 + \frac{1,2 \cdot 22^3}{12} + 2,01^2 \cdot 26,4 + 47,1 + (-7,41)^2 \cdot 15,5 = 4743,27\text{см}^4;$$

$$I_{Y_c} = I_{Y_1} + l_1^2 \cdot F_1 + I_{Y_2} + l_2^2 \cdot F_2 + I_{Y_3} + l_3^2 \cdot F_3 =$$

$$= 157 + (-4,38)^2 \cdot 30,6 + \frac{22 \cdot 1,2^3}{12} + 1,72^2 \cdot 26,4 + 154 + 5,72^2 \cdot 15,5 = 1486,45\text{см}^4;$$

$$I_{X_c Y_c} = I_{X_1 Y_1} + a_1 \cdot l_1 \cdot F_1 + I_{X_2 Y_2} + a_2 \cdot l_2 \cdot F_2 + I_{X_3 Y_3} + a_3 \cdot l_3 \cdot F_3 =$$

$$= 0 + 2,01 \cdot (-4,38) \cdot 30,6 + 0 + 2,01 \cdot 1,72 \cdot 26,4 + \left(\frac{172,8 - 28,3}{2} \cdot \sin 2\alpha \right) +$$

$$+ (-7,41) \cdot 5,72 \cdot 15,5 = -941,87 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_{x_3} + I_{y_3} - I_{u \min} - I_{v \min}}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\alpha;$$

$$I_{\max} = I_{x_3} + I_{y_3} - I_{\min}.$$

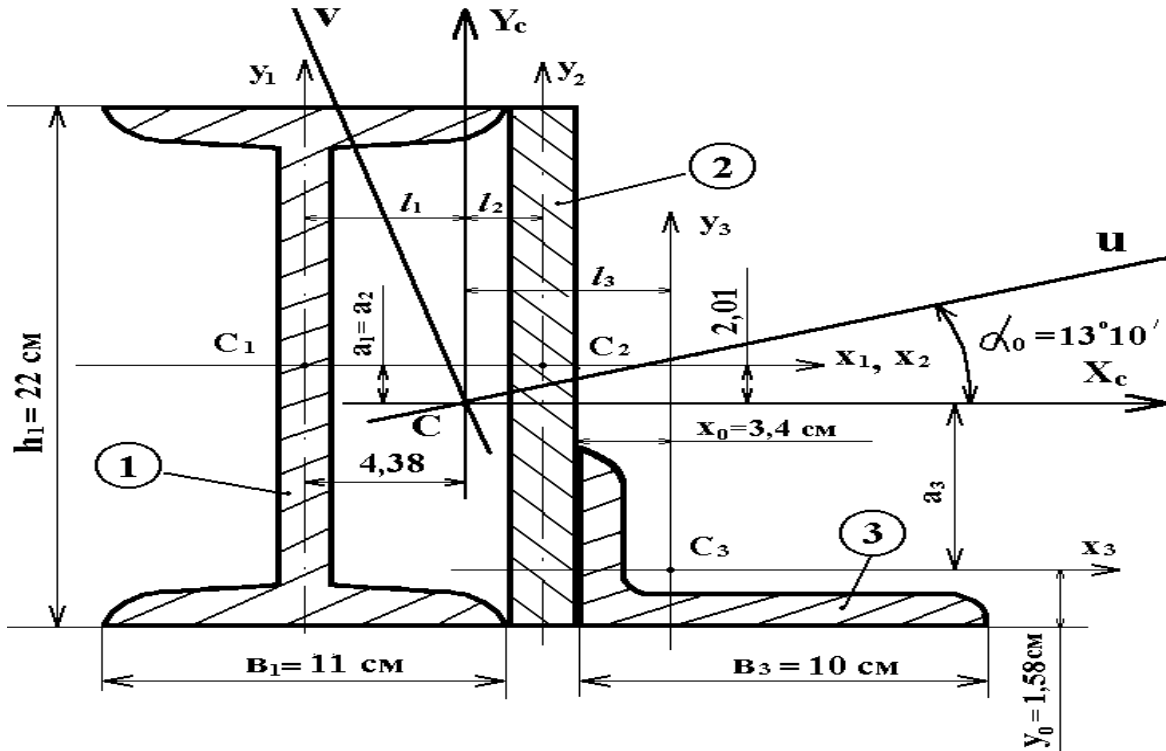


Рис. 2.15. Зображення плоского перерізу заданої схеми із зазначенням всіх необхідних позначень

5. Визначаємо положення головних центральних осей інерції:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = -\frac{2 \cdot (-941,87)}{1486,44 - 4743,27} = \frac{1883,74}{3256,83} = 0,5784;$$

$$2\alpha_0 = 30^\circ 04' \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 15^\circ 02'.$$

6. Визначаємо моменти інерції відносно головних центральних осей:

$$I_{\min}^{\max} = I_{u/v} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{4743,27 + 1486,44}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4743,27 - 1486,44)^2 + 4 \cdot (-941,87)^2} =$$

$$= 3114,85 \pm 1881,18;$$

$$I_{\max} = I_u = 3114,85 + 1881,18 = 4996,03 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_v = 3114,85 - 1881,18 = 1233,67 \text{ см}^4.$$

7. Перевірка:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_{X_C} + I_{Y_C} &= I_u + I_v; \\ 4743,27 + 1486,45 &= 4996,09 + 1233,68; \\ 6229,72 &\approx 6229,70 \end{aligned}$$

Похибка:

$$\Delta = \frac{6229,72 - 6229,70}{6229,71} \cdot 100\% = 0,3 \cdot 10^{-3}\%;$$

Допускається до 5%.

$$\text{б) } I_{uv} = \frac{I_{X_C} - I_{Y_C}}{2} \cdot \sin 30^{\circ}04' + I_{X_C Y_C} \cdot \cos 30^{\circ}04' = 0;$$

$$I_{uv} = \frac{4743,27 - 1486,44}{2} \cdot 0,5 + (-941,87) \cdot 0,866 = 0;$$

$$I_{uv} = 814,2 + 815,6 = 1,4;$$

Похибка:

$$\Delta = \frac{815,6 - 814,2}{815,6} \cdot 100\% = 0,17\%;$$

Допускається значення похибки до 5%.

Посилання на мультимедійну презентацію до завдання наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=37852>



Мультимедійна презентація «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів з прокатної сталі»

2.4. Завдання для самостійного виконання

1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (додаток 2). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.

2. Вибрати допоміжні координатні осі.
3. Знайти координати центру ваги перерізу.
4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.
5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку.

Таблиця 2.1.

№	№ профілів							Розміри		
	I	H	C	U	Лист I	L	L	a, мм	b, мм	c, мм
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

ЗАДАЧА № 1			ЗАДАЧА № 2			ЗАДАЧА № 3		
1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9
10	11	12	10	11	12	10	11	12
13	14	15	13	14	15	13	14	15
16	17	18	16	17	18	16	17	18

Нижче наведено електронний тестовий навчальний тренажер до розділу «Геометричні характеристики плоских перерізів». З методикою виконання можна ознайомитись у тестовому завданні до розділу 1. Посилання наведено нижче.
<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=37917>



Електронний тестовий навчальний тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»

Розділ 3. «Центральний розтяг і стиск стрижнів»

3.1. Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів

3.1.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою

В інженерній практиці досить часто зустрічається такий вид деформацій стрижня, як розтяг або стиск. Найбільш простий випадок – центральний розтяг-стиск, коли в поперечному перерізі із шести внутрішніх зусиль лише поздовжня сила N_z не дорівнює нулю. Воно виникає тоді, коли точка прикладання зовнішньої сили або рівнодіючої збігається з центром ваги перерізу і лінія її дії збігається з віссю. Для визначення поздовжньої сили N_z використовують метод перерізів (рис. 3.1).

Правило знаків:

$N_z > 0$ – коли вона напрямлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від’ємна», викликаючи стиск.

Для наочного представлення характеру зміни N_z по довжині стрижня будують епюру N_z – графік, кожна ордината якого показує значення N_z в поперечному перерізі (графічний закон зміни N_z).

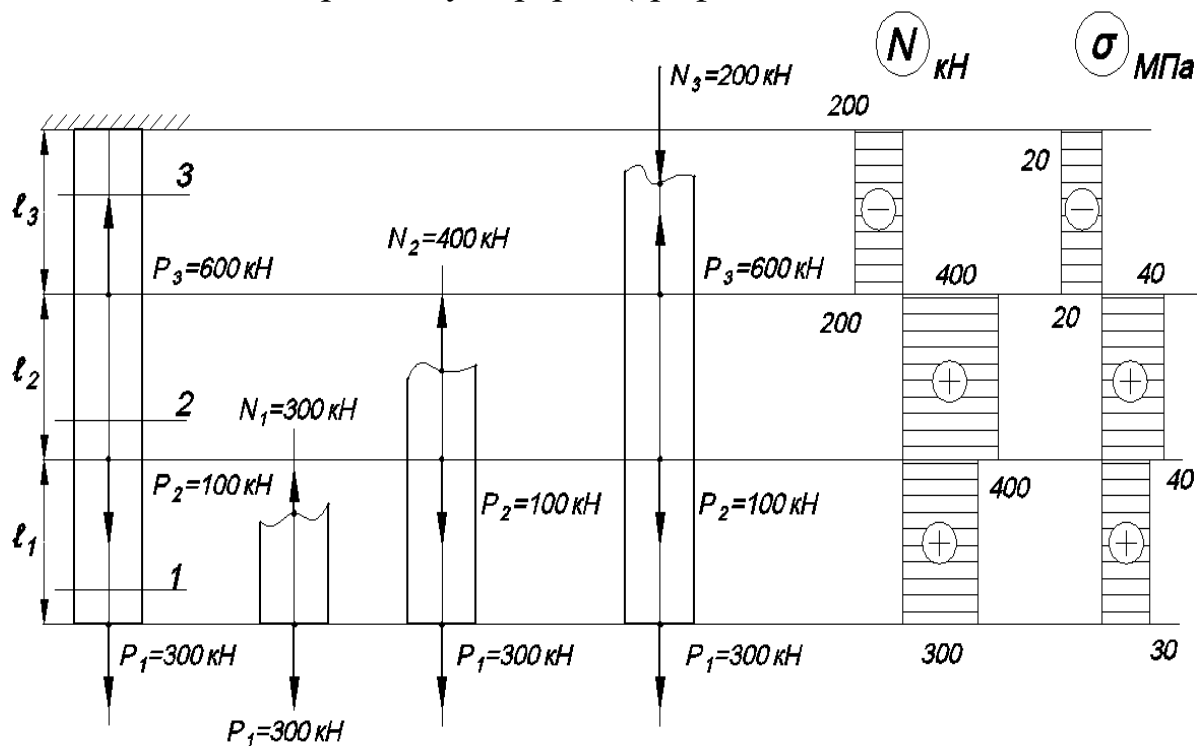


Рис. 3.1. Метод перерізів при розтязі-стиску.

$$N_I = P_1 = 300 \text{ кН}; N_{II} = P_1 + P_2 = 400 \text{ кН}; N_{III} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 \text{ кН}$$

У тому разі, коли характер зміни зовнішнього навантаження по довжині стрижня досить складний, вказаний метод унеможливилює швидке розв'язання задачі.

Розглянемо ділянку стрижня довжиною dz (рис. 3.2).

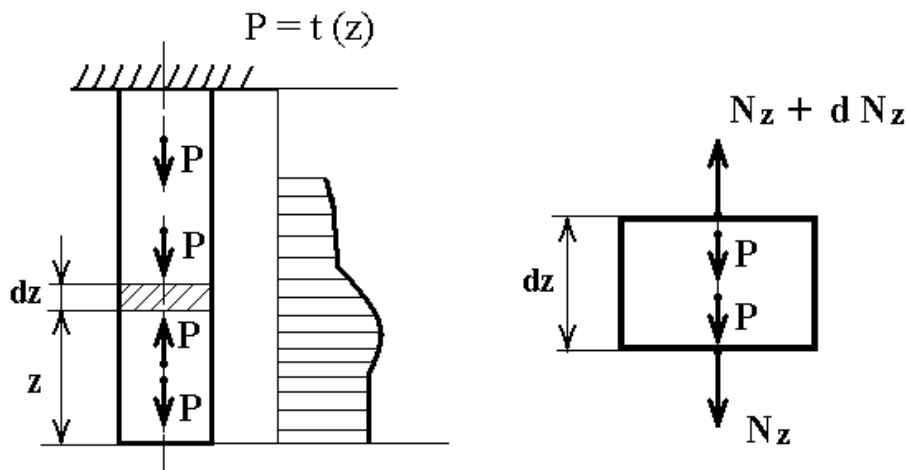


Рис. 3.2. Диференціальна залежність між зовнішнім навантаженням і поздовжньою силою.

$$\sum z = 0,$$

$$N_z + dN_z - N_z - P \cdot dz = 0,$$

$$P = \frac{dN_z}{dz}, \quad (3.1)$$

Звідси:

$$N_z = \int_0^l P \cdot dz. \quad (3.2)$$

Вираз (3.2) дає можливість не будувати відсічені частини стрижня, а одразу записувати аналітичні вирази для визначення N_z в характерних перерізах, межами яких є: початок та кінець стрижня; точки прикладання зовнішніх навантажень; точки, в яких змінюється поперечний переріз.

Запишемо значення N_z в характерних перерізах:

$$N_{1-1} = P_1 = -300 \text{ кН} = N_{2-2},$$

$$N_{3-3} = P_1 + P_2 = 400 \text{ кН} = N_{4-4},$$

$$N_{5-5} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 \text{ кН} = N_{6-6}.$$

3.1.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску

Завантажимо призматичний стрижень рівномірно-розподіленим навантаженням на кінцях (рис. 3.3).

Із умов рівноваги маємо:

$$N_z = P$$

Зрозуміло, що в перерізі m–n:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF \quad (3.3)$$

Із виразу (3.3) неможливо знайти характер зміни σ за поперечним перерізом. Тому розглядають характер деформації стрижня, наносячи на бокові поверхні сітку (рис. 3.3). Після завантаження стрижня отримуємо, що поперечні риси не викривлені і однаково віддалені одна від одної. Це дає можливість стверджувати, що як зовнішні, так і внутрішні волокна подовжуються однаково, тобто справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі).

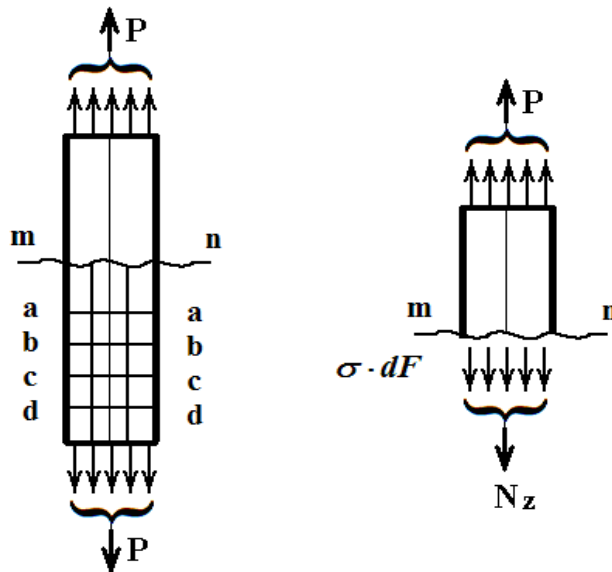


Рис. 3.3. До гіпотези плоских перерізів.

$$\begin{aligned} \varepsilon = const, \quad \sigma = const, \\ N_z = \sigma \int_F dF = \sigma \cdot \int_r dF = \sigma \cdot F, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Звідки:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \quad (3.5)$$

Тобто напруження σ по поперечному перерізу розподіляється рівномірно.

Для розв'язання задач міцності будують епюру σ . При цьому в характерних перерізах визначають її величину.

Для прикладу побудуємо епюру σ при $F = 10 \text{ см}^2$ (рис. 3.1)

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{N_{1-1}}{F} = \frac{300 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 300 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{N_{3-3}}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 400 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{N_{5-5}}{F} = -\frac{200 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -200 \text{ МПа}.$$

Розглянемо деформацію стрижня (рис. 3.4):

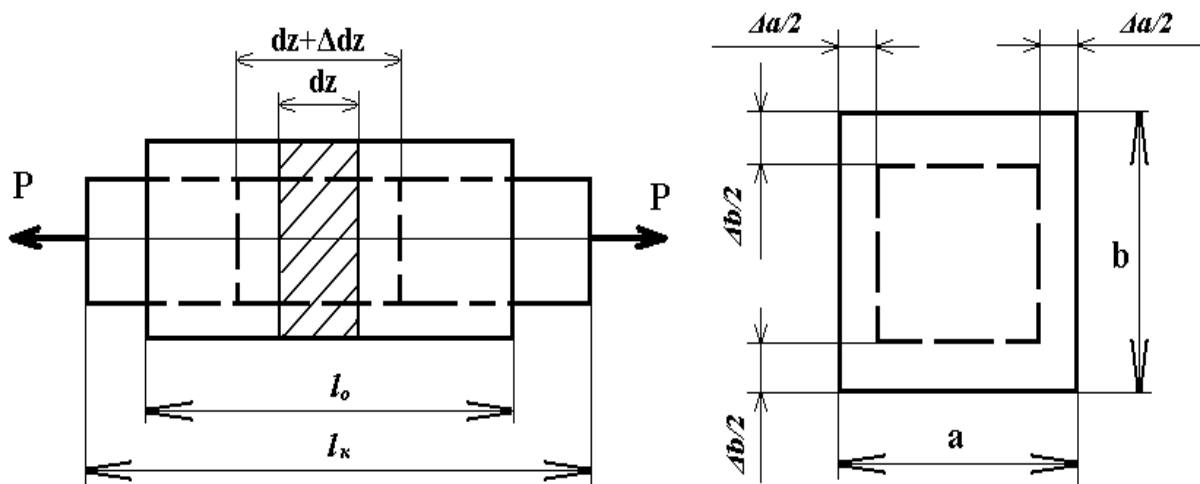


Рис. 3.4. Деформація стрижня.

Очевидно, що $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$; $\Delta dz = \varepsilon \cdot dz$; $\Delta l = l_k - l_0$.

Враховуючи гіпотезу плоских перерізів, маємо:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon \cdot dz = \varepsilon \int_l dz = \varepsilon \cdot l. \quad (3.6)$$

Тобто відносне подовження стрижня (деформація) визначається:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.7)$$

При цьому поперечна деформація:

$$\varepsilon'_a = -\frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon'_b = -\frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'. \quad (3.8)$$

Експериментально встановлено, що відношення відносних поперечних деформацій до поздовжніх (в межах пружних деформацій) є величиною сталою і називається її коефіцієнтом Пуассона (коефіцієнт поперечної деформації):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.9)$$

Закон Гука

Відомо з курсу фізики, що:

$$\Delta l = k \cdot P. \quad (3.10)$$

Зробимо деякі перетворення виразу 3.10:

$$\frac{\Delta l \cdot l}{l \cdot F} = \frac{k \cdot P}{F}, \quad (3.11)$$

$$\text{Маючи такі рівності: } \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon; \quad \frac{P}{F} = \sigma. \quad (3.12)$$

Підставимо рівності 3.12 у вираз 3.11, отримаємо:

$$\frac{\varepsilon \cdot l}{F} = k \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{l}{k \cdot F} \cdot \varepsilon. \quad (3.13)$$

Позначимо $\frac{l}{kF} = E$ – модуль пружності першого роду (або модуль Юнга) при розтязі, E (Па; МПа).

Тоді закон Гука при розтязі-стиску має вигляд:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.14)$$

Із виразом 3.14 зробимо перетворення:

$$\frac{N}{F} = \frac{E \cdot \Delta l}{l}, \text{ тоді } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \quad (3.15)$$

де добуток: $E \cdot F$ – жорсткість при розтязі-стиску.

3.1.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень

Для стрижня з постійними (сталими) N і F загальна деформація визначається виразом (3.15).

Для стрижня ступенево-змінного поперечного перерізу загальна деформація визначається як сума деформацій ділянок стрижня із сталими N і F , тобто:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i} . \quad (3.16)$$

Приклад: Для стрижня (рис. 3.5) визначити його деформацію і побудувати епюру абсолютного подовження ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$).

Дано: $P_1 = 2 \text{ кН}; P_2 = 5 \text{ кН}; P_3 = 7 \text{ кН};$
 $F_1 = 10 \text{ см}^2; F_2 = 20 \text{ см}^2;$
 $l_1 = 0,5 \text{ м}; l_2 = 0,8 \text{ м}; l_3 = 0,4 \text{ м}; l_4 = 0,6 \text{ м}.$

Розв'язок:

$$N_{1-1} = N_{2-2} = P_1 = 2 \text{ кН} ;$$

$$N_{3-3} = N_{4-4} = N_{5-5} = N_{6-6} = P_1 - P_2 = 2 - 5 = -3 \text{ кН} ;$$

$$N_{7-7} = N_{8-8} = P_1 - P_2 + P_3 = 4 \text{ кН} .$$

Абсолютні деформації ділянок стрижня:

$$\Delta l_I = \frac{N_{1-1} \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} ;$$

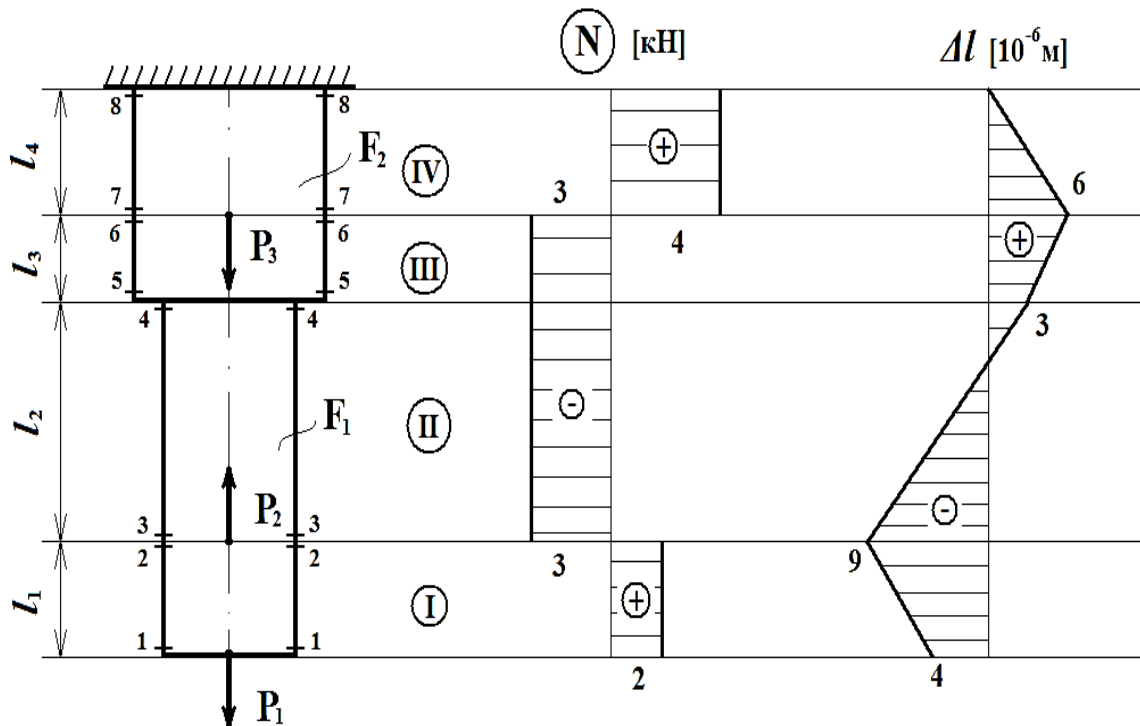


Рис. 3.5. Рисунок до задачі.

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{3-3} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} = -12 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{5-5} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{7-7} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = (5 - 12 - 3 + 6) \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

Побудуємо епюру Δl , яка будується від затиснення стрижня.

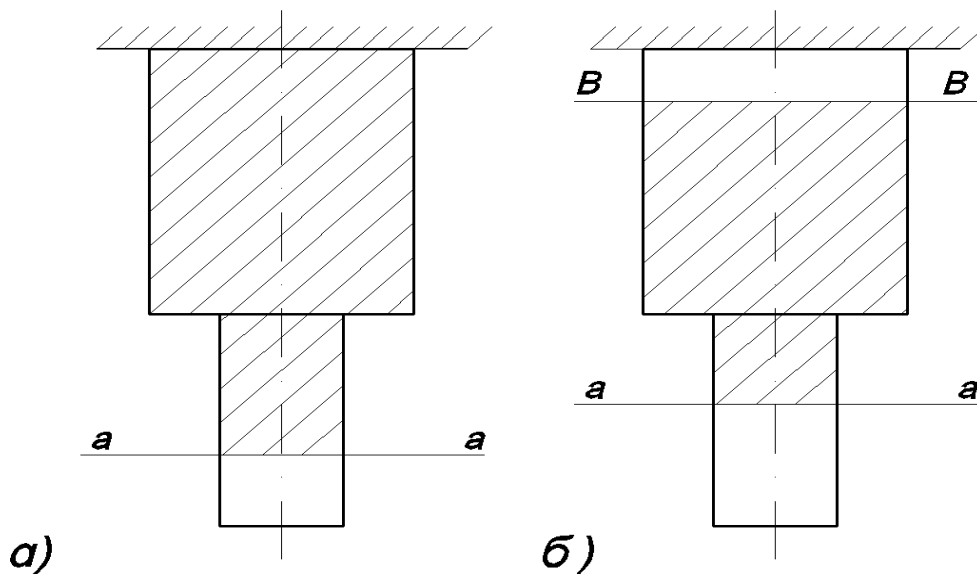


Рис. 3.6. Визначення переміщень:

а) – переріз $a-a$ відносно затиснення; б) – двох суміжних перерізів.

Часто виникає необхідність визначити переміщення між перерізом і защемленням або між перерізами $a-a$ і $b-b$. У цих випадках переміщення дорівнює абсолютній деформації (заштрихованих частин на рис. 3.6).

3.1.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

Розітнемо стрижень площиною А (рис. 3.7), нахиленою до поперечного перерізу під кутом α і розглянемо рівновагу лівої частини стрижня, знайшовши напруження в нахиленому перерізі (рис. 3.8).

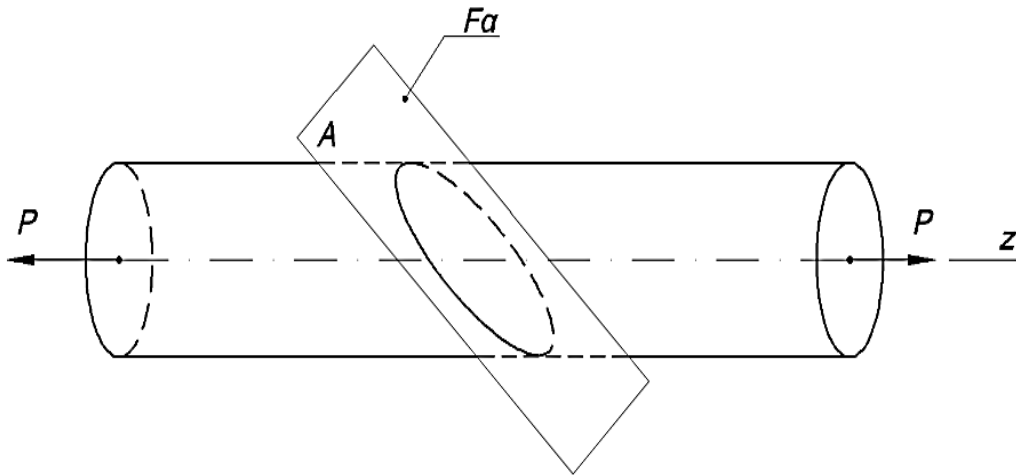


Рис. 3.7. Розтин стрижня площиною нахиленою під кутом α до осі z .

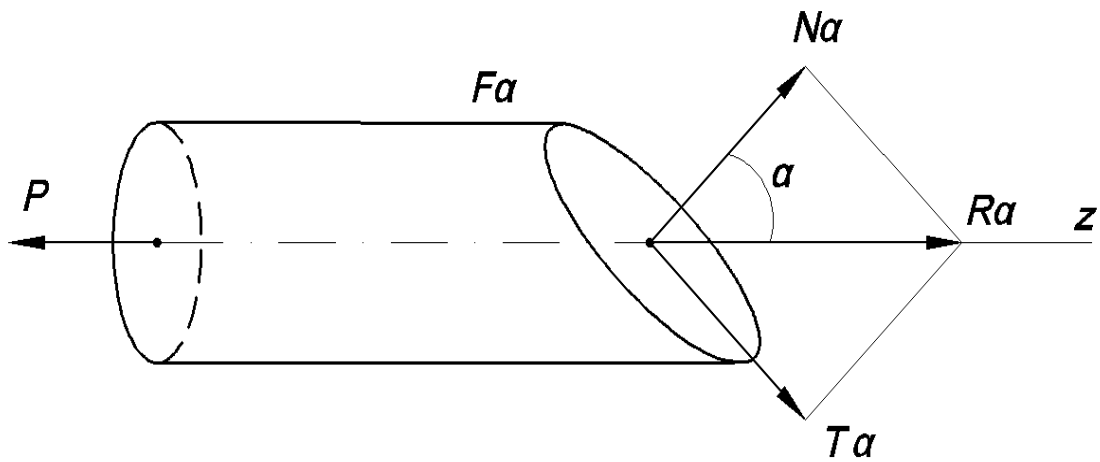


Рис. 3.8. Рівновага лівої частини стрижня.

$$\text{Відомо, що: } F_{\alpha} = \frac{F_0}{\cos \alpha}, \quad R_{\alpha} = P \quad (3.17)$$

Розкладемо R_{α} на складові, враховуючи (3.17)

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= R_{\alpha} \cos \alpha = P \cos \alpha \\ T_{\alpha} &= R_{\alpha} \sin \alpha = P \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

При цьому виникають напруження:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{F_{\alpha}} = \frac{P \cos \alpha}{F_0 / \cos \alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha \quad (3.19)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{T_{\alpha}}{F_{\alpha}} = \frac{P \sin \alpha}{F_0 / \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\alpha$$

(3.20)

де: $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$ – максимальне напруження в поперечному перерізі (3.21).

Зробимо аналіз (3.19) і (3.20) залежно від кута нахилу перерізу:

$$1) \alpha = 0: \sigma_{\alpha=0} = \sigma_0 = \sigma_{\max}, \tau_{\alpha=0} = 0;$$

$$2) \alpha = 45^\circ: \sigma_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2}, \tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} = \tau_{\max};$$

$$3) \alpha = 90^\circ: \sigma_{\alpha=90^\circ} = 0, \tau_{\alpha=90^\circ} = 0.$$

У поздовжніх перерізах відсутні нормальні й дотичні напруження; σ_{\max} виникають у поперечних перерізах, а τ_{\max} – в перерізах, нахилених до поперечного перерізу під кутом 45° .

3.2. Механічні властивості матеріалів

3.2.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості

Для вивчення поведінки матеріалів під навантаженням проводять випробування зразків, виготовлених із цього матеріалу в лабораторних умовах на спеціальних машинах, що, як правило, поділяються на машини з механічним та гідравлічним приводами.

Оскільки властивості матеріалів залежать від розмірів зразка, то для того, щоб була можливість порівняти результати досліджень різних лабораторій, встановлюють нормами форми та розміри зразків випробування.

Найбільш розповсюдженим є випробування на розтяг, оскільки найбільш просто та повно отримують механічні властивості матеріалів. Під час випробування на розтяг приймають круглі та плоскі зразки.

Круглий зразок з параметрами: $\varnothing = 20$ мм, $l = 10 \cdot d$ називають нормальними. Решту – пропорційними.

Зразки бувають довгими і короткими:

$l = 10 \cdot d$ – довгий зразок;

$l = 5 \cdot d$ – короткий зразок.

У результаті випробувань отримують графік залежності $P=f(\Delta l)$, який називають діаграмою розтягу; кожен матеріал має свою форму діаграми. Для м'якої сталі (Сталь 3) діаграму зображено на рис. 3.9.

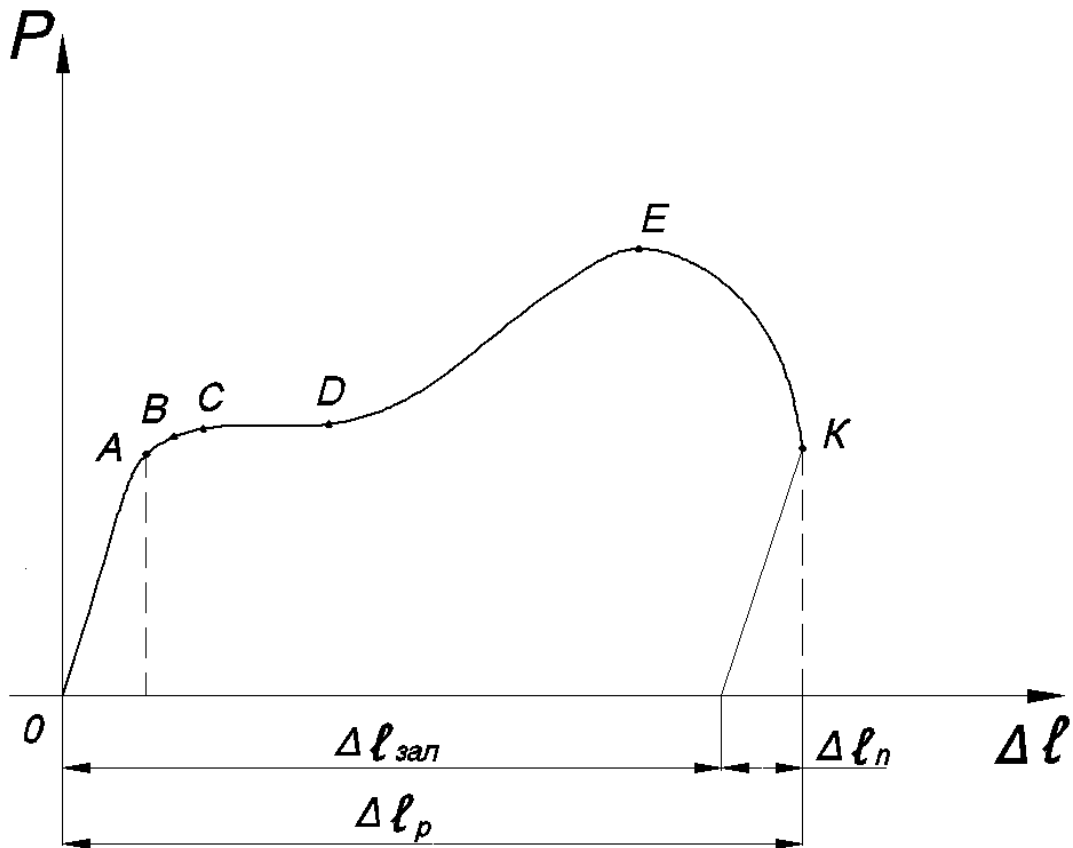


Рис. 3.9. Діаграма випробування на розтяг м'якої сталі.

Зручно цю діаграму відобразити у відносних величинах σ – ε (рис. 3.10):

де: $\sigma = \frac{P}{F_0}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$. (F_0 – початкова площа поперечного перерізу;

l_0 – довжина робочої частини зразка до завантаження).

У початковій стадії завантаження залежність між P і Δl – лінійна (від O до точки A), потім лінійність зникає. Точка B – границя пружності. За деякої сили (точка C) матеріал деформується при сталій величині сили P (текучість матеріалу).

В подальшому ділянка DE – зона зміцнення матеріалу, точка E – з'являється шийка; у подальшому EK – падаюча гілка діаграми. У точці K – руйнування.

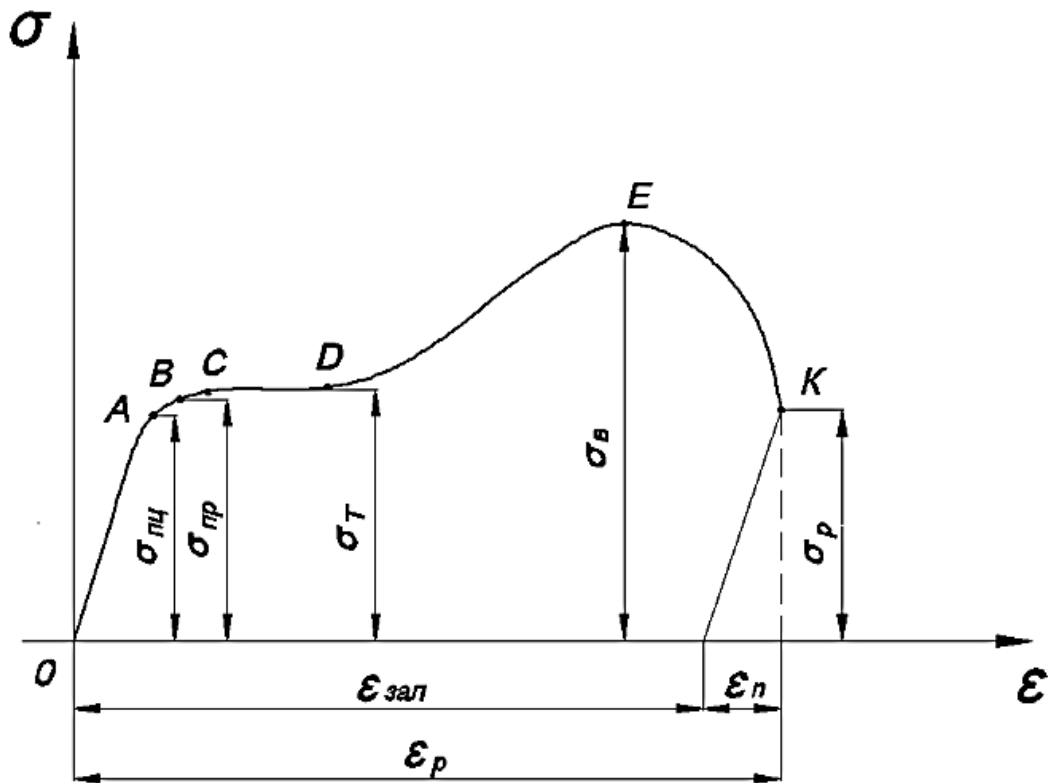


Рис. 3.10. Діаграма розтягання м'якої сталі у відносних координатах σ - ϵ .

Відповідно до цього отримують такі механічні властивості матеріалу:

а) характеристики міцності:

$\sigma_{пл}$ – границя пропорційності (точка А), найбільш напружена точка, де справедливим є (виконується) закон Гука $\sigma = E\epsilon$.

$\sigma_{пр}$ – границя пружності (точка В), коли зразок відновлює свої розміри після зняття навантаження (відсутня залишкова деформація).

$\sigma_{т}$ – границя плинності – матеріал деформується (тече) при сталій величині сили Р.

$\sigma_{в}$ – тимчасовий опір – це найбільше навантаження, яке витримує зразок.

$\sigma_{р}$ – напруження в момент руйнування.

б) характеристики пластичності:

- відносне подовження після руйнування:

$$\delta = \frac{\Delta l_{зал}}{l_0} \cdot 100\% ; \quad (3.22)$$

- відносно звуження зразка в точці розриву:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{ш}}{F_0} \cdot 100\% . \quad (3.23)$$

де: $l_{зал}$ – залишкова абсолютна деформація;

$F_{ш}$ – площа поперечного перерізу в шийці після руйнування.

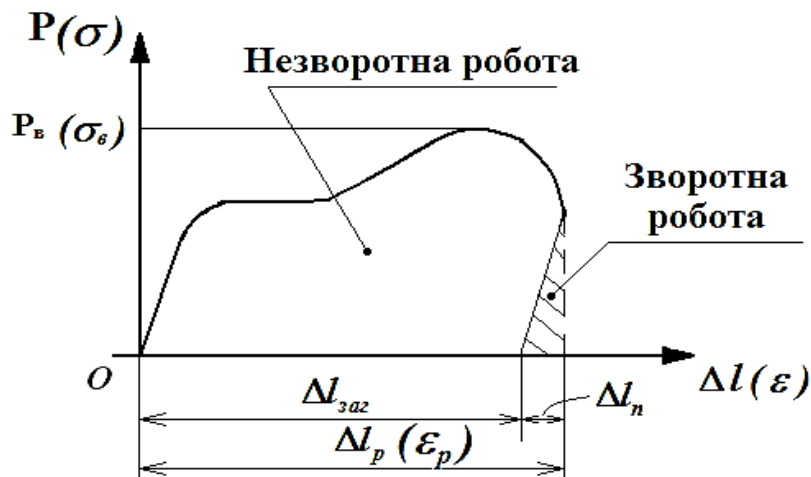


Рис. 3.13. Графічне відображення роботи

в) **характеристики в'язкості:**

В'язкість – це здатність матеріалу поглинати механічну енергію в незворотному вигляді. Вона характеризується питомою роботою деформації.

Повна робота деформацій визначається (рис. 3.13):

$$A = \eta \cdot P_{\epsilon} \cdot \Delta l_p , \quad (3.24)$$

η – коефіцієнт повноти діаграми розтягу.

Питома робота – робота, що затрачена на руйнування одиниці об'єму зразка, визначається:

$$u = \frac{A}{V_0} = \eta \cdot \underbrace{\frac{P_{\epsilon}}{F_0}}_{\sigma_B} \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_p}{l_0}}_{\epsilon_p} = \eta \cdot \sigma_{\epsilon} \cdot \epsilon_p . \quad (3.25)$$

3.2.2. Дійсна діаграма розтягу

Розглянута діаграма σ – ϵ є умовною. Умовність полягає в тому, що не враховується зміна площі поперечного перерізу F_0 і початкової довжини l_0 та рахуємо їх однаковими на всіх етапах навантаження, що

не відповідає дійсності. Для дійсної діаграми справджується ряд залежностей:

$$\sigma_D = \frac{P}{F_D}; \quad (3.26)$$

$$\Psi = \frac{F_0 - F_D}{F_0} = 1 - \frac{F_D}{F_0}; \quad (3.27)$$

$$F_D = F_0(1 - \Psi). \quad (3.28)$$

Без виведення отримаємо:

$$\varepsilon_D = \frac{\Psi}{1 - \Psi}. \quad (3.29)$$

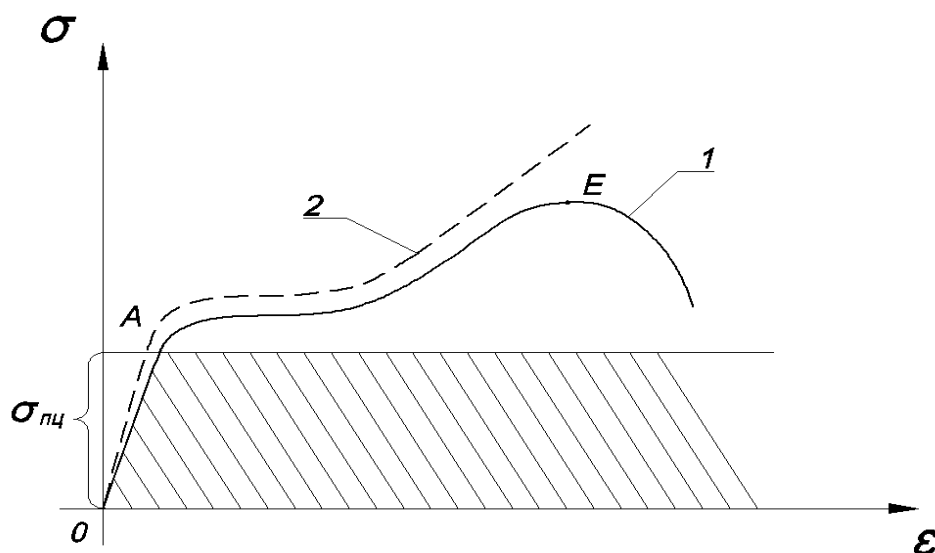


Рис. 3.14. Дійсна (2) та умовна (1) діаграми розтягу м'якої сталі.

Наклавши дійсну діаграму на умовну (рис. 3.14) побачимо, що на початковій стадії (особливо до точки E) розбіжність між ними невелика, вона починається з моменту утворення шийки.

Оскільки нас цікавить напруження в межах пропорційності (заштрихована зона), то дійсна діаграма має чисто теоретичний інтерес і її використовують лише в спеціальних розрахунках.

3.2.3. Випробування матеріалів на стиск

У природі всі тверді матеріали поділяються на пластичні та крихкі.

Пластичні матеріали – це такі, у яких діаграма розтягу подібна до діаграми розтягу м'якої сталі.

Крихкі – діаграма подібна діаграмі чавуну.

Зрозуміло, що пластичний матеріал при стиску неможливо зруйнувати (він сплющується), і встановлено, що для пластичних матеріалів механічні характеристики при розтязі і стиску однакові, тому випробування пластичних матеріалів на стиск проводять досить обмежено.

Для крихких матеріалів міцність на стискання значно перевищує міцність на розтяг. Чавун – в 10 – 15 разів, бетон – в 15 – 20 разів.

Під час випробувань на стиск для уникнення проблем стійкості випробовують короткі зразки циліндричної або кубічної форми $h = (2 \div 3)d$. Для випробування деяких матеріалів використовують циліндричний зразок. У результаті випробування він набуває форми бочки і руйнується по площині під кутом 45° до вісі стрижня (рис. 3.15).

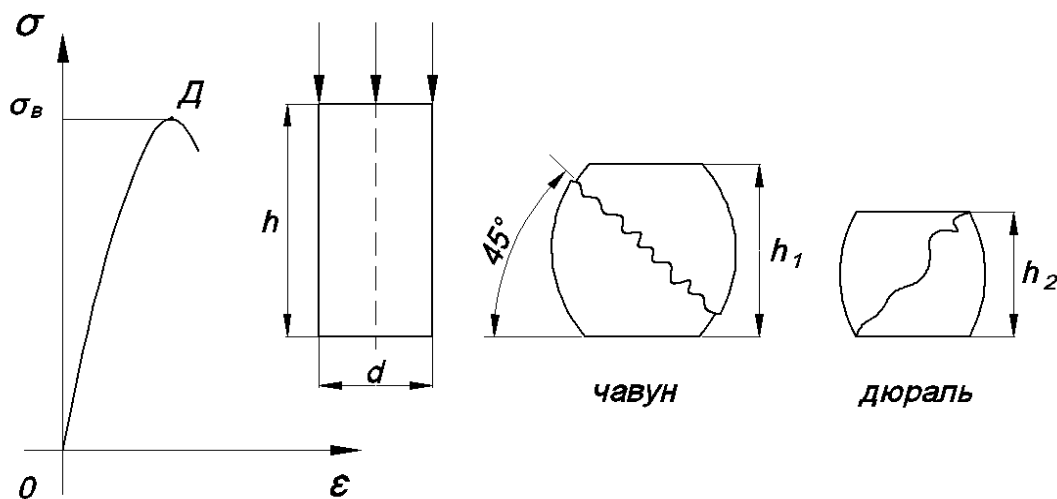


Рис. 3.15. Діаграма «Стиск і характер руйнування зразків крихких матеріалів».

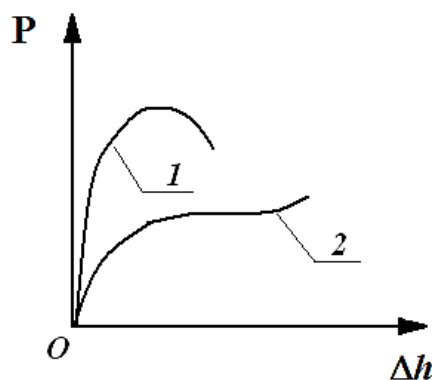


Рис. 3.16. Діаграма стиску дерева:
1 – вздовж волокон; 2 – впоперек волокон.

Особливим є випробування на стиск анізотропних матеріалів (рис. 3.16) таких, як дерево, що відрізняється випробуванням вздовж та впоперек волокон. Міцність деревини вздовж волокон значно вища, ніж впоперек.

3.2.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

На механічні характеристики матеріалів впливають різні фактори. Розглянемо найбільш суттєві.

Вплив температури – з підвищенням температури характеристики міцності зменшуються, а пластичності збільшуються.

Радіаційне опромінення – загальна характеристика:

- характеристики міцності збільшуються;
- пластичність збільшується.

Для деяких видів пластмас можливим є збільшення пластичності при γ -випромінюванні.

Термічна обробка:

а) **відпалювання** – виконується для зняття початкових напружень, викликаних холодним обробітком деталі. Відпалювання знижує міцність і збільшує пластичність.

б) **гартування** – підвищує міцність і сильно зменшує пластичність (з'являється крихкість).

в) **відпуск** – виконується для зниження крихкості й збільшення пластичності із зниженням міцності.

г) **вплив швидкості навантаження** – із збільшення швидкості навантаження деталі характеристики міцності збільшуються, а пластичності зменшуються (рис. 3.17).

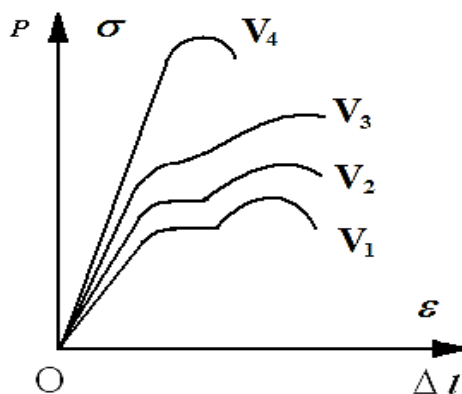


Рис. 3.17. Вплив швидкості навантаження на вид діаграми розтягу

$$V_4 > V_3 > V_2 > V_1.$$

3.2.5. Потенційна енергія при розтязі-стиску

У результаті розтягу матеріалу сила виконує роботу на викликаних деформаціях. При цьому в середині зразка накопичується потенційна енергія (енергія деформацій), за рахунок якої зразок відновлює розміри та форму після зняття навантаження.

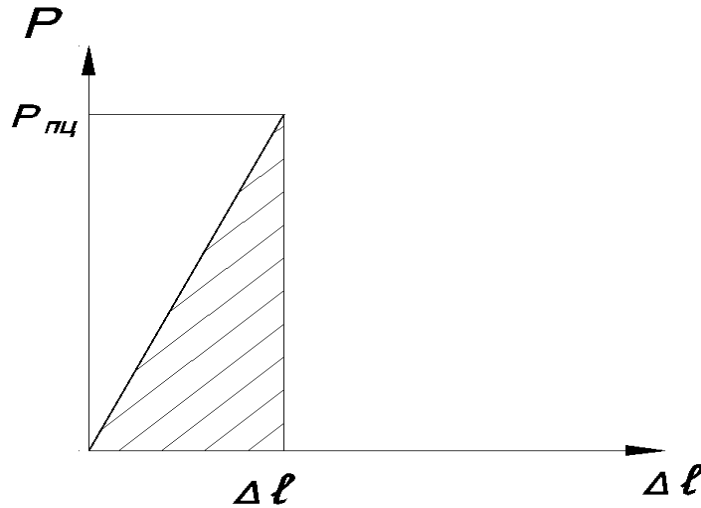


Рис. 3.18. Пружна частина діаграми розтягу-стиску.

У зоні пружних деформацій робота дорівнює потенційній енергії і визначається (рис. 3.18):

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta l, \quad (3.30)$$

Знаючи, що: $P = N$, $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$, можемо отримати:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot F} \quad (3.31)$$

Вираз (3.31) – це повна потенційна енергія.

Питома потенційна енергія – це енергія, затрачена на деформацію одиниці об'єму зразка:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta l}{F_0 \cdot l_0} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}. \quad (3.32)$$

Враховуючи, що: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$,

отримаємо кінцевий вираз:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (3.33)$$

Перш ніж почати виконання лабораторних робіт, здобувачам вищої освіти пропонується переглянути мультимедійну презентацію «Механічні властивості матеріалів». Посилання приведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=37842>



*Мультимедійна презентація
«Механічні властивості матеріалів»*

3.2.6. Лабораторна робота №1

Тема: *Випробування маловуглецевої сталі статичним навантаженням на розтягування.*

Мета роботи: визначення механічних характеристик і показників пластичної сталі.

Загальні відомості.

Експериментальне визначення механічних характеристик і показників пластичності потрібне для вибору конструкційних металів і розрахунків на міцність і жорсткість. Подібні випробування супроводжуються вивченням усіх стадій деформацій зразка при розтягуванні з доведенням навантаженням до значень, передуючих розриву зразка. В процесі випробування визначаються механічні характеристики: границя пропорційності, границя плинності (текучості) і границя міцності. Крім того, визначаються показники пластичності: залишкове відносне подовження, відносне звуження і питома робота, що витрачається на руйнування зразка.

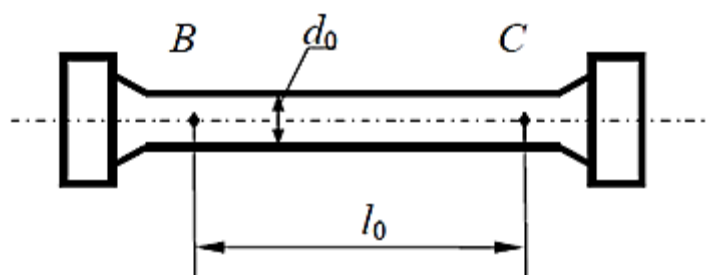


Рис.3.19. Зразок для випробування

Зразок має циліндричну форму з головкою на кінцях для закріплення їх в затискачах машини (рис.3.19).

Для випробування застосовується короткий пропорційний зразок, тобто такий, у якого довжина $l=10 \cdot d$. Перед установкою зразка робиться вимір його розрахункової довжини L і діаметру D . По результатам зробленого експерименту обчислюється площа поперечного перерізу A і об'єм робочої частини зразка $V=F \cdot l$. Випробування здійснюється на розривній машині ИМ-4Р (рис.3.22) із записуючим пристроєм, що викреслює діаграму розтягування, тобто графік, що зв'язує навантаження і деформацію зразка в процесі його розтягування до моменту розриву.

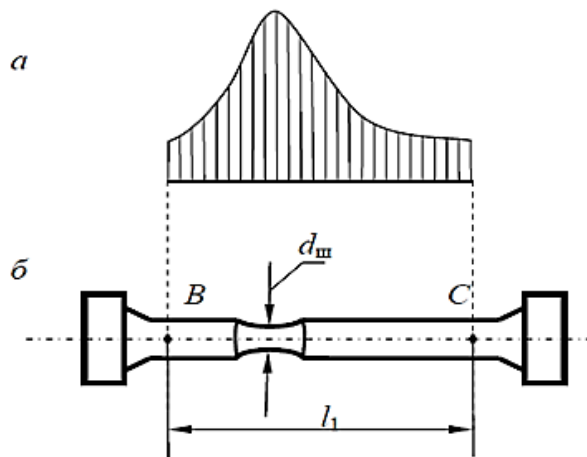


Рис.3.20. Зразок для випробування

Підготовлений до випробування зразок встановлюється в затискачі машини, і машина пускається в хід. В процесі випробування ведеться спостереження за поведінкою зразка по діаграмі, що викреслена записуючим пристроєм машини. Після обриву зразка машина зупиняється і обидві половини зразка звільняються. Руйнування зразка станеться в місці утворення так званої «шийки», тобто місцевого звуження поперечного перерізу зразка. Ретельно і як можливо щільніше притиснувши один до одного половинки зразка за місцем обриву, слід виміряти діаметр $d_{ш}$ в найбільш вузькому місці, довжину зразка після розриву l_1 і обчислити площу перерізу. Після обриву зразка міліметровка із діаграми піддається обробці. Зразковий вид діаграми для маловуглецевих сталей, записаний машиною в процесі випробування, представлений на (рис.3.21).

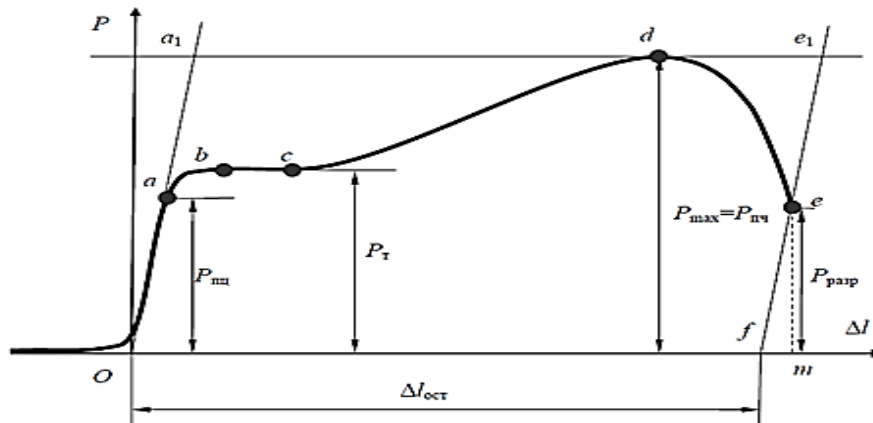


Рис.3.21. Діаграма для зразка

Криву розтягування на діаграмі при обробці краще всього розділити на підрозділи на ділянки, як вказано на рис.3.21.

Ділянка від О до А на більшій частині є прямолінійною. У цій частині діаграми виражається пряма пропорційна залежність між силою і деформацією, тобто залежність закону Гука. До початку деформації зразка переміщення рухливого затискача відбувається без наростання або з невеликим збільшенням завантаження, яке потрібне для усунення проміжків як в механізмі машини, так і між головками зразка затискача. Тому на початку діаграми з'являється спочатку горизонтальна, а потім криволінійна ділянка. Щоб виключити з розгляду цю ділянку, слід продовжити прямолінійний відрізок діаграми до осі абсцис, в перетині з якою отримаємо точку О – початок діаграми. Ордината точки А являється найбільшою з ординат точок діаграми, співпадаючою з прямолінійною ділянкою ОА. Ордината точки А в масштабі діаграми дорівнює найбільшому навантаженню (при якому виконується закон Гука). Межа пропорційності – найбільша напруга, перевищення якої викликає відхилення від закону Гука.

Межа пропорційності визначається за формулою:

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{A_0}$$

де A_0 – початкова площа поперечного перерізу зразка.

Ділянки кривої *a-b-c* після переходу через межу пропорційності деформації починають інтенсивно зростати, причому від точки В до С діаграми деформації ростуть без подальшого збільшення навантаження – матеріал зразка «тече». На діаграмі при цьому

прокреслюється горизонтальна лінія. Ординати точок на цій ділянці встановлюють навантаження R_T , з урахуванням якого обчислюється межа плинності σ_T . Границя плинності – напруга, при якій відбувається текучість матеріалу, тобто зростання деформації при постійному навантаженні. Вона визначається за формулою:

$$\sigma_T = \frac{R_T}{A_0}$$

Для ряду високовуглецевих і легованих сталей, сплавів кольорових металів відрізка плинності може і не бути. В цьому випадку за величину границі плинності умовно приймають напругу, при якій залишкове подовження зразка складає 0,2%. Умовно границя плинності позначається $\sigma_{0.2}$.

Ділянка кривої від С до Д на цій ділянці від кінця «плинності» до максимуму кривої В в точці Д спостерігається деяке збільшення навантаження на зразок. Це явище називається «наклепом» або зміцненням матеріалу зразка. У точці Д крива має найбільшу ординату. Ця ордината в масштабі діаграми дорівнює максимальному навантаженню $R_{пц}$, при якому матеріал зразка починає руйнуватись.

Границя міцності або тимчасовий опір – напруга, при якій відбувається руйнування матеріалу. Границя міцності $\sigma_{в(пц)}$ знаходиться як відношення максимальної сили, яку здатний витримати зразок при розтягуванні, до його початкової площі поперечного перерізу, тобто

$$\sigma(пц) = \frac{R_{пц}}{A_0}$$

Слід зазначити, що границя пропорційності, границя плинності і границя міцності є умовними характеристиками, оскільки навантаження, що відповідають їм, відносяться до початкової площі A_0 . Ділянка кривої від α до ε після досягання максимального навантаження деформації зразка починає концентруватися біля ділянки подовженні зразка, що виявилася найбільш слабкою. На зразку з'являється так звана шийка. На рис. 3.20 показаний характер інтенсивності розподілу подовжньої і поперечної деформації уздовж зразка після утворення шийки. Внаслідок інтенсивного зменшення площі перерізу «шийки» для подальшого розтягу зразка потрібне менше зусилля. Тому на діаграмі і спостерігається зниження навантаження, що триває до розриву зразка. У точці Е крива діаграми

внаслідок розриву зразка обривається, навантаження називається руйнуючим і позначається $P_{розр}$. Отримаємо величину істинної напруги руйнування зразка:

$$\sigma_4 = \frac{P_{розр}}{A_{ш}},$$

де $A_{ш}$ – площа перерізу в місці руйнування зразка.

Істинна напруга – це напруга, при якій відбувається розрив зразка. Для сталі окрім механічних характеристик визначаються показники пластичності: залишкове відносне подовження:

$$\delta = \frac{L_1 - l_0}{l_0}$$

і відносне залишкове поперечне звуження

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0},$$

де L_0 – довжина зразка до випробування; L_1 – довжина зразка після руйнування; A_0 – площа поперечного перерізу зразка до випробування; $A_{ш}$ – площа поперечного перерізу в місці розриву зразка.

Окрім знайденої вище величини напруги і деформації, що характеризують міцність і пластичність матеріалу, для оцінки якості випробуваної сталі необхідно визначити кількість роботи, витраченої на розрив зразка. Чим більше роботи необхідно витрати на розрив, тим більше енергії в змозі поглинути матеріал, не руйнуючись, тим краще він чинитиме опір ударним навантаженням, поглинаючи кінетичну енергію удару.

Робота, витрачена на руйнування зразка, відповідає площі діаграми розтягування *o-a-b-c-d-e-f* (з урахуванням масштабу сил і деформацій). Щоб отримати величину, що характеризує опір матеріалів зразка розриву, необхідно підрахувати питому роботу розтягування, тобто кількість роботи, що доводиться на одиницю об'єму:

$$A_{уд} = \frac{A}{V_0},$$

де A – робота затрачена на руйнування зразка; V_0 – початковий об'єм зразка.

Практично величину роботи A можна визначити за формулою:

$$A = \eta \cdot P_{max} \cdot \Delta l_{зал}$$

де η – коефіцієнт повноти діаграми, що враховує площу паралелограма $O-A_1-E_1-f$ із сторонами рівними P_{\max} і $\Delta l_{\text{зал}}$ від дійсної площі діаграми.

Коефіцієнт повноти діаграми залежно від матеріалу сталі дорівнює $\eta = 0,8:0,9$. У наших випробуваннях прийmemo $\eta = 0,85$

Порядок виконання роботи:

1. Перед установкою зразка в затискачі, зробити виміри його довжини і діаметру штангенциркулем з точністю до 0,1мм. Довжина фіксована точками В і С.

2. Зразок встановити в затискачі машини 1 і 2 (рис. 3.22) за допомогою двох вкладишів 3 і 4 і роз'ємних «сухарів» 5 (рис. 3.23). Зразок закладається у вкладиш як вказано на (рис. 3.23) і потім, підтримуючи пальцями вкладиша 3, зібрана система встановлюється в затиснення машини. При необхідності зміна відстані між затискачами регулюється обертанням диска 6 (рис. 3.24). Для ліквідації великих проміжків в затискачах після установки зразок злегка натягують.

3. Каретку 7 з фломастером зачепити з важелем 8.

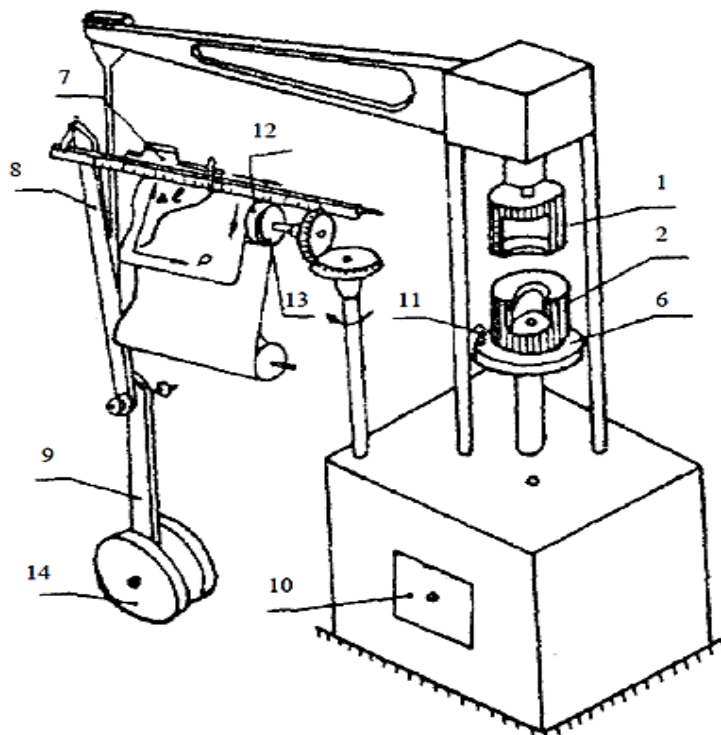


Рис.3.22. Лабораторна установка

4. Міліметровка має бути притиснута до валика 12 і не мати перекосів. Валик необхідно з'єднати з ходовою частиною машини клямкою 13.

5. Включити електродвигун на «розтягування».
6. В процесі випробування ведеться спостереження за характером викреслюваної діаграми.

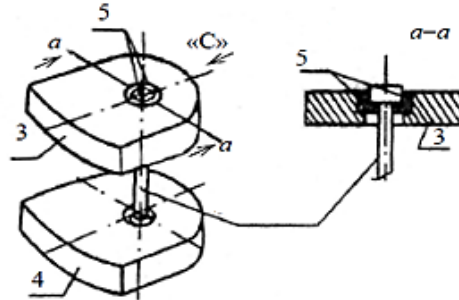


Рис.3.23. Затиснення зразка

Примітка: для контролю характерні навантаження можна встановлювати за вимірювальною шкалою машини і записати безпосередньо на діаграму.

7. Після розриву зразка зупинити машину вмикачем 10 і звільнити зразок із затискачів.

8. Заміряти зразок після руйнування, з'єднавши дві його частини. Зразок матиме вигляд, зображений на рисунку.

9. Обробити діаграму розтягування.

- a). встановити початок координат осей як вказано на рисунку.

- b). визначити навантаження $P_{пц}$, P_T , $P_{пч}$, $P_{розр}$, враховуючи масштаб сил.

На онлайн лабораторну роботу з мультимедійним супроводом №1 на ресурсі можна перейти за вказаним шляхом. Звіт з лабораторної роботи здобувач вищої освіти може відправити у вигляді відповіді на завдання на ресурсі. Посилання наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38098>



*Онлайн лабораторна робота з мультимедійним супроводом №1
«Випробування маловуглецевої сталі статичним навантаженням на
розтягування».*

Звіт.

Необхідно оформити звіт по набутій формі та надіслати у вигляді відповіді на завдання до лабораторної роботи №1.

Ескіз зразка	До випробування	Після випробування
Повна довжина		
Довжина робочої частини зразка		
Діаметр		
Площа поперечного перерізу		

3.2.7. Лабораторна робота №2

Тема: Випробування матеріалів на стиск

Мета роботи:

- 1) порівняльне вивчення властивостей крихких, однорідних і неоднорідних матеріалів при стисненні;
- 2) визначення границь міцності матеріалів при стисненні.

Загальні відомості

При випробуванні на стиснення пластичних матеріалів (м'якої сталі, міді, деяких видів пластмас та інших) можна визначити границю пропорційності і границю плинності (текучості). Великі деформації пластичних матеріалів не дозволяють їм руйнуватися. Тому для пластичних матеріалів не існує границі міцності при стисненні. Крихкі ж матеріали (чавун, камінь, бетон та ін.), на відміну від пластичних, руйнуються при стисненні. При цьому вони витримують значно більші напруження, ніж при розтягуванні. Для крихких матеріалів границя міцності при випробуванні на стиск має велике практичне значення, так як зазвичай деталі з крихких матеріалів в реальних конструкціях в більшості випадків працюють на стиск.

Випробування на стиск чавуну.

Для випробування виготовляються циліндричні зразки (рис. 3.26, б) з відношенням висоти до діаметра $\frac{h}{d}=1,5$. Під дією стискаючих сил зразок, скорочуючись, приймає злегка бочкоподібну форму (рис. 3.26, в). Це свідчить про наявність невеликих пластичних деформацій. Діаграма стиску спочатку йде майже по прямій лінії,

злегка нахилений до осі сил. Потім, все більше викривляючись, діаграма досягає максимуму і різко обривається (рис. 3.26, а).

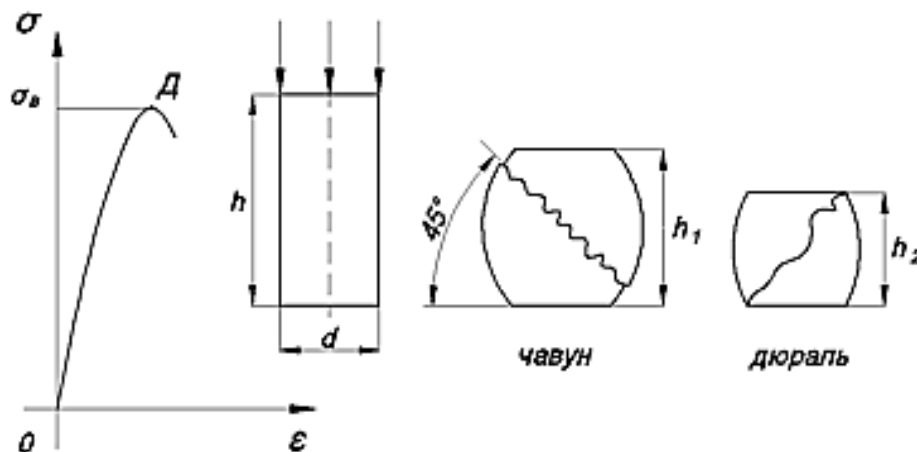


Рис.3.26. Типи зразків

Руйнування зразка відбувається в результаті утворення похилих тріщин, спрямованих приблизно під кутом 45° до осі зразка, тобто на площадках, на яких діють найбільші дотичні напруження (рис. 3.26, в). В результаті випробування визначають величину границі міцності чавуну на стиск, за формулою:

$$\sigma_{в(щ)} = \frac{P_{пч}}{A_0},$$

де $P_{щ}$ – руйнівне навантаження; A_0 – площа поперечного перерізу зразка.

Випробування на стиск цементного каменю

Цементний камінь (рис. 3.26, б) являє собою замішану на воді і затверділу цементно-піщану суміш. При замішуванні сухої цементної суміші водою цемент і вода перетворюються в цементне тісто, в якому починається хімічна реакція розкладання цементу. З перемішуванням цементно-піщаної суміші цементне тісто поступово твердіє, перетворює цементно-піщану суміш в моноліт. Зразки цементного каменю виготовляються у вигляді кубиків (рис. 3.27, б). Діаграма стиску цементного каменю – типова діаграма стиску крихкого матеріалу (рис. 3.27, а).

З діаграми видно, що камінь руйнується без помітного залишкового укорочення. Характер руйнування зразка показаний на рисунку 3.27, в. Руйнування кубика починається з викришування вільних граней і переходу до форми зрізаних пірамід, з'єднаних між

собою меншими основами. Така форма руйнування пояснюється дією сил тертя, що виникають між поверхнями зразка і подушками преса. Сили тертя перешкоджають поперечному розширенню зразка і утворення поздовжніх тріщин. Вплив сил тертя значніший у торцях зразка і зменшується до середнього його перетину. За знайденими з досліду значенням руйнівного вантажу визначається межа міцності:

$$\sigma_{в(пч)} = \frac{P_{пч}}{A_0}$$

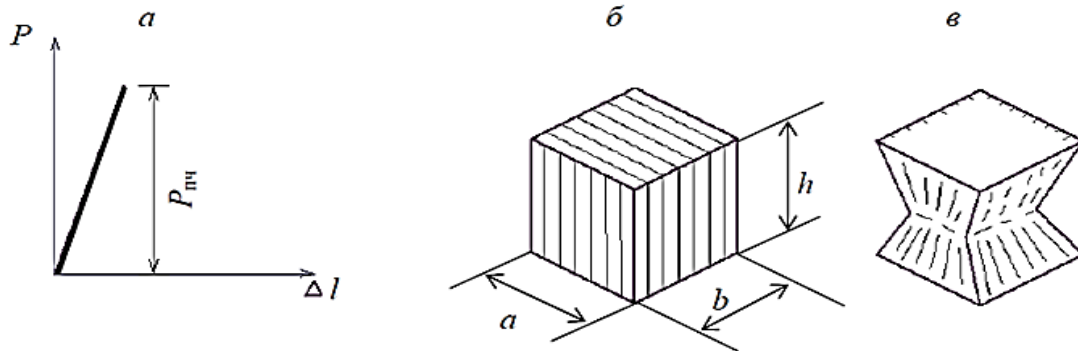


Рис.3.27 Руйнування цементного каменю

Випробування дерев'яних зразків на стиск

Деревина є представником анізотропних матеріалів, тобто має різні властивості в різних напрямках. Такі властивості деревини обумовлені різко вираженою волокнистістю будови. При розгляді властивостей деревини виділяють два головних напрямки: уздовж волокон і поперек волокон. У напрямку вздовж волокон деревина володіє найбільшими показниками міцності і пружними властивостями, а в напрямку поперек волокон – найменшими. Анізотропію деревини враховують при застосуванні дерева в спорудах. Дерево слід розташовувати так, щоб стискаюче (розтягуюче) зусилля діяло у напрямку найбільшого опору, тобто вздовж волокон. Для випробування застосовують дерев'яні кубики зі стороною $h = 3$ см (рис. 3.38, б, в). При стисненні дерева вздовж волокон до руйнування зразок зазнає порівняно невеликі залишкові деформації (рис. 3.28, а, крива 1). Руйнування зразка зазвичай відбувається за рахунок утворення поперечних складок, деформації торців і виникненню поздовжніх тріщин (рис. 3.28, г).

Робота деревини на стиск поперек волокон відрізняється в'язкістю, тобто відбувається з сильним розвитком деформацій. Типова діаграма для цього випадку показана на рис.3.28, а (крива 2).

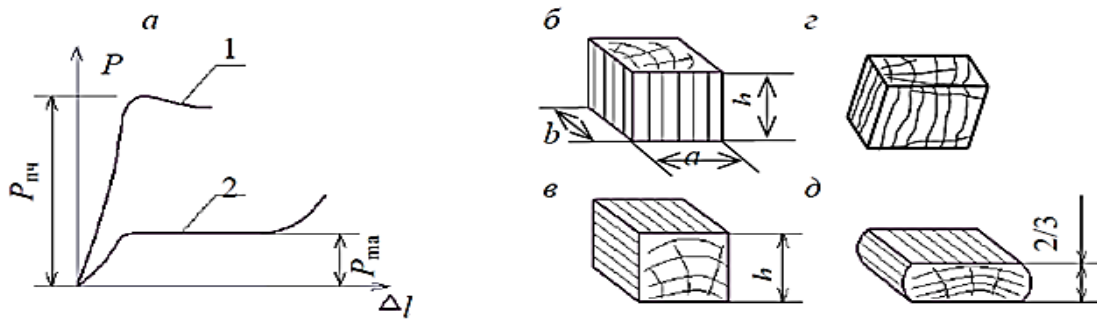


Рис.3.28 Випробування дерев'яного зразка

За результатами випробування визначається границя міцності:

$$\sigma_{в(пч)} = \frac{P_{пч}}{A_0}$$

Руйнування кубика, як правило, не спостерігається; він лише спресовується (рис. 3.28, д). У зв'язку з цим умовно вважають, що руйнівне навантаження - це те, при якому кубик стискається на 1/3 своєї первісної висоти. Границя міцності (умовна) обчислюється за формулою:

$$\sigma_{в(пч)} = \frac{P_{max}}{A_0}$$

де P_{max} – навантаження, при якому кубик стиснувся на 1/3 своєї первісної висоти. Для випробування використовують гідравлічний прес, оснащений закритим щитком, що охороняє від можливих уламків руйнуючого зразка.

Порядок проведення роботи:

1. Виміряти зразок штангенциркулем.
2. Встановити зразок на опорний циліндр по центру преса.
3. Провести завантаження зразка.
4. Зафіксувати за силовимірювальною шкалою навантаження, яку витримав зразок.
5. Зняти зразок і зобразити вид зруйнованого зразка.
6. Оформити звіт по формі, що додається.

Звіт. Стиснення чавуну

Схема зразка до досліду	Розміри	Вид зразка після досліду
	діаметр $d = \dots$ мм висота $h = \dots$ мм Площа перерізу $A_0 = \dots$ м ²	

Руйнівне навантаження $R_{пч} = \dots \text{ Н}$

Границя міцності $\sigma_{в(пч)} = \frac{R_{пч}}{A_0} = \dots = \dots \text{ МПа}$

Стиснення цементного каменю

Схема зразка до досліді	Розміри	Вид зразка після досліді
	Сторони зразка $a = \dots \text{ мм}$ $b = \dots \text{ мм}$ висота $h = \dots \text{ мм}$ Площа перерізу $A_0 = \dots \text{ м}^2$	

Руйнівне навантаження $R_{пч} = \dots \text{ Н}$

Границя міцності $\sigma_{в(пч)} = \frac{R_{пч}}{A_0} = \dots = \dots \text{ МПа}$

Стиснення дерева

Уздовж волокон

Схема зразка до досліді	Розміри	Вид зразка після досліді
	Сторони зразка $a = \dots \text{ мм}$ $b = \dots \text{ мм}$ висота $h = \dots \text{ мм}$ Площа перерізу $A_0 = \dots \text{ м}^2$	

Руйнівне навантаження $R_{пч} = \dots \text{ Н}$

Границя міцності $\sigma_{в(пч)} = \frac{R_{пч}}{A_0} = \dots = \dots \text{ МПа}$

Поперек волокон

Схема зразка до досліді	Розміри	Вид зразка після досліді
	Сторони зразка $a = \dots \text{ мм}$ $b = \dots \text{ мм}$ висота $h = \dots \text{ мм}$ Площа перерізу $A_0 = \dots \text{ м}^2$	

Руйнівне навантаження $R_{пч} = \dots \text{ Н}$

Границя міцності $\sigma_{в(пч)} = \frac{R_{пч}}{A_0} = \dots = \dots \text{ МПа}$

На онлайн лабораторну роботу з мультимедійним супроводом №2 на ресурсі можна перейти нижче вказаним шляхом. Звіт з

лабораторної роботи здобувач вищої освіти може відправити у вигляді відповіді на завдання на ресурсі.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38099>



*Онлайн лабораторну роботу з мультимедійним супроводом №2
«Випробування матеріалів на стиск»*

Продовження лабораторної роботи з мультимедійним супроводом №2, а саме відеоролики, можна переглянути за посиланням.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38146>



Відео до лабораторної роботи №2

3.3. Розрахунок при центральному розтягу-стиску

3.3.1. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску

Одним із питань курсу механіки матеріалів і конструкцій є питання практичного характеру, а саме: це визначення розмірів стрижня при заданому навантаженні та матеріалі або ж визначення того допустимого навантаження, яке стрижень здатний сприйняти при заданих розмірах та виді матеріалу.

Актуальною при цьому є проблема економії матеріалів. Для цього необхідно провести спеціальні розрахунки, мета яких – забезпечити надійність і довголіття конструкції. Існують три методи розрахунків:

а) за руйнуючими навантаженнями;

- б) за допустимими напруженнями;
- в) за граничними станами (спецкурс).

Кожен із методів повинен забезпечити надійність експлуатації системи.

а) Метод руйнуючих навантажень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимального навантаження на стрижень P_{max} не повинна перевищувати допустиме значення $[P]$, яке дорівнює руйнуючому (небезпечному) навантаженню $P_{руйн}$, поділеному на коефіцієнт запасу міцності $n > 1$.

$$P_{max} \leq [P] = \frac{P_{руйн}}{n} \quad (3.34)$$

Величина допустимого навантаження на руйнування $[P]$ приймається залежно від виду матеріалу:

- а) для пластичних матеріалів (рис. 3.29).

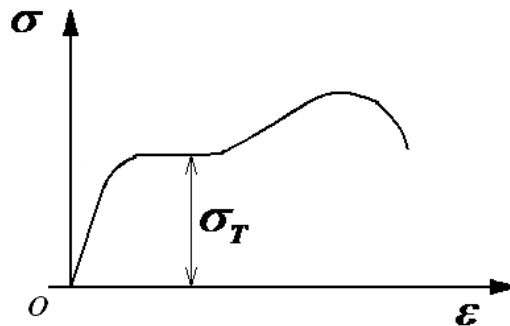


Рис. 3.29. Діаграма розтягу-стиску пластичних матеріалів.

- б) для крихких матеріалів (рис. 3.30):

$$P_{руйн} = \sigma_T \cdot F, \quad [P] = \frac{P_{руйн}}{n} = \frac{\sigma_T \cdot F}{n}; \quad (3.35)$$

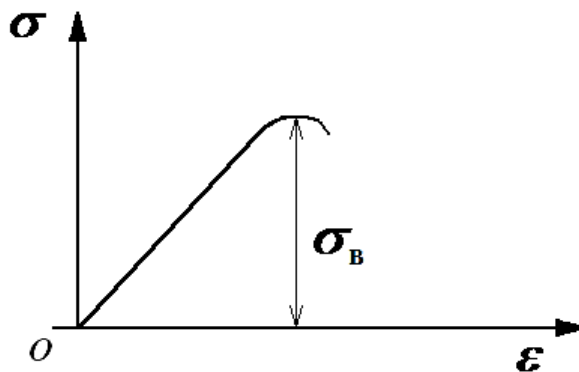


Рис. 3.30. Діаграма розтягу-стиску крихких матеріалів.

$$P_{руйн} = \sigma_B \cdot F, \quad [P] = \frac{\sigma_B \cdot F}{n}; \quad (3.36)$$

Недолік цього методу полягає в тому, що прийняття однакового n для пластичних та крихких матеріалів призводить до перевитрат матеріалів у конструкціях, виготовлених із пластичних матеріалів.

б) Метод допустимих напружень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимальних напружень σ_{max} в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиме значення напруження $[\sigma]$ поділеного на n – коефіцієнт запасу міцності.

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F_{netto}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{небезп}}{n}. \quad (3.37)$$

На основі виразу (3.37) можна розв'язати дві інженерні задачі:

1. Визначити необхідну площу поперечного перерізу стрижня при заданому зусиллі та матеріалі:

$$F_{необ} \geq \frac{N}{[\sigma]}; \quad (3.38)$$

2. Визначити допустиме навантаження на стрижень при заданих розмірах і матеріалі.

$$N_{доп} \leq [\sigma] \cdot F. \quad (3.39)$$

Величина $[\sigma]$ залежить від матеріалу:

– для крихких матеріалів $[\sigma] = \frac{\sigma_{\epsilon}}{n_1}$;

– для пластичних матеріалів $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_2}$.

Очевидно, що $n_1 > n_2$.

Коефіцієнт запасу міцності n вводять з таких причин:

- а) різниця в дослідних даних σ_T і σ_{ϵ} ;
- б) неможливість точно визначити навантаження;
- в) недосконалість методик розрахунку;
- г) неточність виготовлення деталей.

Величина n залежить:

- а) від якості та однорідності матеріалу;
- б) від важливості конструкції (умови та термін експлуатації);

в) рівень розвитку техніки.

в) За граничними станами

Розрахунки проводять за двома групами граничних станів:

1) за тримальною здатністю (міцністю);

2) за придатністю до нормальної експлуатації (жорсткість, наявність тріщин).

При цьому справджується рівність:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq R; \quad (3.40)$$

R – розрахунковий опір матеріалу;

$$R = \frac{R^H}{n}; \quad (3.41)$$

R^H – нормативний опір (приводиться в нормах);

n – коефіцієнт запасу міцності;

N розрахункове навантаження.

$$N = N_1^H \cdot K_1^H + N_2^H \cdot K_2^H + \dots + N_n^H \cdot K_n^H,$$

де: N_i^H – нормативне навантаження;

K_i^H – коефіцієнт перевантаження.

3.3.2. Статично-невизначенні системи (СНС) при розтягу-стиску

Під час розв’язання задач міцності та жорсткості при розтягу-стиску у розрахункові формули: $\sigma = \frac{N_z}{F}$; $\Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot F}$ входить поздовжня сила N_z , з визначення якої починається розрахунок.

У тому разі, якщо N_z визначається за допомогою рівнянь статички задача є статично визначеною.

У практиці інженерних розрахунків зустрічаються системи, зусилля в стрижнях яких неможливо визначити за допомогою рівнянь статички, оскільки їх більше ніж цих рівнянь. Такі системи називають статично невизначеними (СНС).

Різниця між кількістю невідомих зусиль і числом рівнянь статички, які можемо скласти для їх визначення, називається ступенем статичної невизначеності системи.

Для розкриття статичної невизначеності системи, окрім рівнянь статички (*статична сторона задачі*), складають додаткові рівняння, що пов'язують між собою додаткові невідомі зусилля. Такі рівняння отримують, розглянувши деформацію системи. Вони пов'язують між собою деформації стрижнів з невідомими зусиллями. Їх називають рівняннями сумісності деформацій (*геометрична сторона задачі*). Оскільки нас цікавить не деформація, а зусилля, то за допомогою закону Гука $\Delta l = \frac{N_z l}{EF}$ виражаємо деформації через зусилля (*фізична сторона задачі*).

Сумісне розв'язання рівнянь статички і рівнянь сумісності деформацій означає розкриття статичної невизначеності системи (*синтез різних сторін задачі*).

Приклад: Визначити максимальні напруження в призматичному стрижні, затисненому обома кінцями і завантаженого силою P , що зображено на рис. 3.31.

1) Статична сторона задачі:

Відкидаючи затиснення та складаючи рівняння статички, отримуємо:

$$\Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma Z = P - R_A - R_B = 0, \quad R_A + R_B = P$$

2) Геометрична сторона задачі: $\Delta l = 0$.

3) Фізична сторона задачі:

Деформацію можна представити двома способами (вирази 3.42. та 3.43):

$$\Delta l = \frac{P \cdot a}{E \cdot F} - \frac{R_B \cdot l}{E \cdot F} = 0; \quad (3.42)$$

або

$$\Delta l = \frac{(P - R_B) \cdot a}{E \cdot F} - \frac{R_B \cdot b}{E \cdot F} = 0. \quad (3.43)$$

4) Синтез різних сторін задачі:

Із виразу (3.42) знаходимо, що:

$$R_B = P \cdot \frac{a}{l};$$

Із рівняння статички ($P = R_A + R_B$): $R_A = P \cdot \frac{b}{l}$

Побудуємо епюру N_z .

Знайдемо максимальні напруження $\sigma_{\max} = \frac{R_A}{F} = \frac{P \cdot b}{F \cdot l}$.

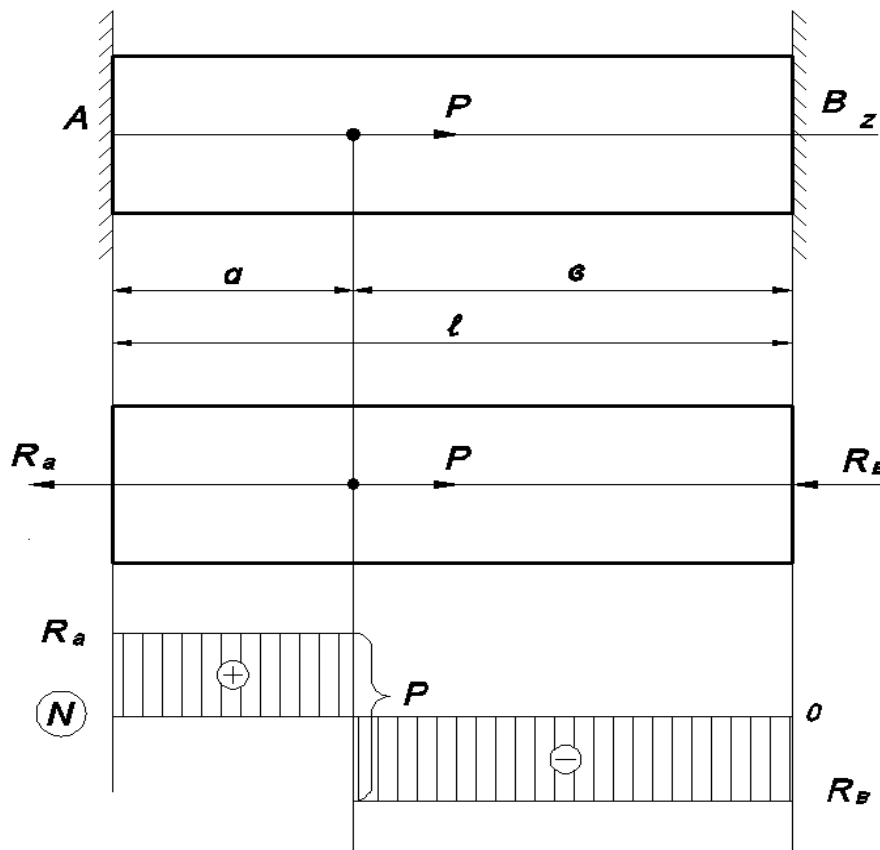


Рис. 3.32. Схема завантаження та епюра N_z до прикладу

3.3.3. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них

Приклад 1. Жорсткий брус необхідно шарнірно закріпити в точці А і підвісити за допомогою двох стрижнів (рис. 3.23).

Під час виготовлення стрижня ВС допущено технологічну неточність – його зроблено коротшим на величину λ . Під час монтажу системи довелося витягнути цей стрижень, що викликало зусилля в іншому. Знайти зусилля у стрижнях ВС і ДК.

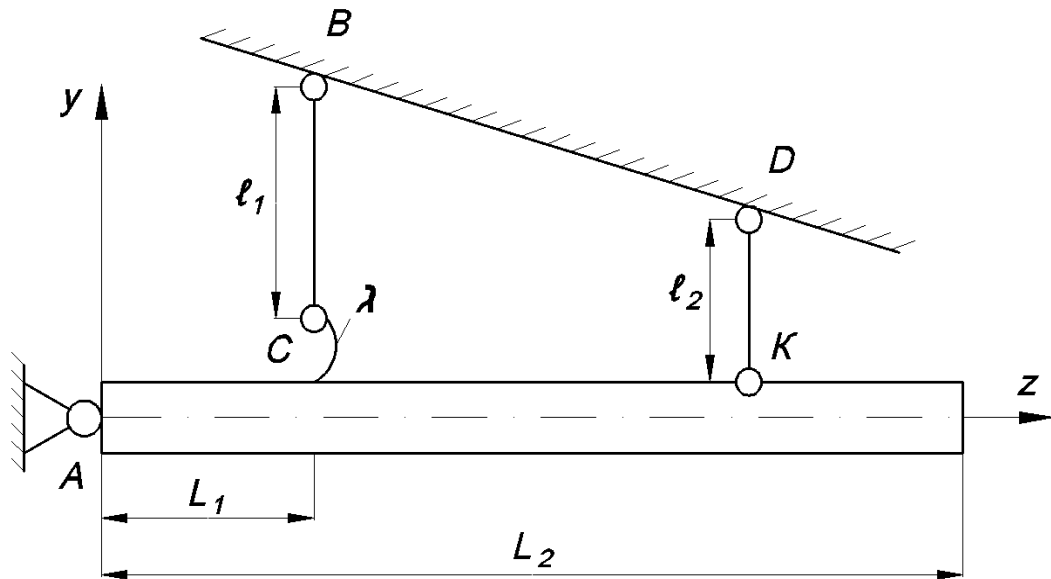


Рис. 3.33. Схема статично невизначеного бруса.

А) Статична сторона задачі.

Виділяємо абсолютно жорсткий брус і докладаємо до нього зусилля реакцій відкинутих в'язей (план сил). Використовуємо з теоретичної механіки таке твердження: якщо стрижень невагомий, на кінцях має шарнірні з'єднання, то реакція цього стрижня напрямлена пл. стрижню. Реакції N_1 і N_2 напрямлені по стрижням (рис. 3.34).

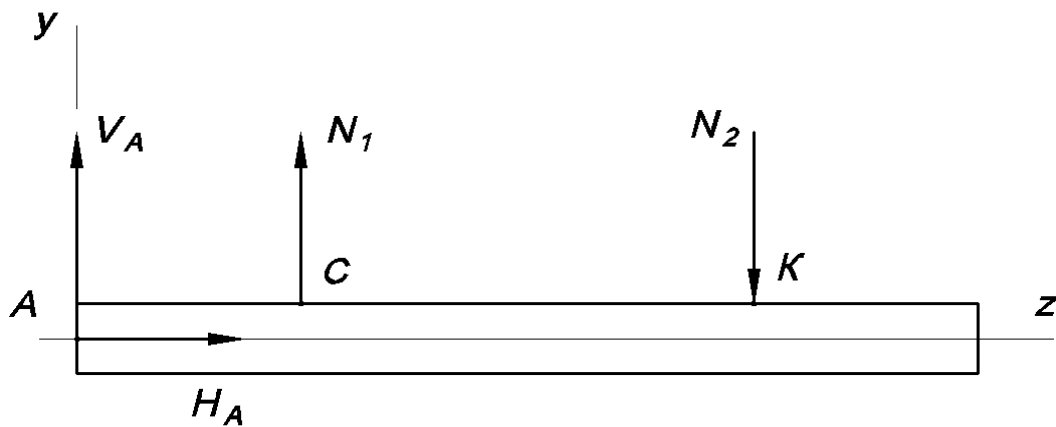


Рис. 3.34. План сил.

Рівняння статички:

- 1) $\Sigma Z = 0; H_A = 0;$
- 2) $\Sigma Y = 0; \Sigma Y = V_A + N_1 - N_2 = 0;$
- 3) $\Sigma M_a = 0; N_1 \cdot L_1 - N_2 \cdot L_2 = 0.$ (3.44)

Система один раз статично невизначена (чотири невідомих зусилля і три рівняння статички).

Б) Геометрична сторона задачі (рис. 3.25).

Надамо брусу АК можливість переміщення. В даному випадку брус має можливість обертатися навколо точки А. Повернемо брус на малий кут $d\varphi$ відносно точки А. Тоді точки С і К кріплення стрижнів будуть рухатись по дугам радіусами АС і АК. Внаслідок того, що кут $d\varphi$ малий, то криволінійні переміщення точок С і К замінимо прямолінійними відрізками CC_1 і KK_1 .

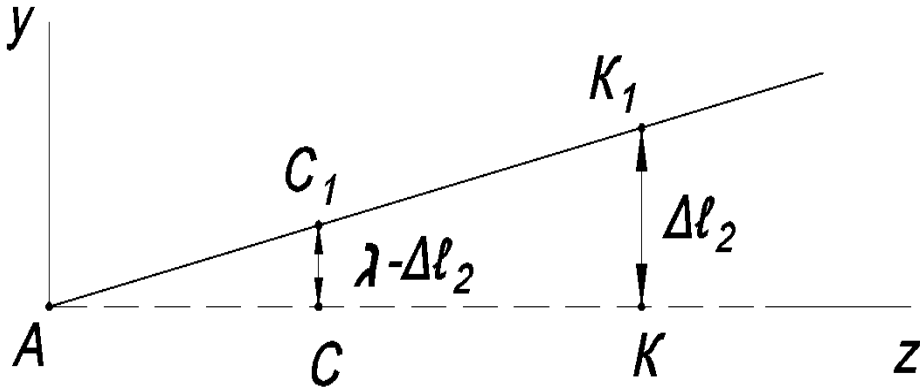


Рис. 3.35. План переміщень.

Із подібності трикутників маємо:

$$\frac{KK_1}{AK} = \frac{CC_1}{AC}, \text{ або } \frac{\Delta l_2}{L_2} = \frac{\lambda - \Delta l_1}{L_1}$$

Звідси маємо:

$$\Delta l_2 \cdot L_1 = (\lambda - \Delta l_1) L_2. \quad (3.45)$$

в) Фізична сторона задачі: розпишемо деформації за допомогою закону Гука.

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \cdot L_1 = \left(\lambda - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \right) \cdot L_2 \quad (3.46)$$

г) Синтез різних сторін задачі:

Розв'язавши сумісно (3.44) та (3.45) маємо:

$$N_1 = \lambda \cdot \frac{L_2^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot L_1^2 \cdot F_1 + l_1 \cdot L_2^2 \cdot F_2}; \quad (3.47)$$

$$N_2 = \lambda \cdot \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot F_1 \cdot L_1^2 + l_1 \cdot F_2 \cdot L_2^2}. \quad (3.48)$$

Висновок: у статично невизначених системах наявність зусилля в одному із стержнів викликає зусилля у всіх інших, тобто відбувається перерозподіл зусиль на всі стержні системи.

Приклад 2. Визначити напруження від рівномірного нагрівання призматичного стержня, затисненого обома кінцями (рис. 3.26).

Система статично невизначена один раз.

Відкинемо праве затиснення.

Рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l = 0.$$

Або ж:

$$\Delta l_t = \Delta l_N. \quad (3.49)$$

Розпишемо деформації:

а) від нагрівання стержня:

$$\Delta l_t = l \cdot \alpha \cdot t^0, \quad (3.50)$$

де: α – коефіцієнт лінійного розширення;

t^0 – температура, на яку нагріто стержень.

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF} \text{ – закон Гука. (3.51)}$$

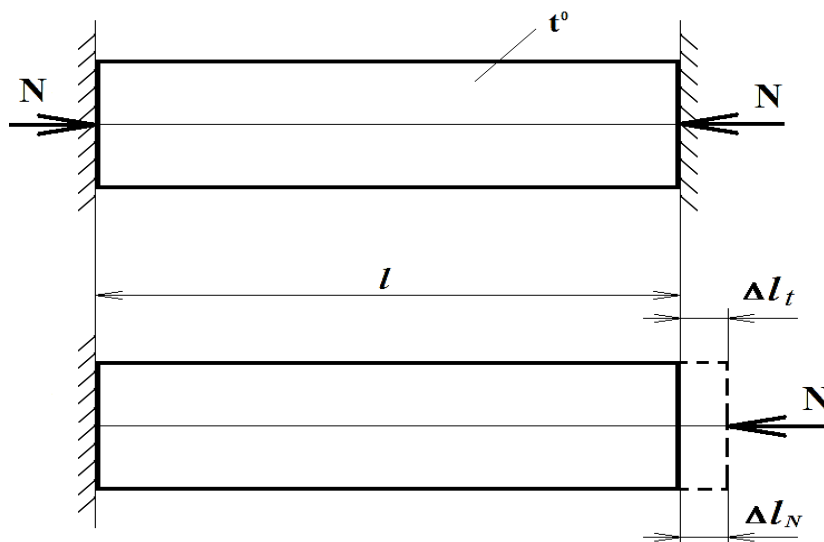


Рис. 3.36. Схема до прикладу 2.

Підставивши вирази (3.50) і (3.51) у вираз (3.49), отримаємо:

$$\frac{Nl}{EF} = l \cdot \alpha \cdot t^0, \quad (3.52)$$

Звідки:

$$N = E \cdot F \cdot \alpha \cdot t^0, \quad (3.53)$$

Напруження визначиться за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} = E \cdot \alpha \cdot t^0. \quad (3.54)$$

3.4. Приклади виконання завдань для самостійного виконання

Центральний розтяг або стиск виникає у випадку, коли на стрижень діють навантаження, направлені паралельно його осі. При цьому в кожному перерізі за довжиною стрижня виникає внутрішнє зусилля (поздовжня сила, кН), яка направлена вздовж осі і стримує стрижень від руйнування. Процеси, які відбуваються при розтягу або стиску в більшості випадків є ідентичними, як і механічні характеристики дуже великої кількості пластичних конструкційних матеріалів. Тому ці протилежні види – розтяг і стиск – описують одними й тими ж математичними залежностями й об'єднують як один вид: розтяг–стиск

При вирішенні статично невизначених задач, слід звернути увагу на їх особливості. Тут використовуються такі основні положення: метод перерізів, рівняння рівноваги (статики), рівняння сумісності деформацій, умови міцності.

При цьому домовилися: все, що стосується розтягу (сили, напруження, деформації тощо) вважати зі знаком «+», а те, що стосується стиску – зі знаком «-».

Графіки, що показують, як змінюються внутрішнє зусилля при переході від перерізу до перерізу, називаються епюрами.

Правила побудови епюр:

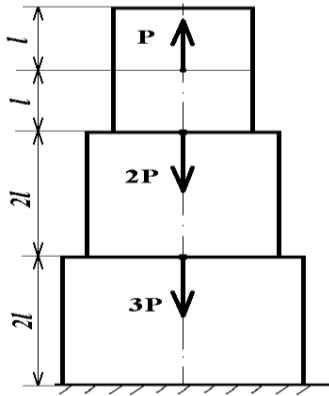
1. Вісь, на якій будується епюра (база), паралельна осі стрижня.
2. Ордината епюри відкладається від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні до бази.
4. Для зусиль вибирають певний масштаб, проставляють значення характерних ординат, в полі епюри ставлять знак зусилля.

3.4.1. Розрахунок ступінчастого стрижня на розтягання-стискання

Умова задачі (Частина I)

Для заданого статично визначеного стрижня необхідно:

- 1) побудувати епюру поздовжніх сил ;
- 2) із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня на кожній ступені;
- 3) побудувати епюру нормальних напружень;
- 4) визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.



Дано:

$$P = 40 \text{ кН};$$

$$l = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м};$$

$$[\sigma_p] = 160 \text{ МПа};$$

$$[\sigma_{ст}] = 100 \text{ МПа}$$

Рис.3.37. Схема ступінчастого стрижня

Розв'язання:

1. Визначаємо величину повздовжньої сили у характерних перерізах і будуємо епюру N (рис. 3.28):

$$N_{1-1} = N_{2-2} = 0 \text{ кН};$$

$$N_{3-3} = N_{4-4} = P = 40 \text{ кН};$$

$$N_{5-5} = N_{6-6} = P - 2P = 40 - 80 = -40 \text{ кН};$$

$$N_{7-7} = N_{8-8} = P - 2P - 3P = -4P = -4 \cdot 40 = -160 \text{ кН}.$$

2. Підбираємо площу поперечного перерізу стержня на кожному із його ступенів виходячи з умови міцності по нормальним напруженням:

$$F = \frac{N}{[\sigma]}$$

$$1, 2 \text{ ділянки } F_1 = \frac{N_{4-4}}{[\sigma]_p} = \frac{40 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2,5 \text{ см}^2;$$

$$3 \text{ ділянка } F_2 = \frac{N_{6-6}}{[\sigma]_{ст}} = \frac{-40 \cdot 10^3}{-100 \cdot 10^6} = 4 \text{ см}^2;$$

$$4 \text{ ділянка } F_3 = \frac{N_{8-8}}{[\sigma]_{ст}} = \frac{-160 \cdot 10^3}{-100 \cdot 10^6} = 16 \text{ см}^2.$$

3. Визначаємо нормальні напруження у характерних перерізах і будуємо епюру (рис. 3.28)

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = 0;$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{40 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{40 \cdot 10^3}{4,0 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{8-8} = \frac{160 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^{-4}} = -100 \text{ МПа}.$$

4. Знайдемо загальне видовження (укорочення) стрижня і будемо епюру переміщень по поперечних перерізах, прийняв, що $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Епюра повного видовження або вкорочення будувється від жорсткого зацмлення.

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$$

$$\Delta l_1 = 0; \quad \Delta l_2 = \frac{N_{4-4} \cdot l}{E \cdot F_1} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,032 \text{ см};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{6-6} \cdot 2l}{E \cdot F_2} = \frac{-40 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,04 \text{ см}$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_{8-8} \cdot l}{E \cdot F_3} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = -4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,04 \text{ см}$$

Повне вкорочення дорівнює:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0,032 - 0,04 - 0,04 = -0,048 \text{ см}.$$

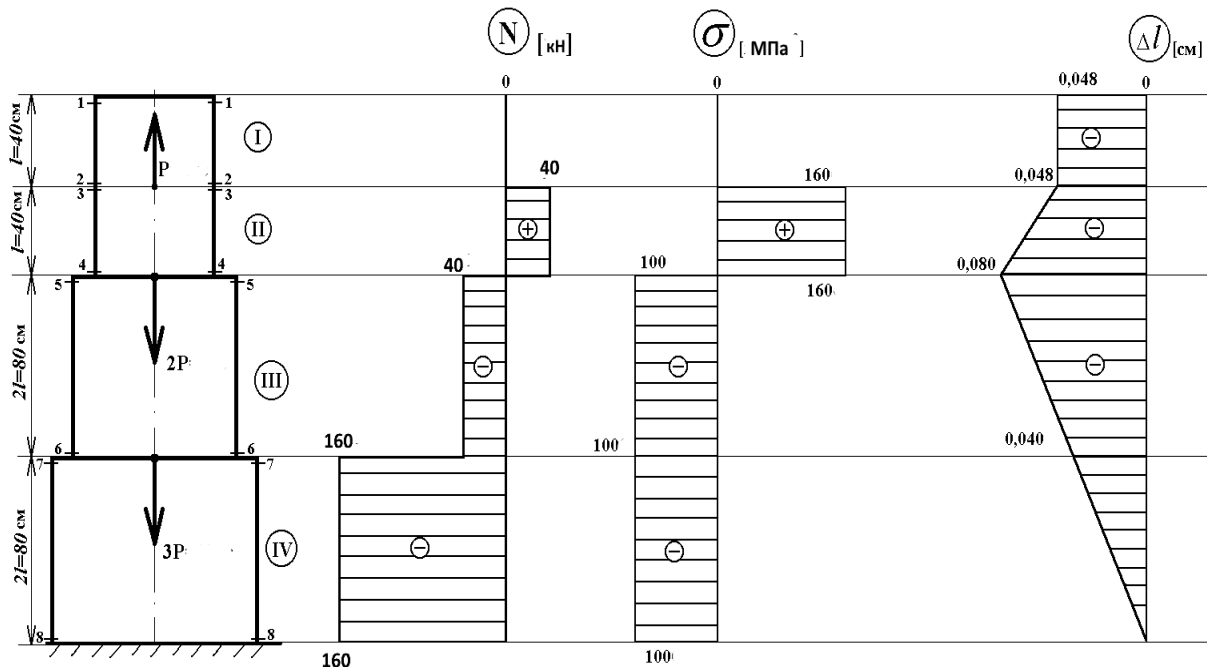


Рис.3.38. Схема побудови епюр до задачі 2

Частина 2

Жорстко закріпити вільний кінець стрижня, що розраховувався в першій частині задачі (з підібраними поперечними перерізами). Для

отриманого статично невизначеного стрижня (рис. 3.39):

- 1) розкрити статичну невизначеність;
- 2) побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень.

Дано: Ступінчастий стрижень, що зображено на рис. 3.39.

$$P = 40 \text{ кН};$$

$$F_1 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$l = 0,4 \text{ м};$$

$$F_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$[\sigma_p] = 160 \text{ МПа};$$

$$F_3 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$[\sigma_{ст}] = 100 \text{ МПа}$$

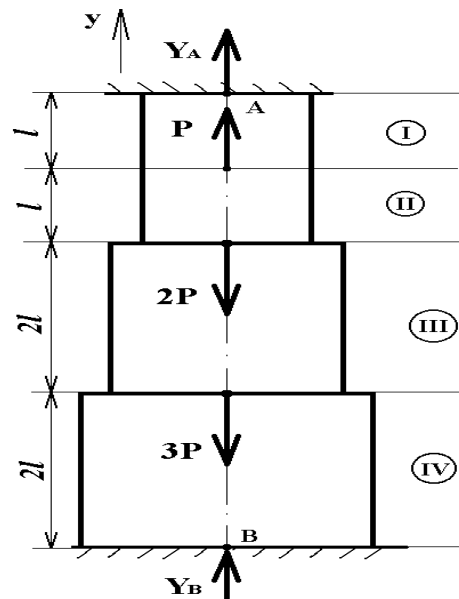


Рис. 3.39. Схема статично невизначеного стрижня

Розв'язання:

1. Умова рівноваги ступінчастого стрижня має вигляд :

$$\sum Y = P - 2 \cdot P - 3 \cdot P + Y_A + Y_B = 0$$

Або $Y_A + Y_B = 4P$

2. Поздовжня сила у перерізі різних ділянок стрижня :

$$N_I = Y_A, \quad N_{II} = Y_A + P, \quad N_{III} = Y_A - 4P, \quad N_{IV} = Y_A - 4P + Y_B$$

3. Визначимо поздовжні деформації за формулою абсолютного подовження:

$$(\Delta l = N \cdot l / E \cdot F)$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l}{E \cdot F_1} = \frac{Y_A \cdot l}{E \cdot F_1};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l}{E \cdot F_1} = \frac{(Y_A + P) \cdot l}{E \cdot F_1};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_2} = \frac{(Y_A - 4P) \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_2};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_3} = \frac{(Y_A - 4P + Y_B) \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_3}$$

4. Складемо додаткове рівняння деформації із тієї умови, що сума повздовжньої деформації всіх ділянок рівна нулю, так як відстань між перерізами А та В змінюватися не може (рис. 3.29):

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0, \text{ або}$$

$$\frac{Y_A \cdot l}{E \cdot F_1} + \frac{(Y_A + P) \cdot l}{E \cdot F_1} + \frac{(Y_A - 4P) \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_2} - \frac{(Y_A - 4P + Y_B) \cdot 2 \cdot l}{E \cdot F_3} = 0$$

$$\frac{Y_A \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,4Y_A + 16 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,8Y_A - 128 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} - \frac{0,8Y_A - 128 \cdot 10^3 + 0,8Y_B}{2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 0$$

$$\text{Звідси } 9,12 \cdot Y_A + 0,8 \cdot Y_B - 537,6 \cdot 10^3 = 0$$

5. Вирішуємо це рівняння сумісно з рівнянням рівноваги; отримаємо $Y_A = 49,23$ кН; $Y_B = 110,77$ кН.

Підставимо величини Y_A та Y_B у вирази поздовжніх сил, отримаємо значення сил. По аналогії з першою частиною задачі виконаємо пункти 1 і 3, а також побудуємо епюри (рис. 3.28).

3.4.2. Розрахунок статично невизначеної системи на розтягання-стискання

Умова задачі:

Для заданої статично невизначеної стержневої системи потрібно:

- 1) визначити зусилля, що виникають в стрижнях системи від дії сили;
- 2) із умови міцності при заданому співвідношенню площ підібрати необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів. Стрижень рахувати таким, що складається із двох прокатних кутників;
- 3) перевірити правильність вирішення задачі.

Дано: Статично невизначена стержнева система рис. 3.30.

$[\sigma] = 130$ МПа; $F = 15$ см²; $Q = 150$ кН; $a = 2,5$ м; $b = 2,5$ м; $c = 1,5$ м.

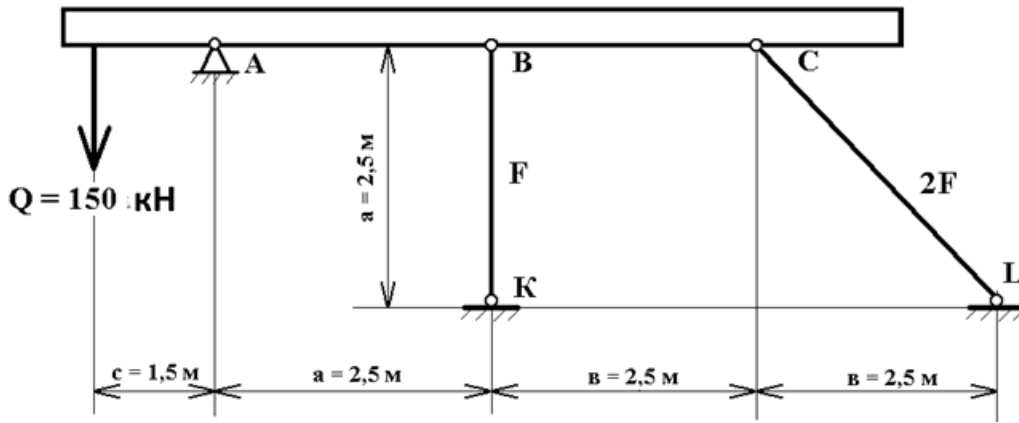


Рис.3.40. Статично невизначена стрижнева система

1. Статична сторона задачі. Складаємо рівняння рівноваги. Для цього складаємо план сил зображений на рис. 3.31.

$$\sum X_i = 0; N_A + N_2 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = 0; Y_A + N_1 - N_2 \cdot \sin 45^\circ - Q = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0; Q \cdot c - N_1 \cdot a - N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot (a + b) = 0$$

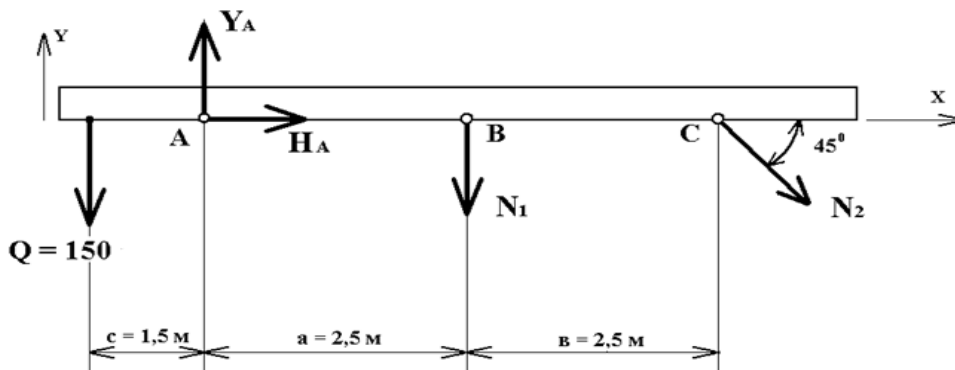


Рис.3.41. План сил

2. Геометрична сторона задачі.

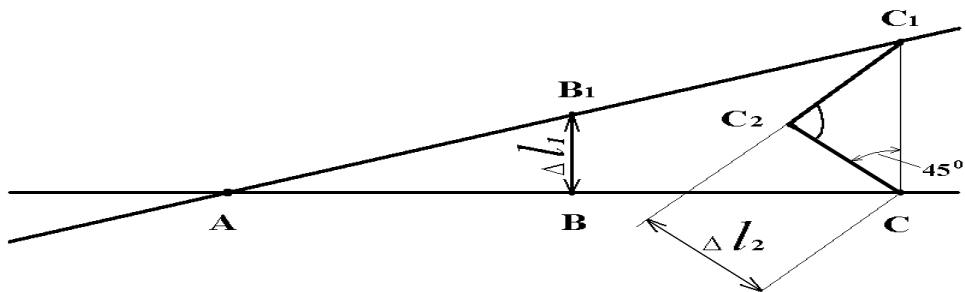


Рис. 3.42. Геометричне зображення деформації в стрижнях

Трикутник $ABB_1 \sim ACC_1$

З даної залежності можна скласти відношення :

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a+b}, \text{ розпишемо}$$

$$BB_1 = \Delta l_1; CC_2 = \Delta l_2; CC_1 = \frac{\Delta l_2}{\cos 45^\circ}$$

$$\text{Звідки можемо отримати залежність: } \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1 \cdot (a+b) \cdot \cos 45^\circ}{a}$$

$$3. \text{ Фізична сторона задачі } (\Delta l_1 = \frac{N \cdot l}{E \cdot F})$$

$$\frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2 \cdot F \cdot \cos 45^\circ} = \frac{N_1 \cdot a \cdot (a+b) \cdot \cos 45^\circ}{E \cdot F \cdot a};$$

перетворивши маємо: $N_2 = N_1$

4. Синтез. Вирішуємо рівняння деформації сумісно з рівняннями рівноваги системи, отримуємо: $N_1 = N_2 = 63,56 \text{ кН}$.

5. Із умови міцності при заданому співвідношенні площин підбираємо необхідну величину перерізу стрижнів:

$$\text{-стрижень ВК: } F = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{63,56 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6} = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 4,9 \text{ см}^2$$

$$\text{-стрижень СL: } 2 \cdot F = 2 \cdot 4,9 = 9,8 \text{ см}^2$$

6. Приймаємо правильність знаходження реакцій стрижнів N_1 і N_2 . Визначаємо реакції $H_A = -44,94 \text{ кН}$; $Y_A = 131,37 \text{ кН}$. Складемо рівняння моментів відносно точки С.

$$\sum M_{iC} = 0; Q \cdot (c + a + b) + N_1 \cdot b - Y_a \cdot (a + b) = 0$$

$$150 \cdot (2,5 + 2,5 + 1,5) + 23,51 \cdot 2,5 - 159,73 \cdot (2,5 + 2,5) = 0$$

$$0 \approx 0, \text{ допускається похибка до } 5\%$$

Для виконання завдання з теми «Центральний розтяг-стиск» пропонується переглянути мультимедійну презентацію до практичного заняття з аудіо супроводом. Посилання приведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36429>



Мультимедійна презентація з аудіо супроводом до практичного заняття «Центральний розтяг-стиск»

Та представлено мультимедійну презентацію «Розрахунок статично невизначених систем».

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=37853>



*Мультимедійна презентація
«Розрахунок статично невизначених систем».*

3.5. Завдання для самоконтролю

3.5.1. Центральний розтяг-стиск

Для того, щоб виконати самоконтроль, необхідно відповісти на питання інтерактивної лекції з аудіовізуальним супроводом. Посилання та код приведені нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=35814>



Відеолекція «Центральний розтяг-стиск»

3.5.1. Механічні властивості матеріалів

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36104>



Відеолекція «Механічні властивості матеріалів»

3.6. Завдання для самостійного виконання

Завдання для виконання задачі 1

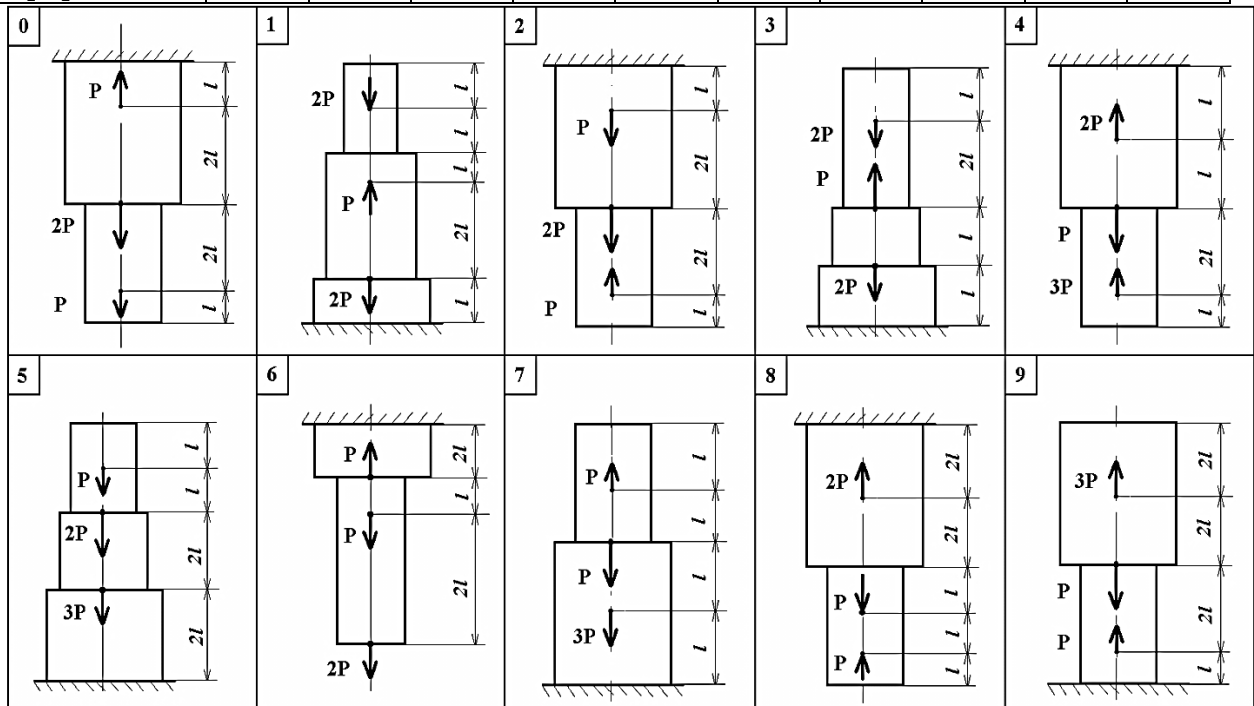
Для заданого статично визначеного стрижня необхідно: побудувати епюру поздовжніх сил; із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня; побудувати епюру нормальних напружень; визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Жорстко закріпити вільний кінець стрижня, що розраховувався в першій частині задачі (з підібраними поперечними перерізами). Для отриманого статично невизначеного стрижня: розкрити статичну невизначеність; побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень та визначити загальне подовження або укорочення стрижня.

Таблиця 3.1

Варіанти завдань для виконання задачі 1

Параметри задачі	Числові варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1 , кН	40	50	65	40	80	55	60	45	50	30
P_2 , кН	90	55	70	50	60	70	80	35	55	45
P_3 , кН	100	60	35	65	70	90	70	30	70	85
a , м	0,3	0,4	0,5	0,3	0,9	0,1	0,3	0,7	0,8	0,4
b , м	0,2	0,4	0,3	0,8	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	0,2
c , м	0,1	0,3	0,6	0,7	0,3	0,3	0,4	0,5	0,7	0,3
$[\sigma]_p$, МПа	200	160	180	200	180	200	160	180	160	200
$[\sigma]_{ct}$, МПа	100	80	110	90	90	110	110	110	90	100



Завдання для виконання задачі 2

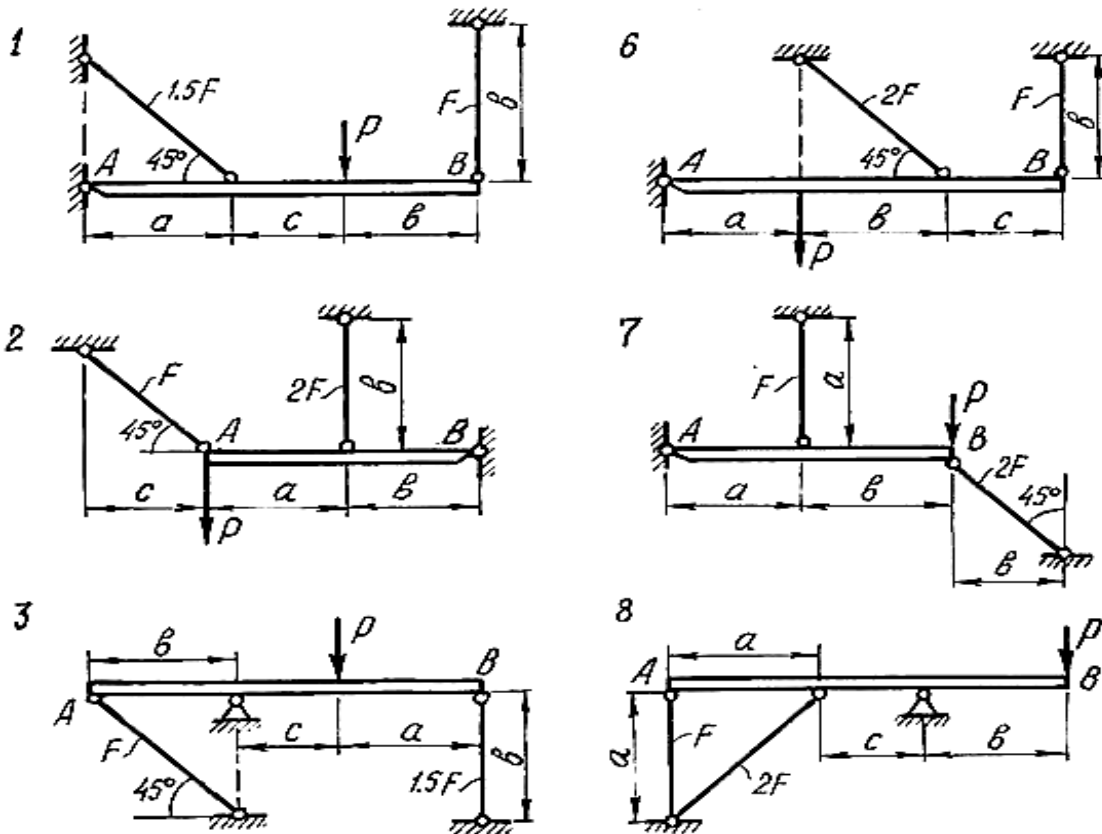
Для заданої статично невизначеної стрижневої системи потрібно:

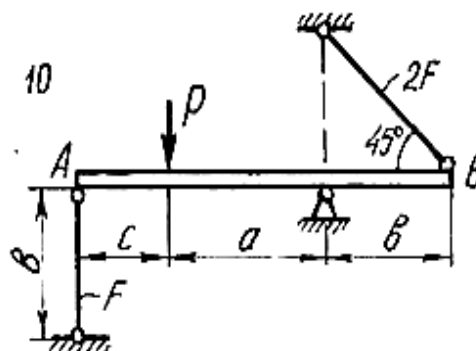
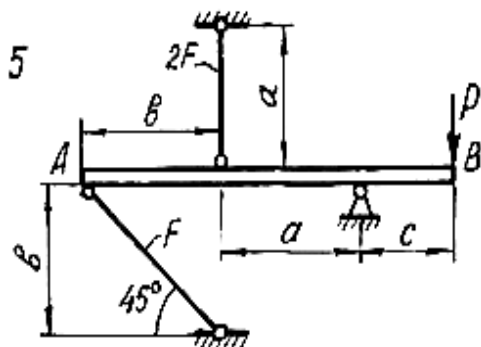
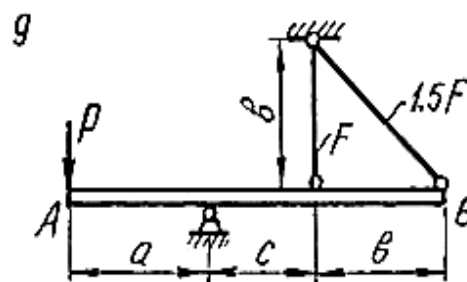
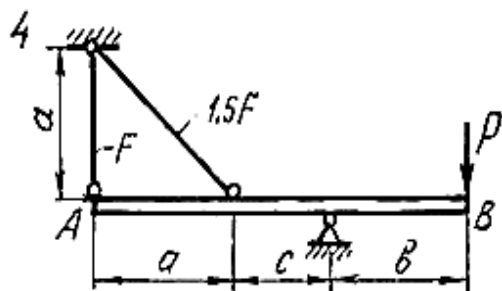
- 1) визначити зусилля, що виникають в стрижнях системи від дії прикладеної сили;
- 2) із умови міцності при заданому співвідношенню площ підібрати необхідні розміри поперечних перерізів стрижнів. Стрижень рахувати таким, що складається із двох прокатних кутників;
- 3) перевірити правильність вирішення задачі.

Таблиця 3.2

Варіанти завдань для виконання задачі 1

№	[σ], МПа	F, см ²	a, м	b, м	c, м	P, кН
1	150	10	2,0	2,2	1,6	10
2	140	14	2,4	2,0	1,4	15
3	160	12	2,5	2,4	1,2	12
4	140	16	2,7	3,0	1,0	14
5	130	18	2,8	2,8	1,2	18
6	160	12	2,6	2,6	1,0	18
7	120	20	2,4	2,2	1,4	10
8	140	14	2,5	2,9	1,0	12
9	160	12	2,0	3,0	1,4	14
10	120	10	2,9	2,1	1,7	16





3.7. Тестові завдання

Здобувачам вищої освіти пропонується скористатися електронним тестовим навчальним тренажером до розділу «Центральний розтяг-стиск». Посилання наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=37918>



Електронний тестовий навчальний тренажер до розділу
«Центральний розтяг-стиск».

Розділ 4. Напружений стан в точці

4.1. Поняття напруженого стану в точці

4.1.1. Напружений стан в точці

На відміну від центрального розтягу-стиску, в загальному випадку навантаження тіла задача з визначення σ_{max} та τ_{max} є досить складною. Тобто виникає проблема так званого напруженого стану в точці (рис. 4.1).

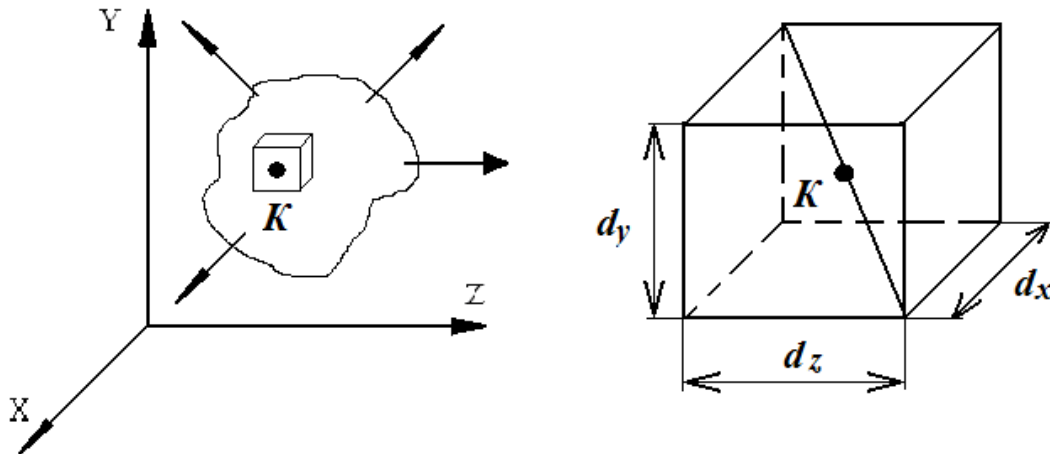


Рис. 4.1. Напружений стан у точці.

Напруженим станом у точці називають сукупність нормальних σ та дотичних τ напружень у всіх площинах, що проходять через задану точку.

Для з'ясування цього питання навколо точки К вирізають елементарний паралелепіпед (рис. 4.1). Внаслідок невеликої площі сторін вважають, що напруження у всіх точках його середини однакові й дорівнюють напруженням у точці К. Напруження на гранях паралелепіпеда розподілені рівномірно. Якщо припустити, що напруження на гранях нам відомі, то розітнувши паралелепіпед площиною, що проходить через точку К, за допомогою рівнянь статички, знаходять σ та τ на цій площині, виразивши їх через відомі напруження на гранях паралелепіпеда.

Існує таке положення паралелепіпеда, коли грані вільні від τ , а діють тільки σ . При цьому існують три види напруженого стану (рис. 4.2): **лінійний, плоский, об'ємний**.

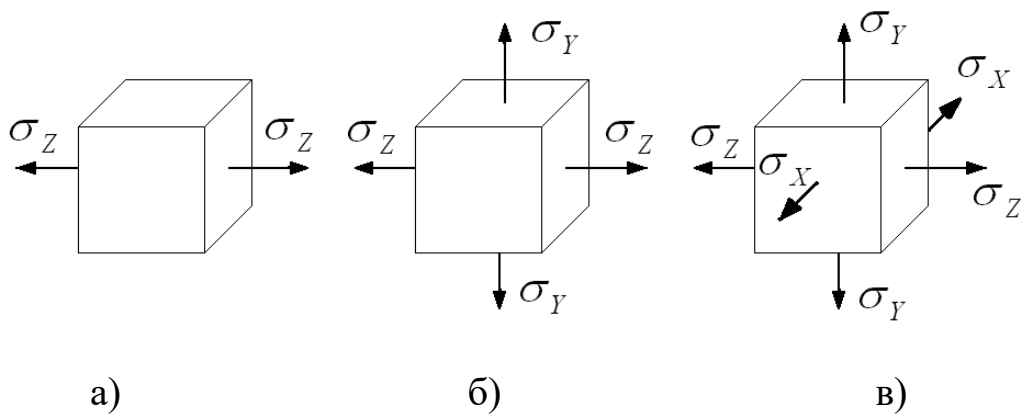


Рис. 4.2. Напружені стани в точці:

а – лінійний одноосьовий; б – плоский двохосьовий;
в – об’ємний трьохосьовий.

На практиці найбільше розповсюдження отримав плоский напружений стан (ПНС) (рис. 4.3).

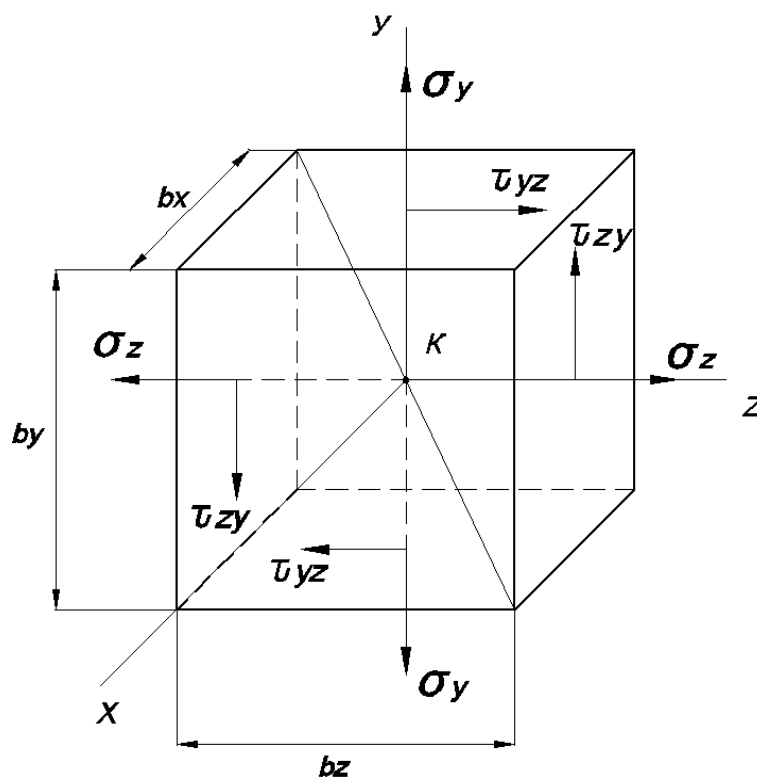


Рис. 4.3. Плоский напружений стан.

Правило знаків:

$\sigma > 0$, коли викликає розтяг;

Знак τ визначається за правилом зовнішньої нормалі: якщо нормаль до площини збігається з додатним напрямом осі, то $\tau > 0$ якщо його напрям відповідає додатному напрямку відповідної осі (рис. 4.4).

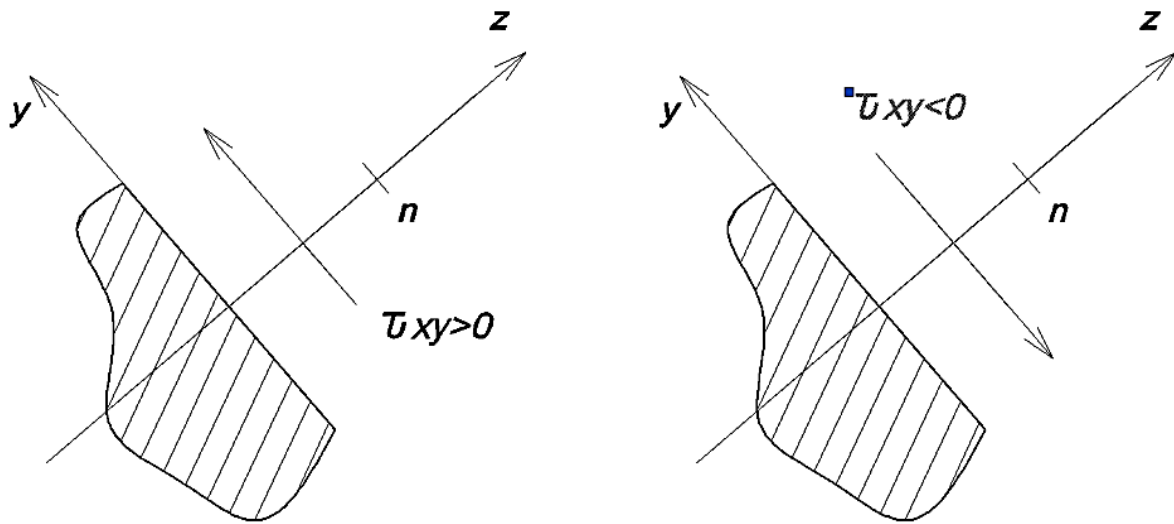


Рис. 4.4. Правило знаків для дотичних напружень τ .

4.1.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС)

Оскільки об'єкт знаходиться в рівновазі, то маємо суму моментів відносно точки К, яка дорівнює нулю (рис. 4.3).

$$\sum M_K = 0, (\tau_{zy} \cdot dy \cdot 1) dz - (\tau_{yz} \cdot dz \cdot 1) dy = 0. \quad (4.1)$$

Звідки матимемо:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (4.2)$$

Вираз 4.2. – закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.

Тобто у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за величиною і напрямлені так, що прагнуть обертати площини у різні сторони (рис. 4.5):

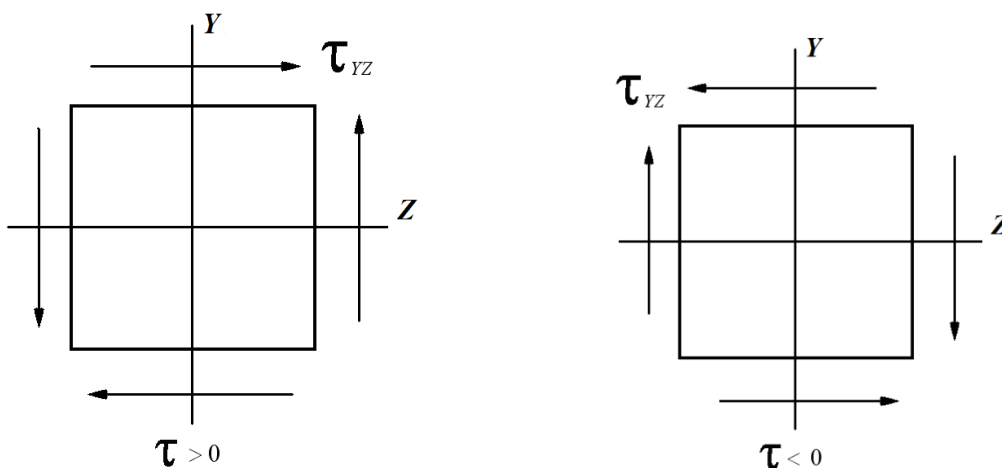


Рис. 4.5. Закон парності дотичних напружень.

4.1.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

Розітнемо елементарний паралелепіпед (рис. 4.3) площиною, перпендикулярною площині ZKY , нахиленою під кутом α до осі z і розглянемо рівновагу нижньої відсіченої частини (рис. 4.6).

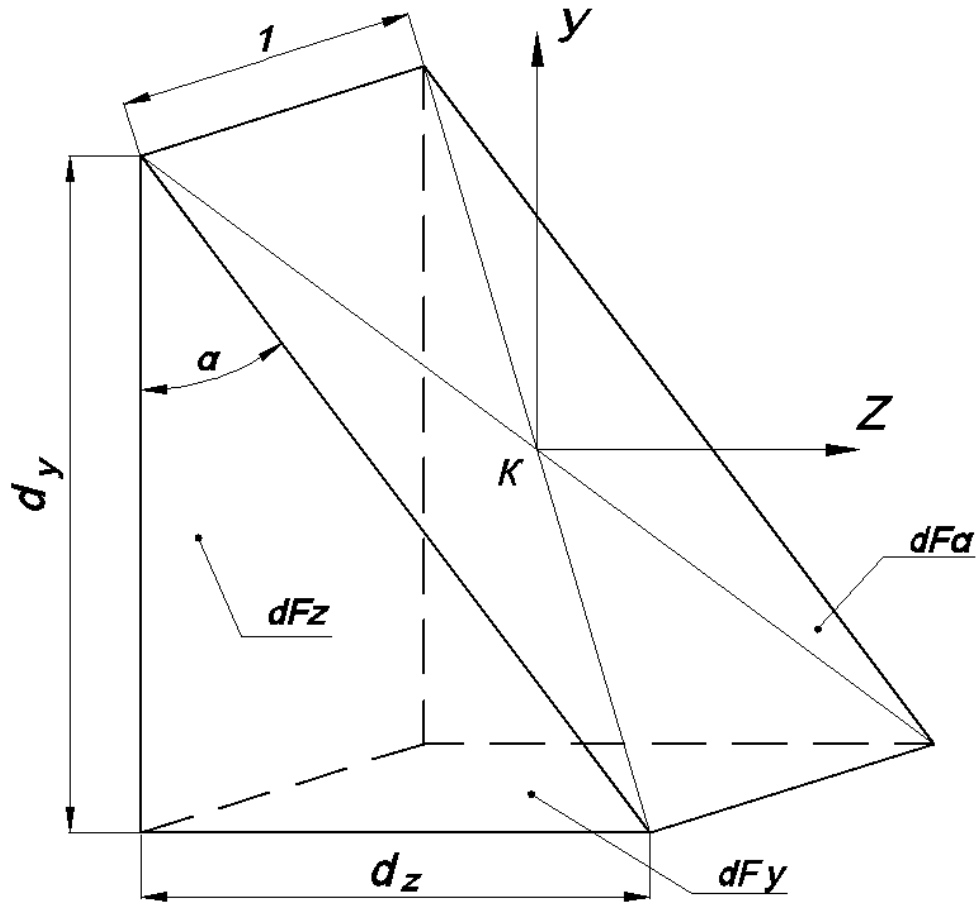


Рис. 4.6. Розсічена нижня частина паралелепіпеда.

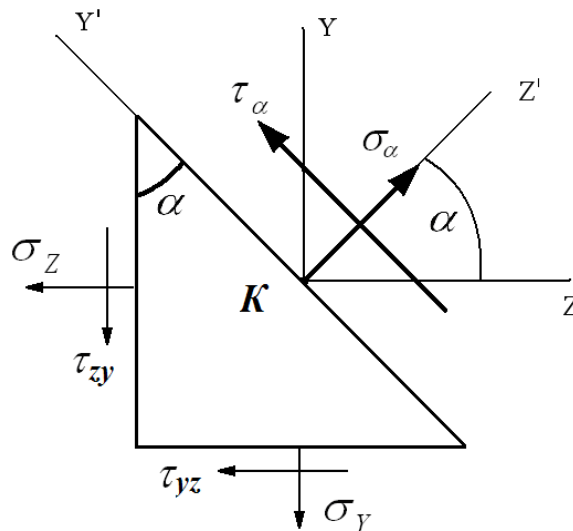


Рис. 4.7. Відсічена частина паралелепіпеда на площині.

Положення нахиленої площини визначається кутом α – це кут між нормаллю до площини і додатним напрямком осі z (рис. 4.7).

Правило знаків: $\alpha > 0$, якщо відповідає короткому шляху повертання осі z до y (проти годинникової стрілки).

$$\text{Очевидно, що: } \begin{cases} dF_z = dF_\alpha \cdot \cos \alpha \\ dF_y = dF_\alpha \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad (4.3)$$

Для знаходження σ_α та τ_α споектуємо всі зусилля на осі z' та y' .

$$\sum_{z'=0}; \sigma_\alpha - \sigma_z \cos \alpha - \tau_{yz} \cos \alpha - \tau_{zy} \sin \alpha = 0$$

$$\sum_{y'=0}; \tau_\alpha - \tau_y \cos \alpha - \tau_{yz} \sin \alpha - \tau_{zy} \cos \alpha = 0$$

Виконуючи це, використавши вираз (4.2) та (4.3) і здійснюючи тригонометричні перетворення, отримаємо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \quad (4.5)$$

Враховуючи, що: $\cos^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Вираз (4.5) набуває вигляду:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (4.6)$$

Підставивши у вираз 4.6 замість $\alpha \rightarrow \alpha + 90^\circ$, отримаємо:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (4.7)$$

Склавши вирази (4.6) і (4.7), отримаємо властивість інваріантності нормальних напружень при плоскому напруженому стані (рис. 4.8):

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const} \quad (4.8)$$

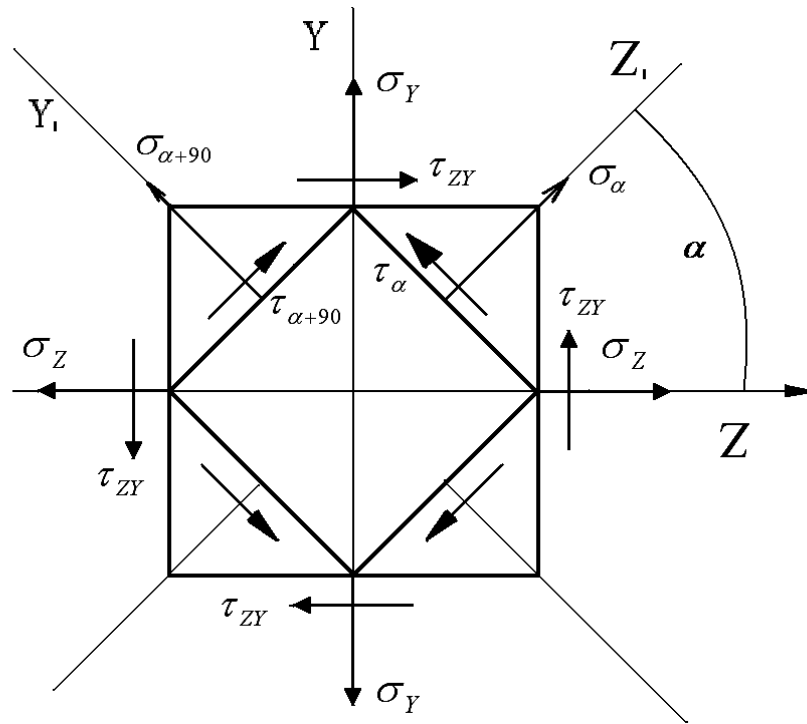


Рис. 4.8. Зображення інваріантності напружень.

Тобто сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через довільну точку є величиною постійною.

4.1.4. Головні напруження та головні площини

Якщо повертати координатні осі Z та Y (рис. 4.8), то будуть змінюватися напруження σ_α та τ_α . Відповідно до виразу (4.8), очевидно, що при деякому куті α_0 , нормальні напруження σ набувають екстремальних значень, тобто одне буде максимальним, а інше мінімальним. Для цього візьмемо першу похідну від виразу (4.6) по α_0 :

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha_0} = 2 \underbrace{\left(-\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cdot \cos 2\alpha_0 \right)}_{\tau_\alpha} = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{або ж: } \frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha_0} = 2 \cdot \tau_\alpha = 0. \quad (4.10)$$

Тобто з'ясовано, що в площинах, у яких діють екстремальні нормальні напруження (σ_{\max} або σ_{\min}), дотичні напруження дорівнюють нулю ($\tau = 0$). Площини, де діють екстремальні напруження σ , $\tau = 0$ називають *головними площинами*, а нормальні напруження, що виникають у них – *головними напруженнями*.

Для визначення положення цих площин, розділимо вираз (4.9) на $\cos 2\alpha$, і отримаємо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (4.11)$$

Підставимо (4.11) у формулу (4.6), зробимо перетворення та отримаємо вираз для визначення головних напружень (4.12).

$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (4.12)$$

Візьмемо елементарну площину і зобразимо всі напруження (рис. 4.9). Візуально бачимо, що σ_{\max} діє у тих чвертях, де сходяться дотичні напруження τ_{zy} і τ_{yz} .

Формула для визначення кута повороту головних площин така:

$$\operatorname{tg}_{1,2} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}. \quad (4.13)$$

4.1.5. Екстремальні дотичні напруження

Один і той же напружений стан може бути заданий різними вихідними даними – різними площинами та напруженнями в них. Оскільки на головних площинах відсутні дотичні напруження τ , то вони найбільш просто визначають напружений стан у точці.

Приймають, що: $\sigma_1 > \sigma_2$.

Звідси вираз (4.5) і (4.6) набувають вигляду:

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (4.14)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \quad (4.15)$$

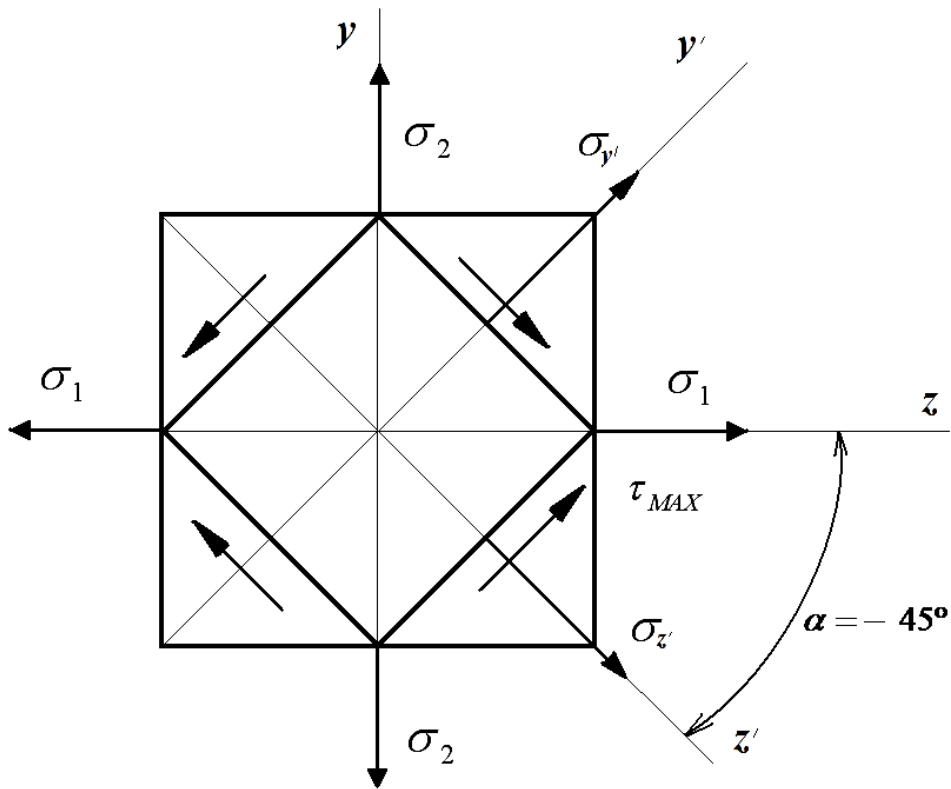


Рис. 4.9. Екстремальні дотичні напруження.

Із аналізу виразу (4.14) очевидно, що τ_{max} буде при куті $\alpha = -45^\circ$ (рис. 4.9), тобто:

$$\tau_{(\alpha=-45)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4.16)$$

Якщо підставити вираз (4.12) у вираз (4.16), то отримаємо вираз для визначення максимальних дотичних напружень τ через напруження, у будь-яких площинах:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \quad (4.17)$$

Із виразу (4.15) очевидно, що в площинах з екстремальними дотичними напруженнями нормальні напруження не дорівнюють нулю, і визначаються за формулою:

$$\sigma_{\alpha=-45} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = const. \quad (4.18)$$

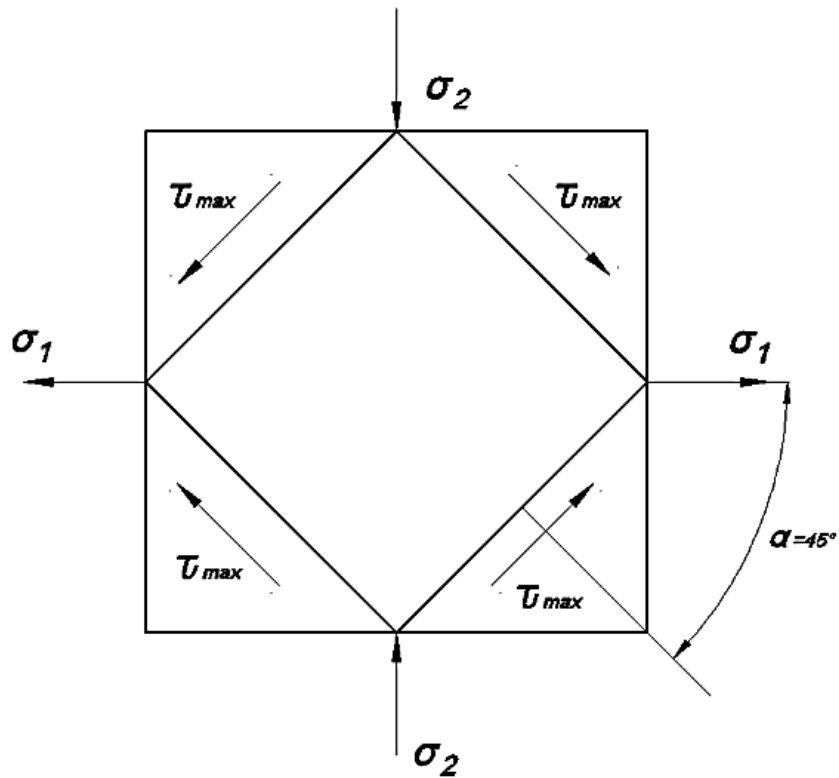


Рис. 4.10. Чистий зсув.

В єдиному випадку, коли $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ (рис. 4.10) у площинах з екстремальними дотичними напруженнями із виразу (4.18) нормальні напруження відсутні. Це єдиний випадок напруженого стану, який називається *чистим зсувом*.

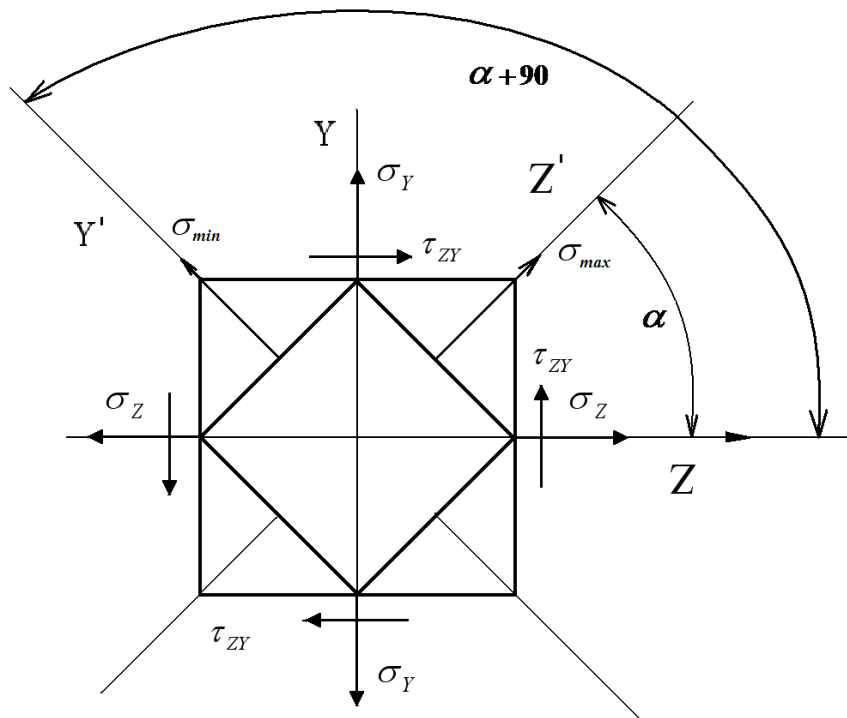


Рис. 4.11. Головні нормальні напруження.

4.1.6. Коло Мора

Поряд з аналітичним розв'язанням задач напруженого стану в точці, їх можна вирішувати графічним методом за допомогою кола Мора. Вирази (4.14) і (4.15) мають просту геометричну інтерпретацію.

$$\text{Прийmemo} \quad \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = a; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R.$$

Підставивши у вираз (4.19):

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases} \quad (4.19)$$

матимемо:

$$\sigma_\alpha = a + R \cos 2\alpha. \quad (4.20)$$

$$\tau_\alpha = -R \sin 2\alpha \quad (4.21)$$

Вирази (4.20) і (4.21) – рівняння кола в параметричному вигляді.

Тобто розв'язання задач визначення σ_α і τ_α , а також знаходження площин, в яких вони виникають, можливо здійснювати за графічним зображенням (рис. 4.12).

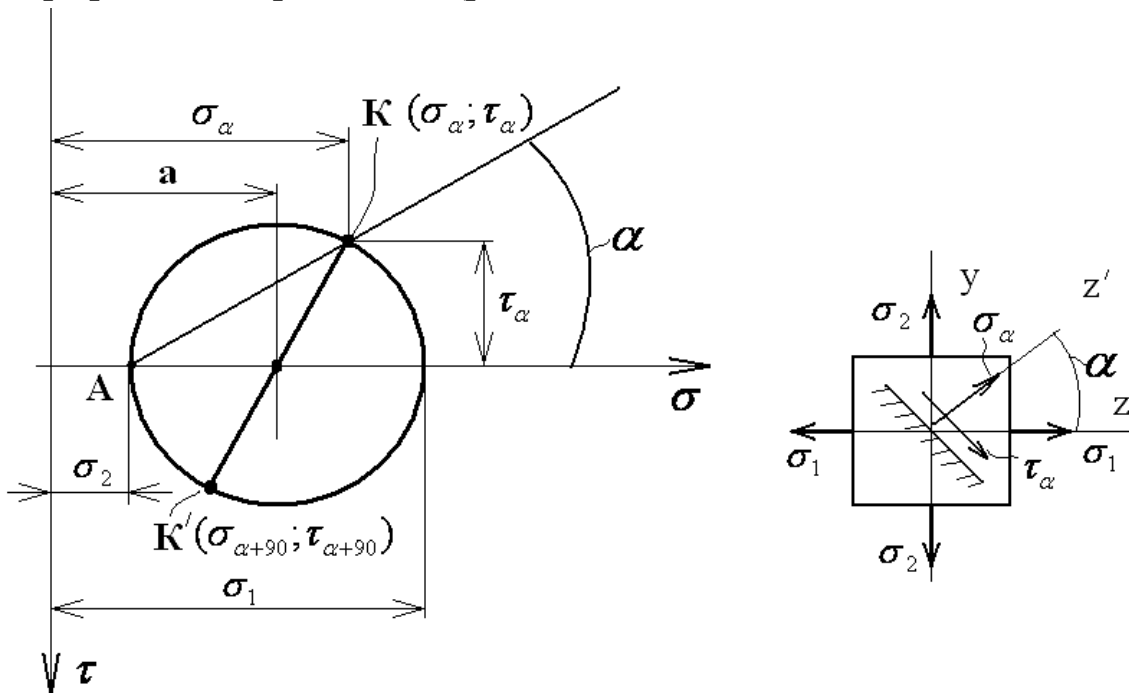


Рис. 4.12. Коло Мора.

Точку К називають визначальною, що визначає напружений стан в площині з кутом α , а точка К' визначає напружений стан у площині з кутом $\alpha+90$.

Додатний напрямок τ вниз викликаний тим, що при прийнятому додатному значенні кута α проти годинникової стрілки у виразі (4.14) τ повинно бути від'ємним.

Можливим є: вирішення зворотної задачі – за напруженням σ і τ у довільних площинах визначають значення головних напружень та положення площин, в яких вони виникають.

4.2. Деформований стан у точці

4.2.2. Головні деформації

У загальному випадку плоского напруженого стану (ПНС) (рис. 4.13.) виникають нормальні (σ) і дотичні (τ) напруження. При цьому напруження σ викликає лінійну деформацію Δd_z та Δd_y (рис. 4.14), а напруження τ – кутову деформацію γ_{zy} (кут зсуву).

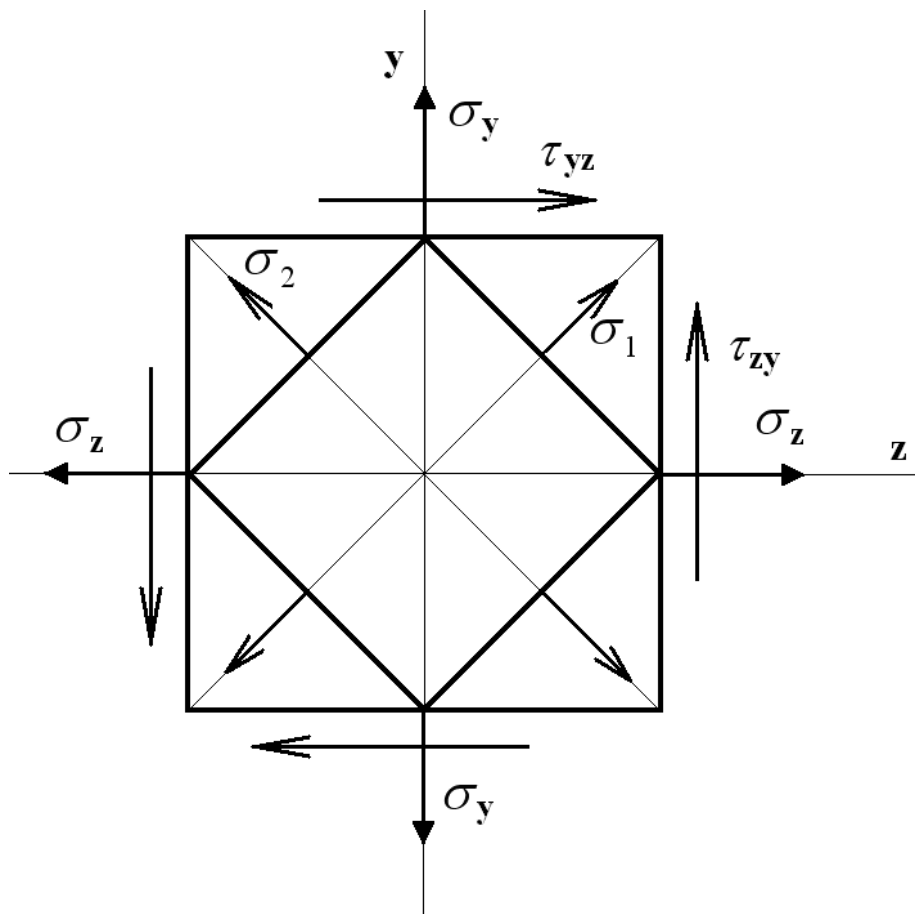


Рис. 4.13. Плоский напружений стан.

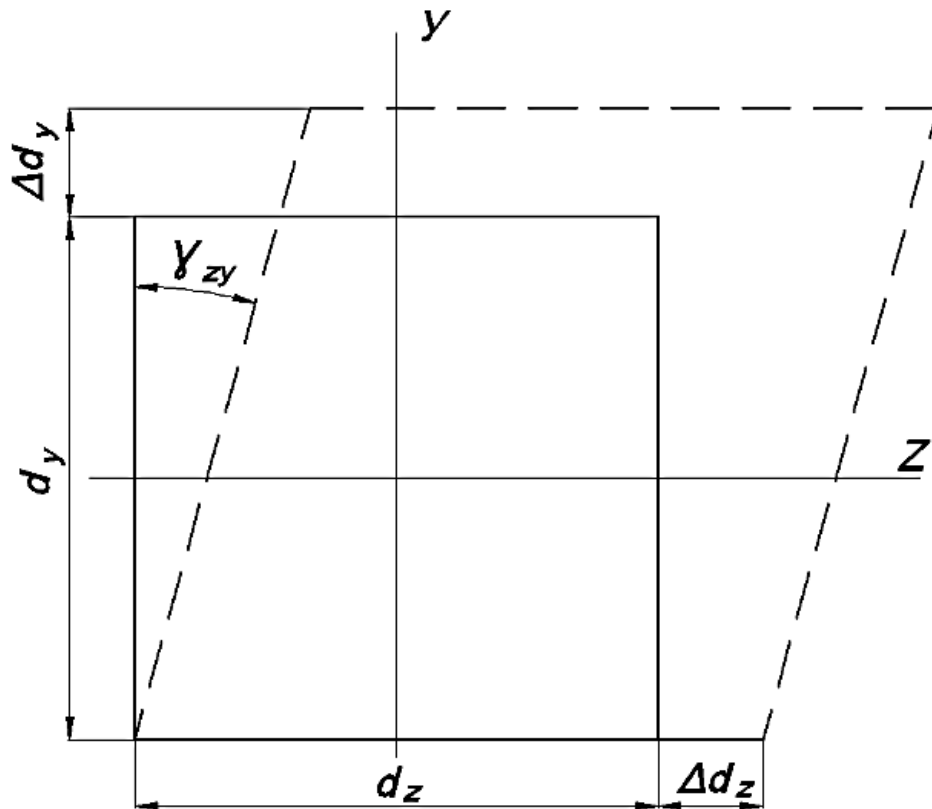


Рис. 4.14. Деформації при плоскому напруженому стані.

Відносні деформації визначаються:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta d_Z}{d_Z}, \quad \varepsilon_Y = \frac{\Delta d_Y}{d_Y} \quad (4.22)$$

При повороті координатних осей на деякий кут змінюватиметься величина σ і τ , а також відповідно ε та γ .

Таким чином, деформаційним станом у точці називають сукупність лінійних і кутових деформацій при всіх можливих положеннях координатних осей Z та Y .

З'ясовано, що у головних площинах відсутні дотичні напруження (τ), а значить у таких площинах відбуватимуться тільки лінійна деформація ($\gamma = 0$). При цьому лінійні деформації набувають екстремальних значень, такі деформації називають головними лінійними деформаціями і позначають ε_1 та ε_2 . При цьому прийнято, що $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Знайдемо лінійну деформацію відрізка АС, який проходить під кутом α до напрямку ε_1 (рис. 4.15).

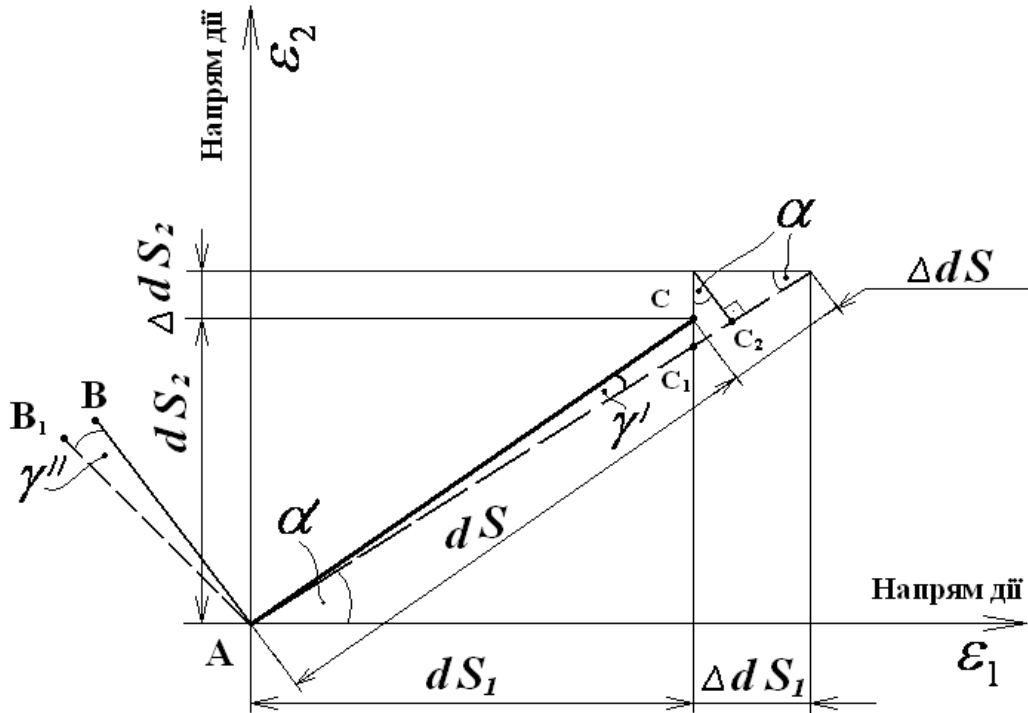


Рис. 4.15. Визначення деформацій у площинах через головні деформації.

ε_1 та ε_2 – головні деформації, які задано.

Із рисунка зрозуміло, що:

$$\Delta dS = \Delta dS_1 \cdot \cos \alpha + \Delta dS_2 \cdot \sin \alpha. \quad (4.23)$$

Тоді відносна деформація відрізка АС дорівнює:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \frac{\Delta dS_1}{dS} \cdot \cos \alpha + \frac{\Delta dS_2}{dS} \cdot \sin \alpha. \quad (4.24)$$

Якщо врахувати геометричне відношення з (рис. 4.15):

$$\cos \alpha = \frac{dS_1}{dS}; \quad \sin \alpha = \frac{dS_2}{dS}. \quad (4.25)$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\Delta dS}{dS} = \underbrace{\frac{\Delta dS_1}{dS_1}}_{\varepsilon_1} \cdot \cos^2 \alpha + \underbrace{\frac{\Delta dS_2}{dS_2}}_{\varepsilon_2} \cdot \sin^2 \alpha = \\ &= \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.26)$$

Виконавши тригонометричні перетворення, формула (4.26) набуде вигляду:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \quad (4.27)$$

Із аналізу формули (4.27) видно:

при $\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = 1$, $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$.

при $\alpha = 90^0$; $\cos 2(\alpha + 90) = -\cos 2\alpha = -1$

$\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\min} = \varepsilon_2$.

4.2.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці

Знайдемо кут зсуву між відрізками АС та АВ. Із рис. 4.15. видно, що:

$$\begin{aligned} \gamma' &= \frac{CC_2}{dS} = \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin \alpha}{dS} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos \alpha}{dS} = \\ &= \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin \alpha}{dS_1 / \cos \alpha} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos \alpha}{dS_2 / \sin \alpha} = \\ &= \frac{\Delta dS_1}{dS_1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{\Delta dS_2}{dS_2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

В остаточному варіанті маємо:

$$\gamma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (4.28)$$

Для визначення кута γ'' необхідно у вираз (4.28) підставити $\alpha + 90^0$ і отримаємо:

$$\gamma'' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.29)$$

Різні знаки виразів (4.28) та (4.29) свідчать про те, що відрізки повертаються в різні боки і загальний кут γ дорівнює:

$$\gamma = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.30)$$

Відтворимо напружений та деформований стан у точці через головні площини (головні напруження і головні деформації):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos \alpha \\ \frac{\gamma_{\alpha}}{2} &= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Очевидно, що між виразами (4.31) та (4.32) маємо математичну аналогію у зміні напружень і деформацій у точці.

Вираз для визначення головних деформацій через довільні деформації має вигляд:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_Z + \varepsilon_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_Z - \varepsilon_Y)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma_{ZY}}{2}\right)^2} \quad (4.33)$$

Якщо скласти ліву і праву частину виразу (4.33), то отримаємо властивість інваріантних лінійних деформацій:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_Z + \varepsilon_Y = \text{const}.$$

Відповідно до цього, тензор деформації T_D для плоского напруженого стану має вигляд:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z; & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{ZY} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{YZ}; & \varepsilon_Y \end{vmatrix}, \quad (4.34)$$

А тензор напружень:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_Z; & \tau_{ZY} \\ \tau_{YZ}; & \sigma_Y \end{vmatrix}. \quad (4.35)$$

4.2.3. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах

Закон Гука при лінійному напруженому стані $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Встановимо кількісний зв'язок між напруженням та деформацією:

– при лінійному напруженому стані (розтяг–стиск) (рис. 4.16).

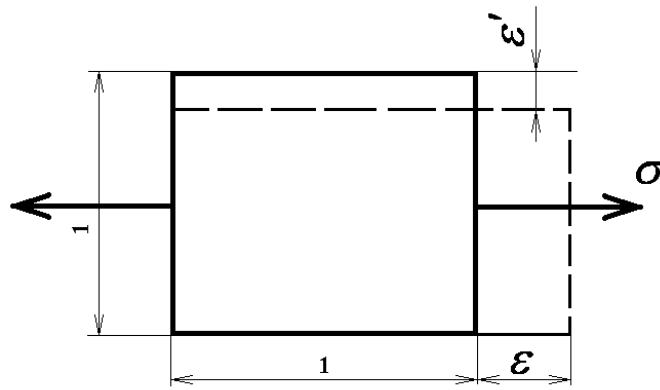


Рис.4.16. Деформації при лінійному напруженому стані.

Очевидно, що: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

Відносна поперечна деформація:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (4.36)$$

$$\left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \mu - \text{коефіцієнт Пуансона} \quad (4.37)$$

– при об'ємному напруженому стані (рис. 4.17):

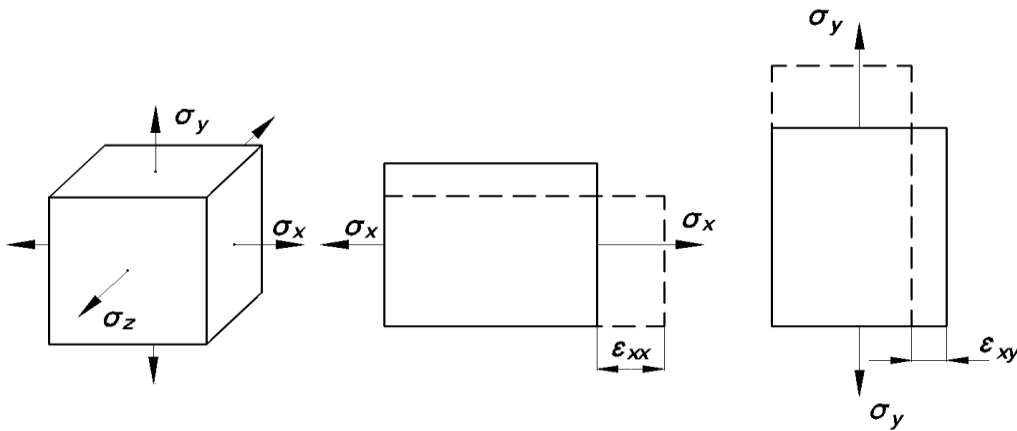


Рис. 4.17. Деформації при об'ємному напруженому стані.

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}. \quad (4.38)$$

Використавши вираз (4.36), отримаємо таку залежність:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_y}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_z}{E}. \quad (4.39)$$

Аналогічно для напрямку осей Y та Z отримаємо узагальнений закон Гука при об'ємному напруженому стані.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Для плоского напруженого стану, коли $\sigma_x = 0$.

Узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot \sigma_z] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot \sigma_y] \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Коли $\sigma_x = 0$: лінійна деформація у цьому напрямку не дорівнює нулю, а визначається:

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E} \cdot [\sigma_y + \sigma_z]. \quad (4.42)$$

Інколи виникає необхідність виражати напруження через деформації. Для цього другий рядок виразу (4.41) множать на μ та складають з першим:

$$\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu^2 \cdot \sigma_y],$$

Звідси знаходять σ_y і σ_z :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_y) \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

4.2.4. Зміна об'єму матеріалу під час деформації

Відомо, що під час дії напружень відбувається зміна об'єму матеріалу. Знайдемо абсолютну і відносну зміну об'єму матеріалу при об'ємному напруженому стані (рис. 4.18).

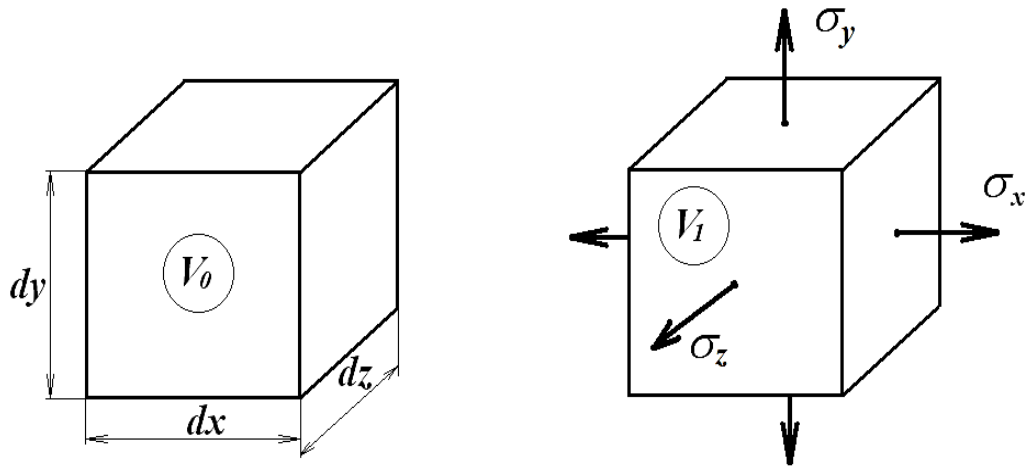


Рис. 4.18. Зміна об'єму при об'ємному напруженому стані.

де: V_0 – початковий об'єм;

V_1 – об'єм при прикладанні зусилля (після деформації).

Нехай до деформації розміри сторін елементарного паралелепіпеда дорівнювали: dx , dy , dz , а після прикладання навантажень – $dx + \Delta dx$; $dy + \Delta dy$; $dz + \Delta dz$.

Початковий об'єм дорівнює:

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz; \quad (4.44)$$

Після деформації:

$$V_1 = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz). \quad (4.45)$$

Абсолютна зміна об'єму елемента:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_1 - V_0 = \\ &= (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) - \\ &- dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= dx \cdot dy \cdot dz \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dx}{dx}}_{\varepsilon_x} \right) \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dy}{dy}}_{\varepsilon_y} \right) \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dz}{dz}}_{\varepsilon_z} \right) - \\ &- dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Зробивши перетворення у виразі (4.46), а також врахувавши, що $V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$, отримаємо:

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z, \quad (4.47)$$

Враховуючи незначність величин $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$; $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_z$; $\varepsilon_z \cdot \varepsilon_y$;

$\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$, якими нехтуємо, отримуємо:

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (4.48)$$

Відносна зміна об'єму матеріалу дорівнює:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (4.49)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука при об'ємному напруженому стані, виразимо відносну зміну об'єму матеріалу θ через напруження:

$$\theta = \frac{(1-2\cdot\mu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (4.50)$$

З виразу (4.50) очевидно, що μ не може бути більшим 0,5 і знаходиться в межах $0 \leq \mu \leq 0,5$.

Розглянемо всебічний гідростатичний стиск (рис. 4.19).

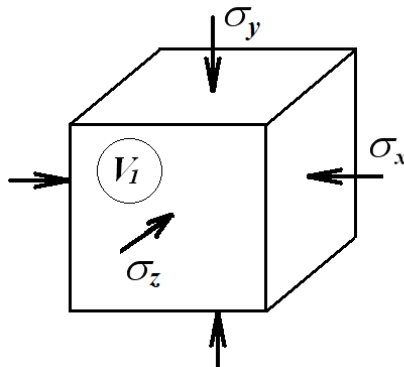


Рис. 4.19. Всебічний гідростатичний стиск.

$$\text{При цьому: } \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma. \quad (4.51)$$

Підставивши вираз (4.51) у (4.50), отримаємо:

$$\theta = 3 \cdot (1-2\cdot\mu) \cdot \frac{\sigma}{E}. \quad (4.52)$$

Якщо $\mu < 0,5$, то $\theta > 0$, це значить, що відбуватиметься збільшення об'єму матеріалу, що суперечить істині.

При $\mu = 0,5$ маємо $\theta = 0$. Це означає, що в момент текучості матеріалу змінюється тільки форма зразка, а об'єм залишається незмінним (рис. 4.20).

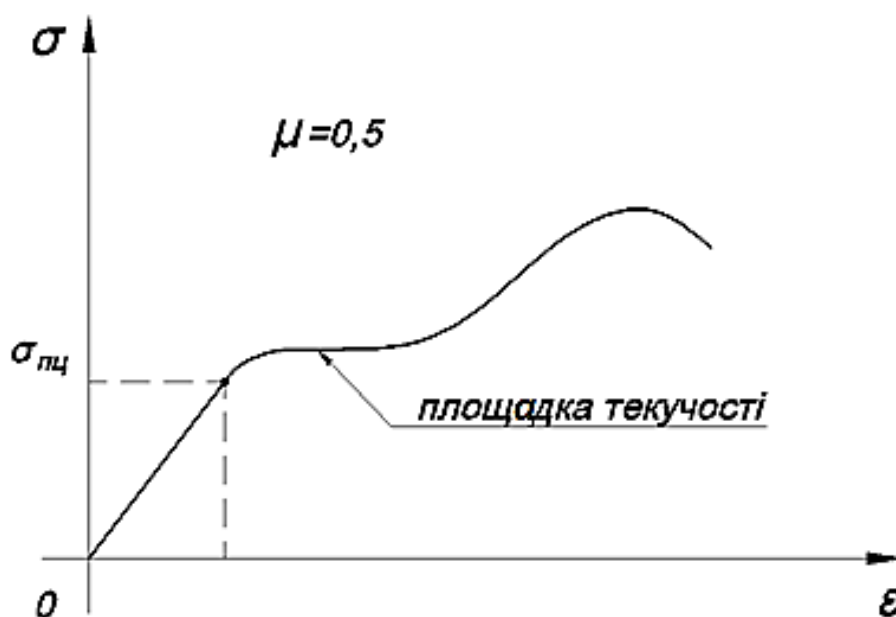


Рис. 4.20. Діаграма розтягу-стиску пластичного матеріалу.

4.2.5. Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані

Очевидно, що при об'ємному напруженому стані деформації відбуваються в трьох напрямках (рис. 4.21), а в одиниці об'єму матеріалу накопичується питома потенціальна енергія – питома енергія деформації. За рахунок цієї енергії матеріал відновлює свою форму, розміри та об'єм після зняття напружень.

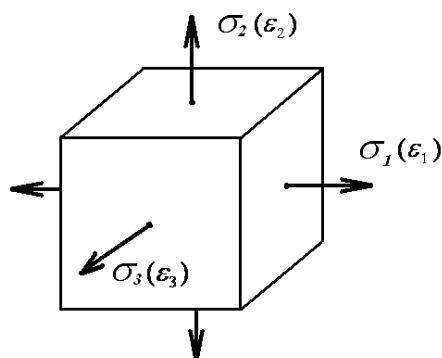


Рис. 4.21. Графічне зображення деформацій при об'ємному напруженому стані.

Питома потенціальна енергія при центральному розтягу-стиску визначається:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon ; \quad (4.53)$$

При об'ємному напруженому стані:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3. \quad (4.54)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразивши деформації через напруження, формула (4.54) набуде вигляд:

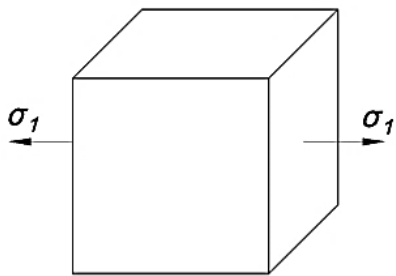
$$U = \frac{1}{2E} \cdot [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)]. \quad (4.55)$$

4.3. Теорії міцності

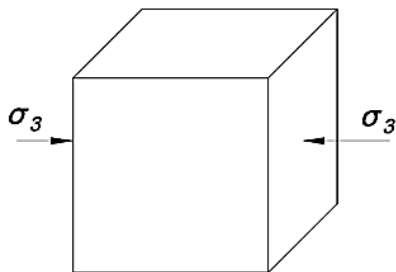
4.3.1. Загальні поняття про теорії міцності

Основним питанням механіки матеріалів і конструкцій є оцінка міцності матеріалу за заданим напружено-деформованим станом, тобто за головними напруженнями (максимальними напруженнями σ_{\max} та τ_{\max}).

Для лінійного (одноосного) напруженого стану, яким є центральний розтяг або стиск, ця задача розв'язується досить просто й умови міцності такі:



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma_+] = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{n} ; \quad (4.56)$$



$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \leq [\sigma_-] = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{n} ; \quad (4.57)$$

де: $\sigma_{\text{неб.}}$ – небезпечне напруження, що залежить від виду матеріалу (рис. 4.22); n – коефіцієнт запасу міцності.

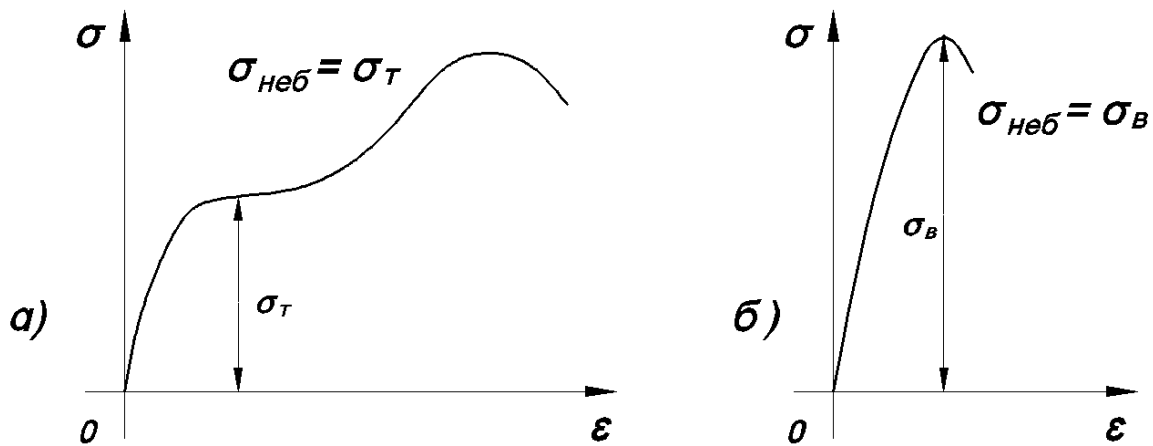


Рис. 4.22. Діаграми розтягу-стиску:
а) пластичний матеріал; б) крихкий матеріал.

При більш складних видах напруженого стану, коли два або три головні напруження не дорівнюють нулю, як підтвердили досліди, небезпечний стан (руйнування) залежить не тільки від σ_{\max} і σ_{\min} , але й від співвідношення між ними, яких може бути безліч.

$$\text{Вважають, що: } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3; \quad (4.58)$$

Тому прямий шлях розв'язання задачі неможливий не тільки через складність досліду, але й через їх нескінченну кількість.

Роблять так: вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору (σ , τ , ϵ , u) і вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина цього фактору досягне граничного значення, яке встановлюється під час розтягу або стиску. Таким чином, ми встановлюємо еквівалентність складного напруженого стану і лінійного (одноосьового). На сьогодні існує декілька таких гіпотез, які отримали назву «Теорії міцності».

4.3.2. I теорія міцності

I теорія міцності (теорія найбільших нормальних напружень), запропонована Галілео Галілеєм у XVII ст.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина максимальних нормальних напружень

σ_{\max} досягне граничного стану $\sigma_{неб.}$, яке встановлюється при простому розтягу, і умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{n}. \quad (4.59)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія не може застосовуватись (дає великі похибки) практично для всіх матеріалів. Вона дає більш-менш правдиві дані під час розтягу дуже крихких матеріалів (скло, граніт, цегла тощо).

4.3.3. II теорія міцності

II теорія міцності (теорія найбільшої лінійної деформації), запропонована Едме Маріоттом в 1682 році.

Згідно з якою вважають, що міцність матеріалу буде порушена, коли величина максимальної лінійної деформації ε_{\max} досягне граничного значення $\varepsilon_{\text{неб.}}$, яке встановлюється під час центрального розтягу (лінійному одноосному стані) і умова міцності має вигляд:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_{\text{неб.}}}{n} \quad (4.60)$$

Враховуючи закон Гука при об'ємному напруженому стані, маємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \quad (4.61)$$

При лінійному напруженому стані:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\text{неб.}} = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{E}. \quad (4.62)$$

Підставивши (4.61) та (4.62) в (4.60), маємо:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (4.63)$$

де: μ – коефіцієнт поперечної деформації.

$$\mu = \left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (4.64)$$

Досліди підтвердили, що ця теорія непридатна для більшості матеріалів, її можна застосовувати лише для крихких матеріалів (міцних легованих та вуглеводистих сталей). При цьому максимальне напруження σ_1 повинно бути додатним ($\sigma_1 > 0$), тобто розтягу.

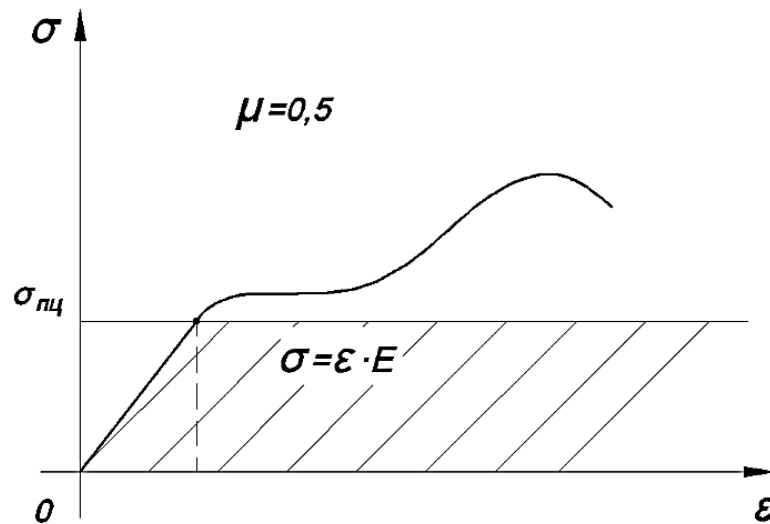


Рис. 4.23. Графічна зона пропорційності.

Недолік: можливо застосовувати лише в зоні пропорційності (рис. 4.23).

4.3.4. III теорія міцності

III теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень). Ця теорія запропонована Шарлем Огюстеном Кулоном в 1773 році.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан (руйнування) матеріалу відбудеться тоді, коли величина максимального дотичного напруження τ_{\max} досягне граничного стану $\tau_{\text{неб.}}$, який встановлюється при центральному розтягу і умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_n}{n} \quad (4.65)$$

Відомо, що $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а при центральному розтягу-стиску $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$.

$$\text{Підставивши, отримаємо: } \sigma_1 - \sigma_3 \leq (\sigma). \quad (4.66)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія спрацьовує для пластичних матеріалів, в яких механічні властивості однакові як на

розтяг, так і на стиск. Недолік – вона не враховує середнього напруження σ_2 .

4.3.5. IV енергетична теорія міцності

IV енергетична теорія міцності (теорія формозміни). Вона запропонована Губером (Максиміліаном Титусом Губером) в 1904 році. Згідно з цією теорією припускають, що порушення міцності матеріалу відбудеться тоді, коли питома потенційна енергія формозміни при об'ємному напруженому стані досягне граничного стану, який встановлюється при центральному розтягу в момент настання плинності матеріалу.

Момент настання плинності матеріалу при лінійному напруженому стані (рис. 4.24):

$$U_\phi \leq [U_\phi]_T \quad (4.67)$$

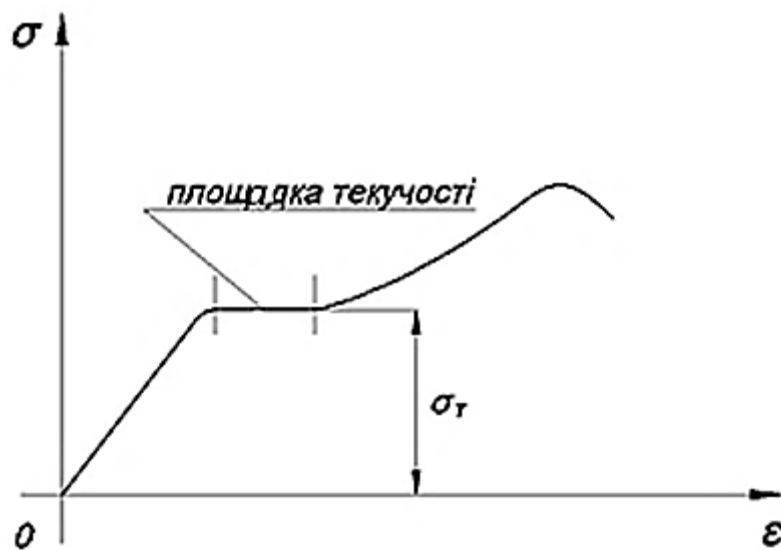


Рис. 4.24. Діаграма розтягу-стиску.

Відомо, що при об'ємному напруженому стані питома потенційна енергія дорівнює:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (4.68)$$

При центральному розтягу (лінійному напруженому стані), коли $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, а $\sigma_1 = \sigma_T$ матимемо:

$$(U_{\phi})_T = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2. \quad (4.69)$$

Порівнявши (4.68) і (4.69), маємо:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T. \quad (4.70)$$

Вираз (4.70) зручно представити так:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (4.71)$$

Із виразу (4.71) отримаємо умову міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (4.72)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що IV теорія міцності успішно застосовується практично для всіх матеріалів.

Для плоского напруженого стану, який виникає при згині стрижня, умова міцності має вигляд:

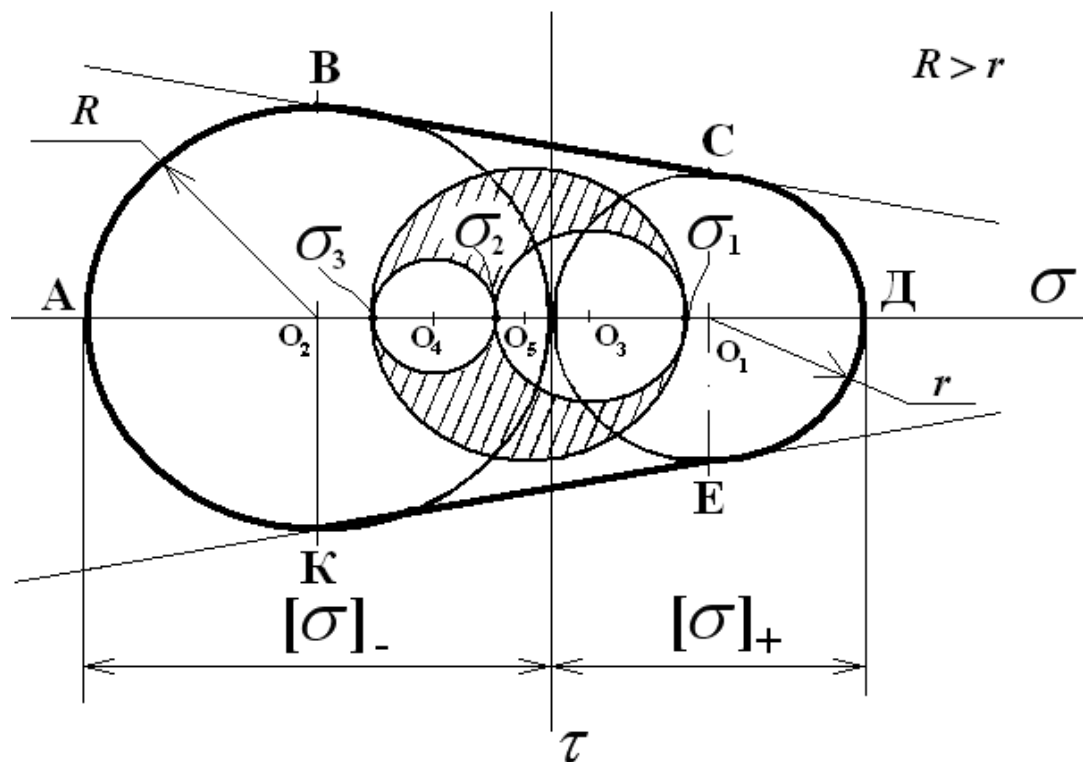
$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (4.73)$$

4.3.6. Теорія міцності граничних напружених станів

Теорія міцності граничних напружених станів (теорія Отто Христиана Мора).

Запропонована в ХХ ст. Отто Мором, згідно з якою вважають, що на міцність матеріалу впливає найбільше – σ_1 і найменше – σ_3 напруження, а вплив σ_2 є несуттєвим. Для цієї теорії будують граничну обгинаючу для кожного матеріалу (рис. 4.25).

Випробовуючи матеріал на розтяг і стиск знаходять величини допустимих нормальних напружень $[\sigma]_+$ та $[\sigma]_-$. Далі будують граничну обгинаючу АВСДЕК (рис. 4.25), а потім у тому ж масштабі будуємо кола Мора по σ_1 , σ_2 та σ_3 . Якщо побудоване коло $\sigma_1 - \sigma_3$ не виходить за межі обгинаючої, то міцність матеріалу забезпечено. При цьому наочно зрозуміло, що σ_2 не може суттєво вплинути на міцність матеріалу, оскільки воно знаходиться в колі $\sigma_1 - \sigma_3$.



$R > r$ – крихкий матеріал.

Рис. 4.25. Графічне відображення теорії міцності Мора.

Недоліки:

- 1) складність у побудові граничної обгинаючої.
- 2) не врахування середнього значення напруження σ_2 .

Перевага: теорія, що будується на дослідних даних не потребує теоретичного підтвердження.

4.3.7. Поняття про нові теорії міцності

Поява пластмасових та композиційних матеріалів виявила в розглянутих теоріях міцності низку невирішених проблем, що стало значним поштовхом у розвитку нових сучасних теорій міцності таких, як:

а) теорія Янга – описує той чи інший напружений стан у точці поліномом різного ступеню (для об'ємного напруженого стану – це циліндрична поверхня). При цьому отримані теоретичні викладки є достатньо громіздким із застосуванням складного математичного апарату;

б) теорія міцності Лебедева-Писаренка (1967 р.) – вважається, що на міцність матеріалу впливає: τ – для його руйнування від зсуву

та σ – для відриву. Ця теорія є удосконаленням теорії Мора і забезпечує врахування σ_2 ;

в) теорія Фрідмана (теорія механічного стану) – базується на використанні діаграм механічного стану.

Але у цілому всі теорії призводять до порівняння напружень σ_1 , σ_2 та σ_3 , а руйнування відбувається через відрив або зсув частинок. При цьому за допомогою виразів $F(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = 0$ описують граничні поверхні, які для кожної теорії міцності, враховуючи σ – відрив і τ – зсув мають свій вигляд.

4.4. Завдання для самоконтролю

Для здійснення самоконтролю пропонується переглянути інтерактивну лекцію з аудіовізуальним супроводом «Напружений стан в точці» та відповісти на питання.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36185>



*Інтерактивна лекція з аудіовізуальним супроводом
«Напружений стан в точці»*

4.5. Тестові завдання

Також для закріплення пройденого матеріалу надано посилання на електронний навчальний тестовий тренажер до 4 розділу.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=37919>



*Електронний навчальний тестовий тренажер до розділу
«Напружений стан в точці»*

Розділ 5. Кручення та зсув

5.1. Зсув

5.1.1. Поняття про чистий зсув

У деяких випадках міцність і жорсткість конструкції пов'язана з опором матеріалу деформаціям зсуву, які викликані дотичними напруженнями τ . Розглянемо найбільш простий випадок зсуву – чистий зсув. Чистий зсув – коли в двох взаємно перпендикулярних площинах діють тільки дотичні напруження τ . При цьому подовження сторін відсутнє, а виникає тільки кутова деформація (рис. 5.1).

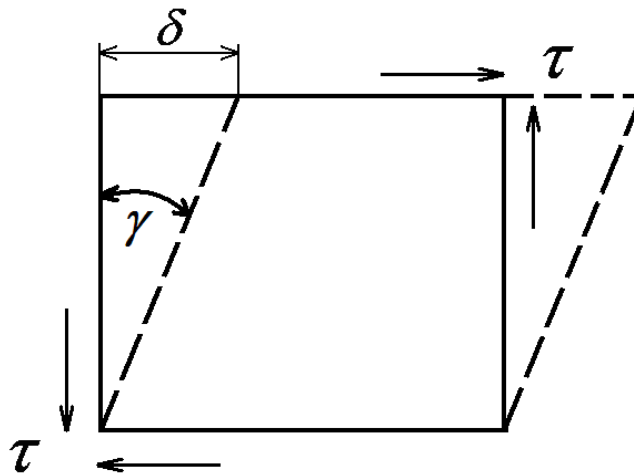


Рис. 5.1. Деформація при чистому зсуві.

Прийнявши площадки чистого зсуву за вихідні, напруження в інших площинах визначатимуться за формулами (рис. 5.2):

$$\sigma_{\alpha} = \tau \cdot \sin 2\alpha, \quad (5.1)$$

$$\tau_{\alpha} = \tau \cdot \cos 2\alpha. \quad (5.2)$$

оскільки $\sin 2(\alpha + 90) = -\sin 2\alpha$.

Очевидно із виразу (5.1):

$$\sigma_{\alpha} = -\sigma_{\alpha+90}, \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) є законом парності нормальних напружень при чистому зсуві.

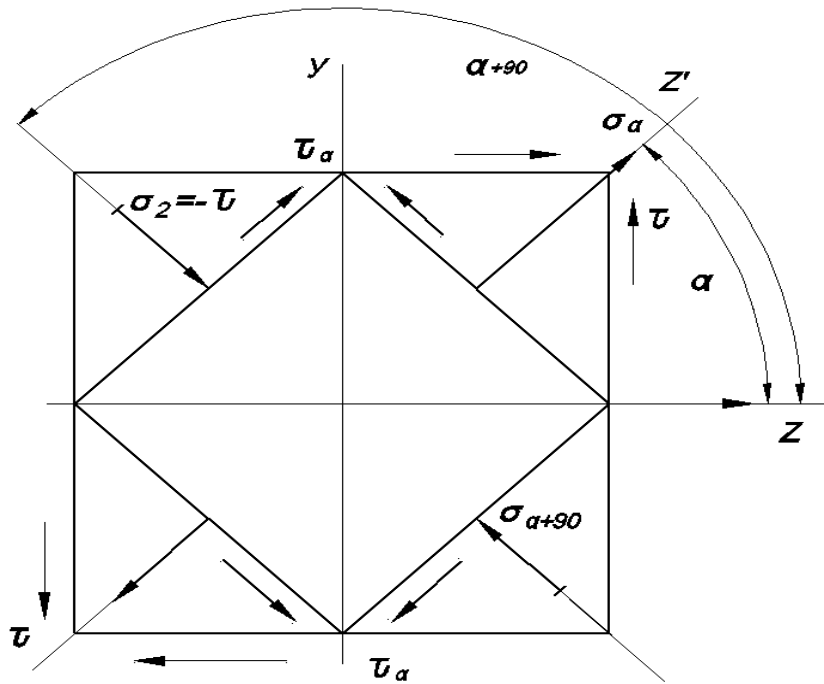


Рис. 5.2. Визначення напружень при повороті площин чистого зсуву.

Із аналізу виразів (5.1) і (5.2) маємо такі рівності (рис. 5.3):

$$\begin{aligned}
 \alpha = 0, & \quad \sigma_{\alpha} = 0, & \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\max}. \\
 \alpha = 45^{\circ}, & \quad \sigma_{\alpha} = \tau, & \quad \tau_{\alpha} = 0. \\
 \alpha = 135^{\circ}, & \quad \sigma_{\alpha} = -\tau, & \quad \tau_{\alpha} = 0.
 \end{aligned}$$

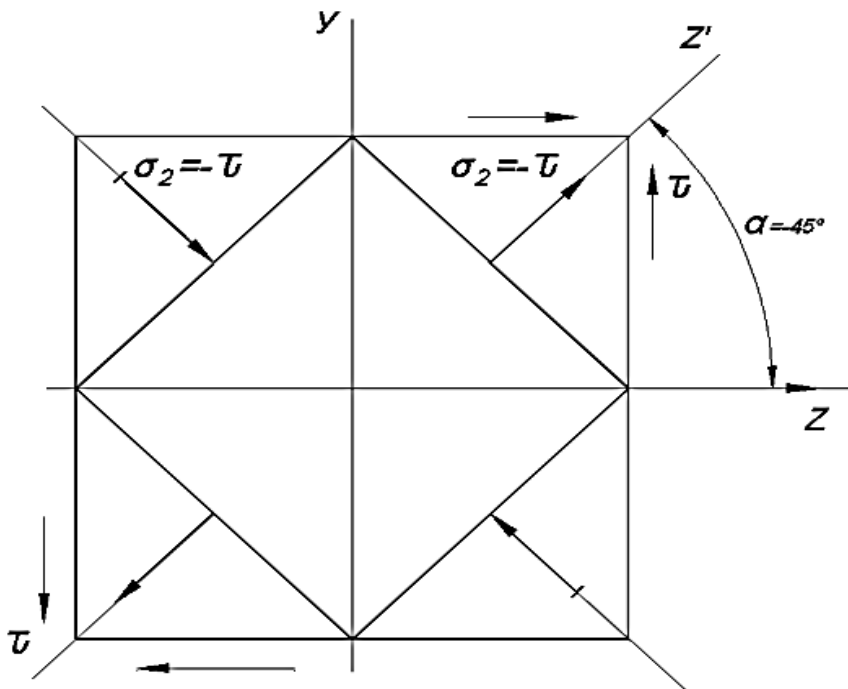


Рис. 5.3. Напруження в площинах при куті 45° щодо площин чистого зсуву.

Таким чином, головні площини із площинами чистого зсуву становлять кут 45° . Головні напруження за модулем дорівнюють дотичним. Чистий зсув – це єдиний випадок напруженого деформованого стану, при якому змінюється форма зразка, а об'єм лишається незмінним. Це зрозуміло із виразу:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (5.4)$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau; \quad \theta = 0.$$

5.1.2. Закон Гука при чистому зсуві

Деформація зразка при чистому зсуві характеризується (рис. 5.4):

δ – абсолютний зсув;

$\frac{\delta}{a} = \gamma$ – відносний зсув (кут зсуву).

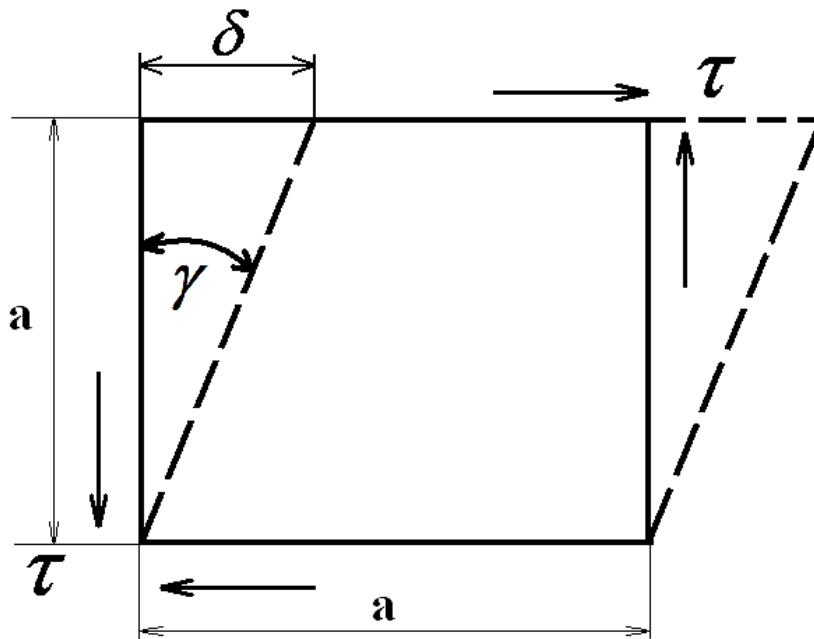


Рис. 5.4. Деформації при чистому зсуві.

Для пластичних матеріалів ця залежність $\tau - \gamma$ має вигляд (рис. 5.5).

У зоні пропорційності між τ і γ існує лінійна залежність, яка називається законом Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (5.5)$$

G – модуль пружності 2-го роду, або модуль пружності при зсуві.

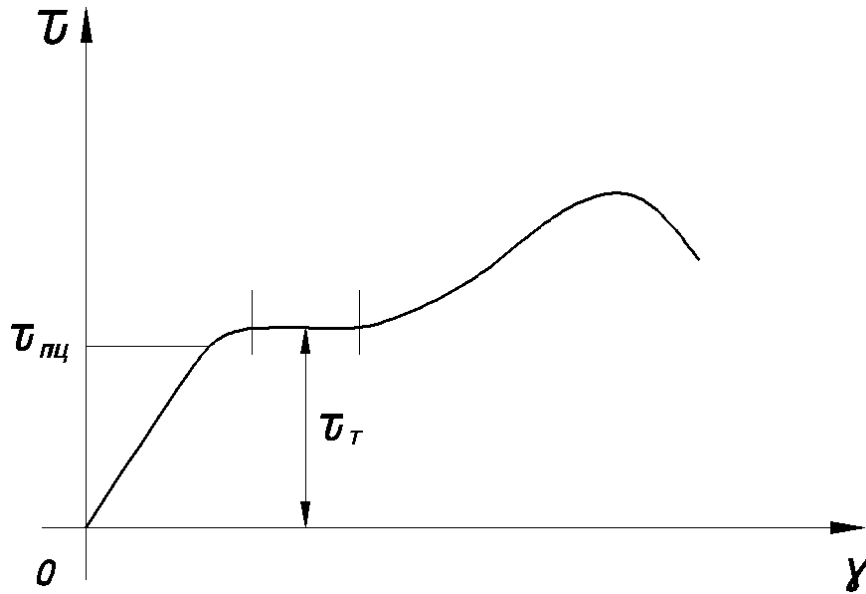


Рис. 5.5. Діаграма $\tau - \gamma$ для пластичних матеріалів.

Цікаво відмітити, що для більшості матеріалів має місце така залежність:

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \quad (5.6)$$

5.1.3. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві

Розглянемо плоский напружений стан в точці і покажемо в ній площадки чистого зсуву й головні площини з відповідними напруженнями (рис. 5.6).

Із рис. 5.6 видно, що деформацію діагоналі елемента можна представити двояко. З одного боку, вона викликана деформацією зсуву, а значить залежить від дотичних напружень τ , пов'язаних з модулем пружності G . З другого боку, цю діагональ можна уявити як волокно, яке розтягується від напруження σ_1 і стискається від напруження σ_2 , а значить залежить від модуля пружності E . Тобто очевидно, що між G та E існує залежність.

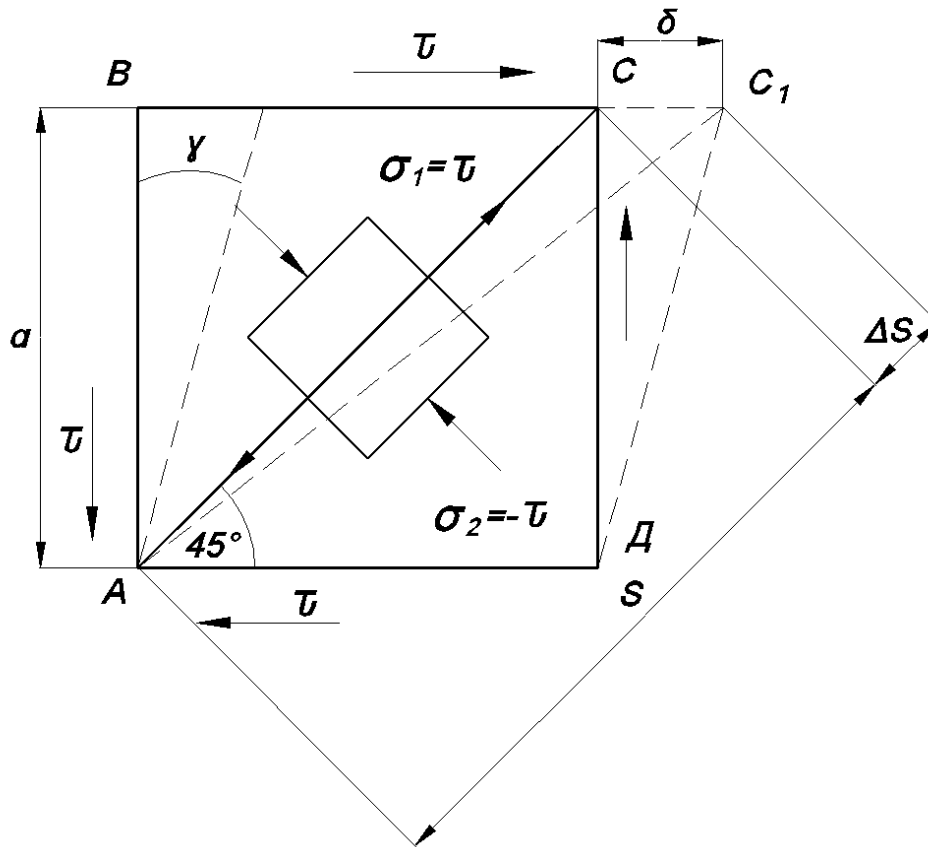


Рис. 5.6. Деформація елемента при чистому зсуві.

Із (рис. 5.6) очевидно:

$$\Delta S = \delta \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \gamma, \quad (5.7)$$

$$a = S \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Тоді:
$$\Delta S = \frac{\tau}{2 \cdot G} \cdot S. \quad (5.8)$$

З іншого боку – вид розтягу можна записати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2); \quad (5.9)$$

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau.$$

$$\Delta S = \frac{(1 + \mu)\tau}{E} \cdot S. \quad (5.10)$$

Порівнявши (5.8) та (5.10), маємо теоретичну залежність між модулями пружності при розтягу-стиску E та зсуві G

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (5.11)$$

5.1.4. Потенціальна енергія при чистому зсуві

При чистому зсуві роботу виконує дотична сила T (рис. 5.7).

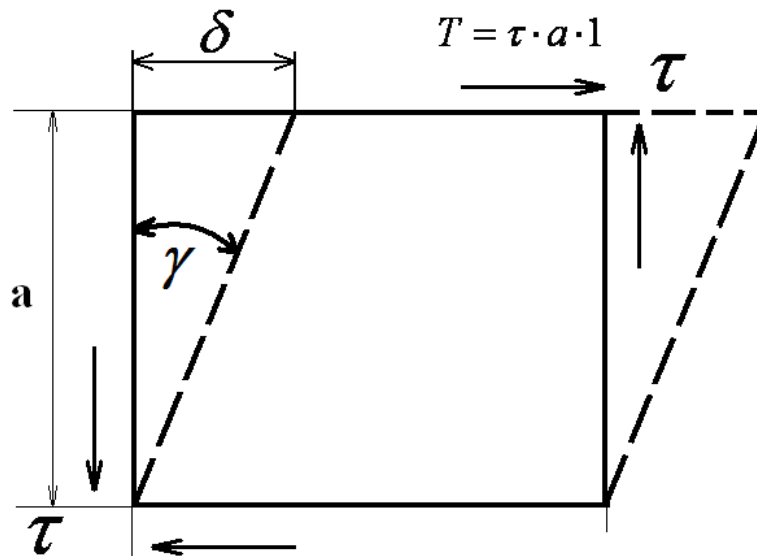


Рис. 5.7. Дія дотичної сили та викликані деформації.

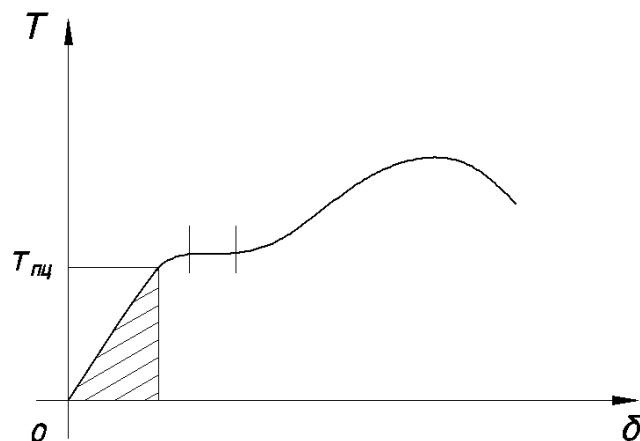


Рис. 5.8. Графічне відображення роботи, що виконує дотична сила.

У зоні границі пропорційності робота, яку виконує сила T дорівнює потенціальній енергії і визначається за формулою (рис. 5.8):

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \delta. \quad (5.12)$$

Враховуючи, що $T = \tau \cdot a \cdot 1$; $\delta = \gamma \cdot a$;

$$U = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot 1 \quad (5.13)$$

Питома потенційна енергія:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma, \text{ де } V_0 = a^2 \cdot 1. \quad (5.14)$$

Замінивши \mathcal{V} у виразі (5.14) ($\mathcal{V} = \frac{\tau}{G}$), матимемо:

$$u = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \cdot \quad (5.15)$$

Цей вираз аналогічний виразу при центральному розтягу-стиску.

5.1.5. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув

Дійсна деформація заклепкового або зварного з'єднання дуже складна і лише наближено може бути розглянута як деформація чистого зсуву. Тому методика, що розглядатиметься, має умовний характер, але вона досить проста і підтверджується експериментальними даними на практиці, що забезпечує її широке застосування в інженерній практиці.

а) Розрахунок заклепкового з'єднання (рис. 5.9).

Руйнування з'єднання може відбуватися з двох причин:

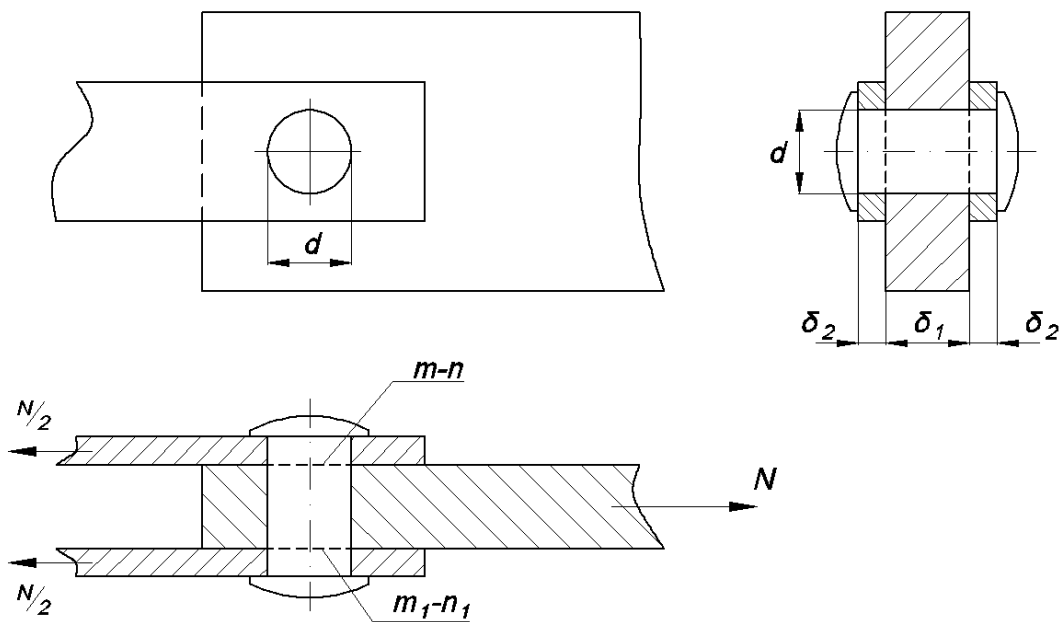


Рис. 5.9. Схема заклепкового з'єднання.

1) від зрізу заклепки по площинах $n - m$ та $n_1 - m_1$ (рис. 5.9). Зусилля на зріз визначається за формулою:

$$S_{зр} = F_{зр} \cdot [\tau]_{зр}; \quad (5.16)$$

де площа зрізу: $F_{зр} = \kappa \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$;

κ – кількість площин зрізу;

$[\tau]_{зр}$ – допустиме дотичне напруження від зрізу тіла заклепки.

2) від зминання листів або тіла заклепки. Зусилля на зминання визначається за формулою:

$$S_{зм} = F_{зм}^{\min} \cdot [\sigma]_{зм}; \quad (5.17)$$

де:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{зм1} = d \cdot \delta_1 \\ F_{зм2} = d \cdot 2 \cdot \delta_2 \end{array} \right\} \text{ площі зминання (5.18), (5.19)}$$

$[\sigma]_{зм}$ – допустиме значення напруження на зминання заклепки.

Загальна кількість заклепок визначається (рис. 5.10):

$$n = \frac{N}{S_{\min}}; \quad (5.20)$$

де: S_{\min} – мінімальне значення, яке приймається з виразів (5.16) або (5.17).

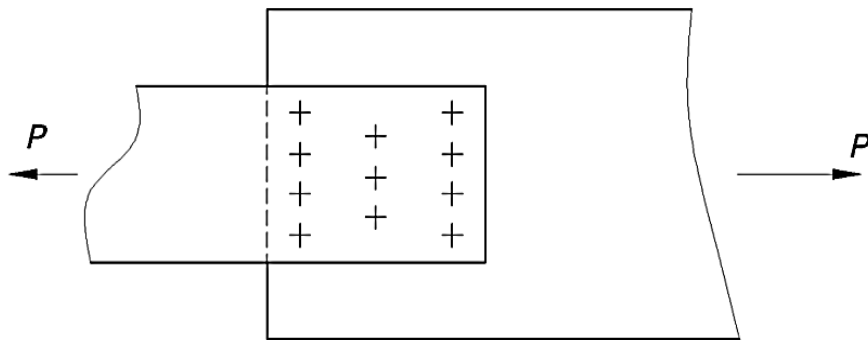


Рис. 5.10. Визначення кількості заклепок.

б) Розрахунок зварного шва.

Зварні з'єднання не викликають послаблення тіла деталі та є менш трудомістким, тому знайшли широке застосування в інженерній практиці. Руйнування зварного з'єднання відбувається по найменшій площині – бісекторній площині (рис. 5.11).

При цьому розрахунковий поперечний переріз шва приймається у вигляді трикутника.

Площу зрізу шва розраховують за формулою:

$$F_{зр} = 2 \cdot l_{шв} \cdot 0,7 \cdot h = 1,4 \cdot h \cdot l_{шв}. \quad (5.21)$$

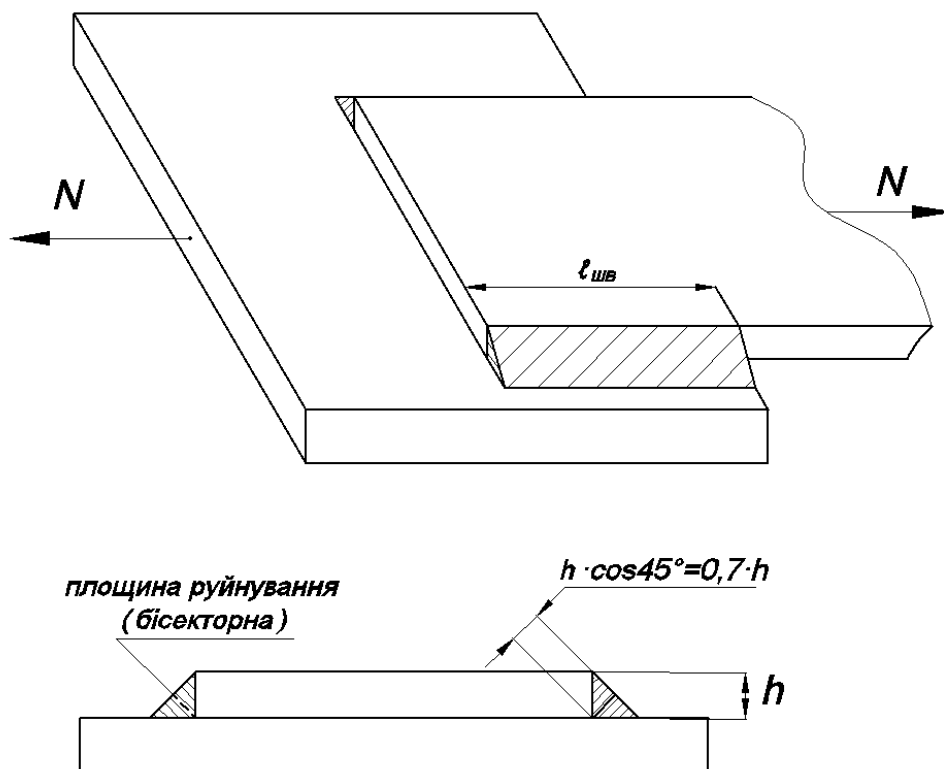


Рис. 5.11. Зварне з'єднання.

Відповідно до цього, умова міцності зварного шва має вигляд:

$$\frac{N}{F_{зр}} = \frac{N}{1,4 \cdot h \cdot l_{шв}} \leq [\tau]_{\kappa}^{зб} \quad (5.22)$$

де $[\tau]_{\kappa}^{зб}$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва на зріз;

$l_{шв}$ – розрахункова довжина шва, яка приймається на 10 мм меншою фактичної довжини через «непровари» при запалюванні та гасінні дуги.

Матеріал шва не має яскраво вираженої площини плинності (крихкий матеріал), тому в момент руйнування τ не вирівнюються. Тому довжину шва обмежують $l_{шв} \leq 60h$. З іншого боку, необхідно щоб $l_{шв} \geq 40\text{мм}$ або $l_{шв} \geq 4h$.

Із наведеної умови міцності (5.22) можна знайти довжину зварного шва:

$$l_{шв} = \frac{N}{1,4h[\tau]_{\kappa}^{зб}} \quad (5.23)$$

Методику розрахунку на зсув можна переглянути за посиланням на мультимедійну презентацію.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=37846>



Мультимедійна презентація «Практичний розрахунок на зсув»

5.2. Кручення

5.2.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр

Якщо в поперечному перерізі стрижня виникає тільки один внутрішній фактор – крутний момент, а решта внутрішніх зусиль дорівнює нулю, то він знаходиться в умовах кручення. Стрижні, які «працюють» на кручення, «роблять», як правило, круглого поперечного перерізу і називаються валами. Для визначення крутного моменту в поперечному перерізі вала застосовують метод перерізів, згідно з яким він дорівнює сумі зовнішніх моментів, прикладених до будь-якої із відсічених частин вала (рис. 5.12).

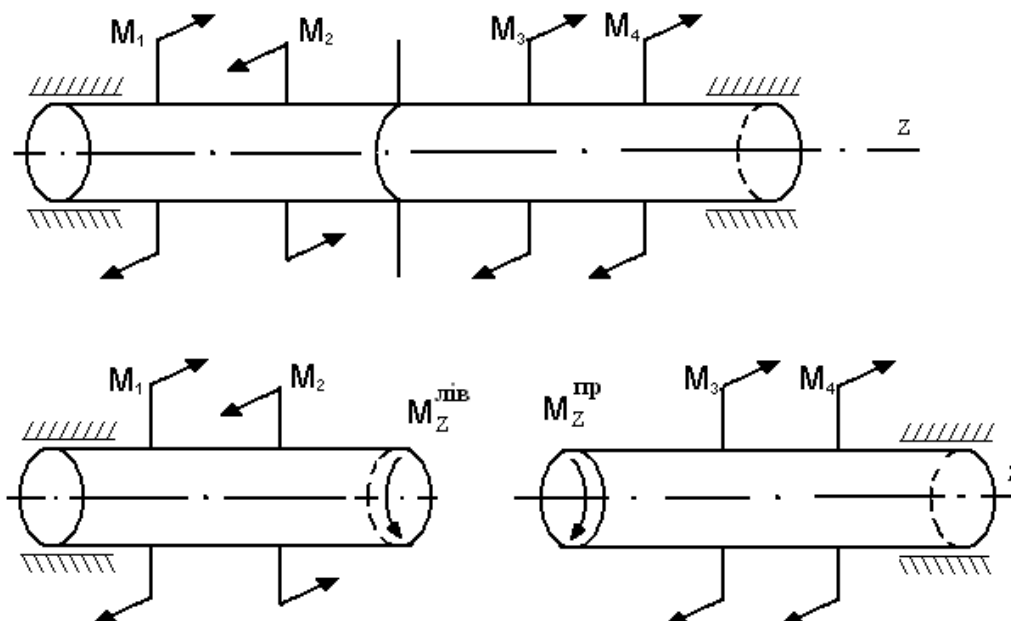


Рис. 5.12. Схема завантаження вала.

Правило знаків: крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при погляді на поперечний переріз вала з боку зовнішньої нормалі він напрямлений за ходом годинникової стрілки.

$$\sum M_z = 0; \quad -M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 0; \quad (5.24)$$

$$\sum M_z^{лів} = -M_1 + M_2; \quad \sum M_z^{пр} = M_3 + M_4.$$

Якщо знайти значення крутних моментів в цілій низці поперечних перерізів, то можна побудувати епюру крутних моментів, яка показує зміну крутного моменту по довжині вала. Епюра $M_{кр}$ будується від базисної лінії. Покажемо на конкретному прикладі побудову епюри крутних моментів. Визначаємо значення M_z в характерних перерізах вала (рис. 5.13), якими є початок і кінець вала, а також точки прикладання зовнішніх зосереджених крутних моментів.

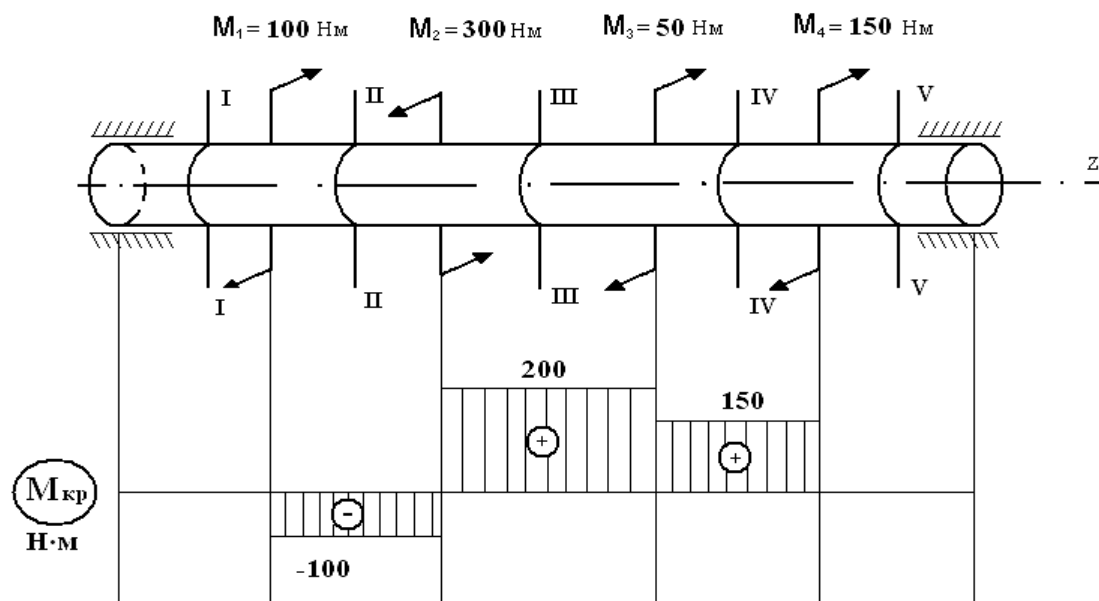


Рис. 5.13. Схема завантаження вала та епюра $M_{кр}$.

$$\sum M_z^I = 0;$$

$$\sum M_z^{II} = -M_1 = -100 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_z^{III} = -M_1 + M_2 = -100 + 300 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_z^{IV} = M_4 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_z^V = 0.$$

5.2.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу

За допомогою рівнянь статики неможливо знайти характер розподілу напружень по поперечному перерізу вала. Тому нанесемо на бокову поверхню круглого вала сітку з поперечних та поздовжніх рисок (рис. 5.14). У результаті прикладання крутного моменту нанесені прямокутники трансформуються, при цьому поперечні риси залишаються прямими і відстань між ними не змінюється. Це свідчить про те, що подовження волокон відсутнє. На підставі цього сформувано робочі гіпотези, які покладені в основу подальших висновків.

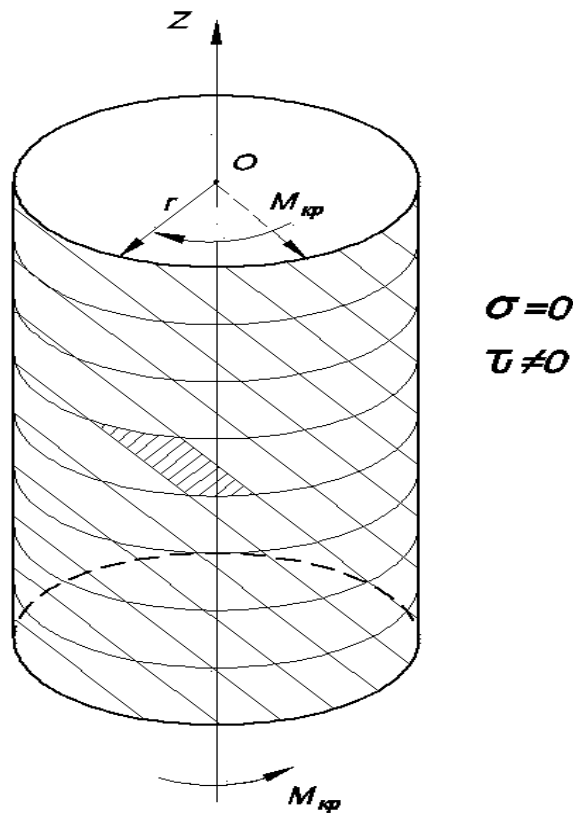


Рис. 5.14. Вал з нанесеними рисками.

При крученні круглого стрижня справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Радіус, уявно проведений, після деформації залишається прямим. Це дає можливість представити кручення як результат зсуву поперечних перерізів одних відносно інших.

Розглянемо деформацію вала (рис. 5.16).

Деформація характеризується:

γ – кут зсуву;

φ – кут закручування.

Розглянемо ділянку валу довжиною dz (рис. 5.17).

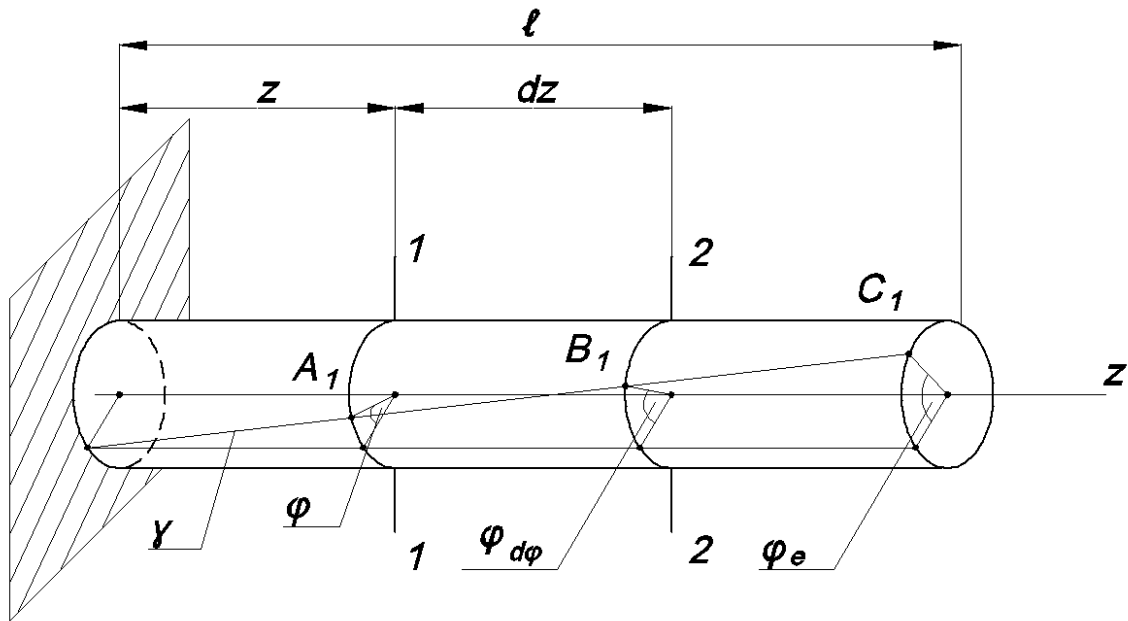


Рис. 5.17. Деформація вала.

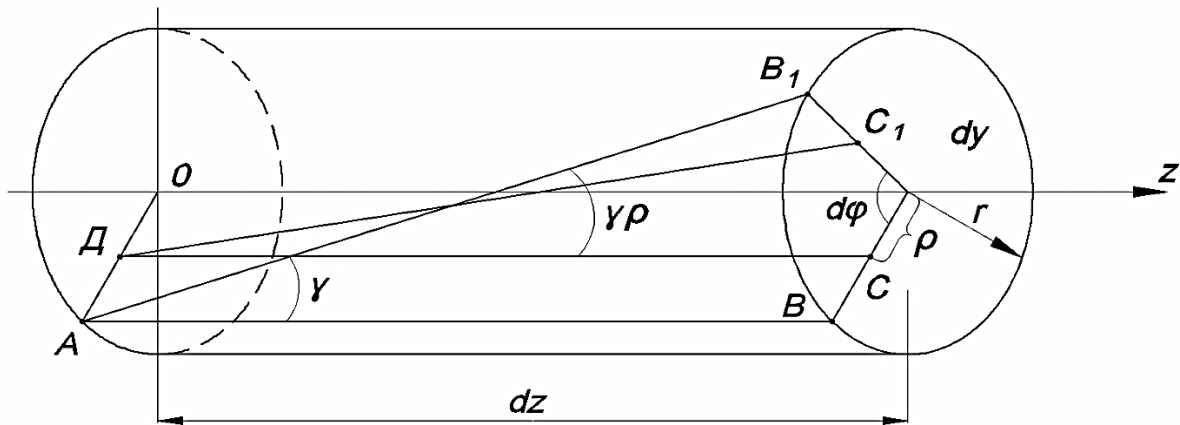


Рис. 5.18. Деформація відрізка вала довжиною dz .

Кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz};$$

Для довільного волокна на відстані ρ від центру ваги:

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz}.$$

Використовуючи закон Гука при чистому зсуві, маємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot r; \quad (5.25)$$

$$\tau_{\rho} = G \gamma_{\rho} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho. \quad (5.26)$$

Вирази (5.25) та (5.26) свідчать про те, що дотичні напруження по поперечному перерізу вала розподілені за лінійним законом і епюра τ має вигляд, наведений на рис. 5.19.

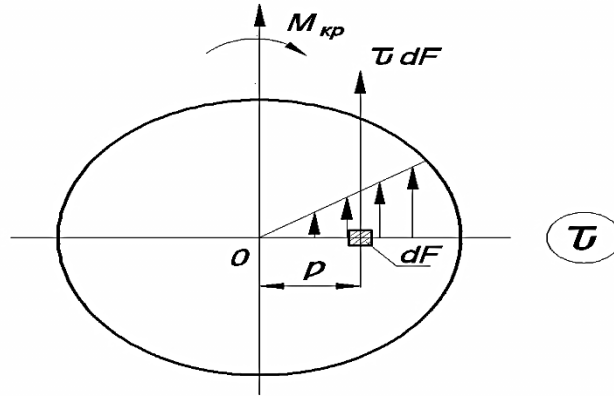


Рис. 5.19. Розподілення дотичних напружень по поперечному перерізі вала.

Для виключення з виразів (5.25) та (5.26) частини $\frac{d\varphi}{dz}$, знайдемо внутрішній крутний момент.

$$dM_{kp} = \tau_{\rho} \cdot dF \cdot \rho;$$

$$M_{kp} = \int_F \tau_{\rho} \cdot dF \cdot \rho = \int_F G \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dF \cdot \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 \cdot dF. \quad (5.27)$$

Враховуючи, що $\int_F \rho^2 \cdot dF = I_{\rho}$ – полярний момент інерції, отримаємо:

$$M_{kp} = G \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_{\rho}; \quad (5.29)$$

Звідси матимемо:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{kp}}{G \cdot I_{\rho}}. \quad (5.30)$$

Підставивши (5.29) в (5.30), отримаємо, що:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{kp}}{I_{\rho} \cdot G} \cdot G \cdot \rho = \frac{M_z}{I_{\rho}} \cdot \rho. \quad (5.31)$$

Очевидно, що $\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} \cdot r = \frac{M_z}{I_p / r}$,

де $\frac{I_p}{r} = W_\rho$ – полярний момент опору.

$$\text{Тоді } \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho}. \quad (5.32)$$

Умова міцності валу при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (5.33)$$

де: $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, що приводиться у нормах.

Із виразу (5.33) можливе розв'язання задачі за знаходження діаметра валу при заданому навантаженні та матеріалі:

$$W_\rho = \frac{M_{z \max}}{[\tau]}; \quad (5.34)$$

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3. \quad (5.35)$$

Порівнявши вирази (5.34) та (5.35), знайдемо діаметр валу:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{z \max}}{0,2 \cdot [\tau]}}. \quad (5.36)$$

Із виразу (5.30) маємо, що на ділянці валу – кут закручування $d\varphi$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p}, \quad (5.37)$$

Для всього валу:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p}. \quad (5.38)$$

Для валу із сталим поперечним перерізом і однаковим значенням M_z :

$$\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{l}{I_p}. \quad (5.39)$$

Для визначення характеристики жорсткості валу, вводиться поняття відносного кута закручування (θ):

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (5.40)$$

Одиниця виміру (рад/м).

5.2.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу

При крученні крутний момент виконує роботу на викликаних деформаціях (куті закручування). У зоні пружної деформації робота дорівнює потенціальній енергії U і визначається:

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot M_z \cdot \varphi. \quad (5.41)$$

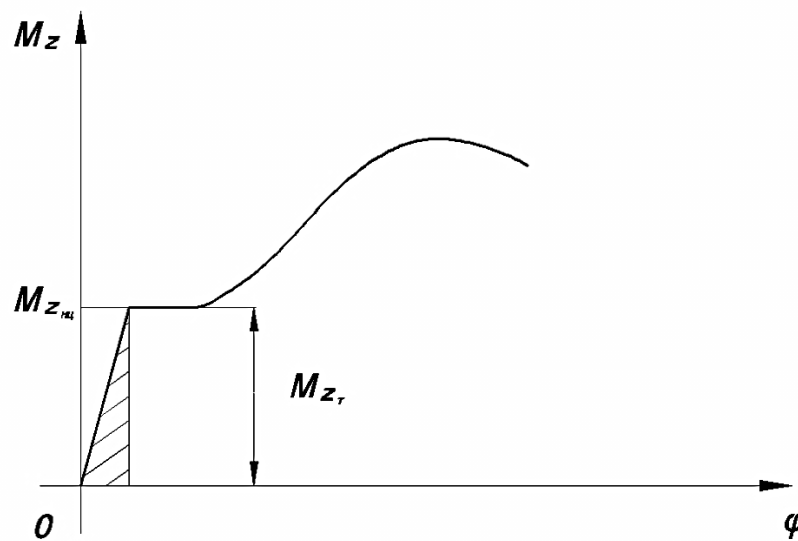


Рис. 5.20. Робота крутного моменту.

Виразивши крутний момент через кут φ , або навпаки, матимемо:

$$u = \frac{M_z^2 \cdot l}{2G \cdot I_p} = \frac{\varphi^2 \cdot G \cdot I_p}{2l}. \quad (5.42)$$

5.2.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу

Очевидно, що деформація валу прямокутного поперечного перерізу принципово відрізняється від деформації круглого валу, оскільки має місце переміщення точок вздовж вісі валу і порушення гіпотези плоских перерізів. Тобто поперечні перерізи викривляються (депланують) (рис. 5.21).

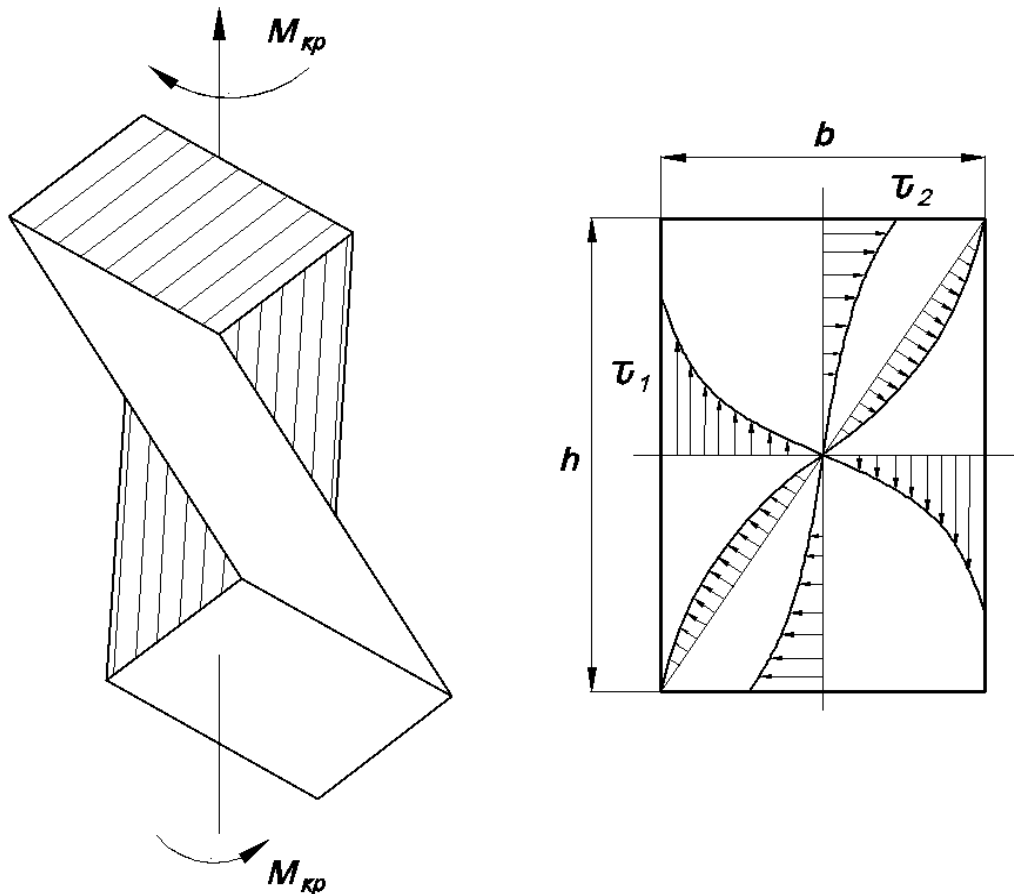


Рис. 5.21. Деформація вала прямокутного поперечного перерізу.

Наведемо кінцеві результати, які базуються лише на емпіричних даних і за яких епюри τ мають вигляд (рис. 5.21).

Очевидно, що τ_{\max} виникають посередині довшої сторони прямокутника і визначаються:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{прям}}, \quad (5.43)$$

Напруження в точці 2:

$$\tau_2 = \varphi \cdot \tau_1, \quad (5.44)$$

Кут закручування:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_{\alpha}}; \quad (5.45)$$

де: $W_{прям} = \alpha \cdot h \cdot b^2$ – момент опору перерізу;

$I_{\alpha} = \beta \cdot h \cdot b^3$ – полярний момент інерції; перерізу вала.

Коефіцієнти α , β , γ залежать від геометричного співвідношення сторін валу h і b і приводяться в нормах.

Умова міцності та жорсткості для валу прямокутного поперечного перерізу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot e^2} \leq [\tau]. \quad (5.46)$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot \beta \cdot h \cdot e^3} \leq [\theta]. \quad (5.47)$$

5.3. Приклади розв'язання задач

На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Дано: Сталевий вал, схема якого зображена на рис. 5.23.

$M_1=150\text{кН}\cdot\text{м}$; $M_2=150\text{кН}\cdot\text{м}$; $M_3=150\text{кН}\cdot\text{м}$; $M_4=150\text{кН}\cdot\text{м}$;

$a=b=c=150\text{см}$; $[\tau]=550\text{МПа}$, $G=8\cdot 10^{10}\text{Па}$

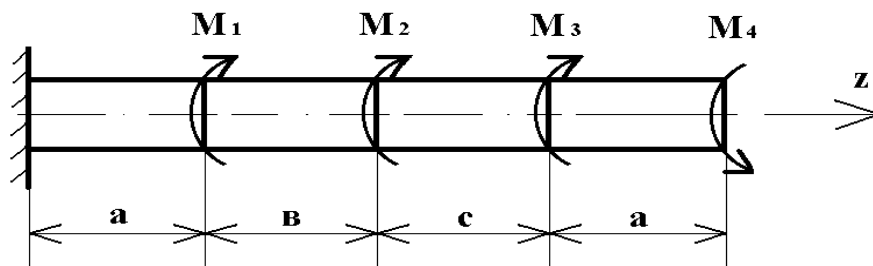


Рис. 5.23. Сталевий вал

1. Визначаємо значення моментів кручення на кожній ділянці валу та будуємо епюру (рис. 5.24.)

$$M_{1-1} = -M_4 = -150\text{кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{2-2} = -M_4 + M_3 = -150 + 150 = 0;$$

$$M_{3-3} = -M_4 + M_3 + M_2 = -150 + 150 + 150 = 150\text{кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{4-4} = -M_4 + M_3 + M_2 + M_1 = -150 + 150 + 150 + 150 = 300\text{кН}\cdot\text{м}.$$

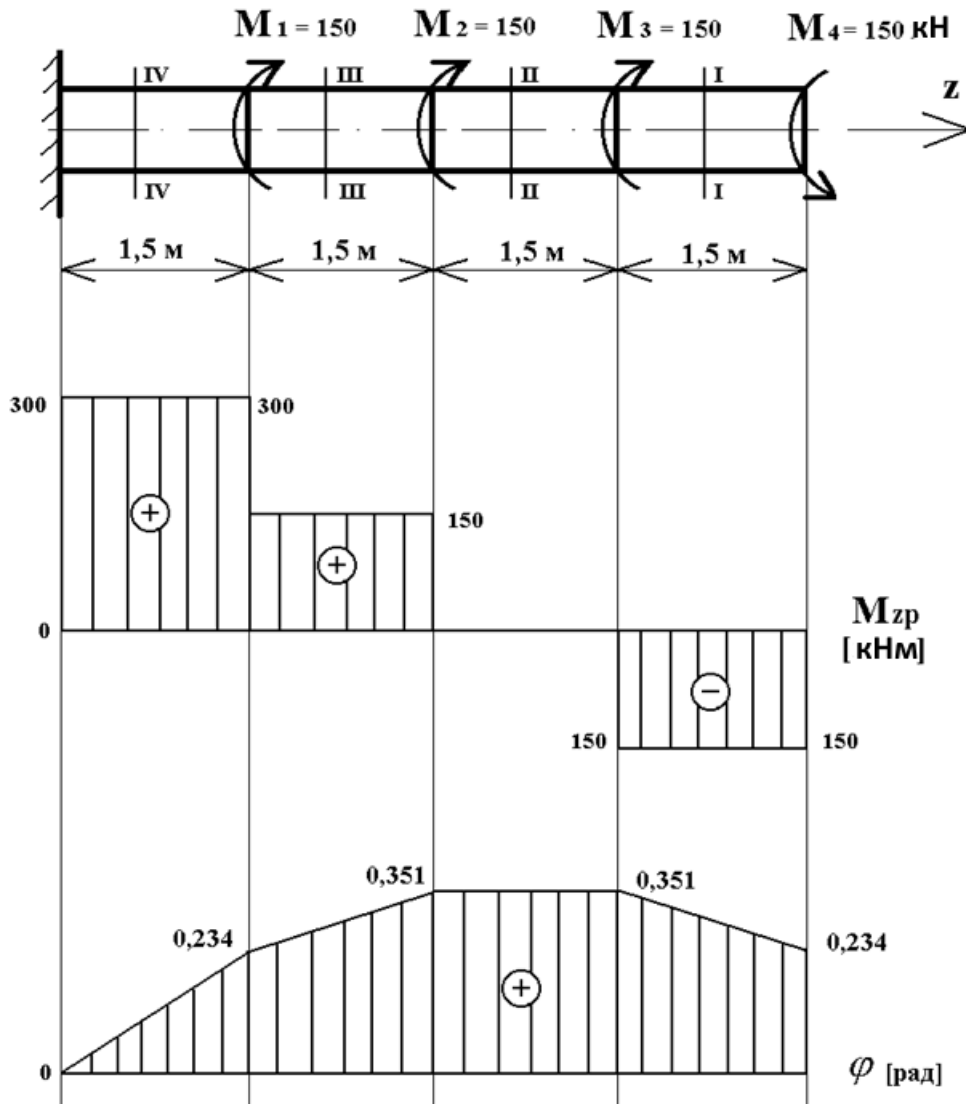


Рис.5.24. Схема стального валу з побудовою епюр

1. При заданому значенні $[\tau]$ визначаємо діаметр валу:

$$W_{кр} = \frac{M_{кр}}{[\tau]} = \frac{300 \cdot 10^3}{550 \cdot 10^6} = 0,5454 \cdot 10^3 \text{ м}^3 = 545,5 \text{ см}^3$$

$$W_{кр} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,1 \cdot d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{545,4}{0,1}} = \sqrt[3]{5454} = 17,6 \text{ см}$$

Приймаємо діаметр валу рівний 180 мм.

З похибки : $\Delta = \frac{17,6-18}{17,6} \cdot 100\% = 2,23\%$, допускається до 5%.

Тобто необхідно прийняти вал більшого діаметру із ряду: $\varnothing=180\text{мм}$.

2. Визначаємо кути закручування і будуємо епюру (рис. 5.24):

$$\varphi_1 = \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{-150 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = -0,281 \text{ рад}; \quad \varphi_2 = 0;$$

$$\varphi_3 = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = 0,281 \text{ рад};$$

$$\varphi_4 = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1 \cdot (0,18)^4} = 0,563 \text{ рад}$$

Загальний кут закручування складає:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0,281 + 0 + 0,281 + 0,563 = 0,563 \text{ рад.}$$

Будуємо епюру кутів закручення відносно затиснення валу.

3. Визначаємо найбільший відносний кут закручення, який знаходиться на 5 ділянці :

$$\theta = \frac{\varphi_4}{a} = \frac{0,563}{1,5} = 0,375 \text{ рад/м}$$

Для ознайомлення з практичною роботою з теми «Кручення» необхідно перейти на ресурс MOODLE, скориставшись посиланням або QR-кодом.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36225>



Мультимедійна презентація з аудіо супроводом до практичного завдання «Кручення»

5.4. Завдання для самостійного виконання

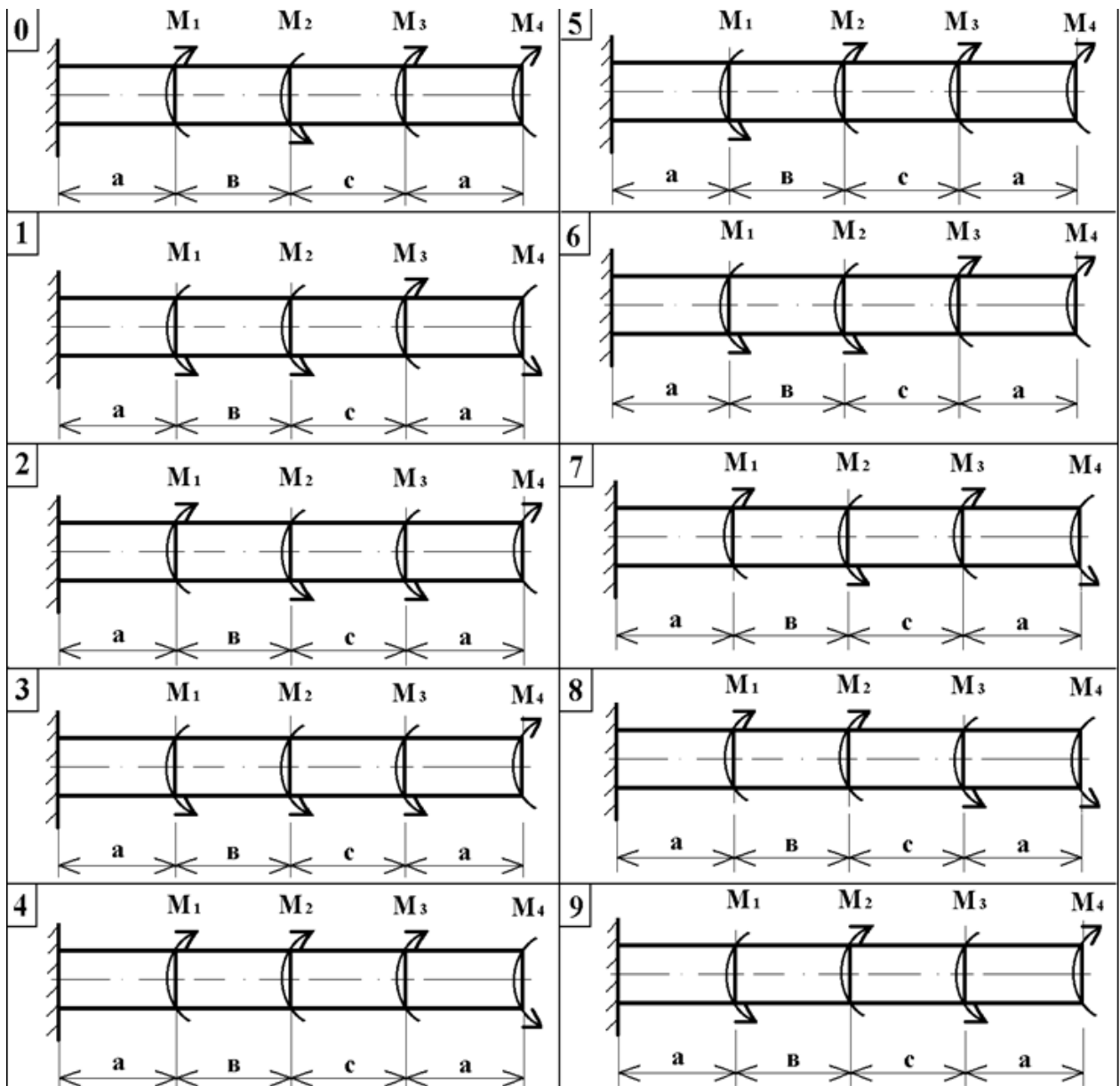
На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні $[\tau]$ визначити діаметр вала із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Таблиця 5.1

Завдання для самостійного виконання

№	а, м	в, м	с, м	M_1 , кНм	M_2 , кНм	M_3 , кНм	M_4 , кНм	$[\tau]$, МПа
1	1,1	1,1	1,1	110	110	110	110	35
2	1,2	1,2	1,2	120	120	120	120	40
3	1,3	1,3	1,3	130	130	130	130	45
4	1,4	1,4	1,4	140	140	140	140	50
5	1,5	1,5	1,5	150	150	150	150	55
6	1,6	1,6	1,6	160	160	160	160	60
7	1,7	1,7	1,7	170	170	170	170	65
8	1,8	1,8	1,8	180	180	180	180	70
9	1,9	1,9	1,9	190	190	190	190	75
0	2,0	2,0	2,0	200	200	200	200	80



5.5. Лабораторна робота №3

Тема: Випробування сталевого круглого зразка на кручення

Мета роботи:

- 1) перевірка закону Гука при крученні;
- 2) визначення модуля пружності;
- 3) визначення умовного рівня міцності при крученні сталевого зразка.

Загальні відомості

Кут закручення стрижнів круглого поперечного перерізу в межах пружних деформацій пов'язаний з крутним моментом, лінійною залежністю відповідно до закону Гука:

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_p}$$

де M_k – величина крутного моменту;

l – відстань між перерізами, на базі якого вимірюється взаємний кут закручення;

I_p – полярний момент інерції поперечного перерізу;

G – модуль поперечної пружності матеріалу зразка.

Приймаємо в процесі експерименту величину крутного моменту M_k і встановлені значення відповідних кутів закручування φ_k , при відомих значеннях базової довжини l і полярного моменту інерції поперечного перерізу I_p дозволяють визначити величину *модуля поперечної пружності матеріалу*:

$$G = \frac{\Delta M_k \cdot l}{\Delta \varphi_{\text{ср}} \cdot I_p},$$

де ΔM_k – приріст крутного моменту, на один ступінь навантаження;

$\Delta \varphi_{\text{ср}}$ – середньоарифметичне значення кута закручування на один ступінь навантаження.

Умовна межа міцності круглого стрижня при крученні визначається за формулою:

$$\tau_{\text{пч}} = \frac{M_{\text{кр зр}}}{W_p},$$

де $M_{\text{кр зр}}$ – крутний момент, при якому відбудеться руйнування зразка;

W_p – полярний момент опору поперечного перерізу зразка.

Границя міцності при крученні круглого стержня, визначена по

формулі, буде умовною, так як дана формула припускає дію закону Гука, проте при руйнуванні зразка дія закону Гука спостерігатися вже не буде.

Випробувальна машина КМ- 50-1

Випробувальна машина КМ- 50-1 (рис. 5.25) складається з наступних основних вузлів:

1. Корпусу, що складається з нижньої частини 1, верхньої 2 і зв'язуючих колон 3. У нижній частині корпусу машини розташовані механічний і ручний привід для навантаження зразка. Ручний привід приводиться в роботу рукояткою 8, а механічний – кнопковим пристроєм 9.

2. Захватів 5 і 6, що служать для закріплення зразка 16. Нижній захват 5 рухливий, положення якого регулюється маховиком 7, що обертає навантажувальний гвинт 4. Верхній захват 6 нерухомий.

3. Вимірювального пристрою, що складається з шкали 10, регульовального гвинта 13 і стрілок 11 і 12.

4. Записуючого пристрою 14, що дозволяє записати діаграму кручення.

5. Лімба 15 для вимірювання кутів закручення перерізу зразка.

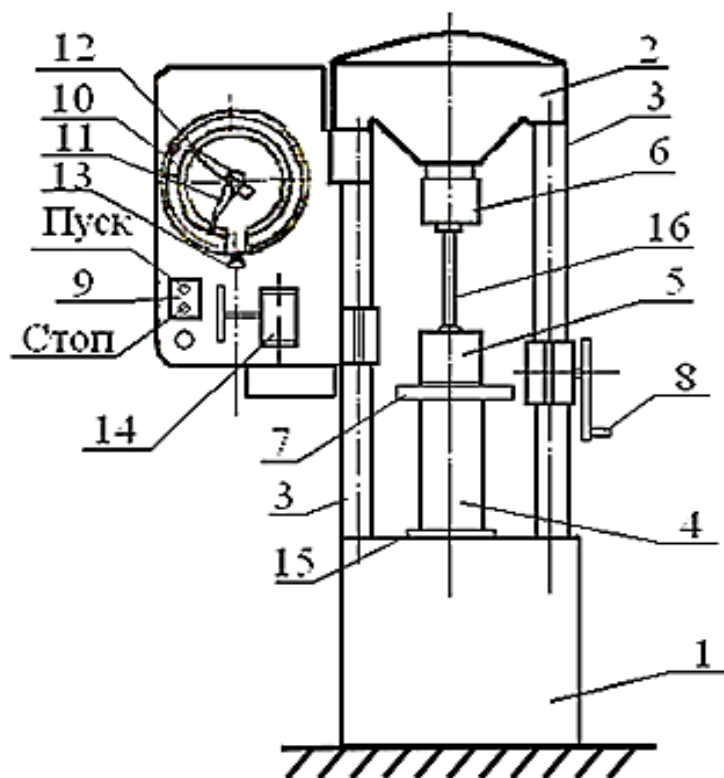


Рис.5.25. Випробувальна машина

Порядок виконання роботи

1. Зразок, який піддається випробуванню, являє собою стрижень круглого поперечного перерізу, на кінцях якого є ділянки прямокутного поперечного перерізу. На цих ділянках проводиться закріплення зразка в захватах випробувальної машини з метою виключення прослизання в процесі навантаження. Необхідно заміряти діаметр зразка d штангенциркулем з точністю до 0,1 мм; замір слід провести в двох взаємно перпендикулярних напрямках і в розрахунок прийняти середнє арифметичне значення.

2. Для визначення взаємного кута повороту двох перетинів застосовується індикаторний пристрій, наведений на рис.5.26.

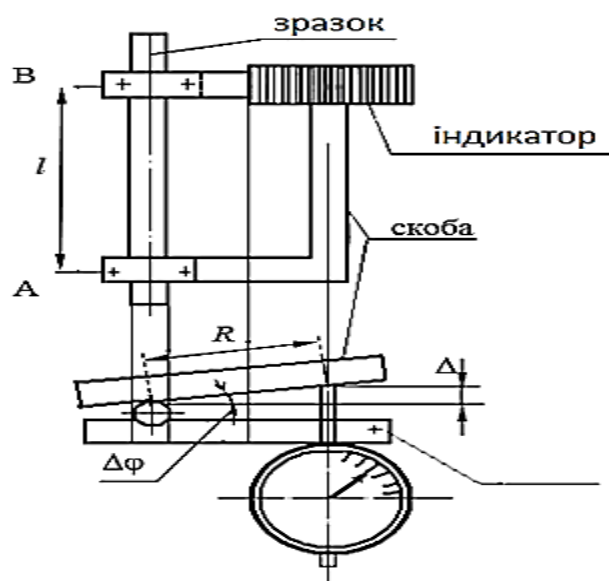


Рис.5.26. Експериментальна установка

У перерізі «А» на зразку закріплюється скоба, що служить упором для ніжки індикатора. У перерізі «В» на зразку закріплюється важіль, на кінці якого закріплений індикатор. Взаємний кут повороту перерізу «А» щодо перерізу «В» визначається відношенням:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta}{R} = \frac{\Delta n \cdot K}{R},$$

де Δ_n – приріст показань індикатора в поділках;
 R – плече опорного важеля, тобто відстань від осі зразка до упору ніжки індикатора в мм; K – ціна поділки індикатора в мм. Відстань між перетинами «А» і «В» називається базою виміру деформації.

3. Закріпити на зразку індикаторний пристрій.
4. Вставити зразок в захвати 5 і 6 машини.
5. Регульовальним гвинтом 13 уточнити налаштування шкал 10.

6. Налаштувати записуючий пристрій 14 на запис діаграми.

7. Випробування зразка буде здійснюватися за шкалою «10», тому слід перевірити відповідність вантажу на маятнику для цієї шкали. (Маятник і змінні вантажі на рисунку не показані, вони знаходяться з невидимої сторони).

8. Для перевірки закону Гука зразок необхідно завантажити початковим крутним моментом величиною $M_{k0} = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, щоб виключити похибку через можливі люфти в захватах; потім збільшувати момент рівними ступенями $\Delta M_k = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ і вимірювати при цьому відповідні кути закручування, записуючи показання індикатора при початковому моменті затиску і після навантаження зразка кожного наступного ступеню. Результати випробувань заносяться в таблицю. Навантаження зразка при його випробуванні в межах пружності (при перевірці закону Гука) здійснюється за допомогою ручного приводу 8. Навантажувати зразок слід до крутного моменту не більше $35 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Цьому моменту будуть відповідати максимальні дотичні напруження близько 100 МПа . Результати навантаження можна зобразити на діаграмі, зображеній на рисунку. Експериментальні точки 1, 2, 3 і т.д. на діаграмі навантаження будуть розташовані приблизно на одній прямій, оскільки експериментально певне збільшення кутів закручування $\Delta\varphi_i$ можуть незначно відрізнятися один від одного. Пряма АВ, що характеризує лінійну залежність між крутним моментом і кутом закручення, буде підтверджувати закон Гука.

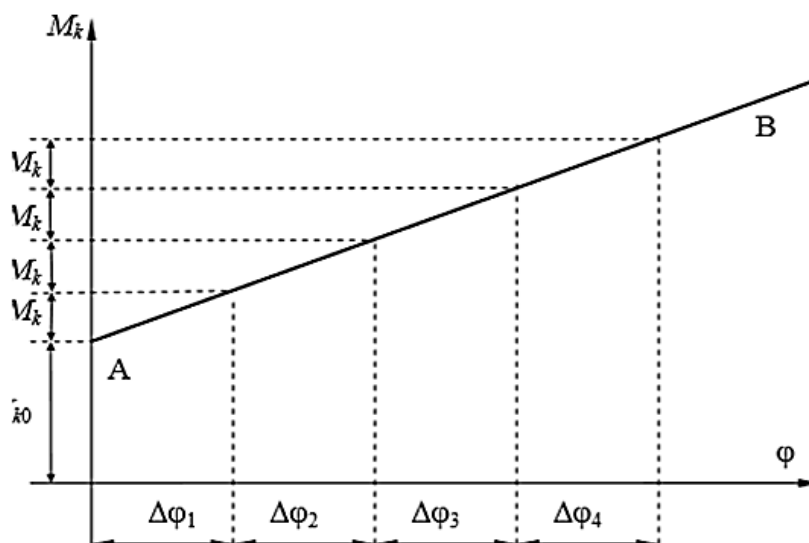


Рис.5.27 Діаграма кручення

9. Після того, як переконалися у відповідності результатів випробувань закону Гука, знімаємо з зразка індикаторний пристрій.

10. Налаштовуємо контрольну стрілку 12 силовимірювача (зачіплюємо з робочою стрілкою 11).

11. Налаштовуємо пристрій 15 для виміру пластичного кута закручування.

12. Включаємо мотор «пуск» на руйнування зразка.

13. Після руйнування зразка вимикаємо мотор натисканням кнопки «стоп» і записуємо крутний момент, при якому зразок зруйнувався – $M_{кр зр}$. Цей же момент може бути отриманий по діаграмі.

14. Оформити звіт по запропонованій формі.

Звіт

Тема: Випробування сталевого круглого зразка на кручення

Мета: _____

Випробувальна машина: КМ-50-1.

Вимірювальні прилади:

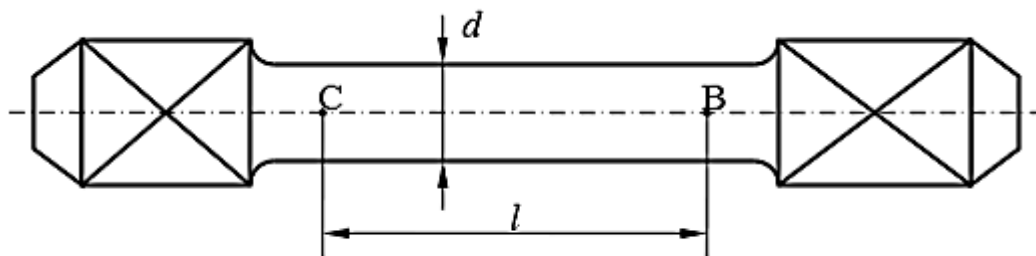
1. Штангенциркуль,
2. Індикаторний пристрій.

База вимірювання $l = 100$ мм.

Винесення важеля, що слугує упором ніжки індикатора $R = 68$ мм.

Ціна поділки індикатора $K = \dots\dots\dots$

Зразок і його характеристики



$$d = \dots\dots\dots \text{мм} = \dots\dots\dots \text{м}$$

$$W_p \approx 0,2 \cdot d^3 = \dots\dots\dots \text{см}^3 = \dots\dots\dots \text{м}^3$$

$$l = 100 \text{ мм} = 10 \text{ см}$$

$$I_p \approx 0,1 d^4 = \dots\dots\dots \text{см}^4 = \dots\dots\dots \text{м}^4$$

Таблиця спостережень

<i>Крутний момент</i> M_k (Н·м)	<i>Відліки на індикаторі</i> n поділок	<i>Приріст показань</i> Δn поділок	<i>Приріст кута закручування</i> $\Delta\varphi = \frac{\Delta n \cdot K}{R}$
$M_{k0} =$	$n_0 =$		
$M_{k1} =$	$n_1 =$	$\Delta n_1 =$	$\Delta\varphi_1 =$
$M_{k2} =$	$n_2 =$	$\Delta n_2 =$	$\Delta\varphi_2 =$
$M_{k3} =$	$n_3 =$	$\Delta n_3 =$	$\Delta\varphi_3 =$
$M_{k4} =$	$n_4 =$	$\Delta n_4 =$	$\Delta\varphi_4 =$
$M_{k5} =$	$n_5 =$	$\Delta n_5 =$	$\Delta\varphi_5 =$
			$\Delta\varphi_{cp} =$

Крутний момент на один ступень навантаження $\Delta M_k = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}$

Діаграма кручення



Величина модуля пружності при крученні визначається з співвідношення:

$$G = \frac{\Delta M_k \cdot l}{\Delta\varphi_{cp} \cdot I_p} = \dots = \dots \text{ МПа}$$

Крутний момент, при якому зруйнувався зразок

$$M_{k\text{разр}} = \dots \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Умовна межа міцності при крученні:

$$\tau_{пч} = \frac{M_{k\text{разр}}}{W_p} = \dots = \dots \text{ МПа}$$

Пройти онлайн лабораторну роботу з мультимедійним супроводом можна за посиланням.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38097>



*Онлайн лабораторна робота з мультимедійним супроводом
«Випробування сталевого круглого зразка на кручення»*

5.6. Завдання для самоконтроль

Для виконання самоконтролю необхідно проглянути інтерактивну лекцію з аудіовізуальним супроводом та відповісти на питання.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/lesson/view.php?id=36224>



*Інтерактивна лекція з аудіовізуальним супроводом
до розділу «Кручення»*

5.7. Тестові завдання

Також представлений електронний тестовий навчальний тренажер до розділу «Кручення».

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=38100>



Електронний тестовий навчальний тренажер до розділу «Кручення».

Розділ 6. Згин

6.1. Плоский згин

6.1.1. Основні типи опорних в'язей. Визначення опорних реакцій

Стрижні, які працюють в умовах згину називають балками.

Якщо на бокову поверхню балки нанести прямокутник, то в результаті дії зовнішнього згинального моменту поперечні риси залишаються прямими, але при цьому повернуться на деякий кут, а поздовжні викривляться, змінивши свою довжину. Тобто верхні волокна скорочуються, а нижні подовжуються (рис. 6.1).

На практиці відомі такі основні випадки згину:

а) чистий згин – коли в поперечному перерізі виникає тільки згинальний момент M_x (рис. 6.1 а).

б) поперечний згин – коли в поперечному перерізі виникає згинальний момент M_x і поперечна сила Q_y (рис. 6.1 б).

в) плоский згин – це коли поперечний переріз балки має вертикальну вісь симетрії і силова площина збігається з цією віссю. Деформована вісь балки також лежить у цій площині (рис. 6.1 в).

г) косий згин – коли силова площина не збігається з головною віссю (рис. 6.1 г).

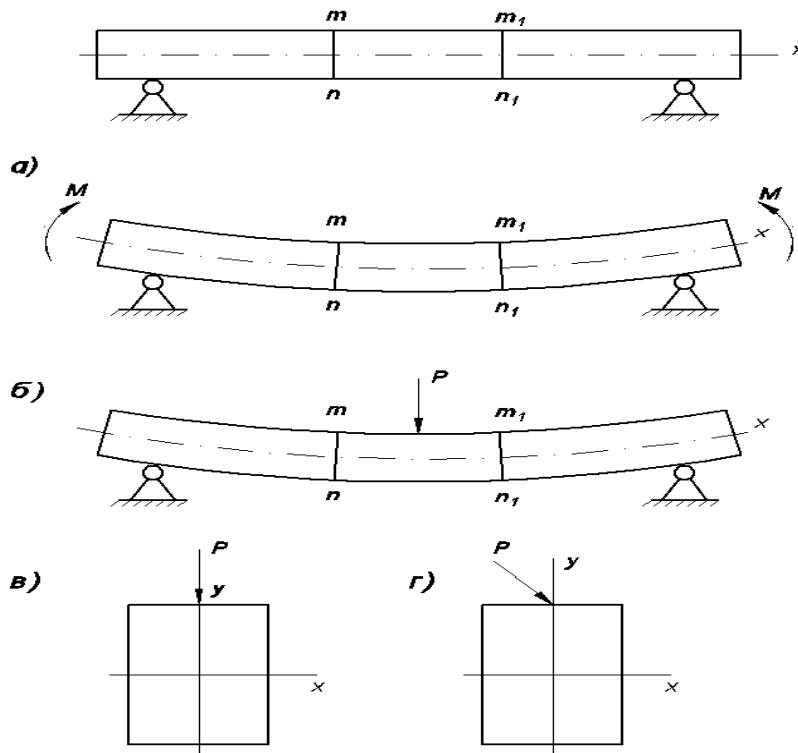


Рис. 6.1. Випадки згину.

Для того, щоб балка могла сприймати зовнішнє навантаження і передавати його на основу, вона повинна бути закріплена за допомогою опорних в'язей (опор). Існують три види опор (рис. 6.2):

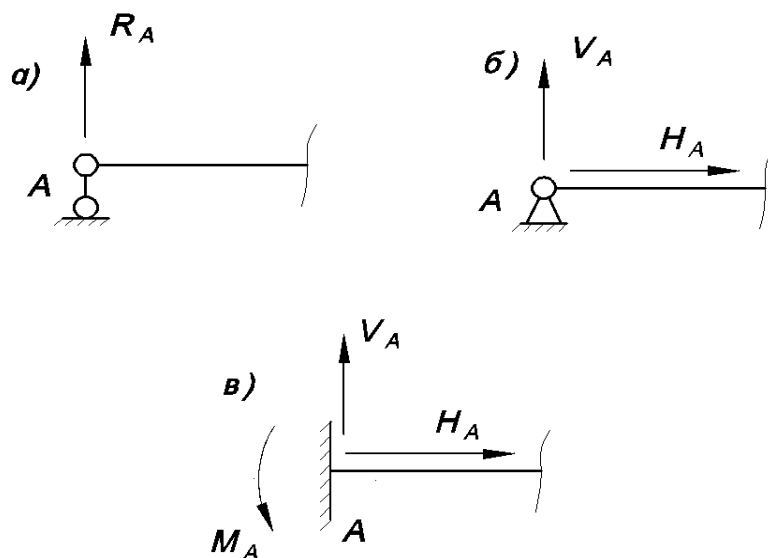


Рис. 6.2. Види опор:

- а) шарнірно рухома опора; б) шарнірно нерухома опора;
- г) жорстке затиснення (защемлення).

Відповідно до умов закріплення, виділяють такі основні види балок (рис. 6.3):

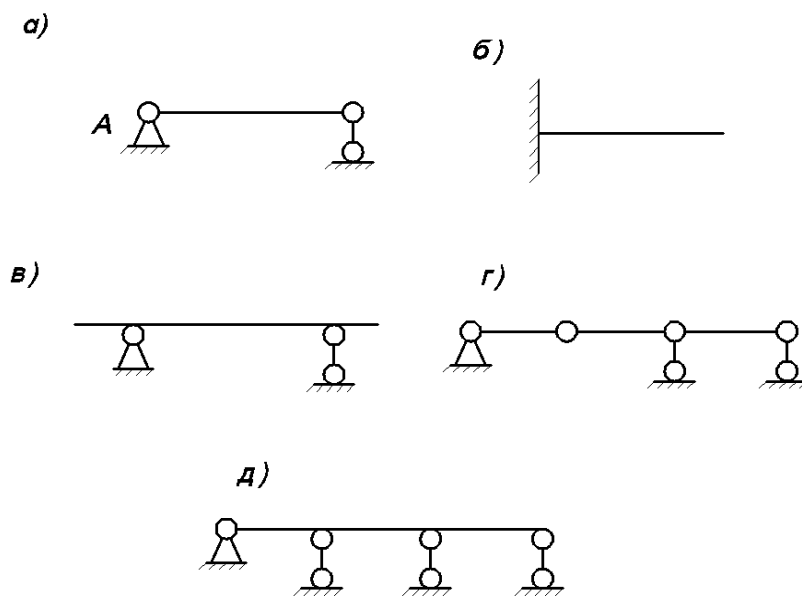


Рис. 6.3. Види балок:

- а) проста однопрогінна балка; б) консольна балка;
- в) двохопорна балка з консолями; г) розрізна багатопрогінна балка;
- д) нерозрізна багатопрогінна балка.

6.1.2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між M_x , Q_y та q . Правила спрощеної побудови епюр M_x та Q_y .

Для визначення внутрішніх зусиль при згині використовують **метод перерізів**, згідно з яким балку розтинають на дві частини і «працюють» з однією із них, а дію відкинutoї частини замінюють внутрішніми зусиллями, які при згині зводять до поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x (рис. 6.4).

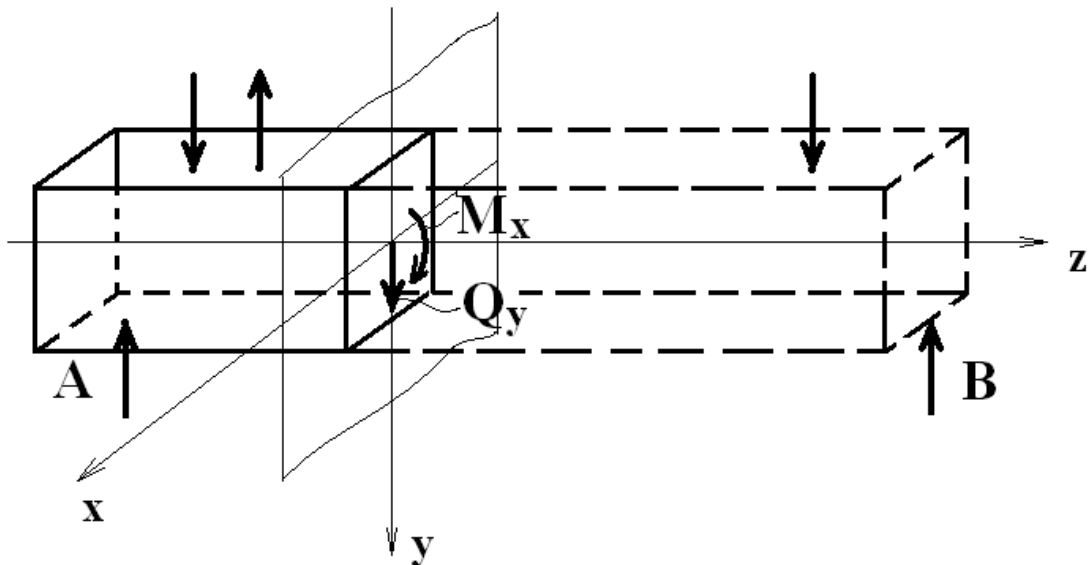


Рис. 6.4. Метод перерізів у графічному відображенні при визначенні Q_y і M_x .

Величина поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x обчислюються за такими робочими правилами:

– поперечна сила Q_y дорівнює сумі проєкцій всіх зовнішніх сил на площину перерізу і обирається із знаком «+», якщо вона повертає відсічену частину відносно перерізу за годинниковою стрілкою, і навпаки;

– згинальний момент M_x дорівнює сумі моментів зовнішніх зусиль відносно центру ваги перерізу і обирається із знаком «+», якщо розтягуються нижні волокна, і навпаки.

Розглянемо ділянку балки довжиною dz і завантажимо її зовнішнім розподіленим навантаженням інтенсивності q (Н/м). Дію розподіленого навантаження на ділянці довжиною l можна замінити зосередженою силою $Q=q \cdot l$. Знайдемо внутрішні зусилля (рис. 6.5).

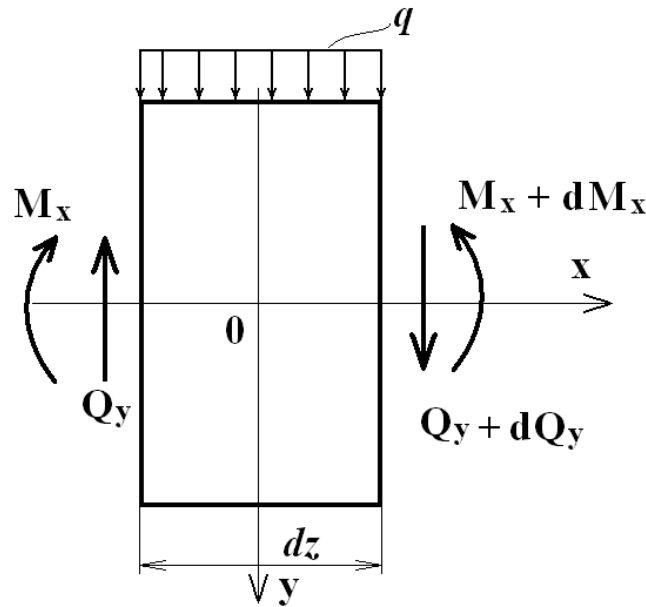


Рис. 6.5. Завантаження ділянки балки із зображенням внутрішніх зусиль.

Із умов рівноваги маємо:

$$1. \quad \sum y = 0.$$

$$q \cdot dz - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{dQ_y}{dz} = -q. \quad (6.1)$$

$$2. \quad \sum M_0 = 0.$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot \frac{1}{2} dz + (Q_y + dQ_y) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = 0;$$

Величина $dQ_y \cdot \frac{1}{2} \cdot dz$ прямує до нуля, тому нею можна нехтувати.

Кінцево отримуємо:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \quad (6.2)$$

Проаналізувавши вирази (6.1) та (6.2), можна отримати третю залежність:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q. \quad (6.3)$$

Для того щоб розв'язувати задачі міцності та жорсткості при згині необхідно знати M_x^{\max} та Q_y^{\max} , тобто виникає необхідність побудувати епюри M_x та Q_y , що будуються за допомогою правил

спрощення побудови, які впливають із диференційної залежності між M_x , Q_y і Q (6.2; 6.3).

Правила спрощення побудови епюр M_x та Q_y .

1. На ділянці балки, вільної від розподіленого навантаження ($q = 0$), поперечна сила постійна ($Q_y = const$) згинальний момент M_x змінюється за лінійним законом.

2. На ділянці балки, що завантажена рівномірно – розподіленим навантаженням ($q = const$):

а) Q_y змінюється за лінійним законом;

б) M_x змінюється за законом квадратної параболи.

3. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), поперечна сила Q_y зменшується із зростанням Z на величину рівнодіючої цієї ділянки.

4. На ділянці балки, де поперечна сила більша за нуль ($Q_y > 0$) із збільшенням Z , епюра M_x зростає на величину площі епюри Q_y цієї ділянки.

5. На ділянці балки, де поперечна сила Q_y змінюється за лінійним законом та в деякій точці дорівнює нулю, на епюрі згинального моменту M_x у тій же точці будемо мати екстремальне значення згинального моменту, причому максимальне значення згинального моменту M_x буде тоді, коли Q_y змінюється з «+» на «-».

6. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), епюра M_x має випуклість у бік додатних координат.

7. У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі поперечних сил Q_y буде стрибок на величину цієї сили.

8. У точках прикладання зовнішніх зосереджених моментів згинання на епюрі згинальних моментів M_x буде стрибок на величину цього зовнішнього моменту.

Розв'язання задач з побудови епюр Q_y та M_x поділяють на 4 етапи:

1. Визначення опорних реакцій. Вважаючи балку абсолютно жорстким тілом, замінюючи опори відповідними реакціями і складаючи рівняння рівноваги, визначаємо їх. Обов'язково здійснювати контроль правильності знаходження опорних реакцій.

2. Розбивають балку на ділянки. Границями ділянок є: початок і кінець балки; точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження q та його закінчення.

3. Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру.

4. Визначаємо величини згинальних моментів M_x в характерних перерізах і будуємо його епюру.

6.1.3. Приклади побудови епюр M_x і Q_y

Приклади для правил спрощення побудови епюр (рис. 6.6 – 6.10):

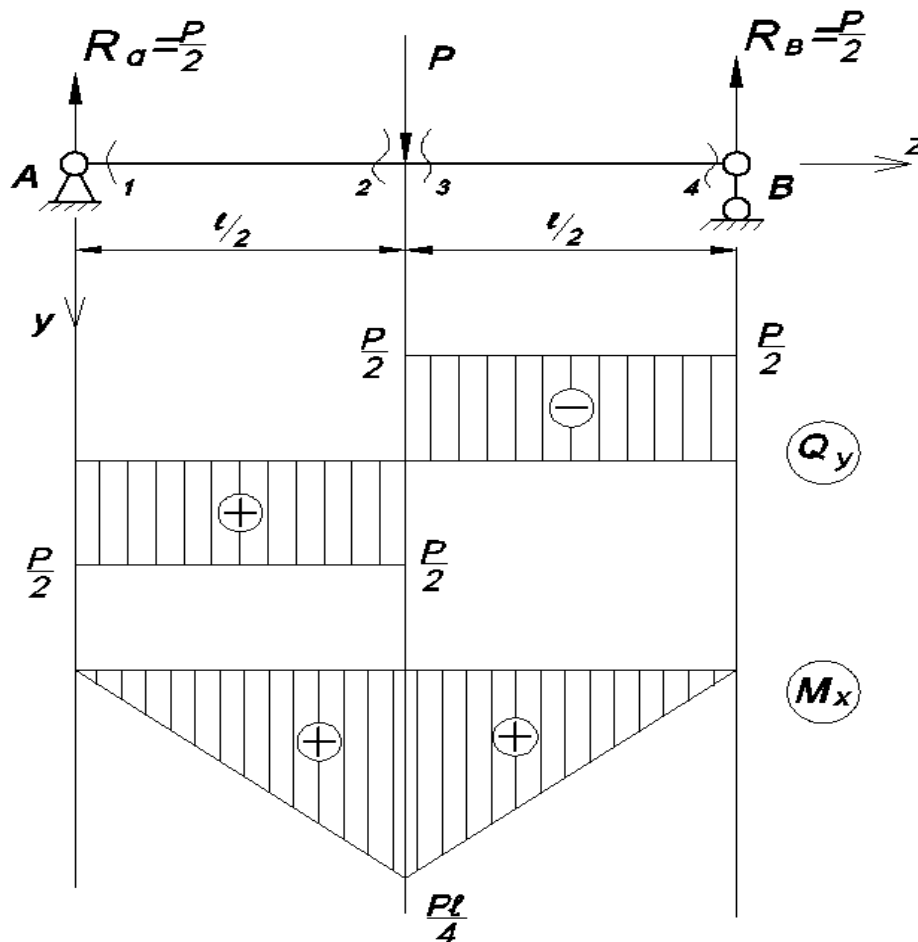


Рис. 6.6. Побудова епюр Q_y , M_x .

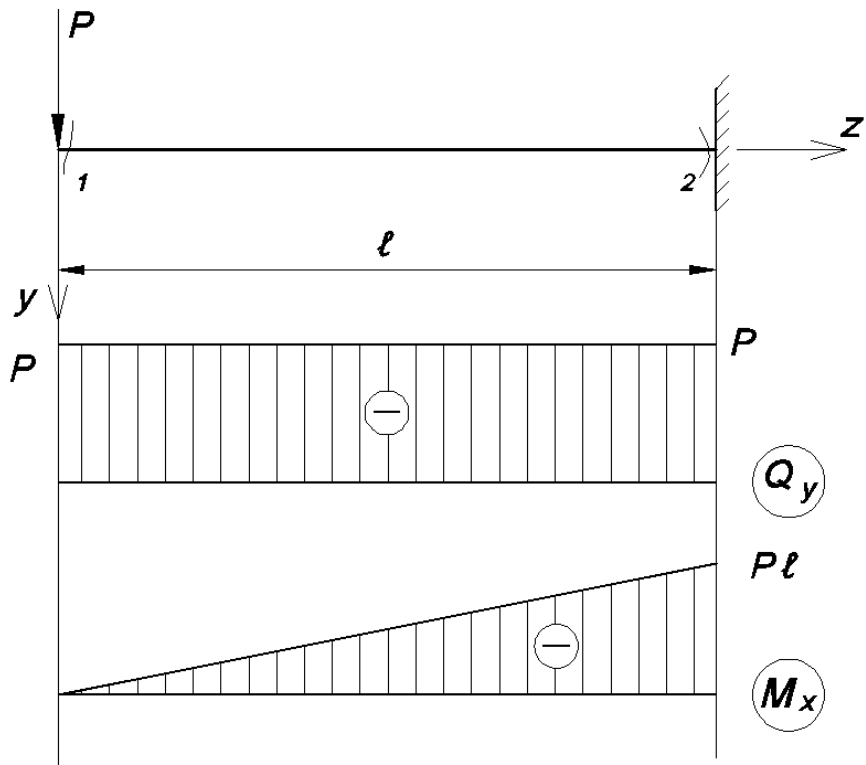


Рис. 6.7. Побудова епюр Q_y і M_x .

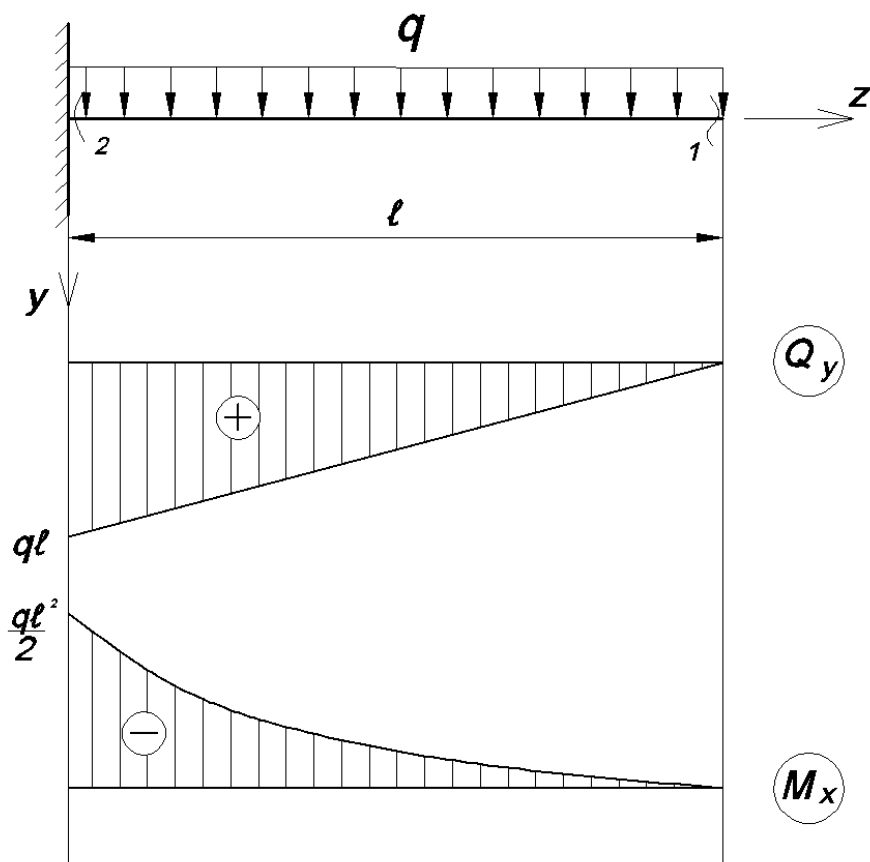


Рис. 6.8. Побудова епюр Q_y , M_x .

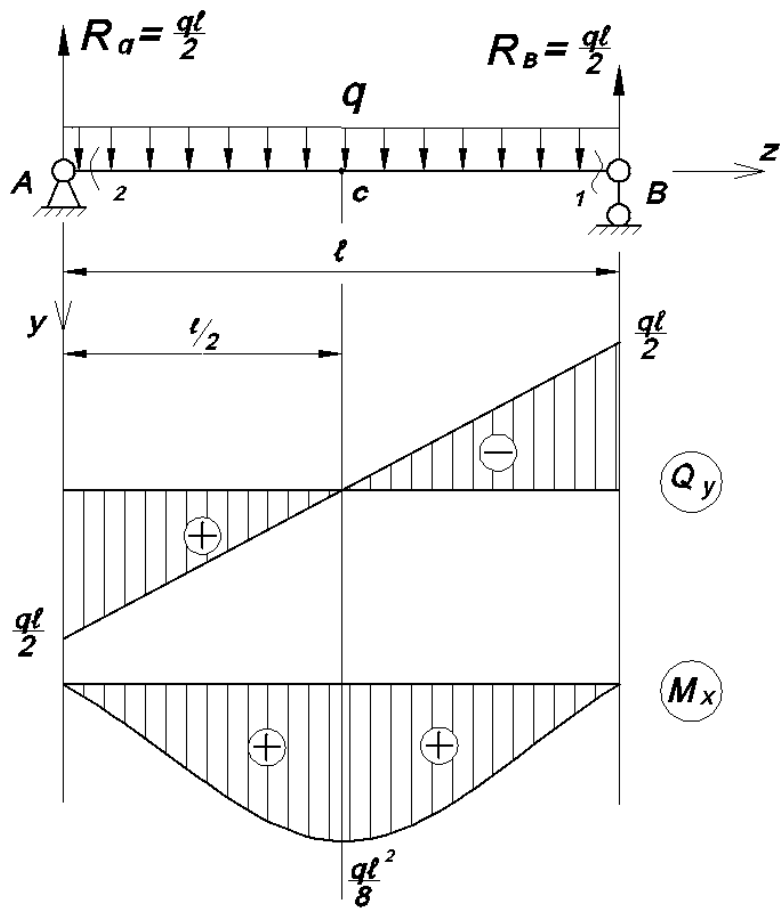


Рис. 6.9. Побудова епюр Q_y , M_x .

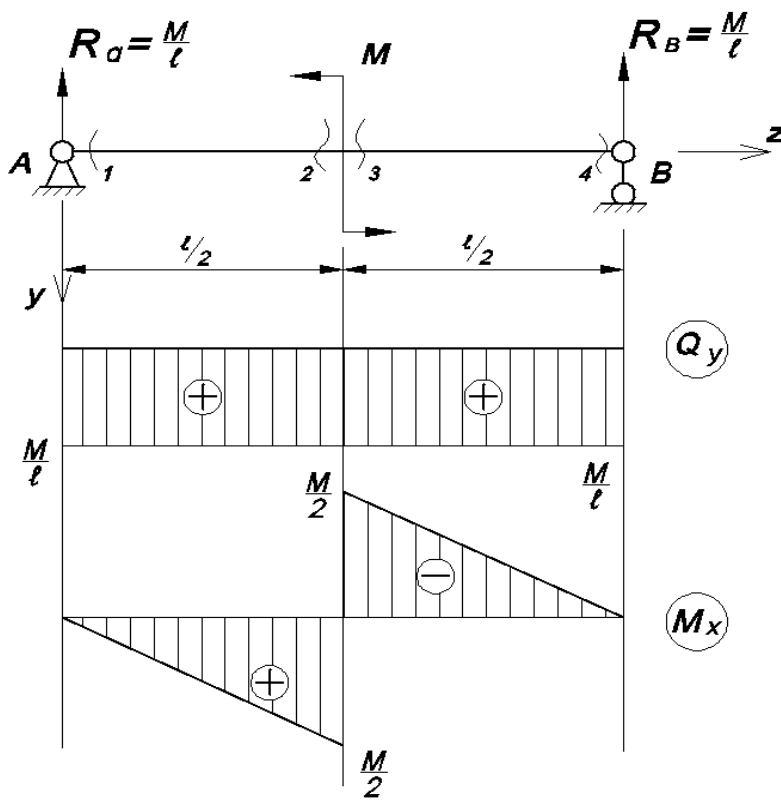


Рис. 6.10. Побудова епюр Q_y , M_x .

Розглянемо більш складний приклад розв'язання задачі розрахунку балки на згин.

Побудувати епюри M_x та Q_y для заданої балки (рис. 6.11).

Розв'язання задачі поділяємо на чотири етапи:

1) Визначаємо опорні реакції. Вважаємо, що балка – абсолютно тверде тіло, складаємо для неї рівняння рівноваги, розв'язуючи які, знаходимо опорні реакції (рис. 6.11).

$$\sum M_B = 0;$$

$$10 \cdot P_1 + q \cdot 4 \cdot 8 - R_A \cdot 8 + P_2 \cdot 3 - M = 0;$$

$$R_A = 177,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$2 \cdot P_1 - 5 \cdot P_2 + 8 \cdot R_B - M = 0;$$

$$R_B = 102,5 \text{ кН.}$$

Перевірка (спроєктуємо всі сили на вісь Y):

$$\sum Y = 0;$$

$$P_1 + q \cdot 4 - R_A + P_2 - R_B = 0;$$

$$40 + 80 - 177,5 + 160 - 102,5 = 0.$$

2) Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження q та його закінчення.

Умовно балку поділено хвилястими перерізами, які відмічені на схемі (рис. 6.11) цифрами вздовж балки.

3) Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру (рис. 6.11).

$$Q_{y(1)} = -P_1 = -40 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(2)} = -P_1 - 2 \cdot q = -80 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(3)} = -P_1 - 2 \cdot q + R_A = 97,5 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(4)} = Q_{y(5)} = -P_1 - 4 \cdot q + R_A = 57,5 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(6)}^{np} = -R_B + P_2 = 57,5 \text{ кН;}$$

$$Q_{y(7)}^{np} = Q_{y(8)}^{np} = -R_B = -102,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(9)}^{np} = Q_{y(10)}^{np} = 0.$$

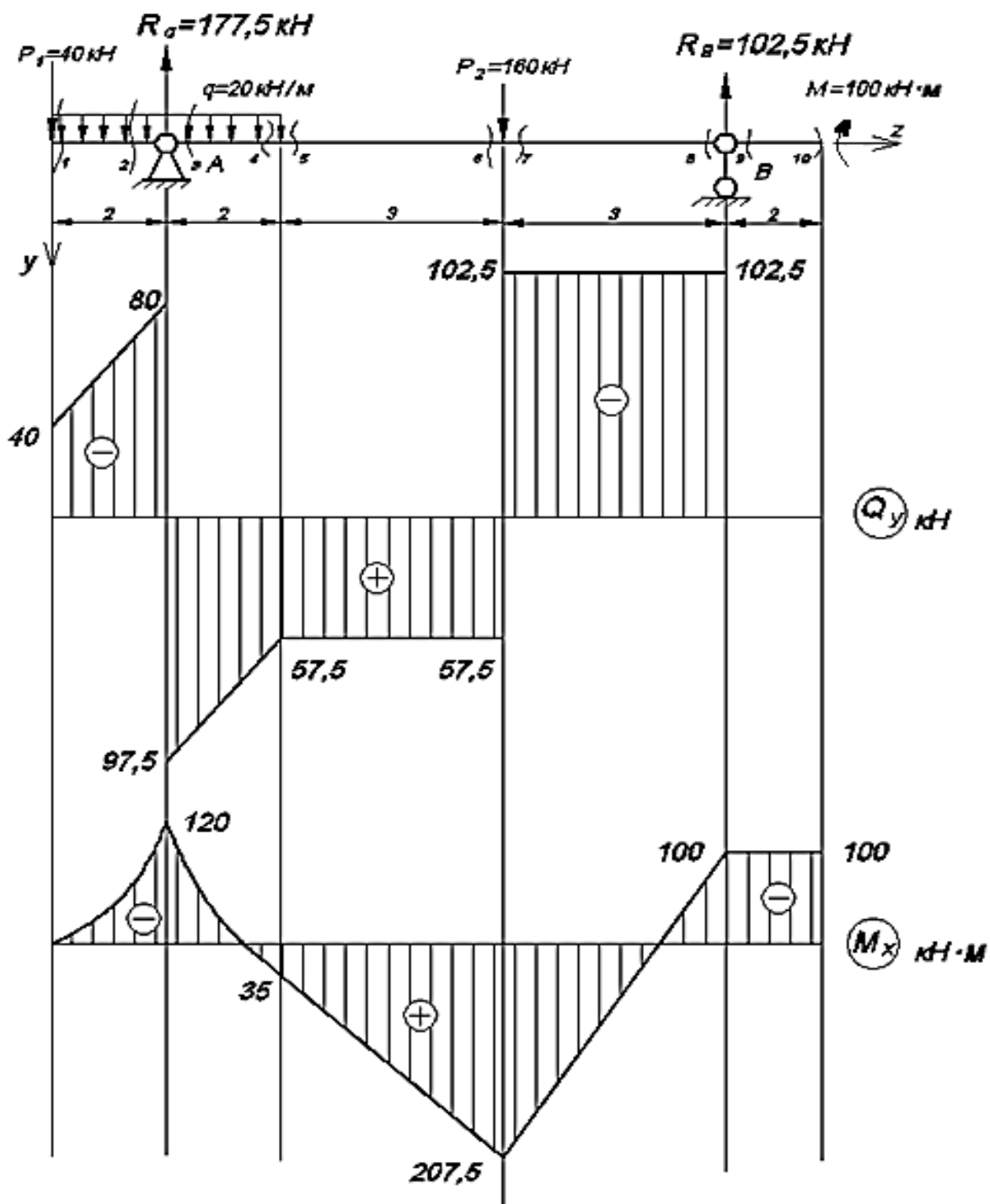


Рис. 6.11. Схема балки до задачі з поетапним розв'язанням її.

4) Визначаємо величини згинальних моментів M_x в характерних перерізах і будуємо епюру (рис. 6.11).

$$M_{x(1)} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x(2)} = M_{x(3)} = -2 \cdot P_1 - 2 \cdot q = -120 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(4)} = M_{x(5)} = -4 \cdot P_1 - 4 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot R_A = 35 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(6)} = M_{x(7)} = -M + 3 \cdot R_B = 207,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(8)} = M_{x(9)} = M_{x(10)} = -M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6.2. Чистий згин

6.2.1. Загальні поняття про чистий згин

У цілому при плоскому згині в поперечному перерізі балки виникають поперечна сила Q_y та згинальний момент M_x . Якщо в поперечному перерізі балки відсутня поперечна сила Q_y , а діє тільки згинальний момент M_x , то балка знаходиться в умовах чистого згину (рис. 6.12).

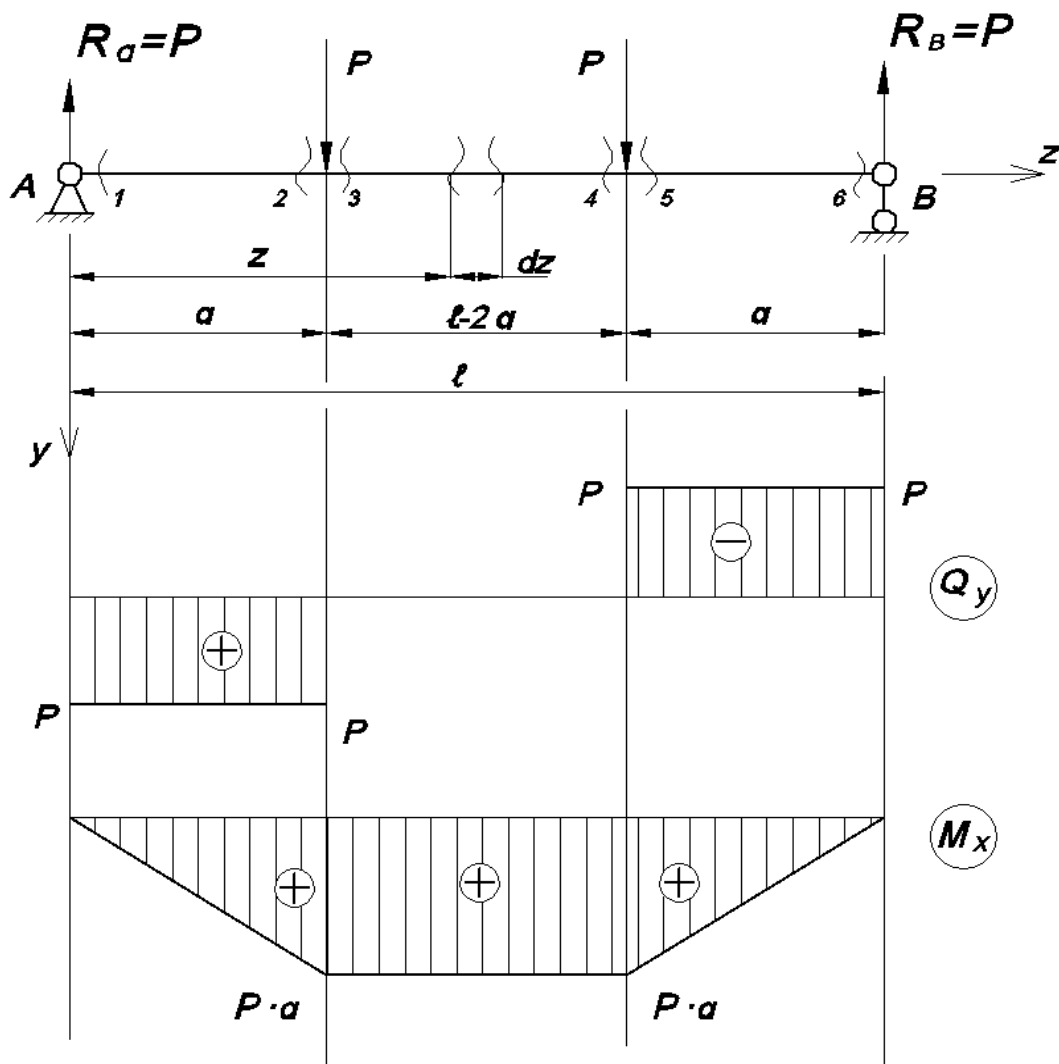


Рис. 6.12. Схема балки.

Середня ділянка балки знаходиться в умовах чистого згини.

6.2.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині

Для спрощення розглянемо балку, яка має вертикальну вісь симетрії. При визначенні характеру (закону) розподілу напружень за поперечним перерізом балки недостатньо рівнянь статички. Розглядають деформований стан балки із нанесеною на її бічну поверхню сіткою із поздовжніх і поперечних ліній (рис. 6.13).

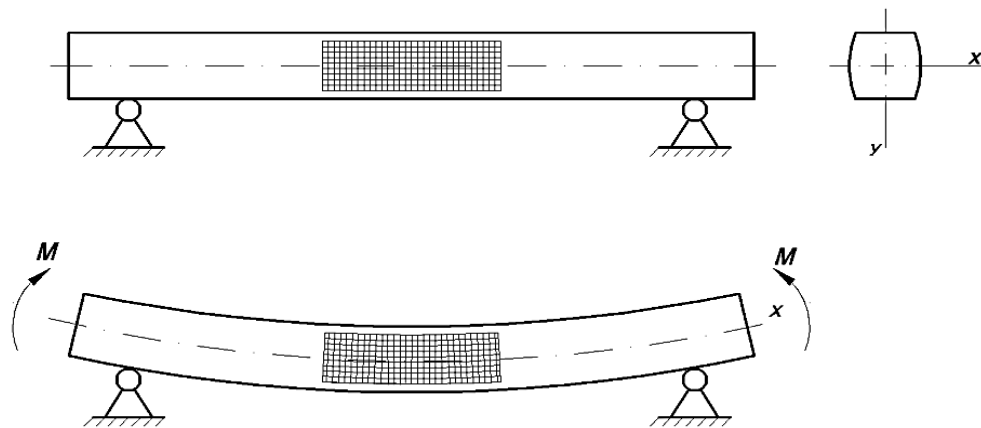


Рис. 6.13. Деформація волокон балки при чистому згині.

При деформації поздовжні риски викривляються і змінюють свою довжину, а поперечні повертаються на деякий кут, залишаючись при цьому прямими. Тобто при чистому згині справедливою є гіпотеза плоских перерізів, яка разом із рівняннями статички дає можливість визначити закон зміни напруження за поперечним перерізом балки. Розглянемо ділянку балки довжиною dz (рис. 6.13), та відтворимо його в збільшеному вигляді (рис. 6.14).

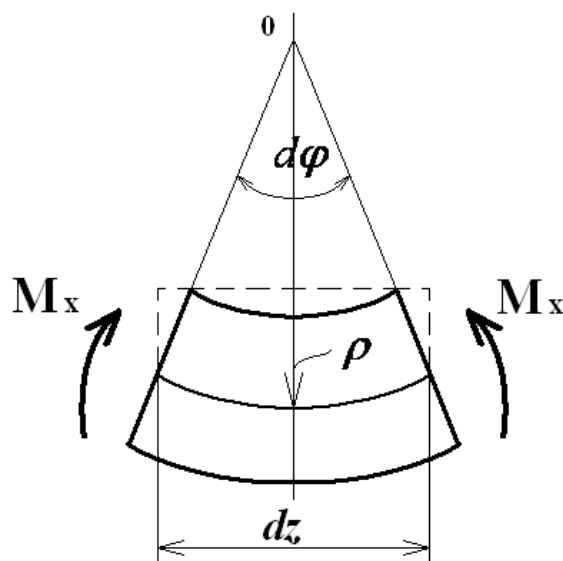


Рис. 6.14. Деформація ділянки балки довжиною dz .

За такої дії на ділянку балки dz зовнішнього навантаження видно, що два суміжних перерізи повертаються на кут $d\varphi$. При цьому верхні волокна скорочуються, а нижні – подовжуються. Деяке волокно залишається недеформованим – нейтральна лінія. А це, в свою чергу, говорить про те, що в поперечному перерізі виникають тільки нормальні напруження σ .

Для простоти розглянемо ділянку балки з прямими поздовжніми волокнами (рис. 6.15). Розглядатимемо деформацію волокна на відстані y від нульової лінії, яка складається з двох відрізків АВ, кожен з яких дорівнює:

$$AB = y \cdot \frac{d\varphi}{2}. \quad (6.4)$$

$$dz = \rho \cdot d\varphi. \quad (6.5)$$

$$\Delta dz = y \cdot d\varphi. \quad (6.6)$$

де: ρ – радіус кривизни.

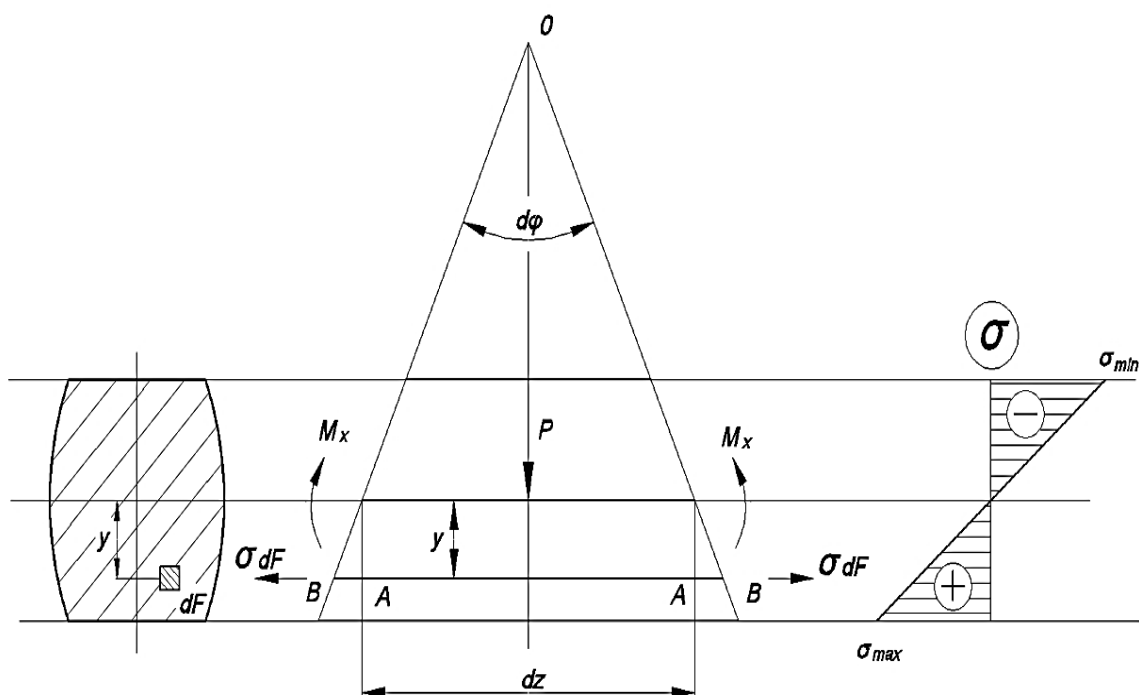


Рис. 6.15. Наближений розгляд деформації волокон.

Відносна деформація дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{1}{\rho} \cdot y. \quad (6.7)$$

Використовуючи закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon : \text{маємо } \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y \quad (6.8)$$

Очевидно, що поздовжня сила при чистому згинанні дорівнює нулю:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF = 0. \quad (6.9)$$

Підставивши вираз (6.8) в (6.9) будемо мати:

$$N_z = \int_F \frac{E}{\rho} y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot dF = 0. \quad (6.10)$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Відповідно:

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0. \quad (6.11)$$

Це означає, що при чистому згині нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу.

Сумарний згинальний момент у поперечному перерізі балки M_x відносно нейтральної вісі визначається:

$$M_x = \int_F (\sigma dF) \cdot y \quad (6.12)$$

Замість σ підставимо його значення із (6.8), й отримаємо:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF \quad (6.13)$$

Враховуючи, що $\int_F y^2 dF = I_x$, маємо:

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}, \quad (6.14)$$

Порівнявши (6.14) з (6.8), отримаємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (6.15)$$

Із виразу (6.15) видно, що змінною є тільки ордината y , а значить нормальні напруження по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. Графічне відображення закону зміни нормальних напружень σ по висоті перерізу називають епюрою нормальних напружень (рис. 6.15). Очевидно, що максимальні напруження виникають у найбільш віддалених волокнах і визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{\underbrace{I_x / y_{\max}}_{W_x}} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (6.16)$$

Формула (6.16) виведена для перерізів, що мають вертикальну вісь симетрії. Доведемо, що вона є справедливою і для будь-яких поперечних перерізів, але при цьому силова площина повинна збігати з однією із головних осей симетрії. Очевидно, що загальний вид епюри σ не залежить від форми поперечного перерізу балки.

Для доведення прирівняємо до нуля згинальний момент M_y :

$$M_y = \int_F \sigma \cdot dF \cdot x = \int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF \cdot x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0. \quad (6.17),$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Значить: $\int_F x \cdot y \cdot dF = I_{xy} = 0$ – відцентровий момент інерції.

Відцентровий момент інерції дорівнює нулю лише тоді коли ці осі будуть головними.

6.2.3. Приклад чистого згину

Для найбільш напруженого поперечного перерізу (рис. 6.11) балки необхідно побудувати епюру σ , прийнявши $v = 15$ см, $h = 24$ см. Максимальний момент $M_{x(7-7)} = 207,5$ кН·м. (рис.6.11).

Для точки 1.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207,5 \cdot (-0,12)}{0,15 \cdot (0,24)^3 / 12} = -144 \text{ МПа}$$

Для точки 2.

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207,5 \cdot (-0,06)}{0,15 \cdot (0,24)^3 / 12} = -72 \text{ МПа}$$

Для точки 3: $\sigma_{(3)} = 0$.

За аналогією для точок 4 і 5 маємо:

$$\sigma_{(4)} = 72 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{(5)} = 144 \text{ МПа.}$$

Переріз 7-7

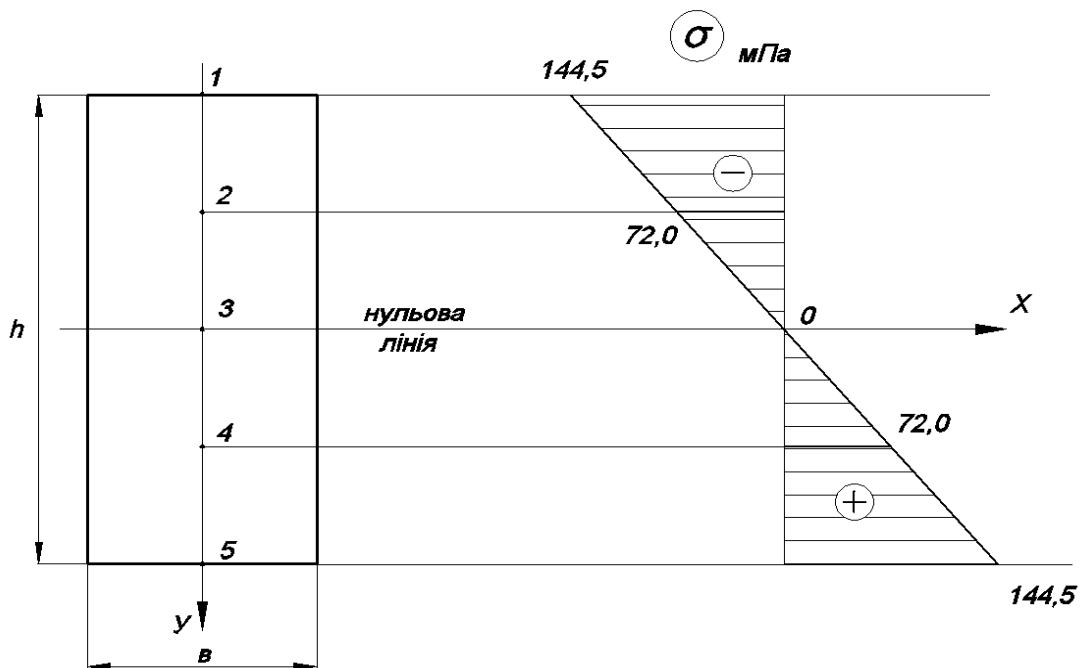


Рис. 6.16. Побудова епюри нормальних напружень при чистому згині.

6.3. Поперечний згин

6.3.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині

На відміну від чистого згину, при поперечному згині в перерізі балки поряд з моментом згинання M_x виникає поперечна сила Q_y (рис. 6.17).

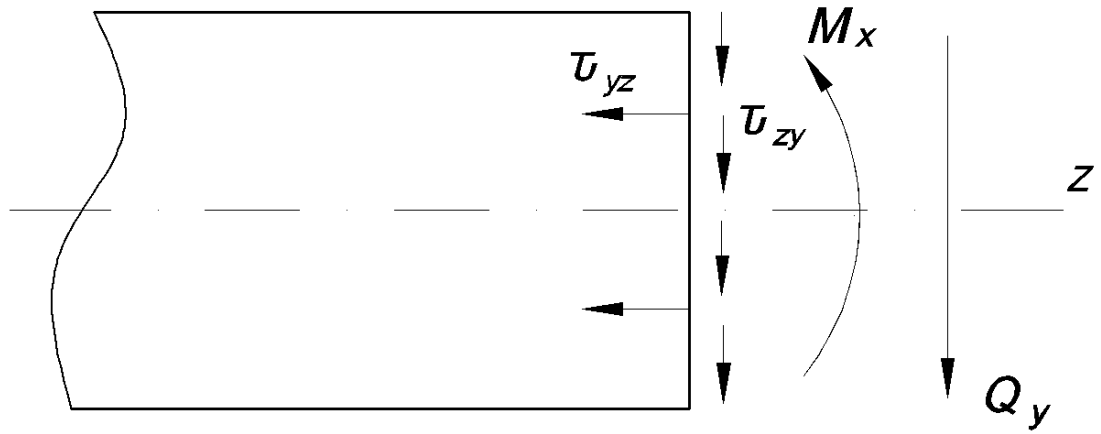


Рис. 6.17. Дотичні напруження при поперечному згині.

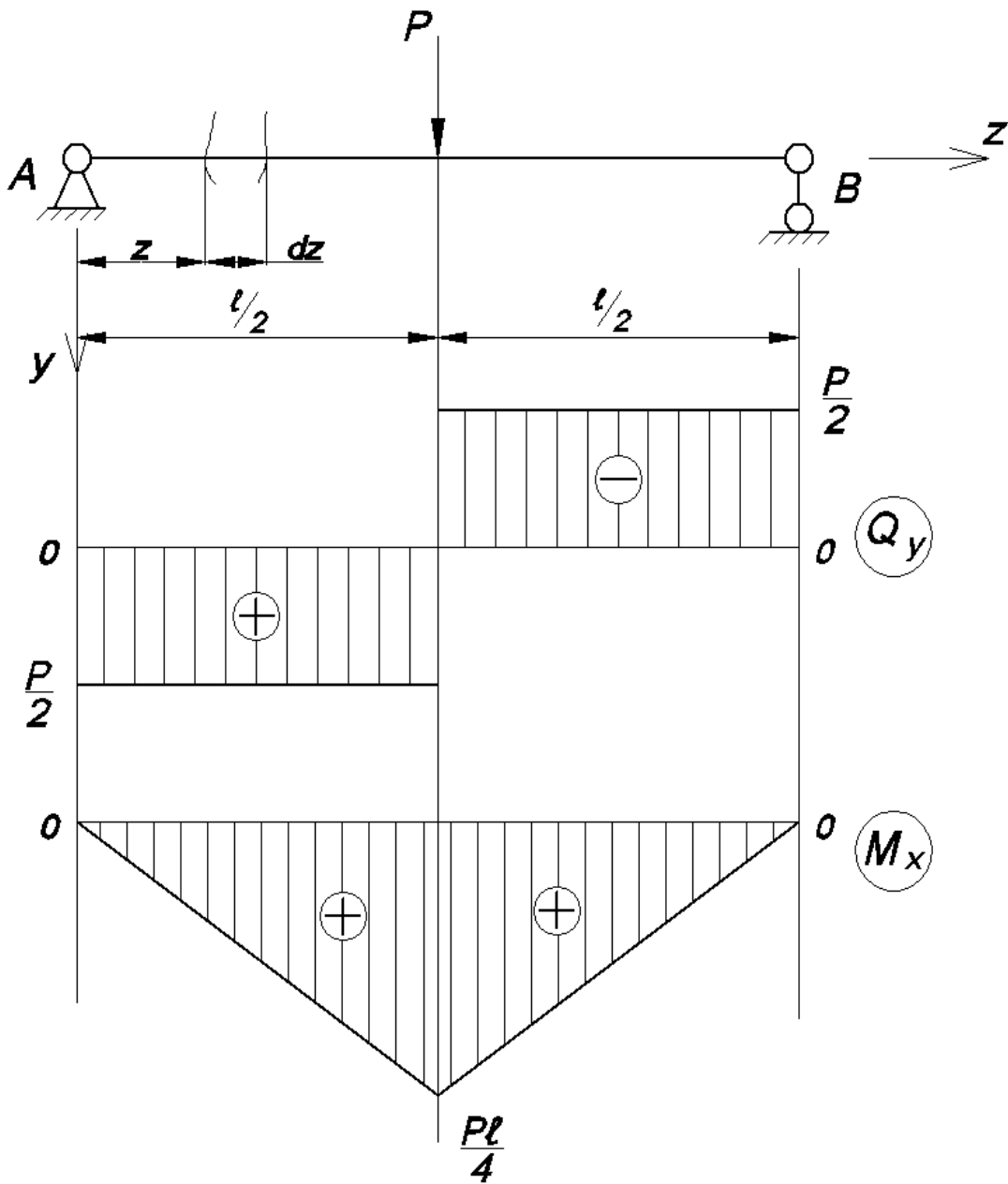


Рис. 6.18. Схема балки.

Поперечна сила Q_y викликає дію дотичних напружень τ у поперечному перерізі, які згідно із законом парності дотичних напружень виникають і в поздовжніх перерізах, викликаючи зсув поздовжніх волокон і порушуючи гіпотезу плоских перерізів, що покладена в основу виведення формули $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$. Експериментальні й теоретичні дослідження цього питання довели, що зсув незначно впливає на порушення гіпотези плоских перерізів, тому для поперечного згину користуються формулою: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$, як і для чистого згину.

Розглянемо ділянку балки (рис. 6.18) довжиною dz , яку розітнемо поздовжнім перерізом і розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 6.19).

Поперечний переріз балки

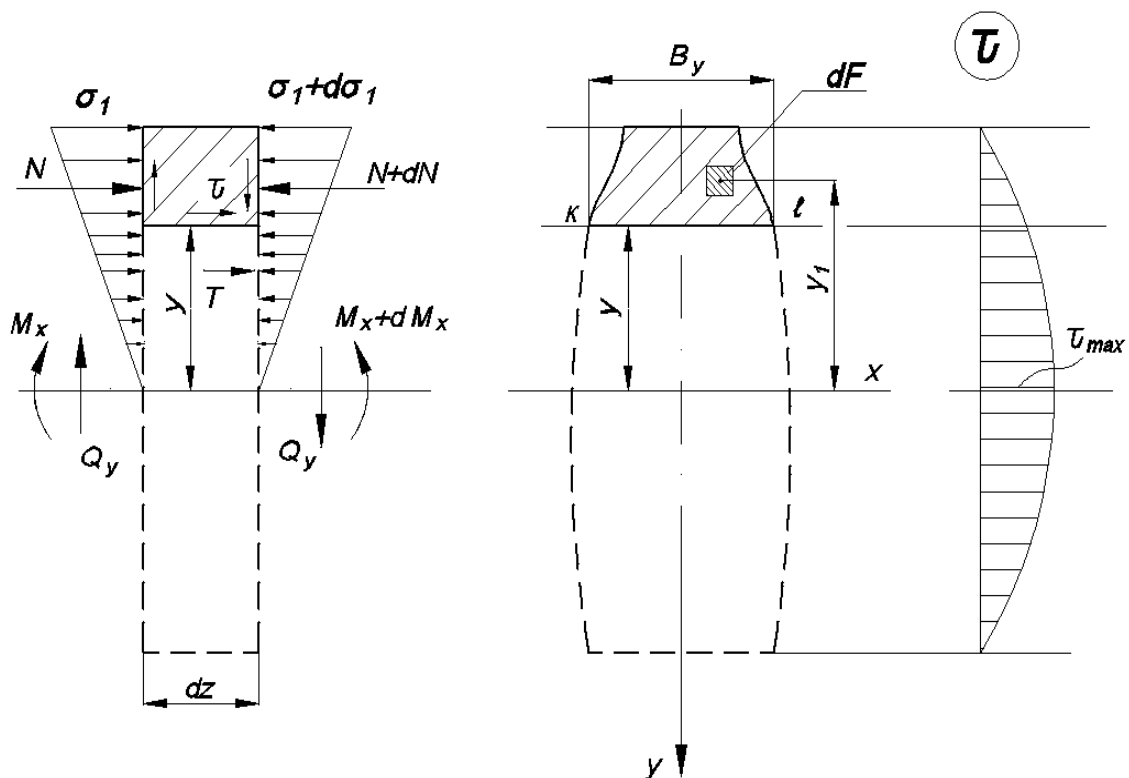


Рис. 6.19. Ділянка балки довжиною dz .

Оскільки на правому перерізі ділянки балки діє більший згинальний момент, ніж на лівому, то відповідно будуть більшими і напруження:

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{I_x} \cdot y_1. \quad (6.18)$$

Відповідно, і стискаюча сила на правому перерізі буде більшою, ніж на лівому на величину:

$$\begin{aligned} dN_z &= \int_{F_{\text{відсіч}}} d\sigma_1 \cdot dF = \int_{F_{\text{відсіч}}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 \cdot dF = \\ &= \frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{\text{відсіч}}} y_1 \cdot dF. \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = \int_{F_{\text{відсіч}}} y_1 \cdot dF \quad (6.20)$$

де $S_x^{\text{відсіч}}$ - статичний момент відносно нейтральної осі відсіченої частини перерізу.

З врахуванням виразу (6.20) формула (6.19) набуде вигляду:

$$dN_z = \frac{dM_x}{I_x} \cdot S_x^{\text{відсіч}}. \quad (6.21)$$

Сила зсуву в поздовжньому перерізі визначається:

$$T = \tau \cdot dz \cdot \nu_y. \quad (6.22)$$

Із умов рівноваги очевидно, що сума проекцій усіх сил на вісь z рівна нулю, отже, матимемо:

$$T = dN. \quad (6.23)$$

Підставивши (6.21) та (6.22) в (6.23), матимемо рівність:

$$\tau_x = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \nu_y}. \quad (6.24)$$

А так як $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ та $\tau_x = \tau_y$, матимемо:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \nu_y}, \quad (6.25)$$

де I_x – момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу.

Формулу (6.25) отримав Д.І. Журавський.

Із аналізу формули (6.25) зрозуміло, що $\tau = 0$ у крайніх точках, а τ_{\max} буде в точках, розташованих на нульовій лінії. τ_y змінюється, як відношення $S_x^{\text{відсіч}} / v_y$.

Для прямокутного перерізу, де $v_y = \text{const}$ то τ_y по висоті перерізу змінюється по кривій 3-го ступеню.

Побудуємо епюри τ для деяких перерізів.

Прямокутний переріз (рис. 6.20).

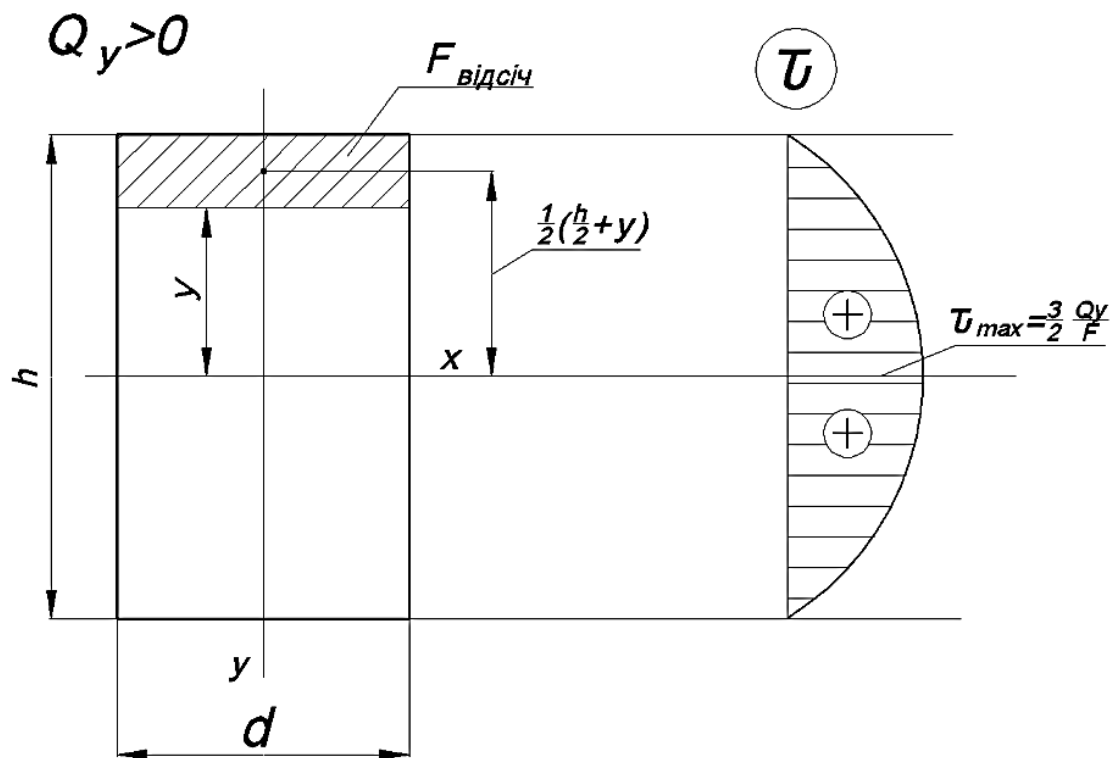


Рис. 6.20. Дотичні напруження в прямокутному поперечному перерізі.

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot v_y},$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = F^{\text{відсіч}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = v \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right). \quad (6.26)$$

Застосувавши формули скороченого множення, отримаємо:

$$S_x^{\text{відсіч}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (6.27)$$

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b}. \quad (6.28)$$

Коли $y = \frac{h}{2}$ або $y = -\frac{h}{2}$, то $\tau_y = 0$.

При $y = 0$ будемо мати формулу:

$$\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F}. \quad (6.29)$$

Круглий поперечний переріз (рис. 6.21).

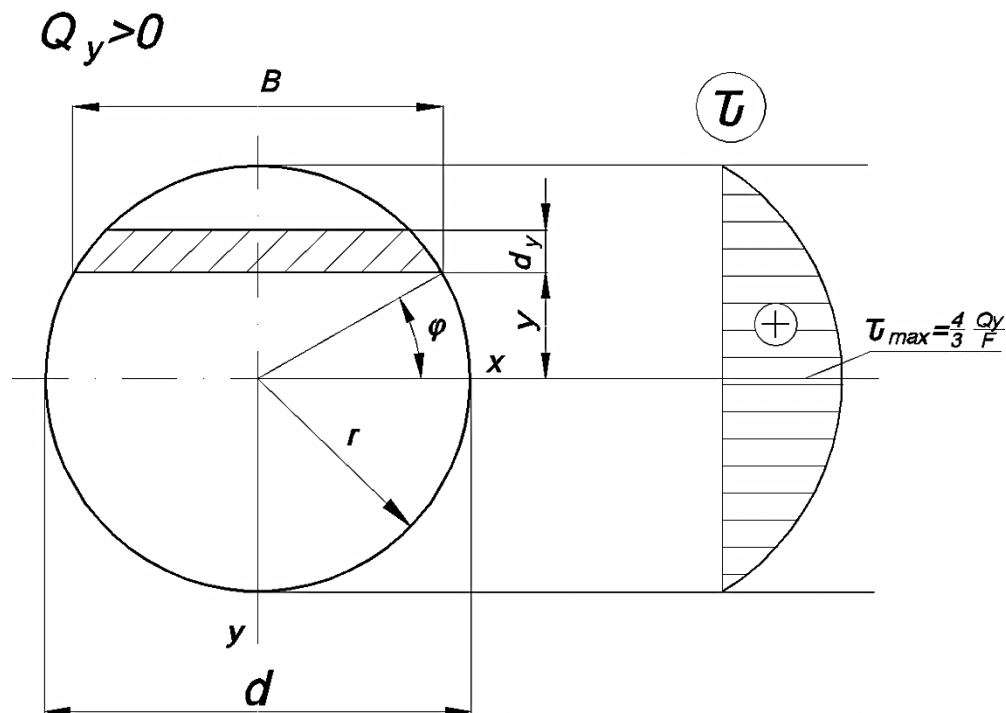


Рис. 6.21. Дотичні напруження в круглому поперечному перерізі.

$$b = 2 \cdot r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi; \quad dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = \int_F y \cdot dF;$$

$$dF = b \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{відсіч} = \int_F y \cdot dF = \int_F 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3} \quad (6.30)$$

Коли $y = r$ або $y = -r$, то $\tau_y = 0$.

При $y = 0$, використавши формулу (6.25) і використовуючи формулу для моменту інерції круга $I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ будемо мати формулу для обчислення дотичних напружень:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot 2 \cdot r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \cdot r^2} \cdot$$

$$\tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (6.31)$$

де $F = \pi \cdot r^2$

Двотавровий переріз (рис. 6.22) характерний різкою зміною ширини в місцях з'єднання полиці та стійки.

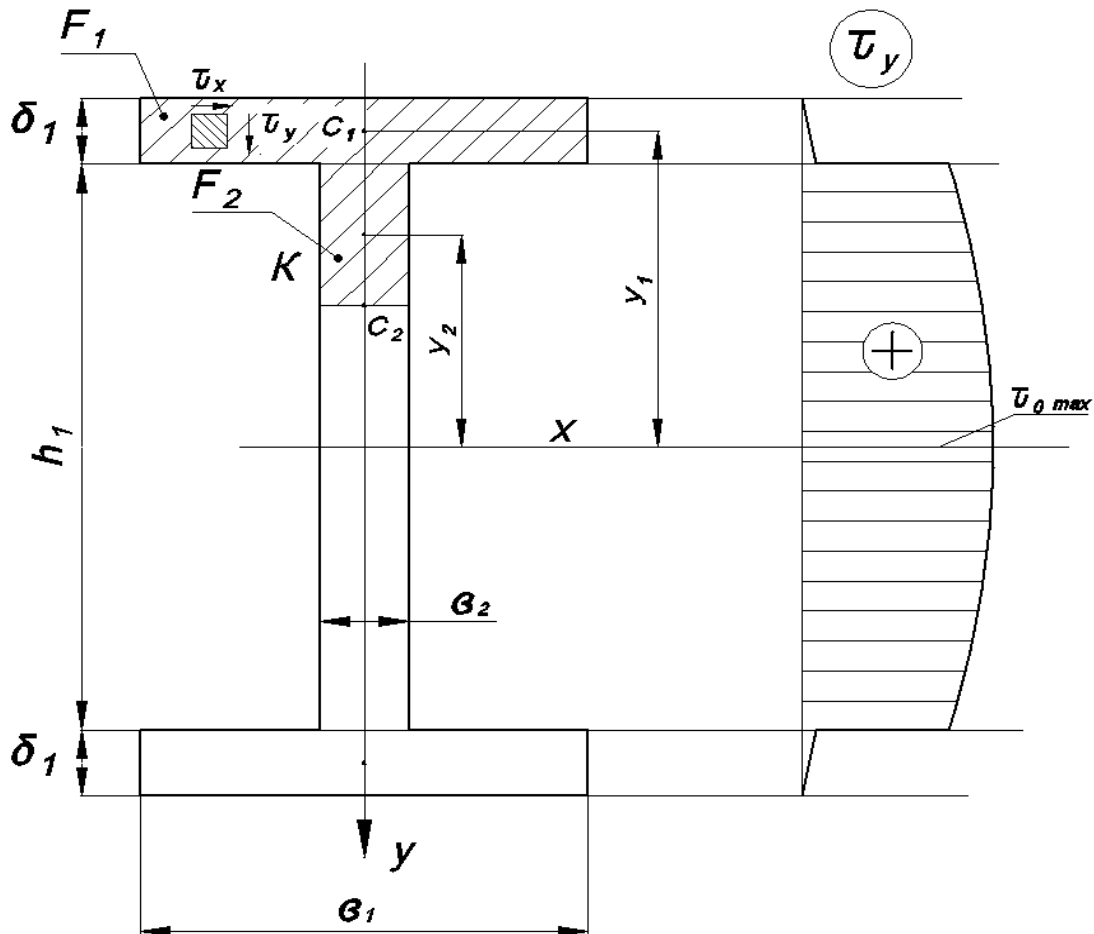


Рис. 6.22. Дотичні напруження двотаврового перерізу.

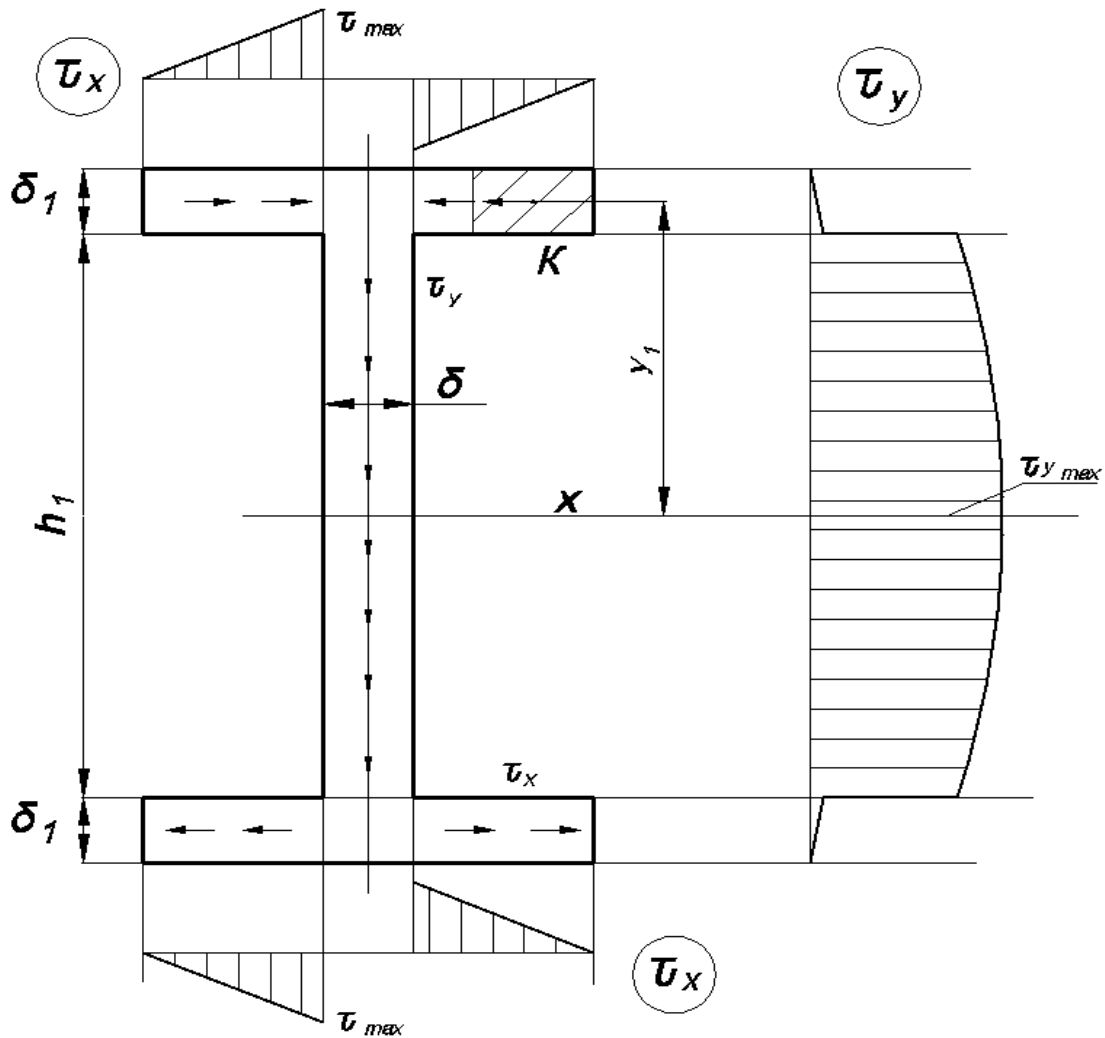


Рис. 6.23. Дотичні напруження τ_x та τ_y .

Для точки К $S_x^{\text{відсіч}} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$;

Через значну ширину полиці τ_y розподіляється нерівномірно, тому для полиці користуватися формулою (6.31) не коректно, її застосовують лише, коли $y \leq \pm \frac{h}{2}$.

Тому в цьому разі роблять двояко:

1. Не враховують τ_y в поличках (через незначність);

2. Обчислюють за формулою: $\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \delta_1}$, при цьому на

епюрі в точках переходу полиці у стійку є суттєві стрибки.

У двотавровому перерізі в поличці також виникають напруження τ_x , які визначаються за формулою:

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \delta_1} \quad (6.32)$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = F^{\text{відсіч}} \cdot y_1.$$

6.3.2. Поняття про центр згину

Використовуючи методику побудови епюр τ_x та τ_y для двотавра, побудуємо їх для швелера, завантаженого в центрі ваги зосередженою силою на кінці консолі (рис. 6.24).

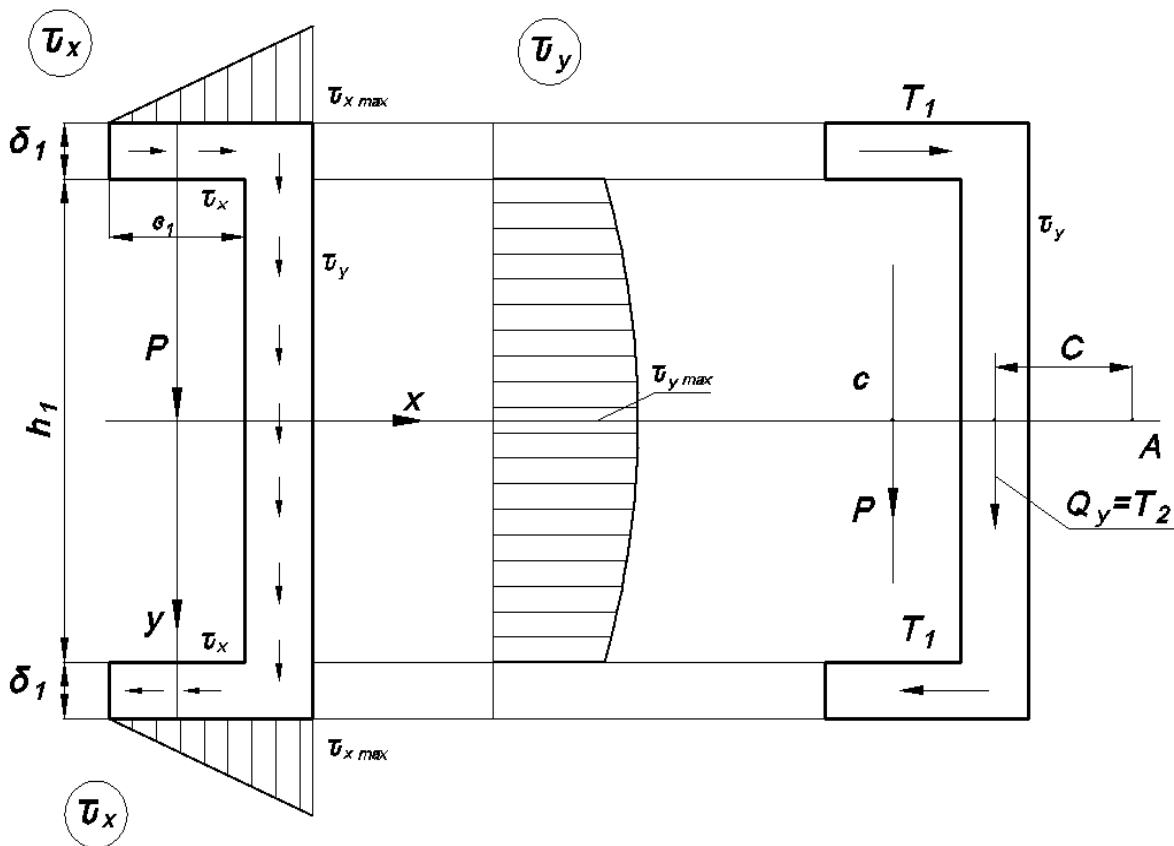


Рис. 6.24. Дотичні напруження в швелері.

Найбільш дотичні напруження в полиці швелера дорівнюють:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \delta_1}; \quad (6.33)$$

$$\text{де: } S_x^{\text{відсіч}} = \frac{\delta_1 \cdot h_1 \cdot b_1}{2}. \quad (6.34)$$

Підставивши вираз (6.34) в (6.33), отримаємо:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot e_1 \cdot \delta_1 \frac{h}{2}}{I_x \delta_1} = \frac{Q_y}{2I_x} b_1 h_1. \quad (6.35)$$

Сумарна горизонтальна сила зсуву T_1 дорівнює:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau_x^{\max} \cdot \delta_1 \cdot e_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1 \cdot e_1^2. \quad (6.36)$$

Дві сили T_1 призводять до виникнення моменту, який визначають:

$$M_1 = T_1 \cdot h_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1^2 \cdot e_1^2. \quad (6.37)$$

Звідси очевидно, що поряд із згином відбувається і закручування поперечного перерізу, що знижує міцність. Очевидно, що на осі x є така точка A , відносно якої момент закручування дорівнює нулю. Цю точку називають **центром згину**. Відповідно, необхідно намагатися прикладати зосереджену силу в цій точці, яка визначається:

$$\sum M_A = 0; \quad M_1 - Q_y \cdot c = 0.$$

$$c = \frac{M_1}{Q_y} = \frac{\delta_1 \cdot h_1^2 \cdot e_1^2}{4I_x}. \quad (6.38)$$

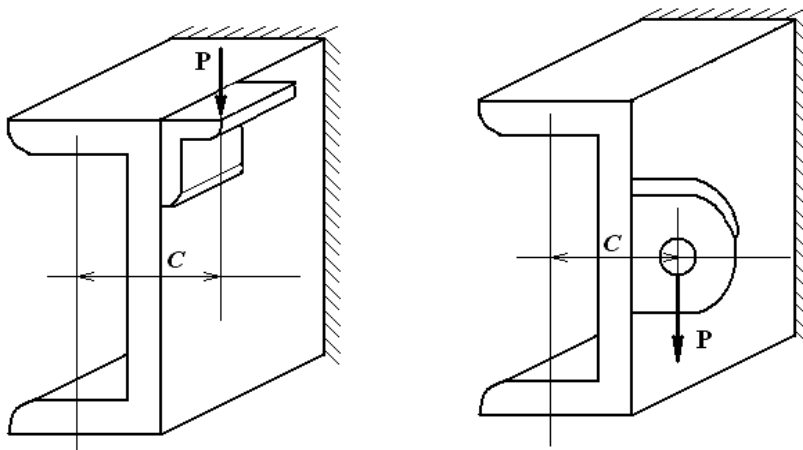


Рис. 6.25. Способи прикладання зовнішньої сили.

Для запобігання виникнення додаткових зусиль у поперечному перерізі зовнішню силу необхідно докладати в центрі згину. Конструктивно вирішене питання зображено на рис. 6.25.

6.4. Міцність балок при згині

6.4.1. Аналіз напруженого стану при згині

У загальному випадку плоского поперечного згину в поперечному перерізі балки виникають нормальні та дотичні напруження, які визначаються за формулами:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відс.}}{I_x \cdot b_y}.$$

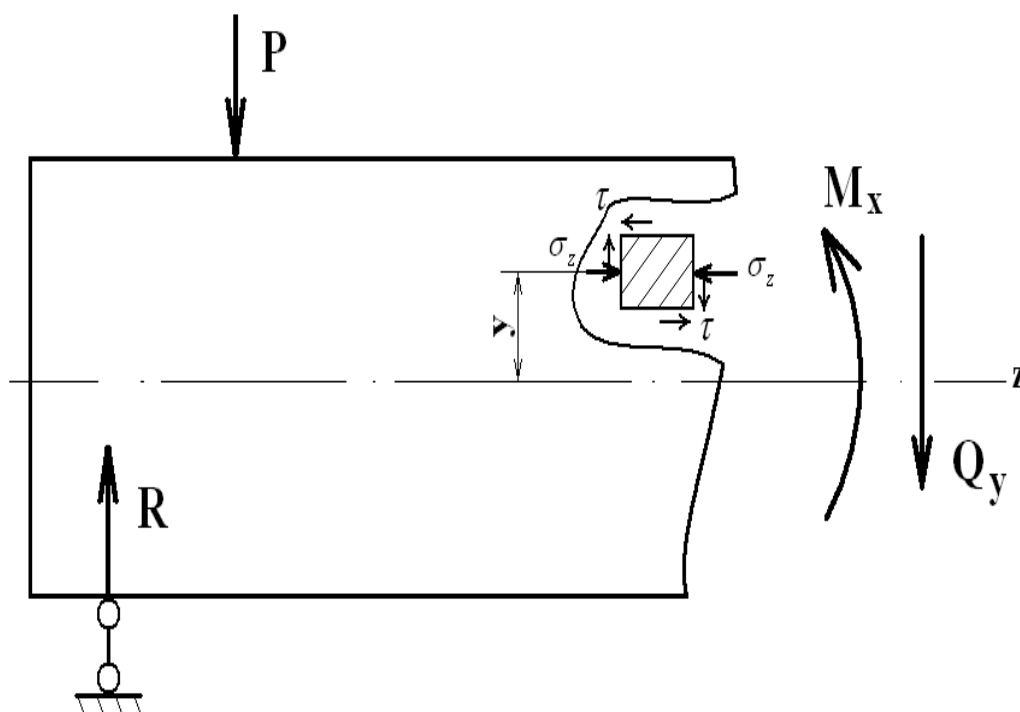


Рис. 6.26. Загальний випадок плоского напруженого стану при згині.

При цьому в будь-якій точці має місце плоский напружений стан, для якого головні напруження і головні площадки визначаємо за формулами (рис. 6.26):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}; \quad (6.39)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \quad (6.40)$$

У нашому випадку, враховуючи, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне $\sigma_y = 0$ і $\sigma_z = \sigma$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$ то формули будуть такими:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (6.41)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}. \quad (6.42)$$

При цьому дослідимо напружений стан у трьох точках по висоті перерізу балки; у верхньому стиснутому волокні; у нижньому розтягнутому волокні; на нейтральній лінії (рис. 6.27).

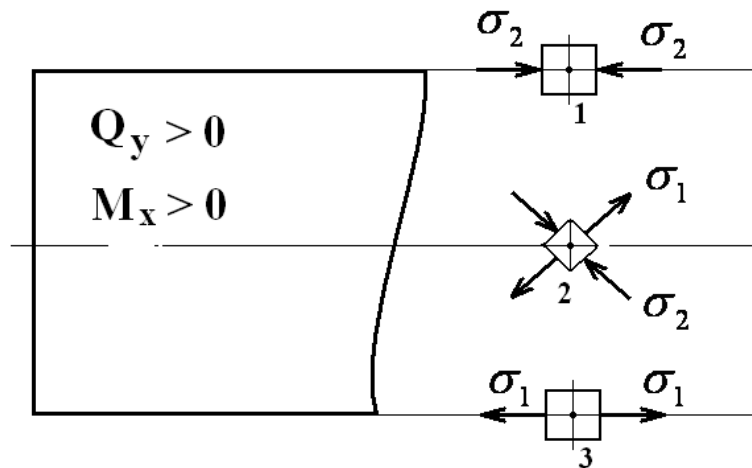


Рис. 6.27. Дослідження напруженого стану по висоті перерізу.

Точка 1: $\tau = 0$; $\sigma_z = -\sigma$.

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha'_0 = 90^\circ; \quad \alpha''_0 = 0^\circ.$$

Точка 2: $\tau = \tau_{\max}$; $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = \tau_{\max};$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4\cdot\tau_{\max}^2} = -\tau_{\max};$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2\cdot\tau_{\max}}{0} = \infty; \Rightarrow \alpha'_0 = 45^\circ; \quad \alpha''_0 = 135^\circ.$$

Точка 3: $\tau = 0$; $\sigma_z = \sigma$.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2 + 4\cdot 0} = \sigma;$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2} = 0;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2\cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha'_0 = 0^\circ; \quad \alpha''_0 = 90^\circ.$$

При цьому максимальні та мінімальні дотичні напруження виникають у площинах нахилених до головних площин під кутом 45° і визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (6.43)$$

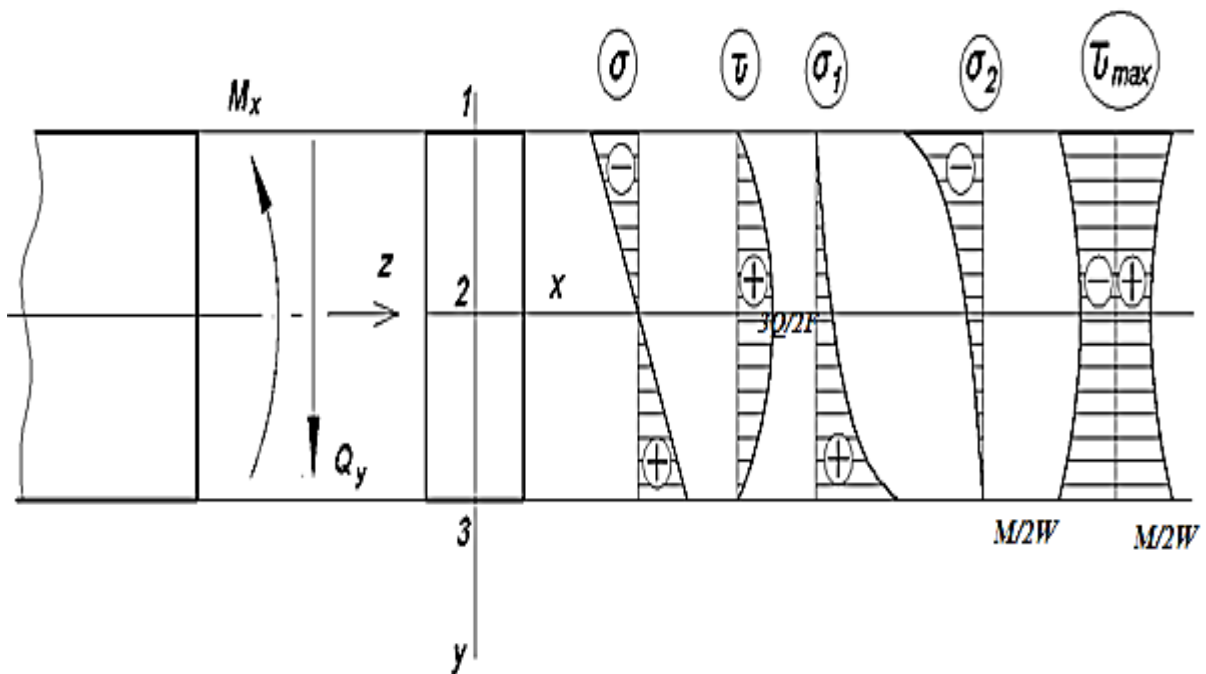


Рис. 6.27. Епюри напружень у прямокутному поперечному перерізі.

Таким чином, знаючи величину поперечної сили Q_y та згинального моменту M_x в поперечному перерізі, а також розміри поперечного перерізу, використавши формули (6.41; 6.42) та (6.43),

побудуємо для прямокутного поперечному перерізу епюри нормальних σ , дотичних τ , головних нормальних σ_1 , σ_2 та максимальних дотичних τ_{\max} напружень, які виникають площинах, нахилених до головних під кутом 45° (рис. 6.27).

Зробимо аналогічні побудови також для балки двотаврового поперечного перерізу (рис. 6.28).

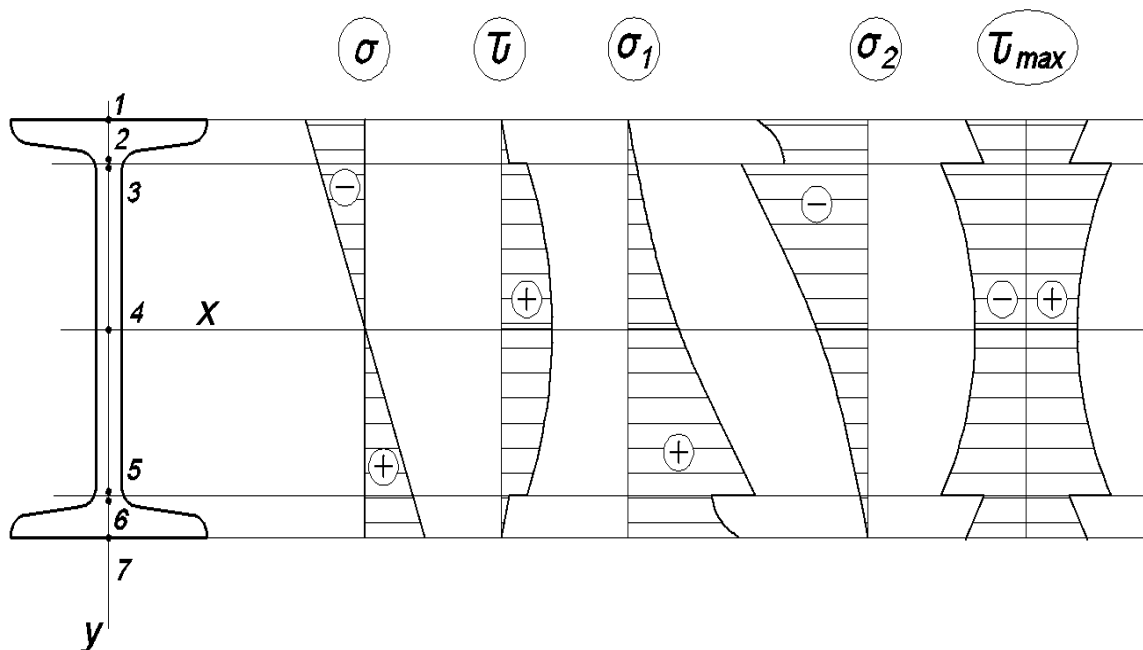


Рис. 6.28. Напруження в двотавровому поперечному перерізі.

Характерною особливістю при цьому є стрибки на епюрах σ_1 , σ_2 та τ_{\max} , викликані стрибками на епюрі τ , які в свою чергу, пов'язані із різкою зміною ширини перерізу в місцях з'єднання полиці зі стінкою.

6.4.2. Перевірка міцності балок при згині

Очевидно, що максимальні нормальні напруження σ виникають у крайніх волокнах, і не враховуючи знаку визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (6.44)$$

де: W_x – момент опору, що характеризує опір поперечного перерізу.

При цьому знаючи максимальний згинальний момент M_x , а також розмір поперечного перерізу, можна перевірити умову міцності балки за нормальними напруженнями. Вона має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (6.45)$$

Із виразу (6.45) можна розв'язати і зворотну задачу, тобто при заданому навантаженні і знаючи матеріал, визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]}. \quad (6.46)$$

$Q_y > 0, M_x > 0$

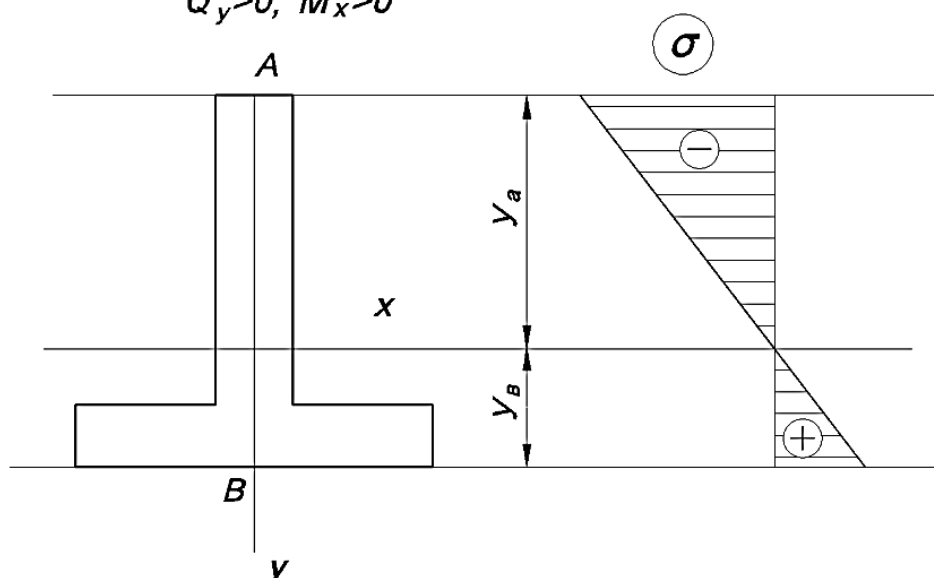


Рис. 6.29. Переріз, що не має горизонтальної вісі симетрії.

Для перерізу, який не має горизонтальної вісі симетрії, виразом (6.46) можна користуватися лише для найбільш віддалених волокон (рис. 6.29). При цьому, якщо балку виготовлено із крихкого матеріалу, то перевіряють умови міцності як на стиск, так і розтяг:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A \leq [\sigma]_{\text{стиск}}; \quad (6.47)$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B \leq [\sigma]_{\text{розтяг}}. \quad (6.48)$$

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконують перевірку умов міцності (рис. 6.29): для точки 1 перевіряють умову міцності нормальними напруженнями (формула 6.25); для точки 4 перевірку міцності здійснюють за дотичними напруженнями (формула Журавського 6.25); для точок з'єднання полиці і стійки (але належить стійці (точка 3)) перевіряють міцність за головними нормальними напруженнями:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (6.49)$$

або для цих точок виконують перевірку міцності, за 4 енергетичною теорією міцності, тобто:

$$\sigma_{екв\text{ивал}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.50)$$

6.4.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності

Формули для визначення нормальних (6.47) та дотичних напружень (6.25) (формула Журавського) справедливі тоді, коли матеріал деформується в пружній стадії (рис. 6.30). Досягнення в найбільш напружених волокнах напруження σ_T не означає руйнування балки, а лише те, що вона здатна сприймати зовнішнє навантаження додаткове.

При цьому зона пружної деформації поперечного перерізу балки зменшується (епюра трансформується) (рис. 6.31).

І тільки в тому разі, коли у всіх волокон поперечного перерізу напруження будуть сягати величини границі плинності, то балка вичерпає свою міцність і зруйнується в перерізі так званого *пластичного шарніра* (рис. 6.31).

Очевидно, що:

$$M_{руйн} = \frac{P \cdot l}{4};$$

Звідси:

$$P = \frac{4M_{руйн}}{l}.$$

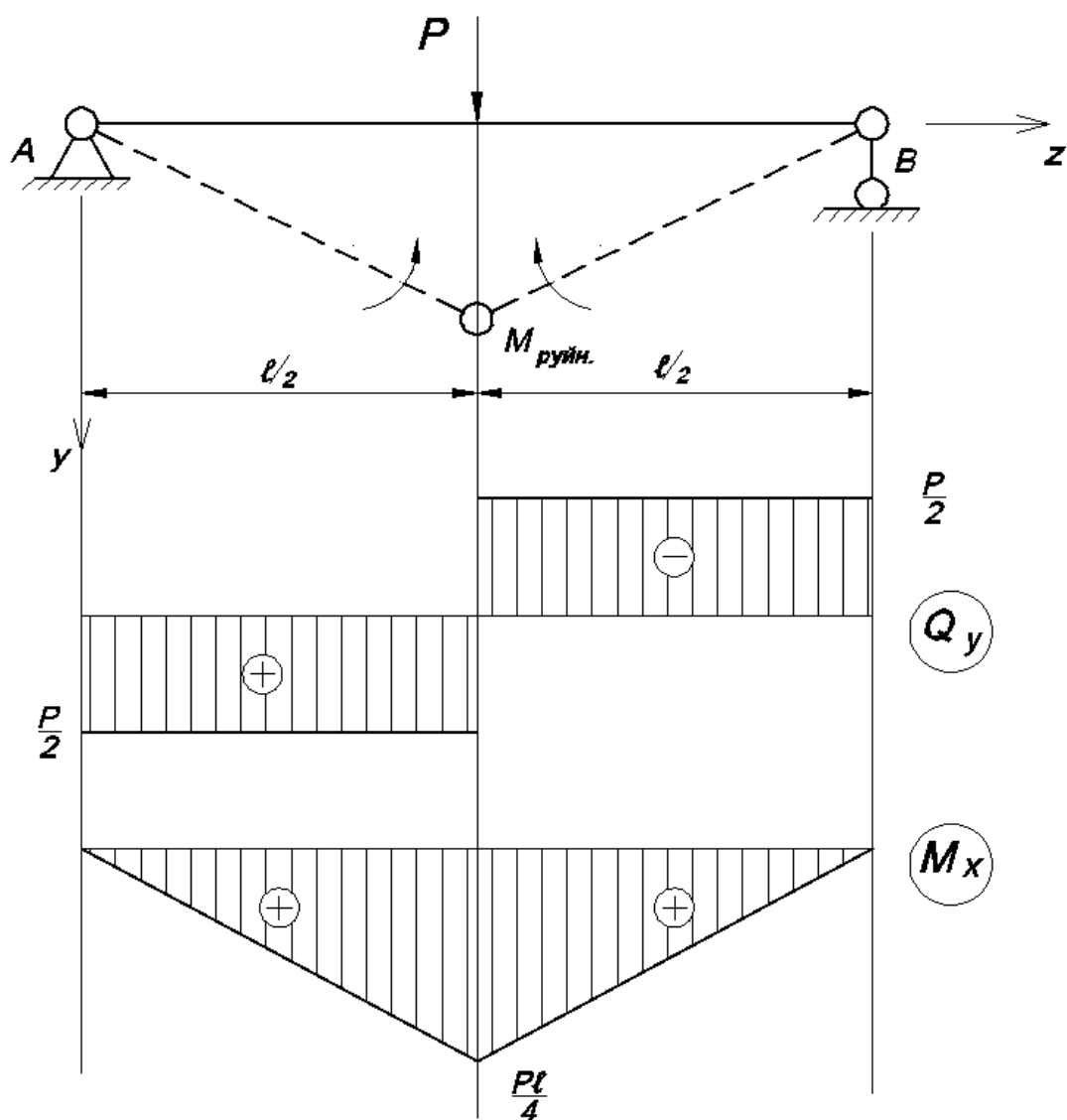


Рис. 6.30. Завантаження балки за межами границі пружності.

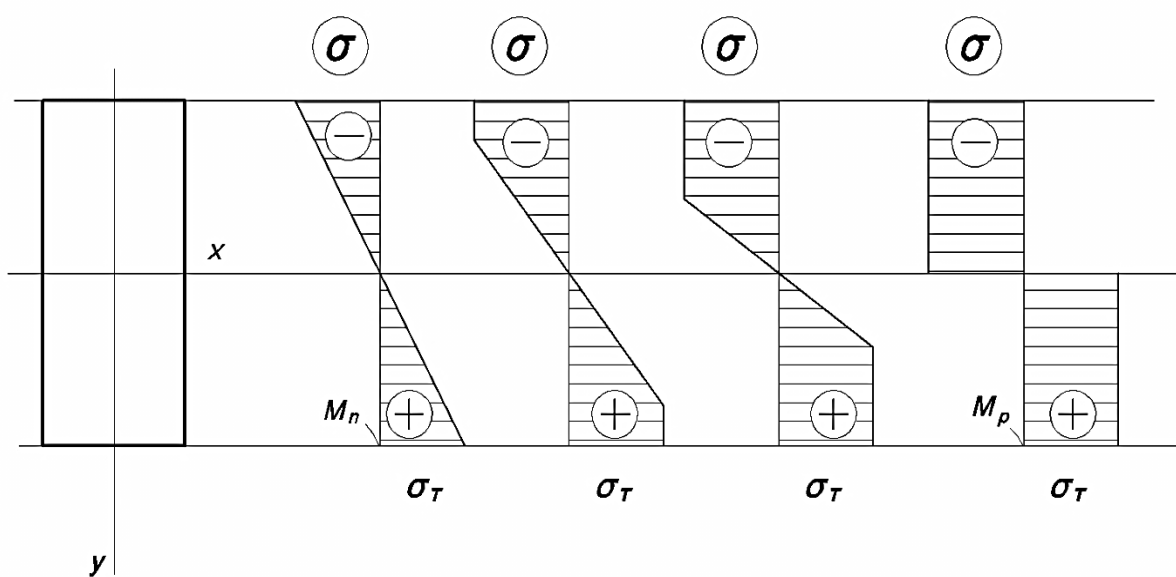


Рис. 6.31. Трансформування епюри σ .

Для прямокутного поперечного перерізу визначають:

$$\begin{aligned} M_{руйн} &= \int_{F_{CT}} \sigma_T dF \cdot y + \int_{F_P} \sigma_T dF \cdot y = \\ &= \sigma_T \left(\int_F y \cdot dF + \int_F y \cdot dF \right) = \sigma_T (S_x^{cm} + S_x^p) = \\ &= \sigma_T \cdot W_p. \end{aligned}$$

де: $W_n = S_x^{cm} + S_x^p$ – пластичний момент опору.

$$M_{руйн} = \sigma_m \cdot W_n; \quad M_x = \sigma_T \cdot W_x.$$

Знайдемо геометричні характеристики:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$$

$$W_n = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{b \cdot h^2}{4}.$$

$$\text{Знайдемо: } \beta = \frac{M_{руйн.}}{M_1} = \frac{W_{\sigma_T}}{W_x \sigma_T} = \frac{W_2}{W_x}$$

$$\beta = \frac{b \cdot h^2 / 4}{b \cdot h^2 / 6} = 1,5.$$

Таким чином, для балки з прямокутним поперечним перерізом руйнуючий момент в півтора рази більше моменту, який викликає появу текучості найбільш віддалених від нейтральної лінії волокон у найбільш навантаженому поперечному перерізі балки.

Значення коефіцієнту β залежить від форми поперечного перерізу балки.

Необхідно також мати на увазі, що для поперечних перерізів балки, які не мають горизонтальної осі симетрії у момент утворення пластичного шарніра нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу, вона зміщується.

6.4.4. Приклади вирішення задач

Розрахунок статично визначеної балки на згинання

Умова задачі.

Для консольної балки необхідно:

- визначити опорні реакції;
- побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання;
- із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати:

а) діаметр d круглого поперечного перерізу;

б) висоту h і ширину b прямокутного поперечного перерізу, прийнявши $b = 0,5h$;

в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами $a_1=1,5\text{м}$; $a_2=2\text{м}$; $l=5,5\text{м}$;

$P=5\text{кН}$; $q=15\text{кН/м}$; $[\sigma]=10\text{МПа}$

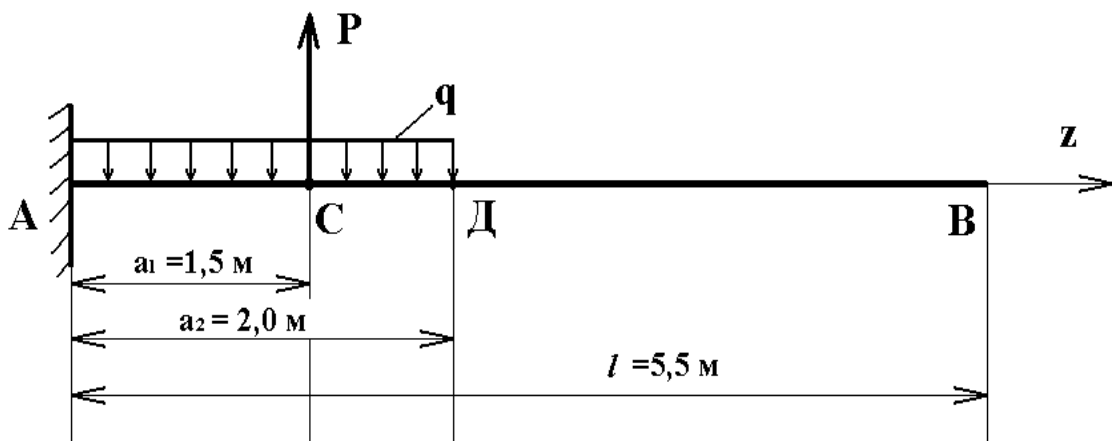


Рис.6.31.а. Схема до задачі

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке защемлення. В точці жорсткого защемлення маємо три складові реакції R_A , Z_A і пару сил з моментом защемлення M_A (реактивний момент).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma Z_1 = 0; \quad Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; \quad -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma \Sigma M_{iA} = 0; \quad -q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{array} \right.$$

Звідси визначаємо реакції: $R_A = 25\text{кН}$; $M_A = 22,5\text{кН}\cdot\text{м}$.

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$Q_{(Y)1}=Q_{(Y)2}= Q_{(Y)3}=0;$$

$$Q_{(Y)4}=q \cdot 0,5=15 \cdot 0,5=7,5 \text{ кН};$$

$$Q_{(Y)5}=Q_{(Y)4} - P=7,5 - 5=2,5 \text{ кН};$$

$$Q_{(Y)6}=q \cdot 2 - P=15 \cdot 2 - 5=25 \text{ кН}.$$

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$M_{(X)1} = M_{(X)2} = M_{(X)3} = 0;$$

$$M_{(X)4} = M_{(X)5} = - \left(q \cdot \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{8} \right) = -(15 \cdot 0,5 \cdot 0,25) = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_{(X)6} &= - \left(q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} \right) + P \cdot a_1 = -(15 \cdot 2 \cdot 1) + 0,5 \cdot 1,5 \\ &= -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

А) балку круглого перерізу з діаметром d .

$$W_{кр} = \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2250 \text{ см}^3;$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3;$$

$$W_{кр} = 2250 = W = 0,1 \cdot d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{2250}{0,1}} = \sqrt[3]{22500} = 28,2 \text{ см}$$

Б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши $b=0,4 \cdot h$.

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,4 \cdot h^3}{6}; \quad W_{кр} = 2250 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_{кр} \cdot 6}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2250 \cdot 6}{0,4}} = 32,3 \text{ см}$$

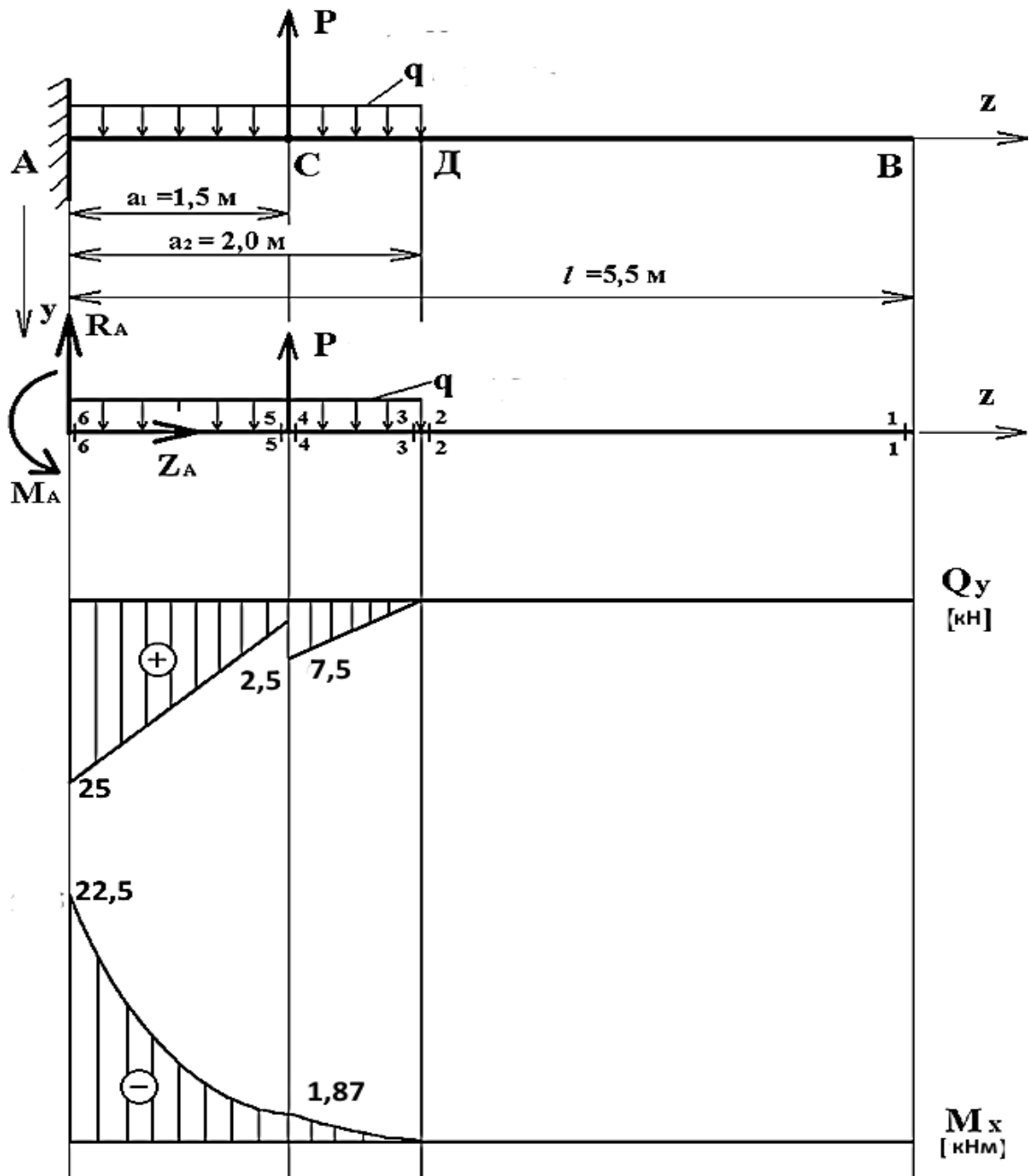


Рис. 6.31.б. Побудова епюр

4. Будемо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту M_{max} і максимальним значенням поперечної сили Q_{max} . Таким перерізом виявився переріз в точці 6.

А) для круглого поперечного перерізу:

Нормальні напруження :

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}.$$

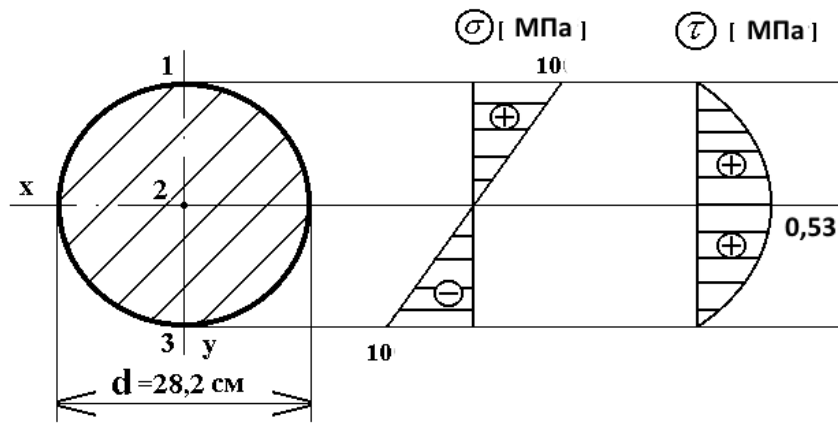


Рис.6.31.в. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу
Дотичні напруження :

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0; \quad \tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,282)^2} = 0,53 \text{ МПа}$$

Б) для квадратного поперечного перерізу:

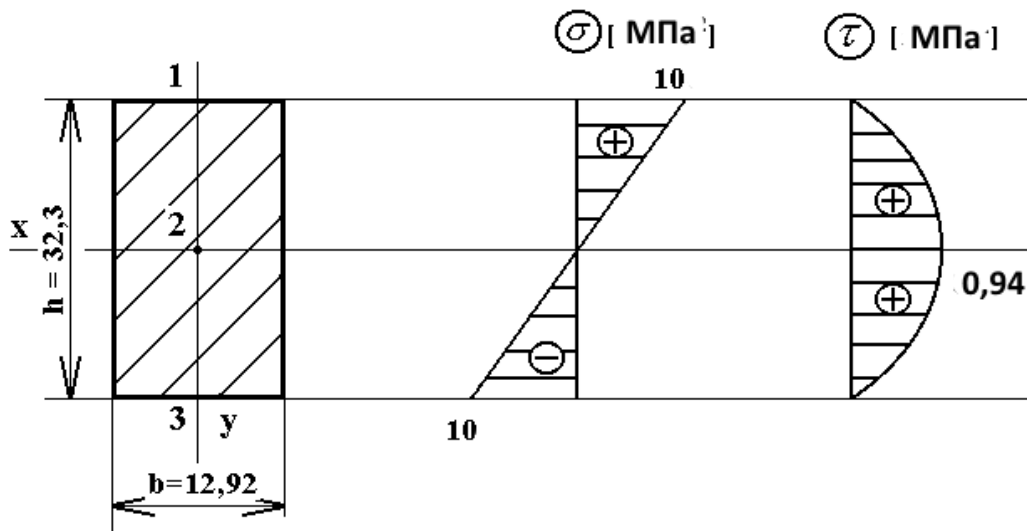


Рис.6.31.г. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу
Нормальні напруження :

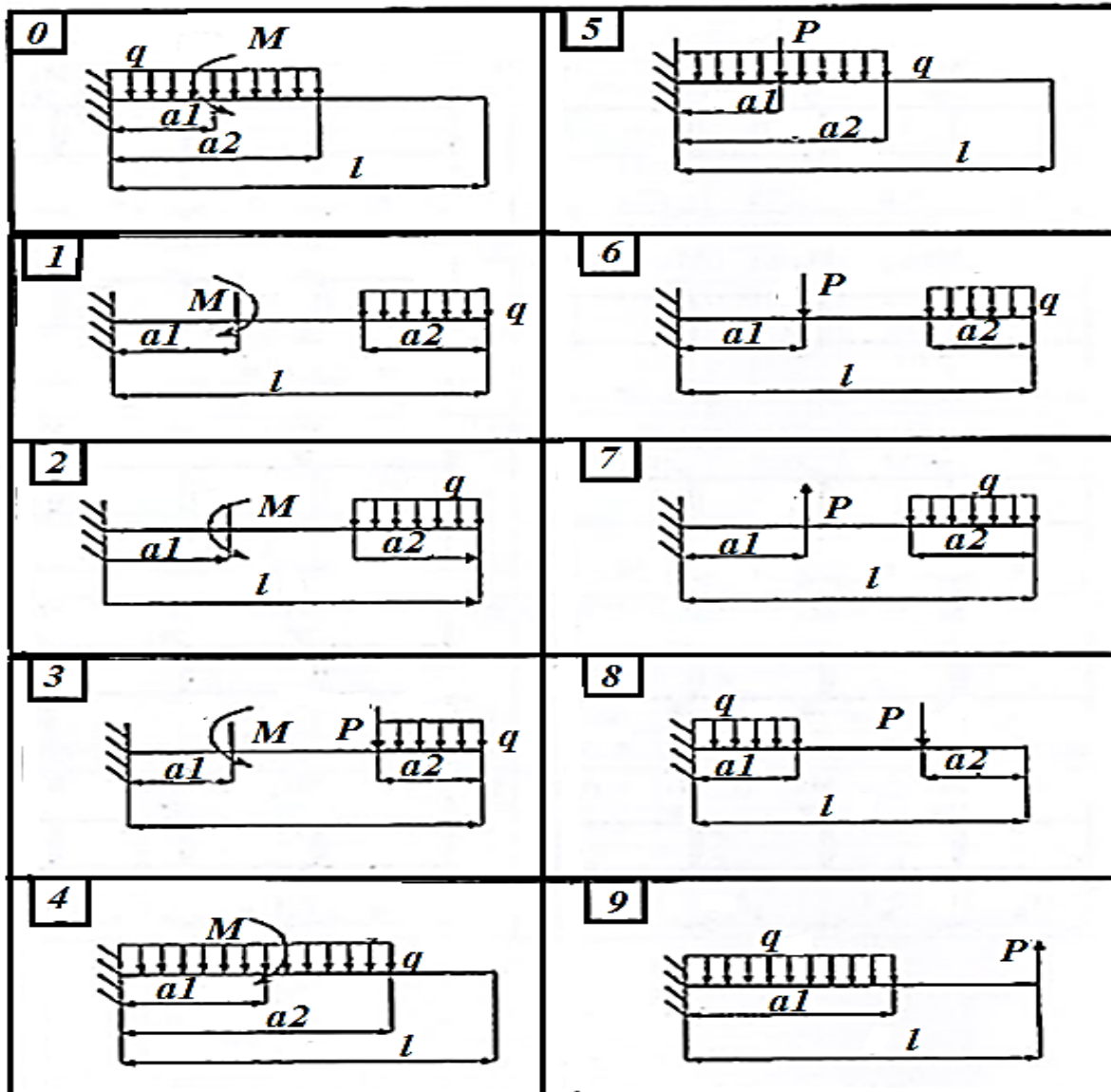
$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа}; \quad \sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}$$

Дотичні напруження : $\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,1292 \cdot 0,323} = 0,94 \text{ МПа}$$

6.4.5. Завдання для самостійного виконання



Таблиця 6.1.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L, m	a_1 , m	a_2 , m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	$[\sigma]$, МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12

6.4.6. Завдання для самоконтролю

Підготуватися до виконання завдань з теми згин допоможе мультимедійна презентація.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38120>



Мультимедійна презентація «Згин»

6.5. Переміщення при згині

6.5.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки, визначення прогинів та кутів повороту шляхом його інтегрування. Розв'язання прикладів

У результаті дії зовнішнього навантаження вісь балки викривляється, набуваючи форму кривої, яка називається **пружною лінією** (пружна вісь балки).

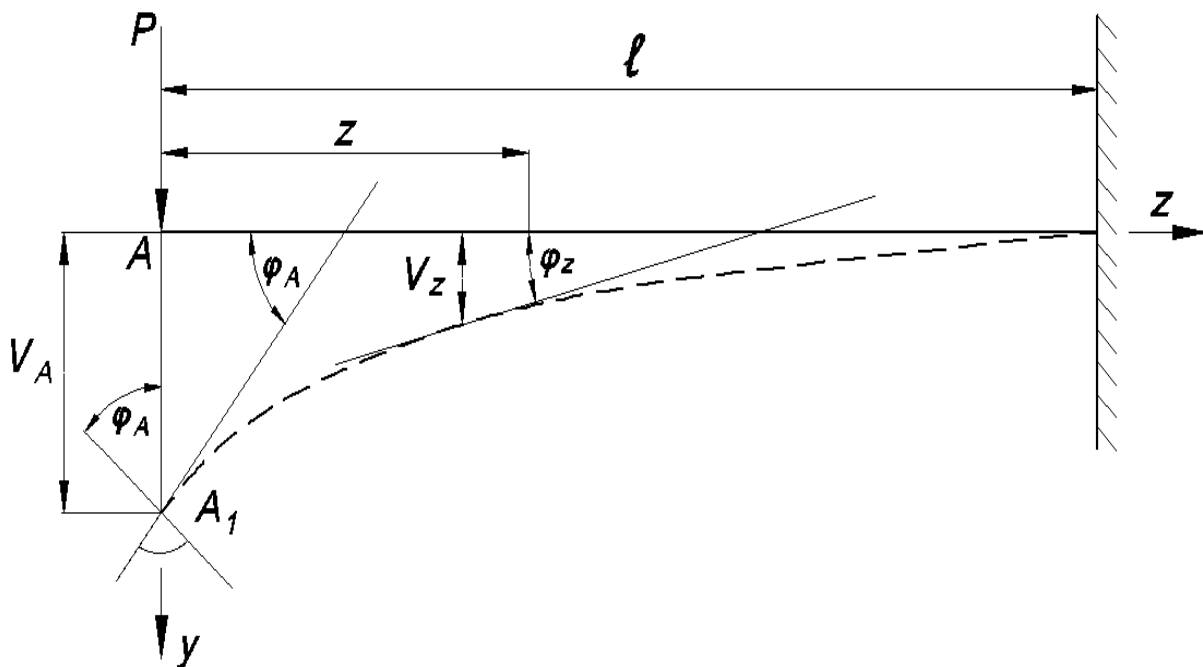


Рис. 6.32. Деформації при згині.

Деформації при згині характеризуються двома величинами:

$V_{(z)}$ – прогин (переміщення центру ваги поперечного перерізу по вертикалі або *лінійна деформація*);

$\varphi_{(z)}$ – кут повороту перерізу (кут нахилу поперечного перерізу відносно свого попереднього положення, або кут нахилу дотичної до деформованої вісі в цьому перерізі до горизонтальної координатної вісі z). Її ще називають *кутовою деформацією*.

Враховуючи, що в зоні пружної деформації $\varphi(z) \leq 0,017 \text{ рад}$, то:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dV}{dz} \approx \varphi. \quad (6.51)$$

Переміщення при згині $V_{(z)}$ та $\varphi_{(z)}$ можуть бути знайдені, коли буде відомо рівняння пружної лінії:

$$V_{(z)} = f(z). \quad (6.52)$$

У разі чистого згину рівняння кривизни набуває вигляду:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}. \quad (6.53)$$

З курсу математичного аналізу відомо, що кривизна плоскої кривої знаходиться за формулою:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}}. \quad (6.54)$$

Знехтувавши виразом $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \approx 0$, вираз (6.54) набуде вигляду:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2V}{dz^2}. \quad (6.55)$$

Прирівнявши праві частини виразів (6.53) і (6.54), отримаємо:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \pm \frac{M}{E \cdot I} \quad (6.56)$$

Вираз (6.56) є диференціальним рівнянням зігнутої вісі балки. Знаки в правій частині виразу (6.59) залежать від вибору системи координат (рис. 6.33).

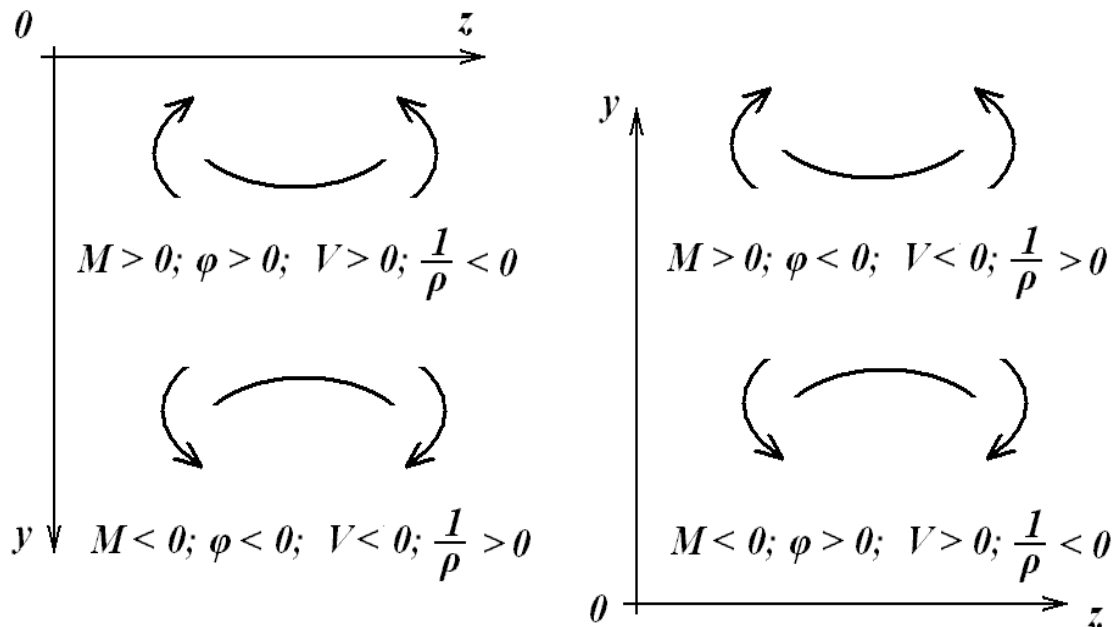


Рис. 6.33. Залежність знаку у виразі (6.56) від вибору системи координат.

Правило знаків для кута повороту $\varphi_{(z)}$:

$\varphi_{(z)} > 0$, якщо він відповідає коротшому шляху повороту вісь z до y .

Враховуючи викладене, очевидно, що у разі, коли вісь y напрямлена вниз в рівнянні (6.56) буде знак «мінус», тобто:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I} \quad (6.57)$$

Для визначення кута повороту та прогину проінтегруємо вираз (6.57) по z :

$$\frac{dV}{dz} = \varphi(z) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[\int M_x \cdot dz + C \right] \quad (6.58)$$

В результаті другого інтегрування:

$$V(z) = -\frac{1}{EI} \left[\int dz \int M_x \cdot dz + Cz + D \right] \quad (6.59)$$

При цьому отримуємо сталі інтегрування C і D , які визначаються із граничних умов на кінцях ділянки балки. Кожен випадок матиме свої граничні умови.

Розв'язання прикладів:

Приклад №1

Для консольної балки (рис. 6.32) записати рівняння зігнутої осі та знайти максимальний кут повороту і прогин.

Вираз (6.57) має вигляд: $EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = -M_x$.

Оскільки балка має одну ділянку завантаження, то матимемо:

$$M_x = -P \cdot z;$$

$$EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = -(-M) = -(-P \cdot z) = P \cdot z;$$

$$EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = P \cdot z.$$

Інтегруючи двічі, отримуємо вирази для φ і V :

$$EI \cdot \varphi(z) = P \cdot \frac{z^2}{2} + C; \tag{а)}$$

$$EI \cdot V(z) = P \cdot \frac{z^3}{6} + C \cdot z + D. \tag{б)}$$

Сталі інтегрування C і D знаходимо з граничних умов:

Перша гранична умова:

$$z = l, \quad \varphi_{(z=l)} = 0. \tag{в)}$$

Підставимо граничні умови у вираз (а).

$$P \cdot \frac{l^2}{2} + C = 0;$$

$$C = -\frac{P \cdot l^2}{2}.$$

Вираз (б) для прогинів має вигляд:

$$EI \cdot V(z) = P \cdot \frac{z^3}{6} - P \cdot \frac{l^2}{2} \cdot z + D = 0. \tag{г)}$$

Друга гранична умова:

$$z = l; \quad V_{(z=l)} = 0; \tag{д)}$$

$$P \cdot \frac{l^3}{6} - P \cdot \frac{l^3}{2} + D = 0;$$

$$D = \frac{P \cdot l^3}{3}.$$

Визначивши сталі C і D інтегрування, можна остаточно записати вирази для кута повороту і прогину. Відповідно до цього вирази для кута повороту і прогину мають вигляд:

$$\begin{aligned} EI \cdot \varphi_{(z)} &= P \cdot \frac{z^2}{2} - P \cdot \frac{l^2}{2}; \\ EI \cdot V_{(z)} &= P \cdot \frac{z^3}{6} - P \cdot \frac{l^2}{2} \cdot z + P \cdot \frac{l^3}{3}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

З рівняння (6.60) очевидно, що максимальні значення φ і V набудуть, коли $z=0$:

$$EI \cdot \varphi_{\max} = -\frac{P \cdot l^2}{2};$$

$$EI \cdot V_{\max} = \frac{P \cdot l^3}{3}.$$

Сталі інтегрування C і D називають **початковими геометричними параметрами**.

Приклад №2

Для однопрогинної балки (рис. 6.35), завантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням, записати рівняння зігнутої осі, знайти максимальне значення кута повороту $\varphi(z)$ та прогину $V(z)$.

1. Визначаємо опорні реакції та будуємо епюри Q_u і M_x (рис. 6.35).

2. Вираз моменту згину для довільного перерізу балки має вигляд:

$$M_x = \frac{q \cdot l}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}.$$

3. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки:

$$EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = -M(x) = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}. \quad (6.61)$$

4. Інтегруючи рівняння (6.61), двічі отримуємо вирази для φ і V відповідно:

$$EI \cdot \varphi(z) = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + C;$$

$$EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot z^3 + \frac{q \cdot z^4}{24} + C \cdot z + D.$$

5. Із граничних умов визначаємо сталі інтегрування C і D :

1. $z = 0$; $EI \cdot V(z) = 0$; $D = 0$.

2. $z = l$; $EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l^4}{12} + \frac{q \cdot l^4}{24} + C \cdot l = 0$ $C = \frac{q \cdot l^3}{24}$.

6. Виходячи з цього, вирази для φ і V набувають вигляду:

$$EI \cdot \varphi(z) = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot l^3}{24};$$

$$EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot z^3 + \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot z. \quad (6.62)$$

У рівняння (6.62) підставляємо координати характерних перерізів, визначаємо φ і V та будуємо їх епюри (рис. 6.35):

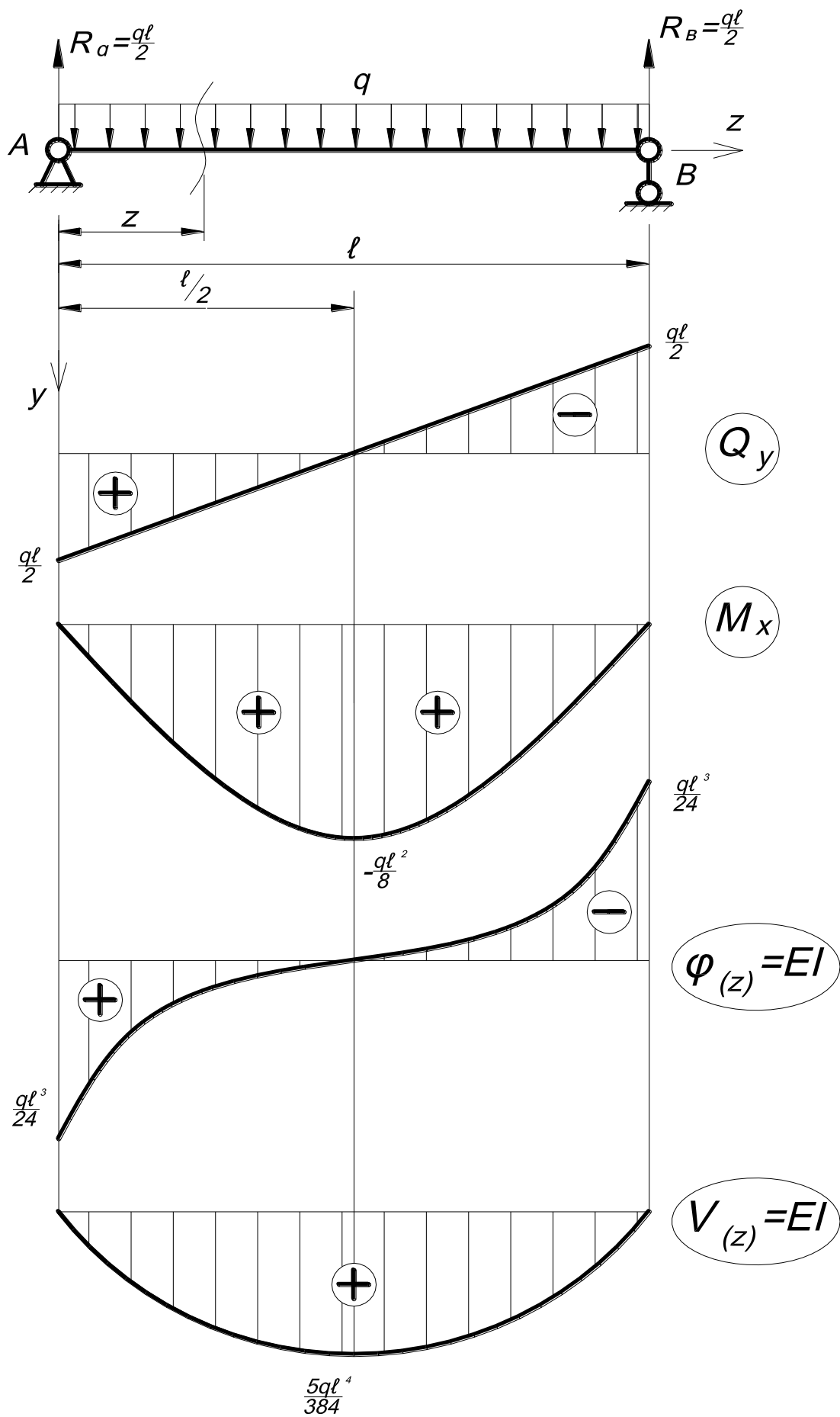


Рис. 6.35. Схема балки до прикладу № 2.

Намітимо три перерізи по довжині балки:

$$z = 0; \quad z = \frac{l}{2}; \quad z = l.$$

$z = 0;$

$$EI \cdot \varphi_{(z=0)} = \frac{q \cdot l^3}{24}$$

$$EI \cdot V_{(z=0)} = 0;$$

$z = \frac{l}{2};$

$$EI \cdot \varphi_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q \cdot l^3}{24} = 0;$$

$$EI \cdot V_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q}{24} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{384} \cdot q \cdot l^4.$$

$z = l;$

$$EI \cdot \varphi_{(z=l)} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot l^3}{24} = -\frac{q \cdot l^3}{24};$$

$$EI \cdot V_{(z=l)} = 0$$

Під час побудови епюр використовуємо диференціальні залежності:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q_y;$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E_y};$$

$$\frac{dV}{dz} = \varphi_{(z)}.$$

6.5.2. Перевірка жорсткості балки при згині

В інженерній практиці відомі випадки, коли для балки, поперечний переріз якої підібрано із умов міцності, переміщення досягають значної величини і не дають можливість нормально експлуатувати таку конструкцію. При цьому величина максимального прогину f (стріла прогину) не повинна перевищувати допустиме значення $[f]$, що приводиться в нормах:

$$V_{\max} = f \leq [f] \quad (6.63)$$

Величина допустимого значення $[f]$, залежить від призначення конструкції і може коливатись:

$$[f] = \left(\frac{1}{150} \div \frac{1}{1000} \right) \cdot l. \quad (6.64)$$

6.6. Визначення переміщень при згині

6.6.1. Метод початкових параметрів

Застосування методу безпосереднього інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі для балок з кількістю ділянок навантаження $m > 3$, пов'язана із труднощами, викликаними знаходженням $2m$ постійних інтегрувань. Але для будь-якої балки кількість постійних інтегрувань можливо звести до двох, якщо враховувати нижче наведені для складання та інтегрування виразу моменту.

1. Початок координат суміщають з лівим кінцем балки і вважають постійною величиною для всіх ділянок балки.

2. У рівняння моментів включають тільки силові фактори, розташовані ліворуч від перерізу.

3. Зосереджений момент приймаємо із множником:

$$(z-a)^0 = 1.$$

4. Розподілене навантаження розповсюджують до правого кінця балки, а для встановлення дійсної рівноваги докладають компенсуюче навантаження такої ж інтенсивності, але зворотного напрямку.

5. Вираз моменту інтегрують без розкриття дужок.

Розглянемо балку, яка має 5 ділянок завантаження:

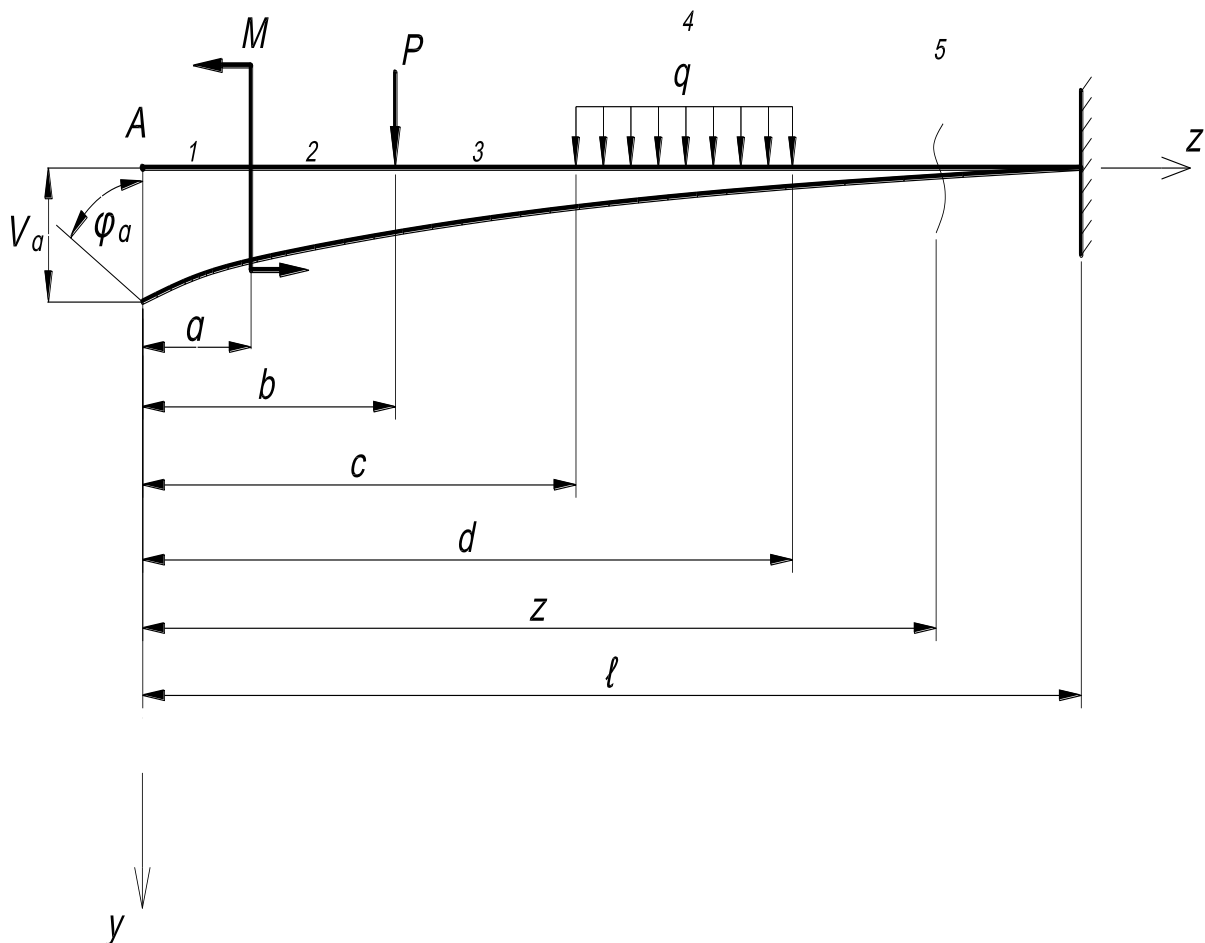


Рис. 6.36. Схема балки, яка має п'ять ділянок завантаження.

Початок координат виберемо в точці А. Диференціальне рівняння зігнутої вісі балки має вигляд:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I}.$$

Запишемо вираз для згинаючого моменту в поперечному перерізі на п'ятій ділянці:

$$M_5 = -\left[M(z-a)^0 + P(z-b) + q \frac{(z-c)^2}{2} - q \frac{(z-d)^2}{2} \right] \quad (6.65)$$

Диференційне рівняння має вигляд:

$$EI \frac{d^2V}{dz^2} = M(z-a)^0 + P(z-b) + q \frac{(z-c)^2}{2} - q \frac{(z-d)^2}{2}.$$

Проінтегрувавши один та два рази вираз (6.65), отримаємо вирази для кута повороту і прогину п'ятої ділянки балки, відповідно:

$$EI \varphi_{(z)} = EI \frac{dv}{dz} = M(z-a) + \frac{P(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{6} - q \frac{(z-d)^3}{6} + C_5; \quad (6.66)$$

$$EIV_{(z)} = \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^3}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} - q \frac{(z-d)^4}{24} + C_5 \cdot z + D_5. \quad (6.67)$$

Аналогічно для четвертої ділянки:

$$EI\varphi_{(z)} = EI \frac{dv}{dz} = M(z-a) + \frac{P(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{6} + C_4; \quad (6.68)$$

$$EIV_{(z)} = \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^3}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} + C_4 \cdot z + D_4. \quad (6.69)$$

Застосувавши вказані вище правила, отримаємо рівність сталих інтегрувань, що випливає з плавності з'єднання ділянок балки:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5$$

Геометричне тлумачення сталих інтегрувань з'ясуємо під час розгляду першої ділянки:

$$EI\varphi_{(0)} = C_1$$

$$EIV_{(0)} = C_1 \cdot z + D_1$$

Враховуючи, що $z = 0$, маємо:

$$C = EI\varphi_{(0)}$$

$$D = EIV_{(0)}$$

Таким чином, для балки з будь-якою кількістю ділянок завантаження сталих інтегрувань буде дві: V_0 та φ_0 , де: V_0 – прогин, а φ_0 – кут повороту лівого кінця балки.

Враховуючи викладене, вираз для прогинів запишеться:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z + \frac{M(z-a)^2}{2} + \frac{P(z-b)^2}{6} + q \frac{(z-c)^4}{24} - q \frac{(z-d)^4}{24}. \quad (6.70)$$

Рівняння (6.70) називають **універсальним рівнянням зігнутої вісі балки**.

У разі, коли до лівого кінця балки докласти зосереджені M_0 і P_0 , (статичні початкові параметри), то рівняння зігнутої осі балки набуде вигляду:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm M_0 \frac{z^2}{2} \pm P_0 \frac{z^3}{6} \pm \Sigma M \frac{(z-a)^2}{2} \pm \Sigma P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \Sigma q \frac{(z-c)^4}{24} \pm \Sigma q \frac{(z-d)^4}{24} \quad (6.71)$$

Вираз (6.71) – *універсальне рівняння прогинів балки*.

Взявши похідну із виразу (6.71), можемо отримати *універсальне рівняння кутів повороту*:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \pm M_0 z \pm P_0 \frac{z^2}{2} + \sum M(z-a) \pm \Sigma P \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q \frac{(z-d)^3}{6} \quad (6.72)$$

6.6.2. Приклади розрахунку балок на жорсткість

Для заданої балки знайти прогини і кути повороту в характерних точках і побудувати їх епюри (рис. 6.37).

Етапи розрахунку:

1. Визначаємо опорні реакції R_A і R_B (визначення опущено).

Контроль: $\Sigma y = 0$; $R_A + q \frac{l}{2} - R_B = 0$;

2. Визначаємо величини поперечних сил Q_y та згинаючих моментів M_x і будуємо їх епюри (рис. 6.37) (обчислення опущено).

3. Для третьої ділянки балки, коли z знаходиться в межах від l до $5/4 \cdot l$, записуємо універсальне рівняння зігнутої осі балки:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 z + R_a \frac{z^3}{6} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z-l)^4}{24} - R_b \frac{(z-l)^3}{6}$$

Вираз для кута повороту має вигляд:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_a \frac{z^2}{b} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{2} - q \frac{(z-l)^3}{6} - R_b \frac{(z-l)^2}{2}$$

Початкові параметри знаходяться із граничних умов:

1) $z = 0$

$$EIV_{(z=0)} = EIV_0 = 0.$$

2) $z = l$

$$EIV_{(z=l)} = EI\varphi_0 \cdot l + R_a \frac{l^3}{6} + q \frac{(l - \frac{l}{2})^4}{24} = 0, \quad EI\varphi_0 = \frac{57}{384} ql^3;$$

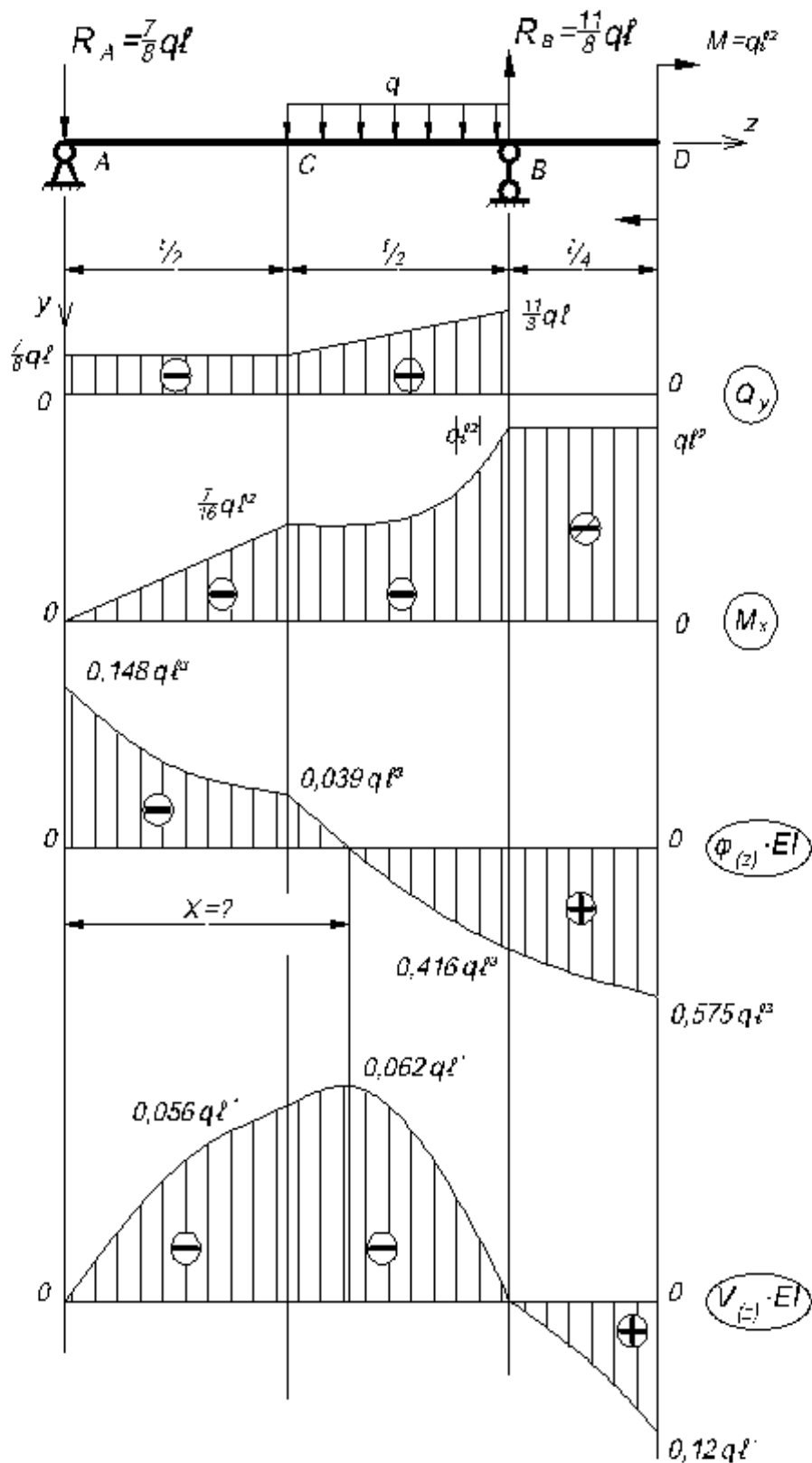


Рис. 6.37. Схема балки.

З урахуванням вищенаведеного універсальні рівняння запишуться:

$$EIV_{(z)} = -\frac{57}{384}q \cdot l^3 \cdot z + \frac{7}{8}ql \frac{z^3}{6} + q \frac{(z-\frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z-l)^4}{24} - \frac{11}{8}ql \frac{(z-l)^3}{6}; \quad (6.73)$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql \frac{z^2}{2} + q \frac{(z-\frac{l}{2})^3}{6} - q \frac{(z-l)^3}{6} - \frac{11}{8}ql \frac{(z-l)^2}{6}. \quad (6.74)$$

Підставивши у вирази (6.73) та (6.74) координати характерних перерізів балки, знайдемо прогини і кути повороту в них та побудуємо їх епюри, враховуючи диференційні залежності між q ; Q_y ; M_x ; $\varphi(z)$; $v(z)$:

точка А $\underline{z=0}$;

$$EIV_{(z=0)} = 0;$$

$$EI\varphi_{(z=0)} = -\frac{57}{384}ql^3 = -0,148ql^3.$$

точка С $\underline{z = \frac{l}{2}}$;

$$EIV_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{57}{384}ql^3 \cdot \frac{l}{2} + \frac{7}{8}ql \frac{(l/2)^3}{6} = 0,056ql^3;$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql \frac{l/2}{2} = -0,039ql^3.$$

точка В $\underline{z=l}$;

$$EIV_{(z=l)} = -\frac{57}{384}ql^4 + \frac{7}{8}ql \frac{l^3}{6} + q \frac{(l-l/2)^4}{24} = 0;$$

$$EI\varphi_{(z=l)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql \frac{l^2}{2} + q \frac{(l-l/2)^3}{6} = 0,416ql^3$$

точка D $\underline{z = \frac{5}{4}l}$

$$EIV_{(l=5/4l)} = 0,12ql^4;$$

$$EI\varphi_{(l=5/4l)} = 0,575ql^3.$$

6.7. Метод Мора для визначення переміщень

6.7.1. Застосування принципу можливих переміщень для пружних систем

Застосування методу початкових параметрів при визначенні переміщень для стрижня з ломаною віссю викликає деякі труднощі. Більш універсальним є метод Мора, який базується на застосуванні відомого з курсу теоретичної механіки принципу можливих переміщень.

Для зручності вважатимемо, що переміщення як кутове так і лінійне позначатимемо літерами Δ, δ з двома індексами перший із яких, означатиме точку і напрямок переміщення, а другий – причину, що викликала переміщення. Проілюструємо це на рис. 6.38.

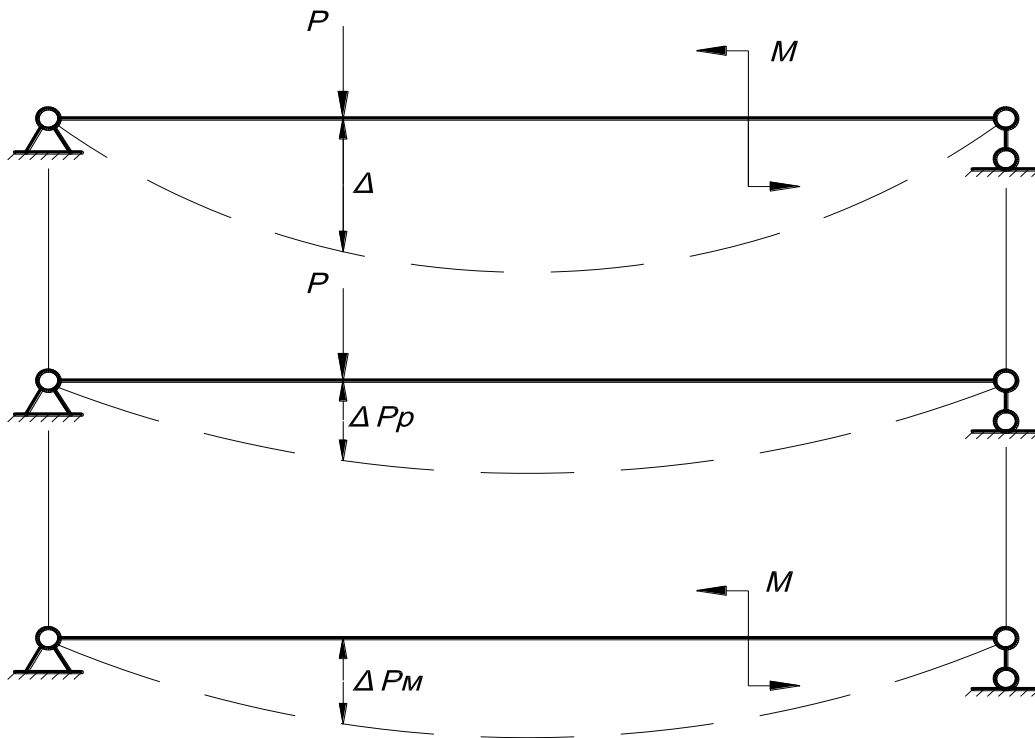


Рис. 6.38. Зображення переміщень.

Загальне переміщення Δ визначатиметься за формулою:

$$\Delta = \Delta_{pp} + \Delta_{pm} . \quad (6.75)$$

де Δ_{pp} – переміщення точки прикладання сили P_B напрямку її дії, викликане цією ж силою;

Δ_{pm} – переміщення точки прикладання сили P_B у напрямі її дії, викликане згинальним моментом M .

Прогин, викликаний одиничною силою, називається *питомий* і позначається знаком δ або δ_{pp} ($p = 1$)

Згідно із закону Гука можемо мати рівність:

$$\Delta_{pp} = \delta_{pp} \cdot P. \quad (6.76)$$

Принцип можливих переміщень застосовується в теоретичній механіці для абсолютно твердих недеформованих тіл, згідно з яким у стані рівноваги робота всіх зовнішніх сил на можливі переміщення дорівнює нулю.

Рівняння принципу можливих переміщень має вигляд:

$$\sum P_k \cdot \Delta_{kn} = 0. \quad (6.77)$$

де Δ_{kn} – можливе переміщення точки прикладання сили P_k в її напрямі від n -го збудження.

Для реальних (деформованих тіл) внутрішні зусилля теж виконують роботу на викликаних деформаціях і рівняння (6.77) має вигляд:

$$\sum P_k \cdot \Delta_{kn} + \sum W_{kn} = 0 \quad (6.78)$$

де $\sum P_k \cdot \Delta_{kn}$ – робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях, а $\sum W_{kn}$ – робота внутрішніх сил на можливих переміщеннях внутрішніх частин тіла.

6.7.2. Формула Мора для визначення переміщень

Розглянемо ламаний стрижень, який знаходиться під дією одиничної сили (рис. 6.39).

В якості можливих переміщень точки K прикладання сили $\overline{P}_k = 1$ візьмемо переміщення, викликане внаслідок деформації ділянки dS , розташованої у межах вертикальної частини стрижня.

Очевидно, що переміщення $d\Delta_{kp}$ є проекція відрізка KK_1 на лінію дії

сили $\overline{P}_k = 1$.

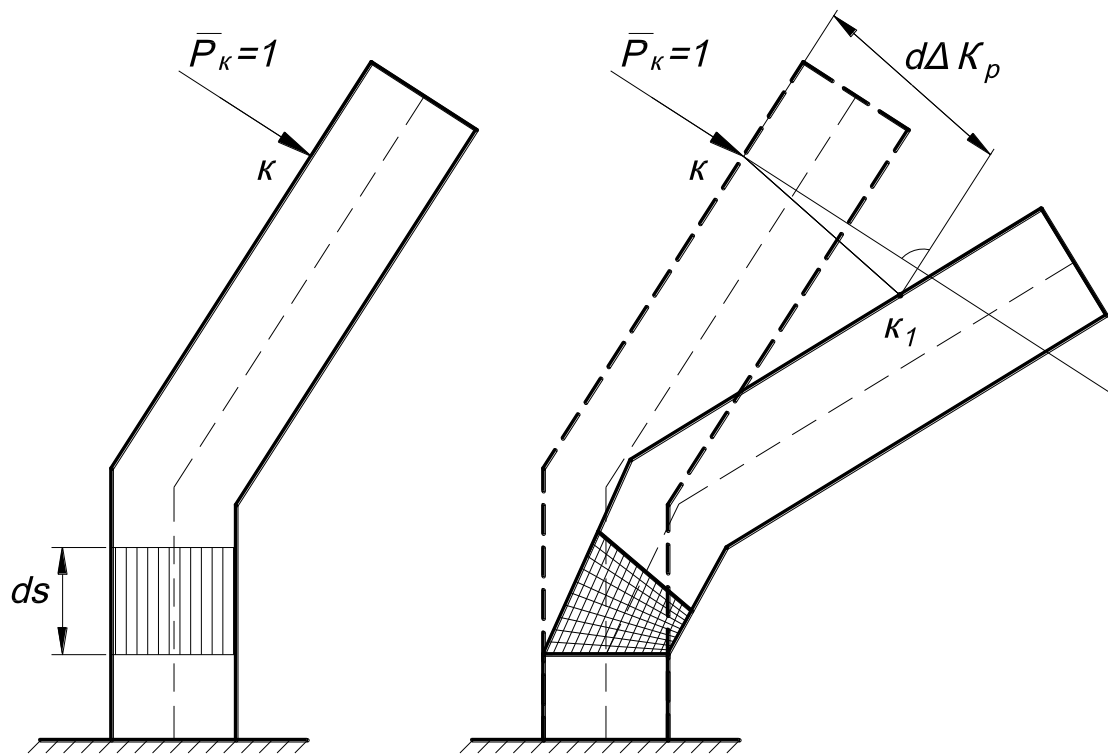


Рис. 6.39. Ламаний стрижень, завантажений одиничною силою.

Відповідно до цього рівняння (6.78) набуде вигляду:

$$1 \cdot d\Delta_{kp} + dW_{kp} = 0. \quad (6.79)$$

де dW_{kp} – елементарна робота внутрішніх зусиль \overline{N}_k , \overline{M}_k і \overline{Q}_k на відповідних викликаних переміщеннях ΔdS_p , $d\varphi_p$ і γ_p , що виникли внаслідок деформації елемента dS (рис. 6.40).

Поздовжня сила \overline{N}_k і згинаючий момент \overline{M}_k виконують роботу:

$$\overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p. \quad (6.80)$$

Оскільки дотичні напруження по поперечному перерізу розподілені за складним законом, то поперечна сила \overline{Q}_k виконує таку роботу:

$$\int_s \bar{\tau}_k \cdot dF \cdot \gamma_p \cdot dS = dS \int_s \bar{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF \quad (6.81)$$

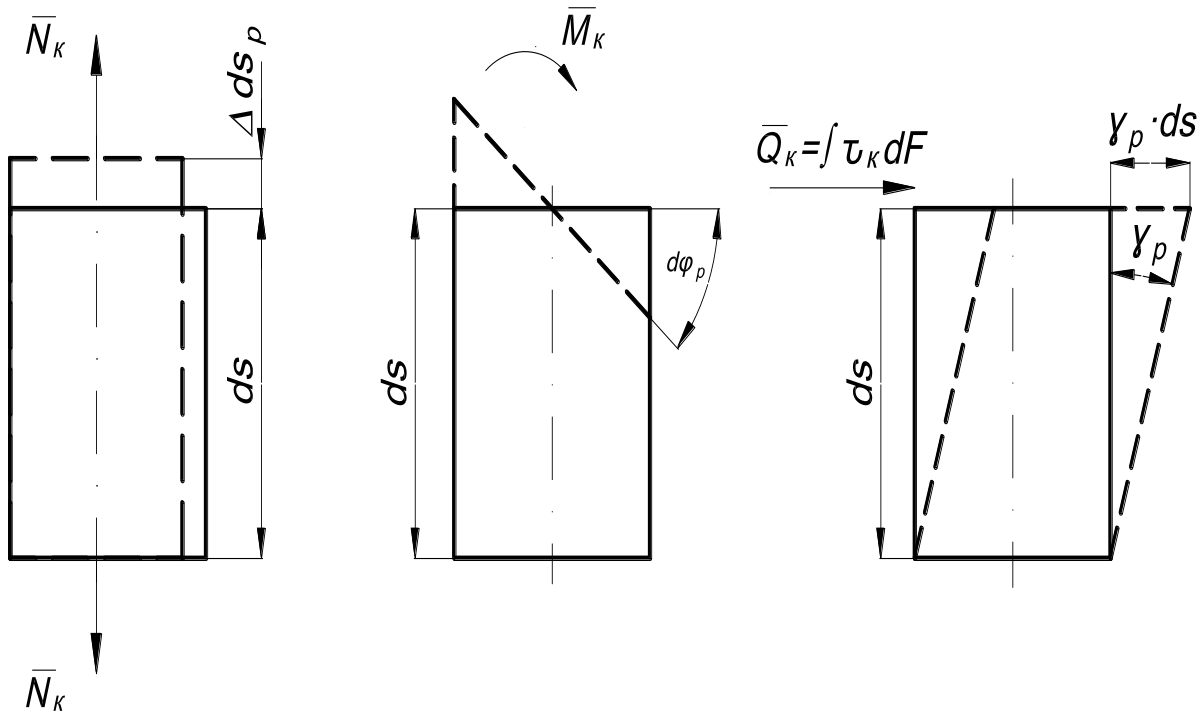


Рис. 6.40. Переміщення, викликані внутрішніми зусиллями.

Відповідно до цього, сумарна робота внутрішніх зусиль рівняється:

$$dW_{kp} = - \left[\bar{N}_k \cdot \Delta ds_p + \bar{M}_k \cdot d\varphi_p + dS \int_s \bar{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF \right] \quad (6.82)$$

Знак «-» у виразі (6.82) тому, що \bar{N}_k , \bar{M}_k і \bar{Q}_k показані, як «зовнішні». Відповідно до цього перетворимо вираз (6.79) з урахуванням виразу (6.82):

$$d\Delta_{kp} = \bar{N}_k \cdot \Delta ds_p + \bar{M}_k \cdot d\varphi_p + dS \int_s \bar{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF \quad (6.83)$$

Знайдемо інтеграл виразу (6.83):

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{від}}{I_x \cdot b_y}; \quad \gamma_p = \frac{\tau_p}{G};$$

$$\int \overline{\tau}_k \cdot \gamma_p \cdot dF = \int \frac{\overline{Q}_k \cdot S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{Q_p \cdot S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} dF =$$

$$= \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_k}{G} \cdot \int_s \left(\frac{S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \right)^2 dF. \quad (6.84)$$

Позначимо:

$$F \cdot \int_s \left(\frac{S_x^{ei\partial}}{I_x \cdot b_y} \right)^2 dF = k, \quad (6.85)$$

Тоді загальний вигляд виразу (6.83) буде таким:

$$d\Delta_{kp} = \overline{N}_k \cdot \Delta dS_p + \overline{M}_k \cdot d\varphi_p + k \cdot \frac{\overline{Q}_p \overline{Q}_k}{G} \cdot dS. \quad (6.86)$$

Враховуючи, що:

$$\Delta dS_p = \frac{N_p dS}{EF} \quad \text{– закон Гука;}$$

$$\Delta \varphi_p = \frac{M_p \cdot dS}{E \cdot I};$$

маємо:

$$d\Delta_{kp} = \frac{\overline{N}_k \cdot N_p}{E \cdot F} \cdot dS + \frac{\overline{M}_k \cdot M_p}{E \cdot I} \cdot dS + k \cdot \frac{\overline{Q}_k \cdot Q_p}{G \cdot F} \cdot dS \quad (6.87)$$

Вираз (6.87) відображає переміщення в точці K за напрямком дії сили $\overline{P}_k = 1$ від деформації тільки ділянки dS .

Для врахування деформації всього стрижня на переміщення точки K необхідно проінтегрувати вираз (6.87) по всій довжині стрижня:

$$\Delta_{kp} = \int \frac{\overline{N}_k \cdot N_p}{E \cdot F} \cdot dS + \int \frac{\overline{M}_k \cdot M_p}{E \cdot I} \cdot dS + k \cdot \int \frac{\overline{Q}_k \cdot Q_p}{G \cdot F} \cdot dS. \quad (6.88)$$

Вираз (6.88) носить назву *інтеграл Мора*.

При центральному розтягу-стиску інтеграл Мора набуває вигляду:

$$M_p = 0, \quad Q_p = 0, \quad \overline{N_k} = 1.$$

$$\Delta_{кр} = \int_l \frac{N_p}{E \cdot F} \cdot dS = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}. \quad (6.89)$$

Вираз (6.89) це закон Гука при розтягу-стиску.

6.7.3. Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна

У 1924 році студент Андрій Костянтинович Верещагін довів, що коли на ділянці балки одна із епюр є лінійною, то переміщення або інтеграл Максвелла-Мора дорівнює добутку площі криволінійної епюри на ординату лінійної епюри, що знаходиться під центром ваги криволінійної епюри.

Будь-який із інтегралів Мора має вигляд:

$$\Delta_{кр} = \int f(S) \cdot \varphi(S) \cdot dS \quad (6.90)$$

і є добуток двох функцій.

Уявімо, що одна із функцій $f(S)$ є лінійною, а інша $\varphi(S)$ – будь-яка довільна (рис. 6.41).

$$\text{Враховуючи, що: } f(S) \cdot dS = d\Omega, \quad (6.91)$$

$$\text{а } \varphi(S) = S \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.92)$$

Підставимо вираз (6.92) та (6.91) у формулу (6.90), отримаємо:

$$\Delta_{кр} = \int \operatorname{tg} \alpha \cdot S \cdot d\Omega = \operatorname{tg} \alpha \int S \cdot d\Omega. \quad (6.93)$$

Очевидно, що інтеграл та $\operatorname{tg} \alpha$ у виразі (6.93) можна перетворити:

$$\int S \cdot d\Omega = \Omega \cdot S_0; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot S_0 = \varphi_0.$$

Матимемо перетворений вираз:

$$\Delta = \Omega \cdot \varphi_0. \quad (6.94)$$

Тобто в межах будь-якої ділянки балки, де обидві епюри є неперервними й одна із них криволінійна, будь-який із інтегралів Мора це добуток площі криволінійної епюри на ординату лінійної епюри, яка знаходиться під центром ваги криволінійної епюри.

Довідковий матеріал необхідний при перемноженні епюр.

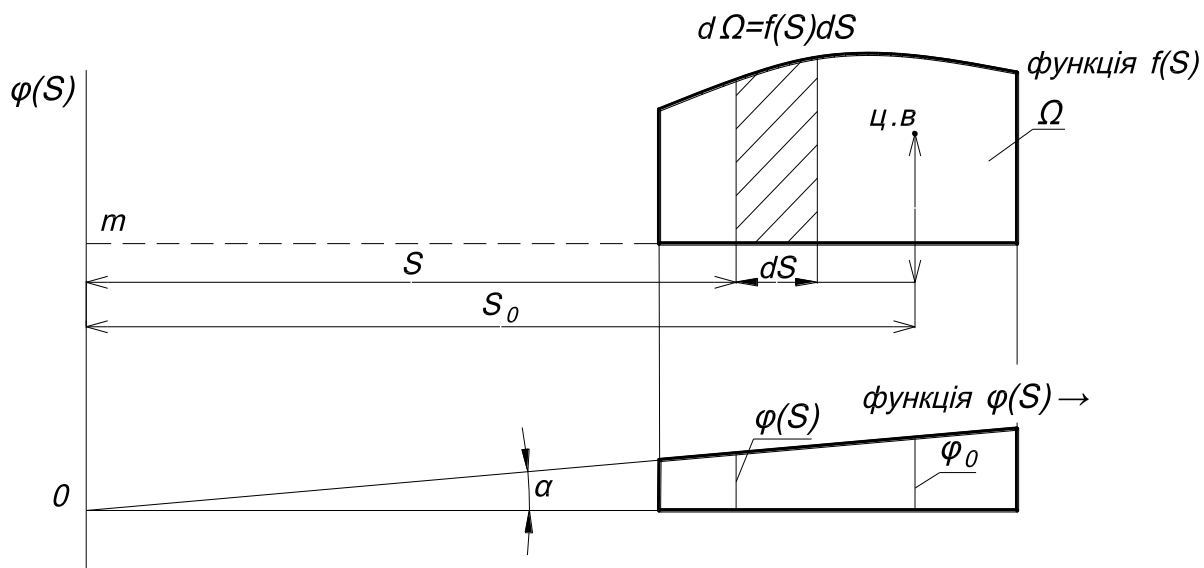


Рис. 6.41. Графічне пояснення до формули (6.90).

При перемноженні двох епюр, які мають форму трапецій (рис. 6.42 а) інтеграл Мора дорівнює:

$$\Delta = \frac{l}{6 \cdot EI} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (6.95)$$

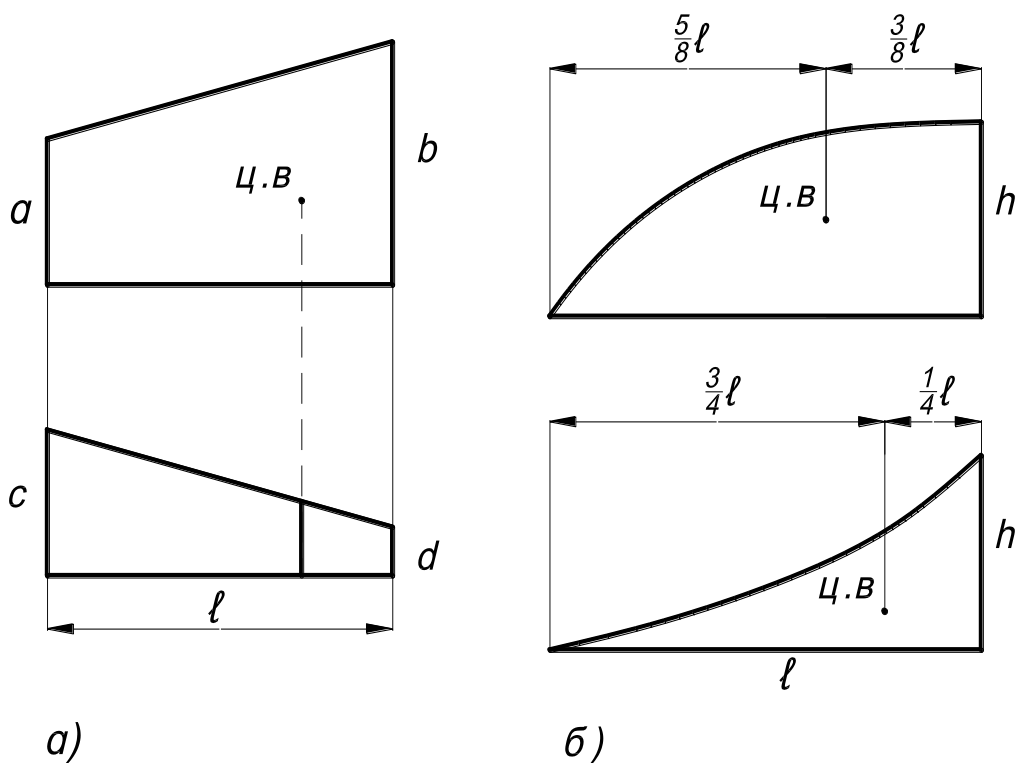


Рис. 6.42. Довідкові параметри по епюрах.

Площа опуклої параболи другого ступеня дорівнює (рис. 6.42 б):

$$F = \frac{2}{3} l \cdot h \quad (6.96)$$

Площа ввігнутої параболи другого ступеня рівна (рис. 6.42 б):

$$F = \frac{1}{3} l \cdot h \quad (6.97)$$

Приклади:

Приклад 1. Знайти в точках A та B балки (рис. 6.43) прогини (V_A, V_B) і кути повороту (φ_A, φ_B).

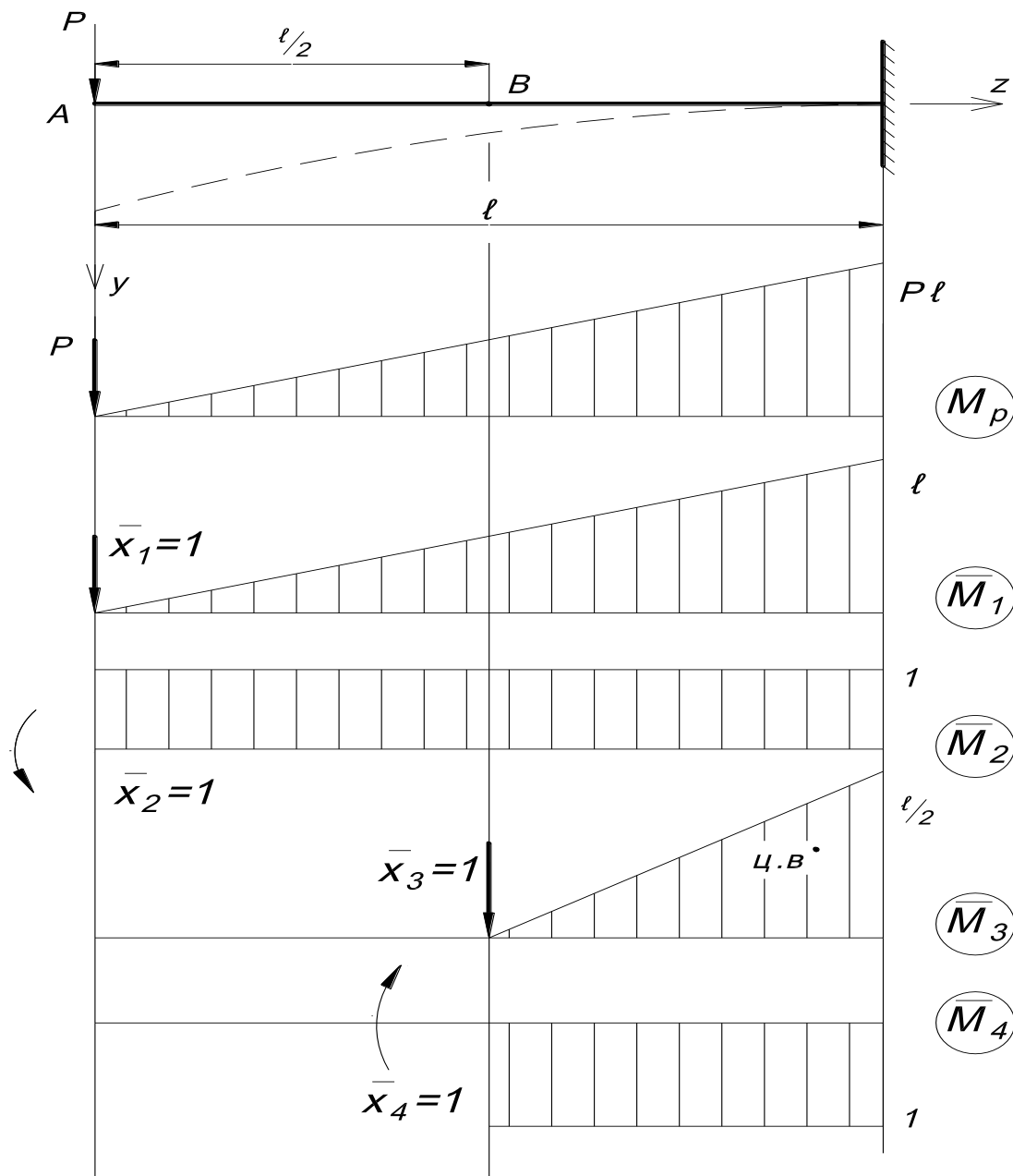


Рис. 6.43. Схема до прикладу 1.

$$\Delta_{1P} = V_A = V_{(z=0)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{Pl^3}{3EI};$$

$$\Delta_{2P} = \varphi_A = \varphi_{(z=0)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot 1 \right) = \frac{Pl^2}{2EI};$$

$$\Delta_{3P} = V_B = V_{(z=\frac{l}{2})} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{Pl}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{2} \right) \right] = \frac{5Pl^3}{48EI};$$

$$\Delta_{4P} = \varphi_B = \varphi_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{1}{EI} \left(1 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot Pl \right) = -\frac{3Pl^2}{8EI}.$$

Знак «мінус» вказує, що епюри M_p і \overline{M}_4 розташовані по різні боки від базисної лінії.

Приклад 2. Знайти прогин і кут повороту в точці C (V_C , φ_C) та кут повороту в точці A (φ_A) (рис. 6.44).

$$\Delta_{1P} = V_C = V_{(z=\frac{l}{2})} = \frac{1}{EI} \left[\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \frac{l}{4} \right] \cdot 2 = \frac{5ql^4}{384EI};$$

$$\Delta_{2P} = \varphi_A = \varphi_{(z=0)} = \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{ql^3}{24EI};$$

$$\Delta_{3P} = \varphi_C = \varphi_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \frac{ql}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \frac{ql}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0.$$

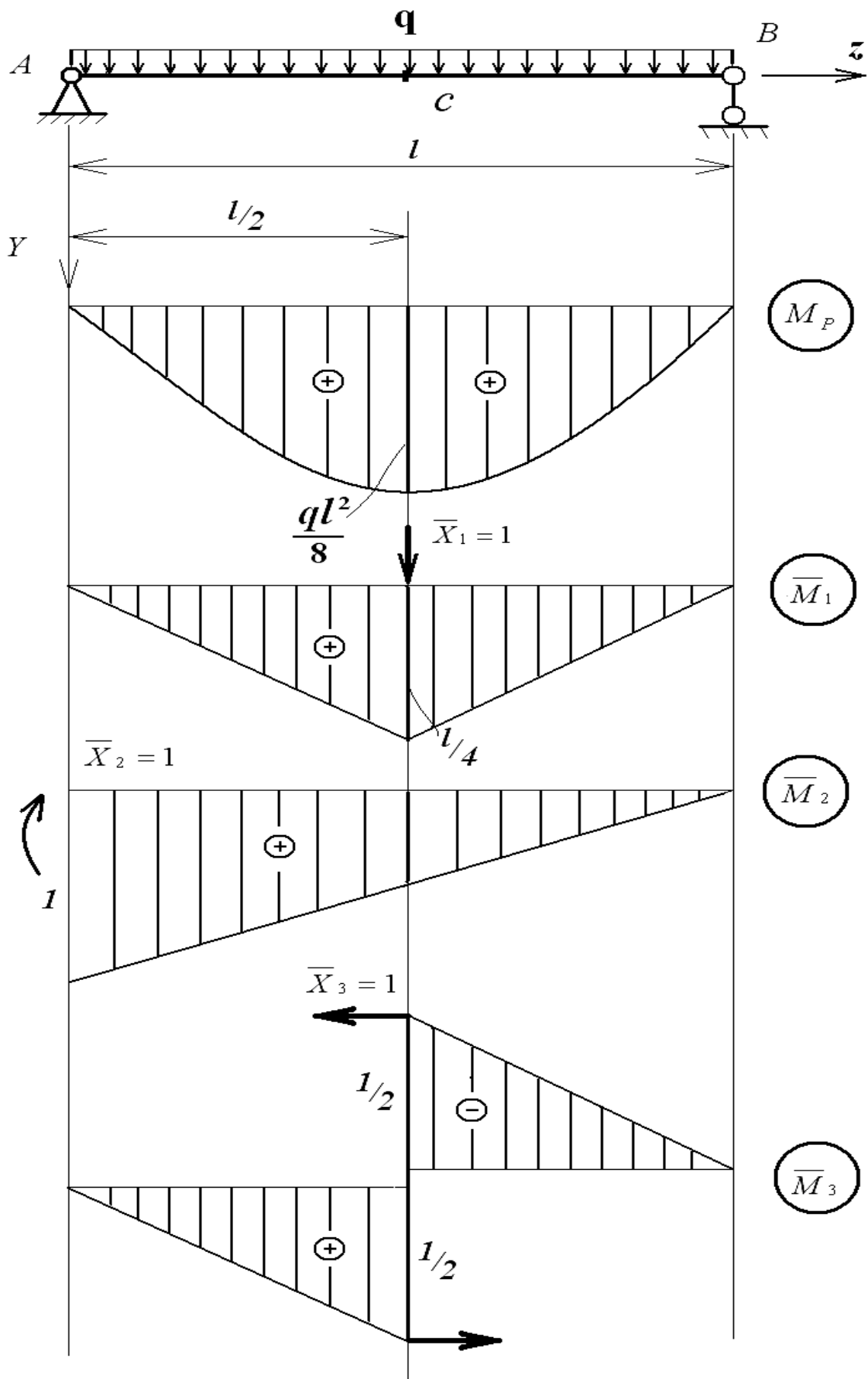


Рис. 6.44. Схема до прикладу 2.

6.8. Приклади задач на згинання плоских стрижнів

Приклад 1

Визначити прогин вільного кінця балки (будь-яким методом).

Дано: балку, що зображена на рисунку 6.45.

$\alpha = 0,5$; $l = 3,0$ м; $P = 5$ кН; $\beta = 0,5$.

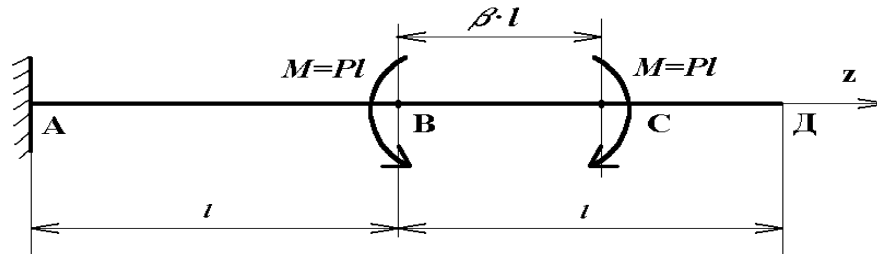


Рис. 6.45. Схема консольно затиснутої балки

1. Визначаємо реакції опор за рівняннями рівноваги:

$$\begin{cases} \sum Z_1 = 0; \\ \sum Y_1 = 0; \\ \sum M_{1A} = 0; \end{cases}$$

За результатами підрахунків реакції опори в точці А приймають нульові значення.

2. Записуємо універсальне рівняння зігнутої осі балки.

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot z \pm \sum \frac{M_1(z-a)^2}{2} \pm \sum \frac{P_1(z-b)^3}{6} \pm \sum \frac{q_1(z-c)^4}{24}$$

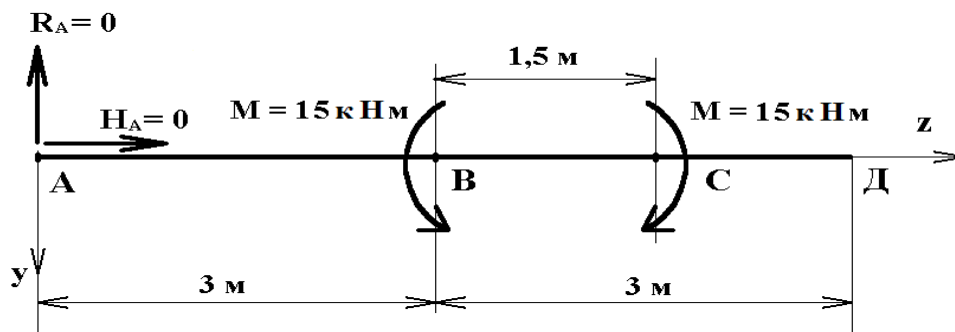


Рис. 6.46. Розрахункова схема до задачі №1

Вигляд універсального рівняння зігнутої осі балки стосовно умов закріплення балки та прикладеного навантаження:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot z + \frac{M_1(z-3)^2}{2} - \frac{M_1(z-4.5)^2}{2}$$

Оскільки балка має консольне затиснення то початкові параметри лінійного і кутового прогину рівні нулю:

$$V_0=0; \theta_0=0;$$

Знайдемо прогин осі балки в точці Д (при $z = 6\text{ м}$):

$$EIV(z) = EIV_D = \frac{15(6-3)^2}{2} - \frac{15(6-4.5)^2}{2} = \frac{15}{2} \cdot (3^2 - 1.5^2) = 50,6 \text{ (кН/м}^3\text{)};$$

$$EIV(z) = EIV_D = 50,6 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$V(z) = 50,6/EI \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

Якщо для балки відомий модуль пружності E і момент інерції перерізу, то з останнього виразу знаходимо числові значення прогину точки Д балки.

Приклад2

Аналіз напруженого стану та повний розрахунок на міцність. Визначення переміщень та розрахунок на жорсткість при поперечному згинанні.

Частина 1

Підібрати переріз балки, що складається з двох двотаврів, а також круглий та квадратний переріз і вибрати найбільш раціональний варіант. Схема розміщення навантаження показана на рисунку.

Дано:

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа}; [\tau] = 100 \text{ МПа}; l = 2 \text{ м}; q = 40 \text{ кН/м}; M = 40 \text{ кН}.$$

Знайти: W_{\max} -? M_x -? Q_y -?

1. Визначення опорних реакцій.

Вважаємо балку абсолютно жорсткою. Знайдемо суму моментів сил відносно опор А і В та прирівняємо її до нуля. Момент сили, який здійснює обертання проти годинникової стрілки будемо враховувати зі знаком «+».

Рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q замінимо зосередженою силою Q . Точка прикладання сили Q знаходиться на відстані $l/2 = 1\text{ м}$ від точки А.

$$Q = q \cdot l = 40 \cdot 2 = 80 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; -Q \cdot 1 + R_B \cdot 4 + M = 0 = -80 + 4 R_B + 40 = 0$$

$$\text{Звідси } R_B = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 4 + 3Q + M = -4R_A + 240 + 40 = 0$$

$$4R_A = -280; \text{ звідси } R_A = 70 \text{ кН}.$$

Перевірка : $\sum F_y = 0; -R_A + q \cdot 2 - R_B = -70 + 80 - 10 = 0$

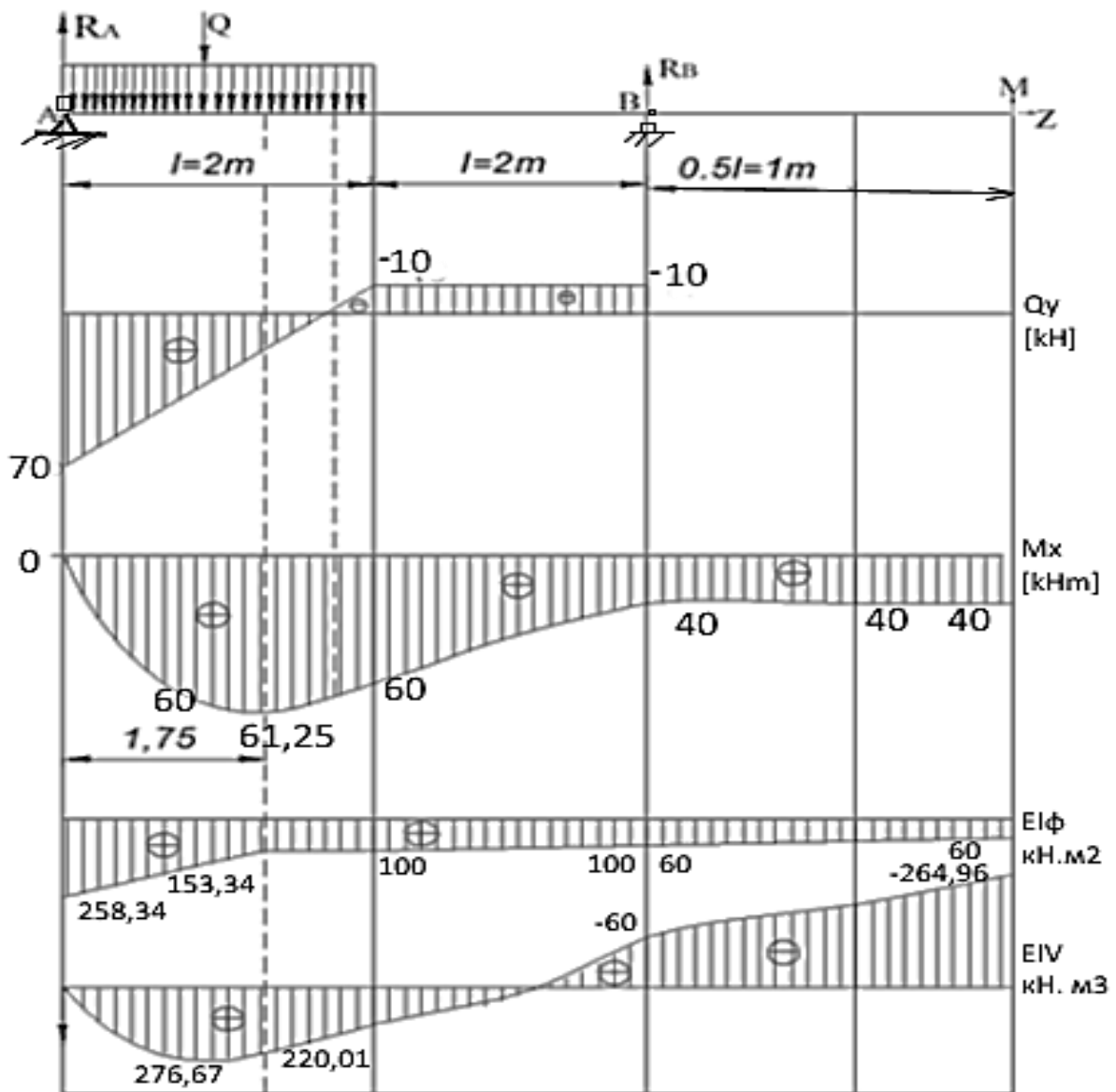


Рис.6.47.Розрахункова схема до задачі

2. Намічаємо ділянки балки та вибираємо характерні перерізи.

- ①-Ділянка $0 \leq z \leq 2 \text{ м}$ (1,2 переріз)
- ②- Ділянка $0 \leq z \leq 4 \text{ м}$ (3,4 переріз)
- ③- Ділянка $0 \leq z \leq 5 \text{ м}$ (5,6 переріз)

3. Побудова епюр поперечних сил , враховуючи лінійний закон :

$q_z = \text{const} :$

$Q_{z1} = R_A = 70 \text{ кН};$

$Q_{z2} = R_A - q \cdot 2 = 70 - 2 \cdot 40 = -10 \text{ кН};$

$Q_{z3} = - R_B = - 10 \text{ кН} = Q_{z4};$

$$Q_{z5} = 0 = Q_{z6}.$$

4. Побудова епюри моментів згинання M_z на 1 ділянці, де розташоване рівномірно розподілене навантаження, має вигляд квадратної параболи. Знайдемо найвищу точку параболи:

$$Z_c = \frac{Q_y}{q} = \frac{70 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^3} = 1,75 \text{ м}$$

Обчислюємо момент згинання

$$M_{z1} = 0; \quad M_{z2} = R_A \cdot 2 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 70 \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z3} = R_A l - \frac{q l^2}{2} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z3c} (1,75) = 70 \cdot 1,75 - 40 \cdot \frac{(1,75)^2}{2} = 61,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z4} = M_{z5} = M_{z6} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

5. Підбір перерізу. Із побудованих епюр M_z і Q_y вибираємо максимальні значення.

$$Q_{y \max} = 70 \text{ кН}; \quad M_{z \max} = 61,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Визначаємо необхідний момент опору перерізу:

$$W_{\text{необх}} = \frac{M_{z \max}}{[\delta]} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = \frac{0,0383}{10^3} = 383 \text{ см}^3$$

Поперечний переріз складається з двох двотаврів, то для 1 двотавра:

$$W_{\text{необх}} = \frac{M_{z \max}}{2} = \frac{383}{2} = 191 \text{ см}^3$$

По сортаменту вибираємо двотавр 20А, для якого $W_x > W_{\text{необх}}$:

$$W_x = 203 \text{ см}^3; \quad I_x = 2030 \text{ см}^4; \quad S_x = 114 \text{ см}^3; \quad d = 0,52 \text{ см}$$

Оскільки W_x підбраного двотавра більше, ніж $W_{\text{необх}}$, то умова міцності за нормальними напруженнями виконується.

$$\delta_{z \max} = \frac{M_{z \max}}{W_x} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{2 \cdot 203 \cdot 10^{-6}} = 150,9 \text{ МПа} < [\sigma]$$

Перевіряємо умову міцності по дотичних напруженнях:

$$\tau_{y \max} \frac{Q_{y \max} \cdot S_x}{I_x \cdot b_y} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 2030 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 3,57 \text{ МПа} < [\tau]$$

Підібраний переріз задовольняє умови міцності.

6. Підберемо круглий переріз балки діаметром “d”:

$$W_{\text{необх}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{[\delta]} = 383 \text{ см}^3$$

Для круглого прерізу:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1 d^3; \quad \text{звідси} \quad d = \sqrt[3]{\frac{383}{0,1}} = 157 \text{ см}$$

Перевіримо умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{z_{\text{max}}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{W_{\text{необх}}} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{383 \cdot 10^{-6}} = 159,9 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

Перевіримо умови міцності за дотичними напруженнями.

$$\tau_{z_{\text{max}}} = \frac{4}{3} \frac{Qy_{\text{max}}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{70 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (15,7 \cdot 10^{-2})^2} = 4,8 \text{ МПа} < [\tau]$$

Круглий переріз $d=15,7$ см задовольняє умови міцності.

7. Підбираємо квадратний переріз із стороною “a”

$$W_{\text{max}} = 383 \text{ см}^3; \quad W_x = \frac{a^3}{6}; \quad 383 = \frac{a^3}{6};$$

$$a = \sqrt[3]{383 \cdot 6} = 13,4 \text{ см}$$

Перевіримо умови міцності за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{z_{\text{max}}} = \frac{Mz_{\text{max}}}{W_x} = \frac{61,25 \cdot 10^3}{383 \cdot 10^{-6}} = 160 \text{ МПа} \leq [\sigma]$$

Перевіримо умови міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Qy_{\text{max}}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{70 \cdot 10^3}{(13,4 \cdot 10^{-2})^2} = 5,8 \text{ МПа} < [\tau]$$

Квадратний переріз із сторонами $a=13,4$ см задовольняє умови міцності.

Вибираємо найбільш раціональний варіант перерізу балки і порівнюємо площі підібраних перерізів балок:

$$F_{\text{II}} = 2 \cdot 28,9 = 57,8 \text{ см}^2;$$

$$F_0 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (15,7)^2}{4} = 194 \text{ см}^2;$$

$$F_{\text{■}} = a^2 = (13,4)^2 = 180 \text{ см}^2$$

Найбільш раціональним є складовий переріз балки, що складається з двох двотаврів.

Частина 2.

За знайденими значеннями необхідно побудувати епюри нормальних, дотичних та головних нормальних і дотичних напружень

$$h = 200 \text{ мм} = 0,2 \text{ м};$$

$$S_x = 203 \text{ см}^3 = 2,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$b = 110 \text{ мм} = 0,11 \text{ м};$$

$$I_x = 2030 \text{ см}^4 = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$$

$$d = 5,2 \text{ мм} = 0,0052 \text{ м};$$

$$W_z = 203 \text{ см}^3 = 2,03 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$t = 86 \text{ мм} = 0,0086 \text{ м};$$

$$M_{\max} = 61,25 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$F = 28,9 \text{ см}^2 = 0,00289 \text{ м}^2;$$

$$Q_{\max} = 70 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

1. Знаходимо координати в точках

$$Y_1 = \frac{h}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ м}; \quad Y_2 = Y_3 = h/2 - t = 0,1 - 0,0086 = 0,0914 \text{ м};$$

$$Y_4 = 0; \quad Y_5 = Y_6 = -0,0914 \text{ м}; \quad Y_7 = -0,1 \text{ м}$$

2. Будуємо епюру нормальних напружень σ_z , для цього знайдемо їх значення в точках. Пам'ятаємо, що за умовою в конструкції 2 двотаври.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{2W_x} = \frac{M \cdot y_i}{2I_x}$$

$$\sigma_{z1} = \frac{61,25 \cdot 10^3 \cdot 0,1}{2 \cdot 2,003 \cdot 10^{-5}} = 150,9 \text{ МПа}; \quad \sigma_{z2} = \sigma_{z3} = \frac{61,25 \cdot 10^3 \cdot 0,0914}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5}} = 137,89 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z4} = 0; \quad \sigma_{z5} = \sigma_{z6} = -137,89 \text{ МПа}; \quad \sigma_{z7} = -150,9 \text{ МПа}$$

3. Визначаємо значення дотичних напружень з врахуванням подвійної жорсткості та побудуємо епюру.

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_i}$$

Спочатку знаходимо статичні моменти площі кожної ділянки перерізу.

$$S_{x1} = F \cdot x_1 = 0;$$

$$S_{x2} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = S_{x3} = 0,11 \cdot 0,0086 \cdot \left(\frac{0,2}{2} - \frac{0,0086}{2}\right) = 0,000946 \cdot 0,0957 = \\ = 0,000091 = 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$S_{x4} = (b \cdot t) \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) \cdot d = d \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = (0,11 \cdot 0,0086) \cdot \left(\frac{0,2}{2} - \frac{0,0086}{2}\right) = \\ = 0,000091 + (0,1 - 0,0086) \cdot 0,0052 \cdot \left(\frac{0,1 - 0,0086}{2}\right) = \\ = 0,000091 + 0,0914 \cdot 0,0052 \cdot 0,045 = \\ = 0,000091 + 0,0000217 = 0,000113 \text{ м}^3 = 11,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$$

$$\tau_{zy1} = \frac{Qy.Sx}{2.Ix.bi} = 0;$$

$$\tau_2 = \tau_6 = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,11} = 1426 \cdot 10^3 \text{ Па} = 1,43 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \tau_5 = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 9,1 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0052} = 30,17 \text{ МПа};$$

$$\tau_{z4} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 11,3 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 2,03 \cdot 10^{-5} \cdot 0,0052} = 37,47 \text{ МПа}$$

4. Будемо епюри головних нормальних напружень.

$$\sigma^{1/3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$$

Точка 1

$$\sigma_1 = \frac{150,9}{2} + \sqrt{\left(\frac{150,9}{2}\right)^2 + 0^2} = 75,45 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{150,9}{2} - \sqrt{\left(\frac{150,9}{2}\right)^2 + 0^2} = 0 \text{ МПа};$$

Точка 2

$$\sigma_1 = \frac{137,89}{2} + \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 1,43^2} = 131,91 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{137,89}{2} - \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 1,43^2} = -0,1 \text{ МПа};$$

Точка 3

$$\sigma_1 = \frac{137,89}{2} + \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 30,17^2} = 144,21 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{137,89}{2} - \sqrt{\left(\frac{137,89}{2}\right)^2 + 30,17^2} = -6,31 \text{ МПа};$$

Точка 4

$$\sigma_1 = \frac{0}{2} + \sqrt{0^2 + 37,47^2} = 37,47 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{0}{2} - \sqrt{0^2 + 37,47^2} = -37,47 \text{ МПа};$$

Точка 5

$$\sigma_1 = 6,31;$$

$$\sigma_3 = -144,21;$$

Точка 6

$$\sigma_1 = 0,1;$$

$$\sigma_3 = -131,91;$$

Точка 7

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_3 = -75,45$$

5. Знайдемо максимальні значення напружень:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\text{Точка 1: } \tau_{max1} = \frac{75,45 + 0}{2} = 37,73 \text{ МПа};$$

точка 2: $\tau_{\max 2} = \frac{131,91 - (-0,1)}{2} = 65,96 \text{ МПа};$
 точка 3 : $\tau_{\max 3} = \frac{144,21 - (-6,31)}{2} = 75,26 \text{ МПа};$
 точка 4 : $\tau_{\max 4} = \frac{37,47 - (-37,47)}{2} = 37,47 \text{ МПа};$
 точка 5 : $\tau_{\max 5} = \frac{6,31 - (-144,21)}{2} = 75,26 \text{ МПа};$
 точка 6: $\tau_{\max 6} = \frac{0,1 - (-131,91)}{2} = 65,96 \text{ МПа};$
 точка 7: $\tau_{\max 7} = \frac{0 - (-75,45)}{2} = 37,73 \text{ МПа}$

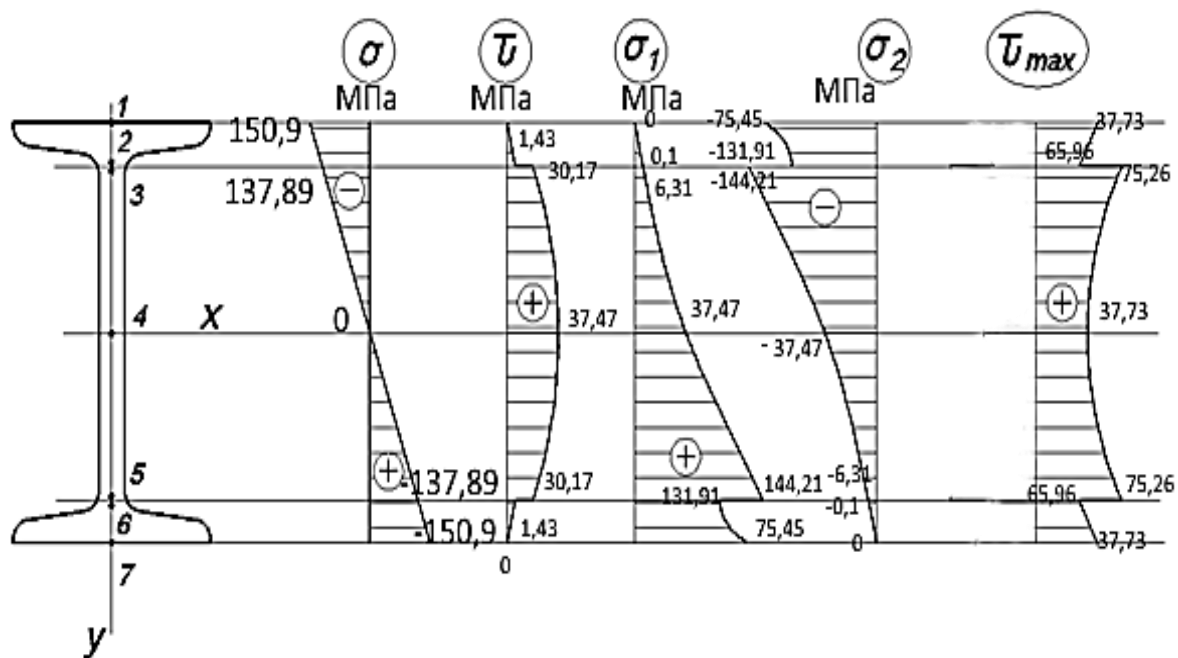


Рис. 6.48. Епюри до частини 2

Частина 3.

Необхідно побудувати епюри кута повороту та прогину. Розрахункові дані вибвраємо з частини 1, 2.

Дано: $R_B = 10 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н};$
 $q = 40 \text{ кН/м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН/м};$ $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м} = 40 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м};$
 $R_A = 70 \text{ кН} = 70 \cdot 10^3;$ $I_x = 2030 \text{ см}^4 = 2,03 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4;$

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100}$$

1. Запишемо універсальне рівняня прогинів

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2} \right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24}$$

Використовуємо початкові умови прогин в опорах:

$$V(A) = 0; \quad V(B) = 0.$$

Запишемо рівняння для визначення початкових параметрів:
 EIV_0 ; $EI\varphi_0$:

$$EIV(A) = EIV(0) = EIV_0 = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z - \frac{R_A(0-0)^3}{6} = 0; \quad EIV_0 = 0;$$

$$EIV(B) = EIV(4) = EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 0;$$

$$0 + EI\varphi_0 \cdot 4 - \frac{70 \cdot 4^3}{6} + \frac{(4-0)^4}{24} - 4 \frac{(4-2)^4}{24} = 0;$$

$$EI\varphi_0 \cdot 4 = 746,67 + 26,67 - 426,67; \quad EI\varphi_0 = 286,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$$

2. Знайдемо кути поворотів за допомогою універсального рівняння кутів повороту:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \pm \sum M(z-a) \pm \sum P \frac{(z-b)^2}{2} \pm \sum q \frac{(z-c)^3}{6}$$

$$EI\varphi(1) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (1-0)^2}{2} + \frac{q(1-0)^3}{6} - \frac{q(1-1)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 1}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 258,34 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(2) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (2-0)^2}{2} + q \frac{(2-0)^3}{6} - \frac{q(2-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 2^2}{2} + \frac{40 \cdot 1^3}{6} = 153,34 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(4) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot (4-0)^2}{2} + q \frac{(4-0)^3}{6} - q \frac{(4-2)^3}{6} = 286,67 - \frac{70 \cdot 4^2}{2} + \frac{40 \cdot 4^3}{6} - \frac{40(2)^3}{6} = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$EI\varphi(5) = EI\varphi_0 - \frac{R_A \cdot 5^2}{2} + q \frac{(5-0)^3}{6} - q \frac{(5-0)^3}{6} - \frac{R_B(5-4)^2}{2} + M(5-5) = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$$

3. Знайдемо прогини за допомогою універсального рівняння прогинів:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 \cdot z \pm \sum M \left(\frac{z-a}{2}\right)^2 \pm \sum P \frac{(z-b)^3}{6} \pm \sum q \frac{(z-c)^4}{24}$$

$$EIV(1) = EIV_0 + EI\varphi_0(z) - \frac{R_A \cdot (1-0)}{6} + q \frac{(1-0)^4}{24} - q \frac{(1-1)^4}{24} = 286,67 - \frac{70}{6} + \frac{40}{24} = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(2) = EIV_0 + EI\varphi_0(z) - \frac{R_A \cdot 2^3}{6} + q \frac{(2-0)^4}{24} - q \frac{(2-2)^4}{24} = 286,67 - 93,34 + 26,67 = 220,01 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

$$EIV(4) = EIV_0 + EI\varphi_0(z) - \frac{R_A \cdot 4^3}{6} + q \frac{(4-0)^4}{24} - q \frac{(4-2)^4}{24} = 286,67 - 746,67 + 426,67 - 26,67 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}^3;$$

$$EIV(5) = EIV_0 + EI\varphi_0(z) - \frac{R_A \cdot 5^3}{6} + q \frac{(5-0)^4}{24} - q \frac{(5-2)^4}{24} + M \frac{(5-5)^2}{2} = 286,67 - 1458,34 + 1041,67 - 135 + 0 = -264,96 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$$

4. Визначимо, чи забезпечена жорсткість.

Прольот, де прогин максимальний ($EIV (1) = 276,67 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$) має довжину 4 м.

$$\left[\frac{f}{l}\right] = \frac{1}{100} = \frac{f}{4} \Rightarrow [f] = 0,04$$

$$f_{\text{розр.}} = \frac{V_{\text{max}}}{EI} = \frac{276,67 \cdot 10^3}{2 \cdot (2 \cdot 10^{11} \cdot 2,03 \cdot 10^{-5})} = 0,034$$

$$[f] > f; \quad 0,04 > 0,034$$

Умова жорсткості забезпечена

6.9. Тестові завдання

Нижче наведено посилання для використання електронного тестового навчального тренажера до теми «Згин»

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=37456>



Електронний тестовий навчальний тренажер до теми «Згин»

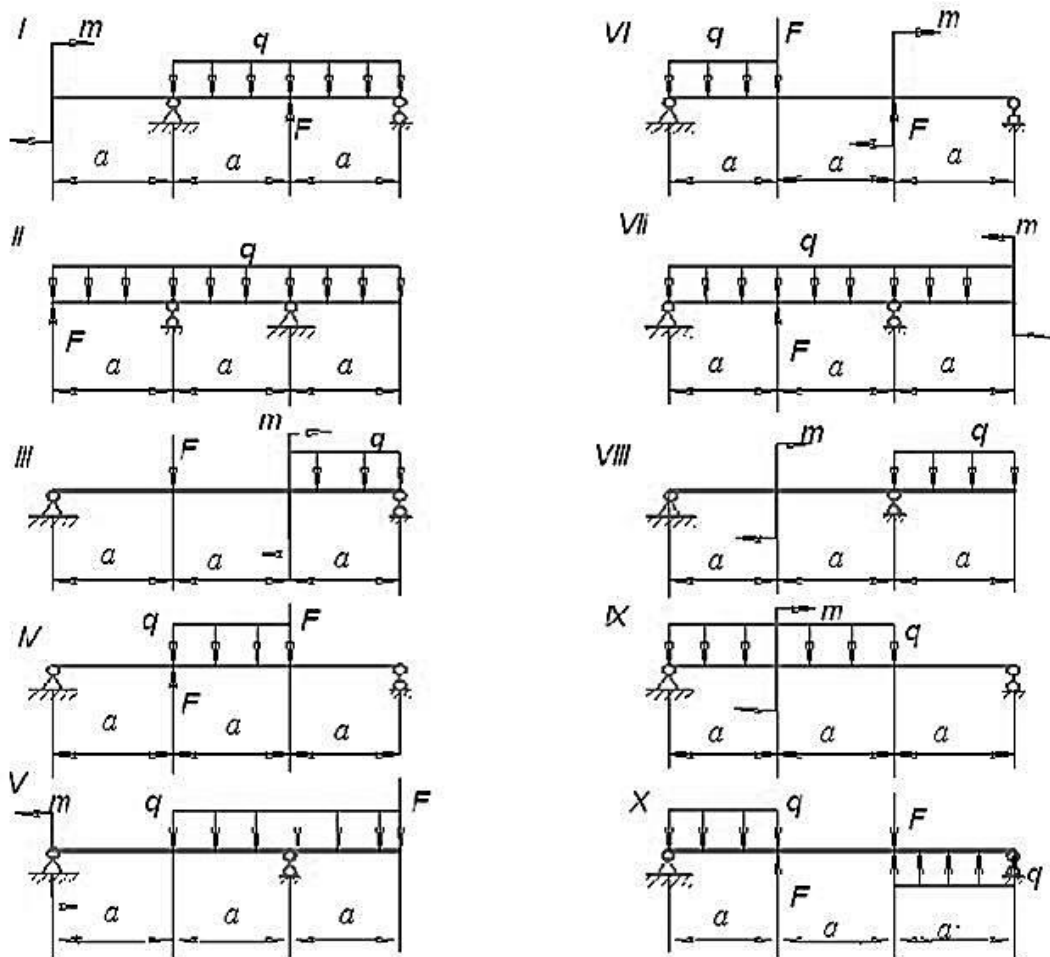
6.10. Завдання для самостійного виконання

Задача 1. Визначити прогин вільного кінця балки будь-яким методом

Таблиця 6.2

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	a, м
1	10	5	7	2
2	20	10	8	1
3	30	2	12	3
4	40	3	14	2
5	15	4	10	5
6	25	7	9	4
7	35	8	13	3
8	5	12	14	4
9	45	4	17	2
10	10	7	9	1

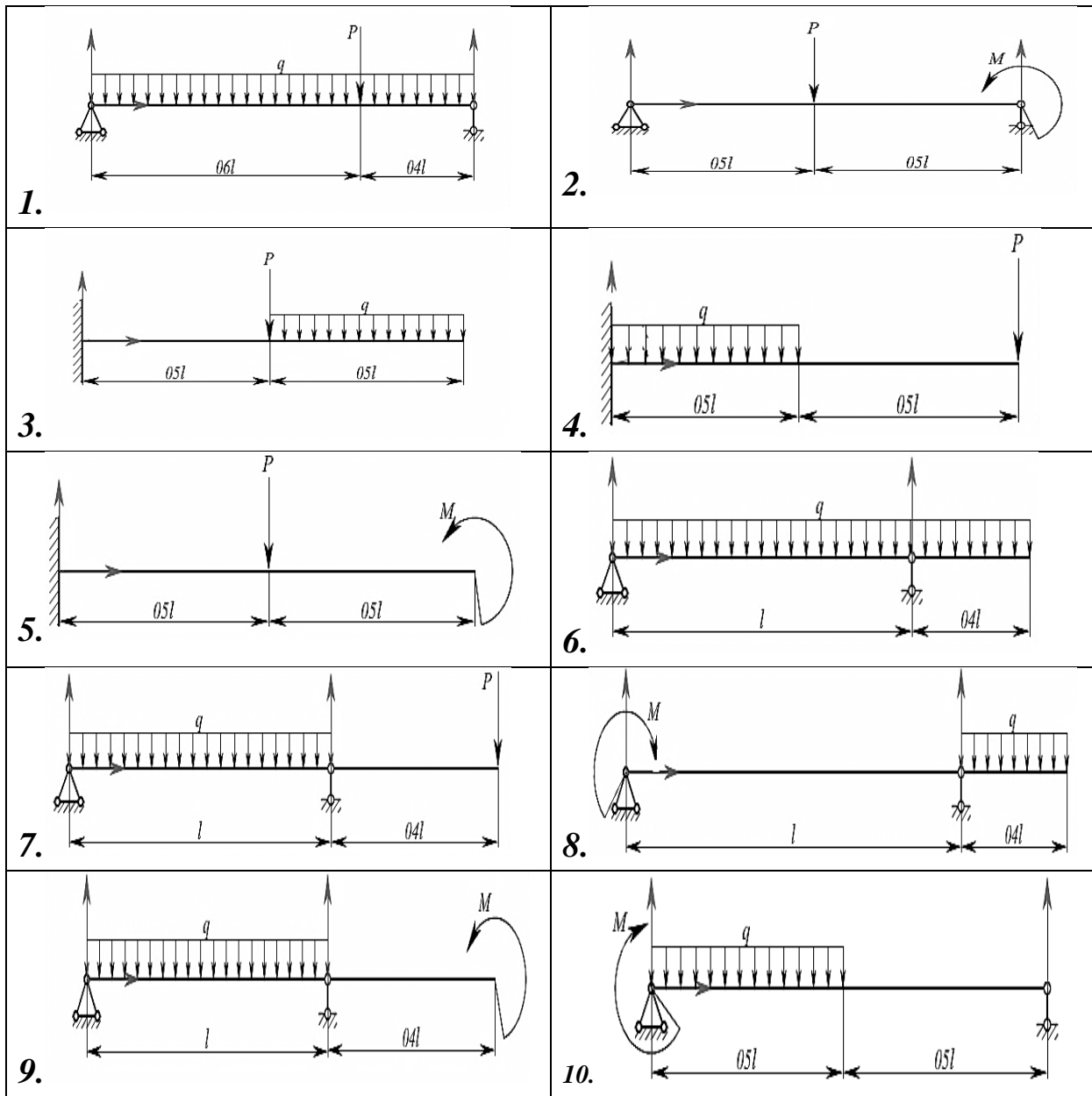


Задача 2. Виконати аналіз напруженого стану та повний розрахунок на міцність. Визначити переміщення та провести розрахунок на жорсткість при поперечному згинанні.

Таблиця 6.3

Варіанти завдань для самостійного виконання

№ Вар.	№ Сх.	№ Рядка	Довжина, l (м)	P , МН	Навантаження q , МН/м	M , МН·м	$1:(f/l)$
1	1	1	3,0	0,010	0,005	0,004	1:500
2	2	2	3,2	0,011	0,006	0,005	1:520
3	3	3	3,4	0,012	0,007	0,006	1:540
4	4	4	3,6	0,013	0,008	0,007	1:560
5	5	5	3,8	0,014	0,009	0,008	1:580
6	6	1	4,0	0,015	0,010	0,009	1:600
7	7	2	4,2	0,016	0,011	0,010	1:620
8	8	3	4,4	0,017	0,012	0,011	1:640
9	9	4	4,6	0,018	0,013	0,012	1:660
10	0	5	4,8	0,019	0,014	0,013	1:680



Розділ 7. Статично невизначені системи

7.1. Прості статично-невизначені системи (СНС)

7.1.1. Етапи розрахунку статично невизначених систем

Для того, щоб будь-яка система (балка) мала здатність сприймати зовнішні навантаження, її закріплюють за допомогою опор (опорних в'язей) таким чином, щоб вона не мала можливості переміщуватися як тверде тіло. Для плоскої системи цих в'язей повинно бути не менше трьох (абсолютно необхідні зв'язки), оскільки відкидання одного із цих зв'язків перетворить систему на геометричну змінну (механізм). Тобто відбудеться переміщення системи без її деформації. Такі системи називають **статично визначеними**.

Якщо на статично-визначену систему накласти в'язей більше ніж абсолютно необхідних, то система перейде до розряду статично невизначених систем (СНС), а в'язі, накладені поверх абсолютно необхідних, називають «зайвими» зв'язками. За кількістю зайвих зв'язків визначається ступінь статичної невизначеності системи. Зусилля в зайвих в'язях називають зайвими зусиллями.

На рис. 7.1 відображено первинну статично невизначену систему. Щоб балка (рис. 7.1) була статично визначена (тобто мала три реакції в'язей, які можна знайти за допомогою умов рівноваги) необхідно, щоб в'язі були такими, реакцій яких було не більше трьох. На рис. 7.1 маємо чотири реакції в'язей H_A , V_A , R_C і R_B . Одна реакція в'язей залишається зайвою. Тому така система один раз статично невизначена.

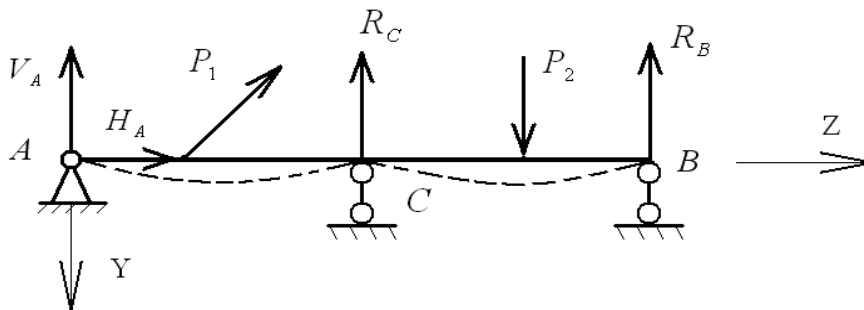


Рис. 7.1. Статично невизначена система (СНС).

Для розкриття статичної невизначеності системи роблять: відкидають зайві в'язі, а їх дію на систему замінюють зайвими

(невідомими) зусиллями X_1, X_2, \dots, X_n . Завантажують основну систему (систему з відкинутими зайвими в'язями) зовнішнім навантаженням і зайвими реакціями в'язей – еквівалентна система (рис. 7.2).

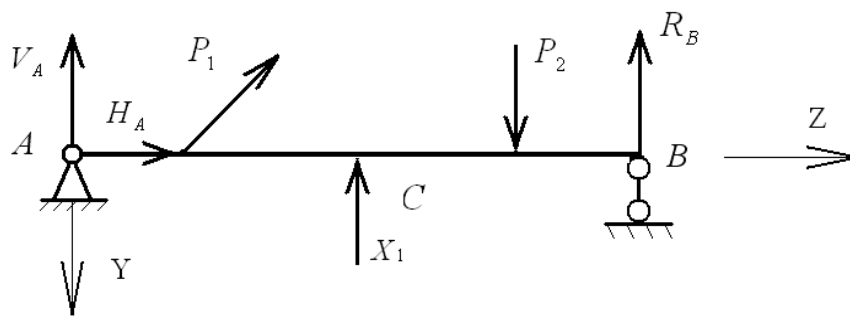


Рис. 7.2. Еквівалентна система.

На рис. 7.2 одна зайва в'язь (наприклад, в точці С). Реакцію цієї в'язі (зайве зусилля) позначимо через X_1 .

Для визначення невідомих X_1, X_2, \dots, X_n складаємо рівняння деформації, тлумачення яких таке: основна система повинна деформуватися як задана, тобто переміщення в точках прикладання зайвих зусиль повинні дорівнювати нулю. Такі рівняння називають рівняннями сумісності деформацій. З рівнянь сумісності деформацій визначаємо величину зайвих зусиль, а потім із рівнянь статички визначаємо інші реакції опор, будуємо епюри внутрішніх зусиль і виконуємо конкретні розрахунки конструкцій.

7.1.2. Канонічні рівняння методу сил

Етапи розрахунку статично невизначених систем:

1. Визначають ступінь статичної невизначеності системи, що дорівнює кількості зайвих в'язей.

2. Шляхом відкидання зайвих в'язей обирають основну систему, яка повинна бути статично визначеною системою і геометрично незмінною (можливо кілька варіантів основної системи). Рациональний вибір основної системи спрощує розрахунок.

3. Завантажуємо основну систему зовнішнім зусиллям і зусиллям зайвих відкинутих в'язей – створюємо еквівалентну систему. Еквівалентність основної системи полягає в тому, що вона деформується так само як задана система, тобто переміщення в точках прикладання зайвих зусиль дорівнює нулю.

4. Для складання рівнянь сумісності деформацій прирівнюємо до нуля переміщення в точках прикладання зайвих зусиль і з цього визначаємо невідомі зусилля.

Враховуючи в подальшому знайдене зусилля як зовнішнє навантаження і визначаємо основні реакції опор, будуємо епюри зовнішніх зусиль і виконуємо подальший розрахунок.

Найбільш вдалим є метод визначення переміщень за допомогою інтегралу Мора з перемноженням епюр за способом Верещагіна. Така схема розрахунку називається **методом сил**, оскільки невідомими ми вважаємо сили.

7.1.3. Етапи розрахунку статично невизначених систем

Коли розрахунку підлягають складні системи із ступенем статичної невизначеності два і більше, то доводиться відкидати як лінійні, так і кутові зв'язки. При цьому геометричні тлумачення рівнянь сумісності деформації уявити важко. Тому таке рішення записують у канонічному (законному) вигляді.

Приклад: Розкрити статичну невизначеність системи та побудувати епюри внутрішніх зусиль (рис. 7.3).

1. Визначаємо ступінь статичної невизначеності системи, який дорівнює двом.

2. Обираємо основну систему шляхом відкидання опори C і заміну затиснення в точці A на шарнірно нерухому опору.

3. Завантажуємо основну систему зовнішніми навантаженнями і зусиллям відкинутих в'язей (еквівалентна система). В точці A момент реакції X_1 , а в точці C реакція в'язі X_2 .

Складаємо рівняння сумісності деформацій, використовуючи принцип незалежності дії сил, які зручно викласти в такому (канонічному) вигляді:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_1 x_1 + \Delta_1 x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_2 x_1 + \Delta_2 x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta_1 P = 0 \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta_2 P = 0, \end{cases} \text{ враховуючи, що } \Delta_{1x_1} = \delta_{11} x_1 \text{ і } \Delta_{1x_2} = \delta_{12} x_2.$$

Для визначення переміщень (коефіцієнтів) канонічних рівнянь будуюмо вантажну й одиничні епюри згинальних моментів для основної системи. Використовуючи спосіб Верещагіна, маємо:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \left[l \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] = \frac{l}{6EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{l \cdot 1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot l \right) \right] = \frac{l^2}{12EI};$$

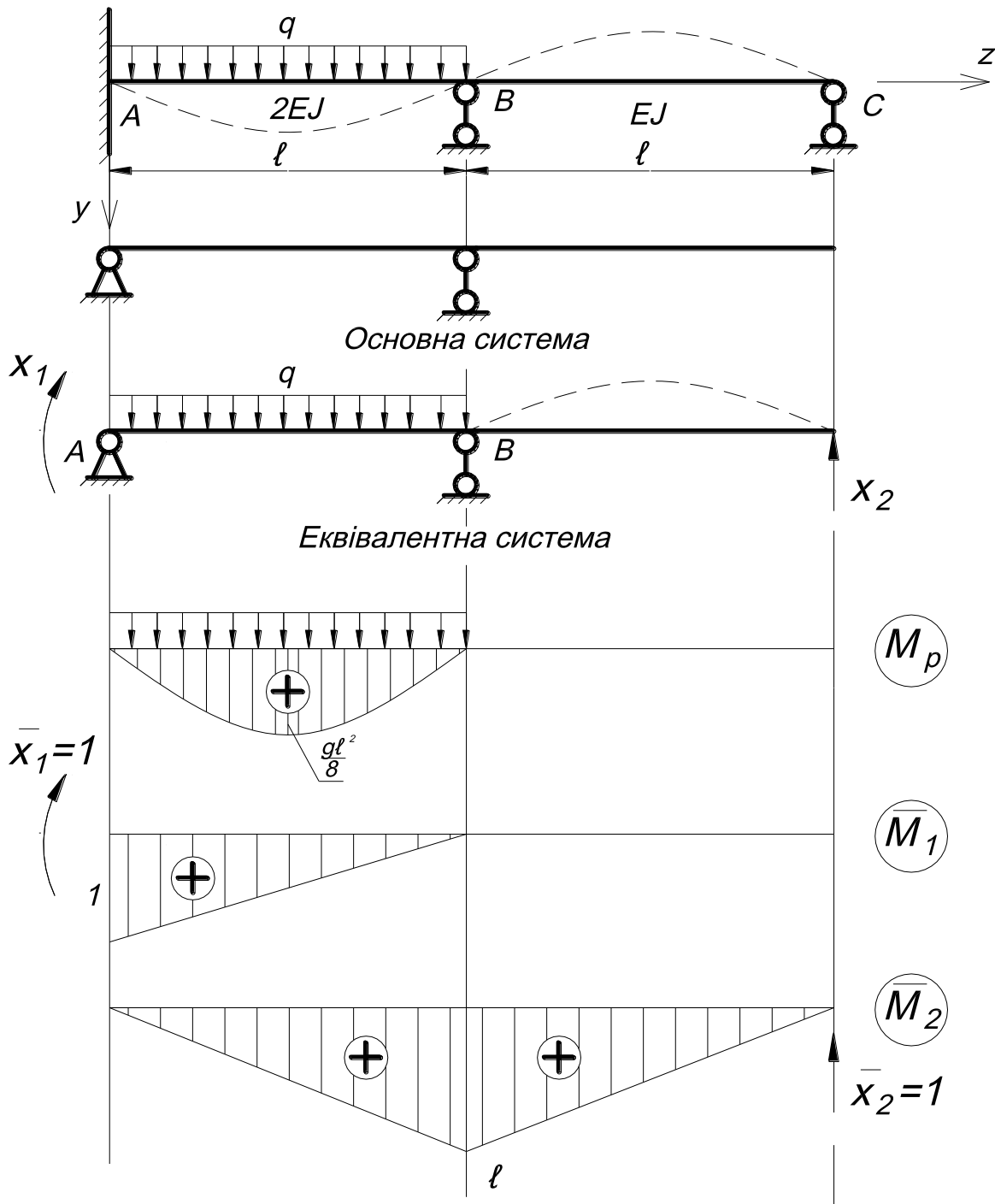


Рис. 7.3. Приклад.

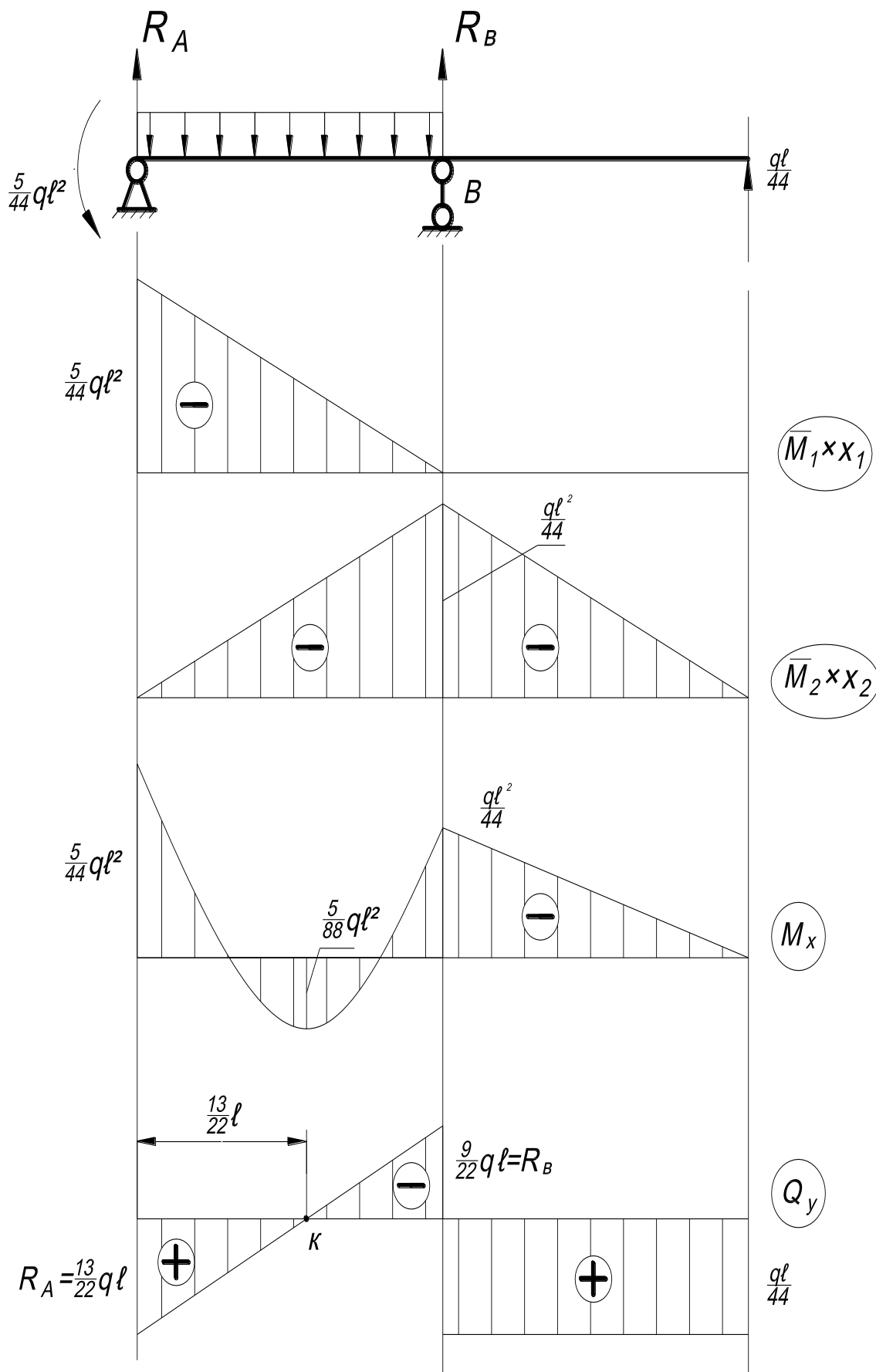


Рис.7.4. Епюри зовнішніх навантажень.

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{l \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot l \right) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{l \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot l \right) \right] = \frac{l^3}{2EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \left(\frac{1}{2} \right) \right] = \frac{ql^3}{48EI};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \left(\frac{l}{2} \right) \right] = \frac{ql^4}{48EI}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів у рівняння, отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{6EI} x_1 + \frac{l^2}{12EI} x_2 + \frac{ql^3}{48EI} = 0 \\ \frac{l^2}{12EI} x_1 + \frac{l^3}{2EI} x_2 + \frac{ql^4}{48EI} = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши систему двох рівнянь з двома невідомими, знаходимо: $x_1 = -\frac{5}{44} ql^2$; $x_2 = -\frac{ql}{44}$. Знаки «мінус» показують, що вибрані на еквівалентній системі напрямки x_1 і x_2 не відповідають дійсності. Для побудови епюри моментів зручно використовувати принцип незалежності дії сил. Для цього будуємо виправлені епюри згинальних моментів (рис. 7.4).

Склавши ординати епюр за виразом $M = Mp + \overline{M}_1 \cdot x_1 + \overline{M}_2 \cdot x_2$, отримуємо епюру згинальних моментів M_x (рис. 7.4).

Після побудови епюри Q_y , обчислення R_B :

$$\Sigma M = 0$$

$$x_2 2l - R_B l + \frac{ql^2}{2} - x_1 = 0;$$

$$R_B = \frac{19}{44} ql.$$

Знаходимо:

$$M_k = -x_2 \left(l + \frac{9l}{22} \right) + R_B \frac{9l}{22} - q \frac{\left(\frac{9l}{22} \right)^2}{2} = \frac{5}{88} ql^2.$$

Існують контролі:

а) **Статичний** – після розкриття статичної невизначеності системи за допомогою рівнянь статички визначають всі опорні реакції і перевіряють правильність їх обчислення. Статичний контроль не

відповідає за правильність розкриття статичної невизначеності, а дає відповідь на правильність обчислення опорних реакцій системи.

б) **Кінематичний контроль** – необхідно епюру M_x перемножити на будь-яку із одиничних епюр. При цьому повинні отримати нульове значення добутку, оскільки переміщення (лінійні або кутові) в точках зайвих в'язей відсутні.

Тобто, $\Delta = M_x \cdot \bar{M}_1 = M_x \cdot \bar{M}_l = 0$.

7.2. Розрахунок плоских статично-невизначених рам за методом сил

7.2.1. Плоскі статично невизначені рами. Загальні поняття

Систему, яка складається із стрижнів, що лежать в одній площині, називають **плоскою системою**. До плоских систем належать: ферми, арки, рами.

Рама – це конструкція, вісь якої є ламаною лінією. Рами бувають: однопрогинні, багатопрогинні, одноярусні та багатоярусні (рис. 7.5).

Вузли рами є жорсткими, що забезпечують деформацію всіх стрижнів, що сходяться у вузол. Як правило, для розрахунку статично невизначених рам застосовують **метод сил**, тобто, коли в якості невідомого приймаються зусилля. Етапи розрахунку статично невизначених рам практично не відрізняються від розрахунку статично невизначених балок.

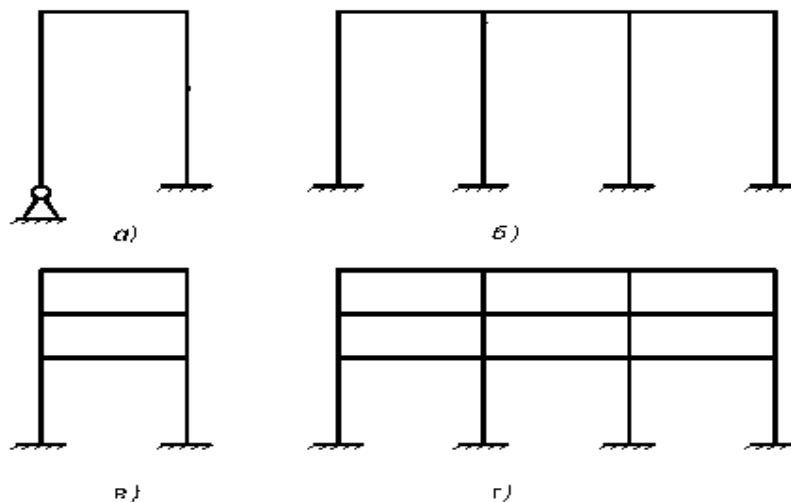


Рис. 7.5. Приклади статично невизначених рам.

- а) – однопрогинна одноярусна; б) – багатопрогинна одноярусна;
в) – однопрогинна багатоярусна; г) – багатопрогинна багатоярусна.

7.2.2. Приклад розрахунку плоских статично невизначених рам

Для заданої рами побудувати епюри поздовжніх, поперечних сил та згинальних моментів (N , Q , M) (рис. 7.6).

Етапи розрахунку:

1. Визначаємо ступінь статичної невизначеності рами, який становить два.
2. Шляхом відкидання зайвих зв'язків обираємо основну систему (рис. 7.7).
3. Завантажуємо основну систему зовнішнім навантаженням та зусиллями відкинутих зайвих в'язей (еквівалентна система) (рис. 7.7).

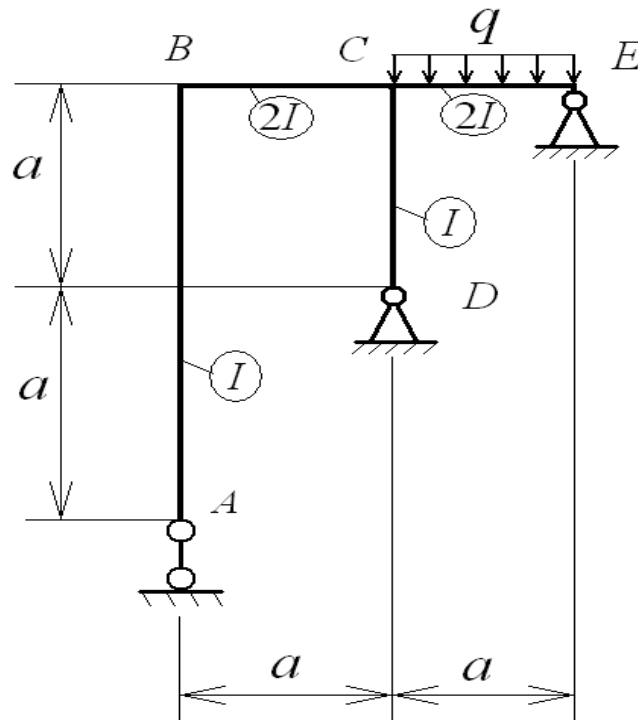


Рис. 7.6. Схема рами до прикладу.

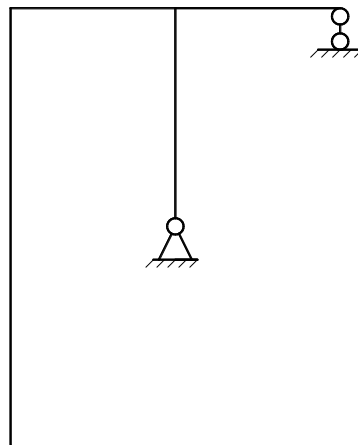


Рис. 7.7. Основна система.

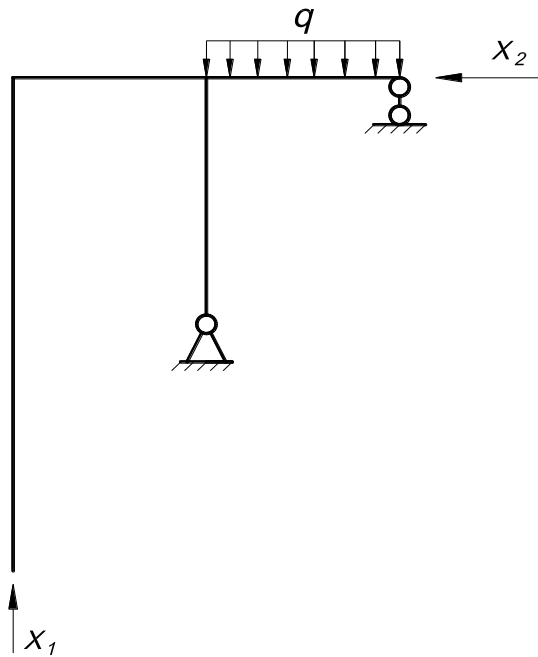


Рис. 7.8. Еквівалентна система.

4. Для еквівалентної системи запишемо канонічні рівняння методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

5. Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь будемо епюри згинальних моментів вантажного та одиничного станів і перемножимо їх за способом Верещагіна:

$$\delta_{11} = \frac{1}{2 \cdot EI} \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} a \right) \cdot 2 = \frac{a^3}{3 \cdot EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2 \cdot EI} \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} \right) = -\frac{a^3}{6 \cdot EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2 \cdot EI} \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} \right) + \frac{1}{EI} \left(\frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2 \cdot a}{3} \right) = \frac{a^3}{2 \cdot EI};$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{2 \cdot EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{q \cdot a^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{q a^4}{48 \cdot EI};$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{2 \cdot EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{q a^2}{8} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a \right) = -\frac{q \cdot a^4}{48}.$$

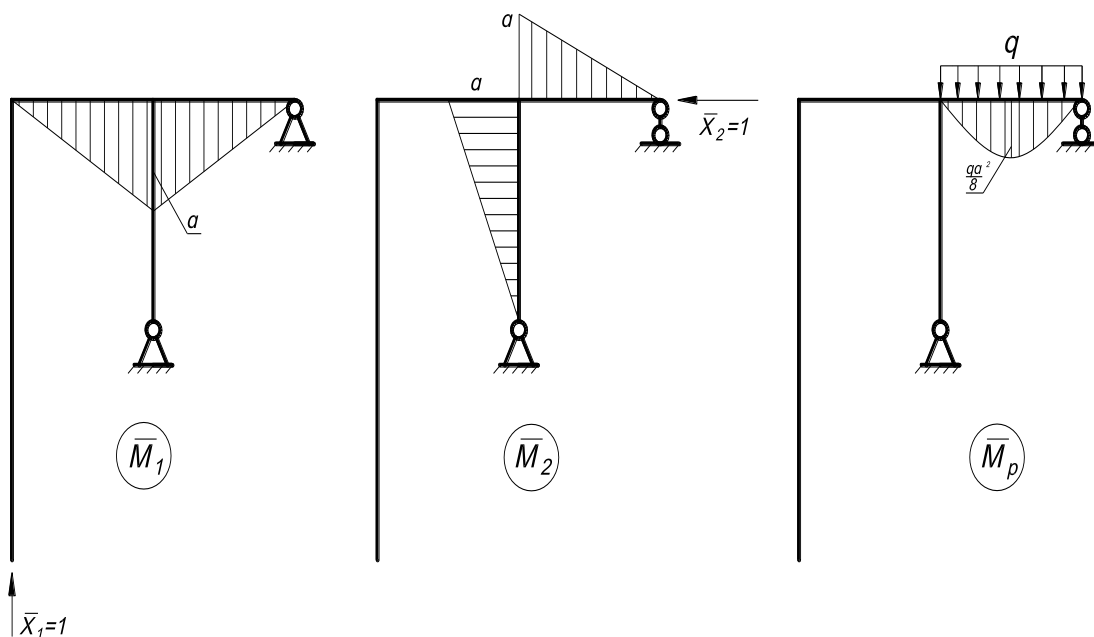


Рис. 7.8. Вантажні та одиничні епюри згинальних моментів.

Запишемо канонічні рівняння методу сил з визначеними коефіцієнтами, розв'язавши які знайдемо зайві зусилля.

$$\begin{cases} \frac{a^3}{3 \cdot EI} \cdot x_1 - \frac{a^3}{6 \cdot EI} \cdot x_2 + \frac{q \cdot a^4}{48 \cdot EI} = 0 \\ -\frac{a^3}{6 \cdot EI} \cdot x_1 + \frac{a^3}{2 \cdot EI} \cdot x_2 - \frac{q \cdot a^4}{48 \cdot EI} = 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot x_1 - \frac{1}{6} x_2 + \frac{qa}{48} = 0 \\ -\frac{1}{6} \cdot x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{qa}{48} = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{qa}{20} \\ x_2 = \frac{qa}{40} \end{cases} \quad (7.4)$$

Для визначення інших невідомих реакцій опор V_D , H_D , V_E (рис. 7.6) використовуємо рівняння статки:

$$\begin{aligned} \sum M_D &= 0 \\ \sum M_D &= -x_1 \cdot a + \frac{q \cdot a^2}{2} - V_E \cdot a - x_2 \cdot a = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$V_E = \frac{17}{40} \cdot q \cdot a$$

$$\sum z = 0$$

$$\sum z = H_D - x_2 = 0$$

$$H_D = x_2 = \frac{qa}{40}$$

$$\sum y = 0$$

$$\sum y = x_1 - V_D + q \cdot a - V_E = 0$$

$$V_D = \frac{25}{40} \cdot qa$$

Перевірка :

$$\sum M_A = 0. -q \frac{a^2}{2} + V_D \cdot a - H_D \cdot a - x_2 a = 0;$$

$$-\frac{qa}{2} + \frac{25}{40} qa - \frac{qa}{40} - \frac{2qa}{2} = 0;$$

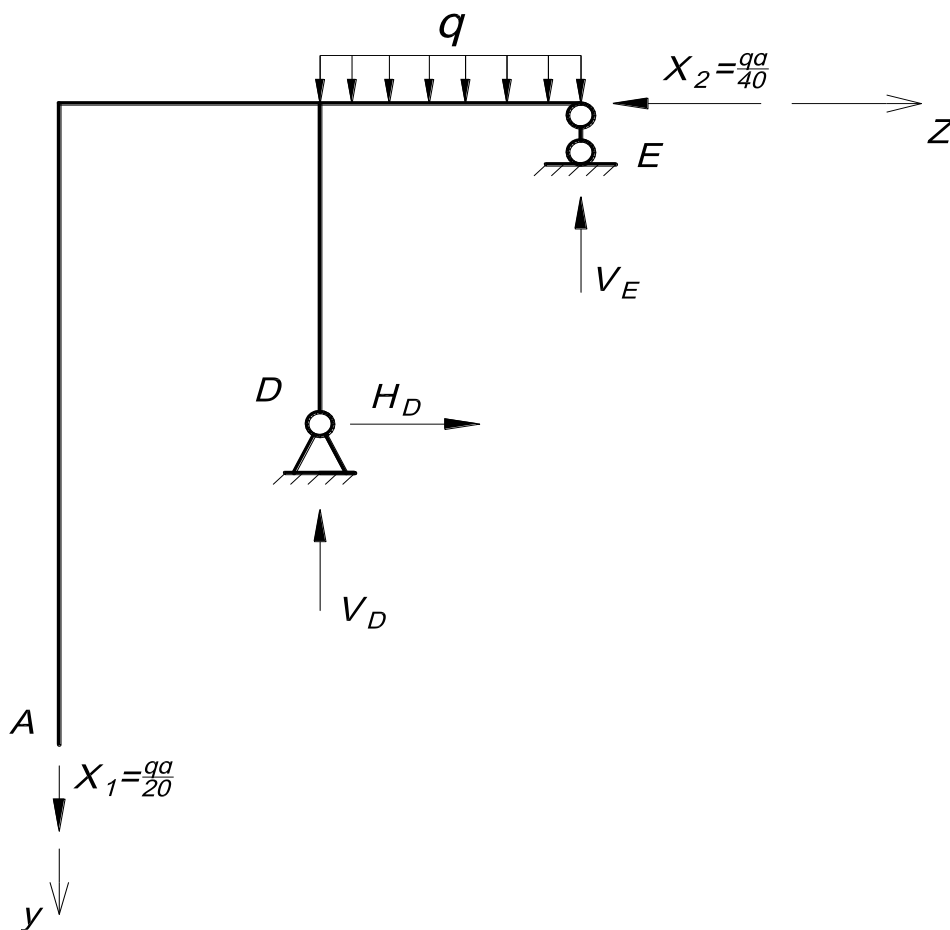


Рис. 7.9. Визначення всіх опорних реакцій.

Для побудови кінцевої епюри згинальних моментів побудуємо виправлені епюри одиничного стану.

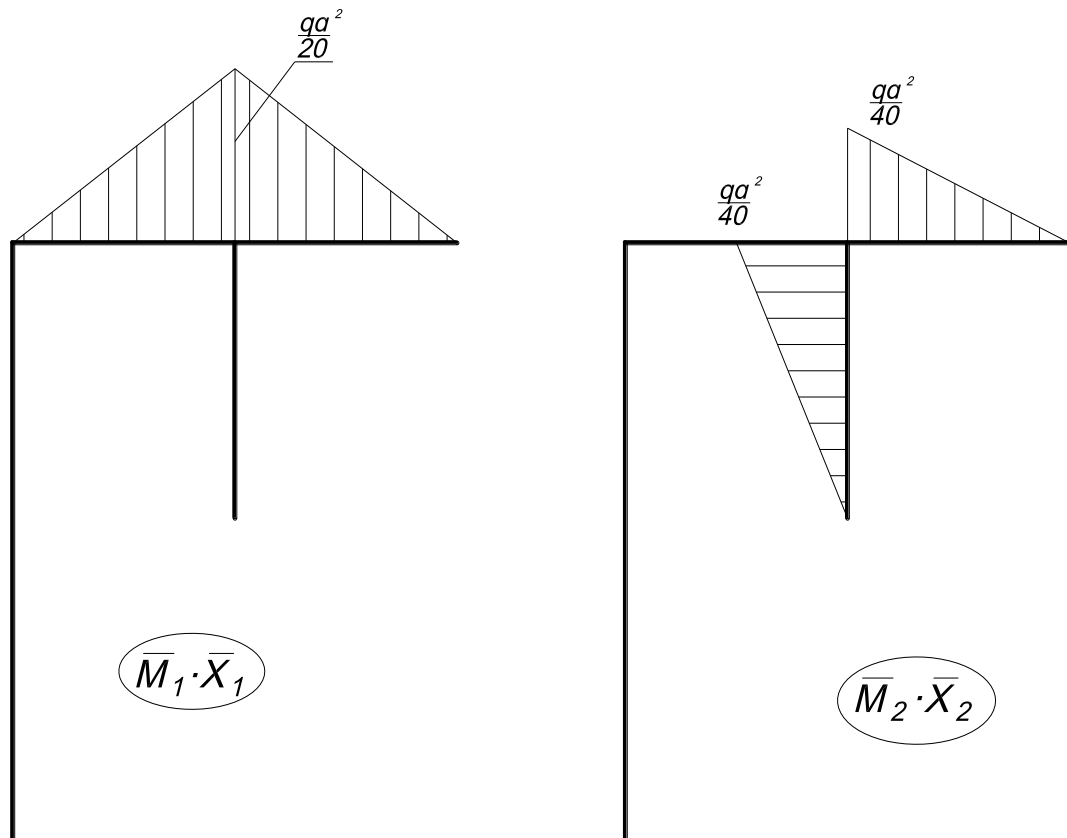


Рис. 7.10. Виправлені епюри одиничного стану.

Будуємо епюри поздовжніх, поперечних сил та епюру згинальних моментів (рис. 7.11).

Контроль:

1. Статичний (по вузловий) (рис. 7.11):

Для цього «вирізаємо» вузол «С», прикладаємо до нього всі внутрішні та зовнішні зусилля. При цьому сума проєкцій всіх сил на координатній вісі та сума моментів відносно точки «С» повинні дорівнювати нулю, оскільки система знаходиться в стані рівноваги.

$$\sum_z = 0$$

$$\frac{q \cdot a}{40} - \frac{q \cdot a}{40} = 0$$

$$\sum_y = 0$$

$$\frac{23}{40} \cdot qa + \frac{qa}{20} - \frac{25}{40} \cdot qa = 0$$

(7.6)

$$\sum M_c = 0$$

$$\frac{qa^2}{20} - \frac{3qa^2}{40} + \frac{qa^2}{40} = 0.$$

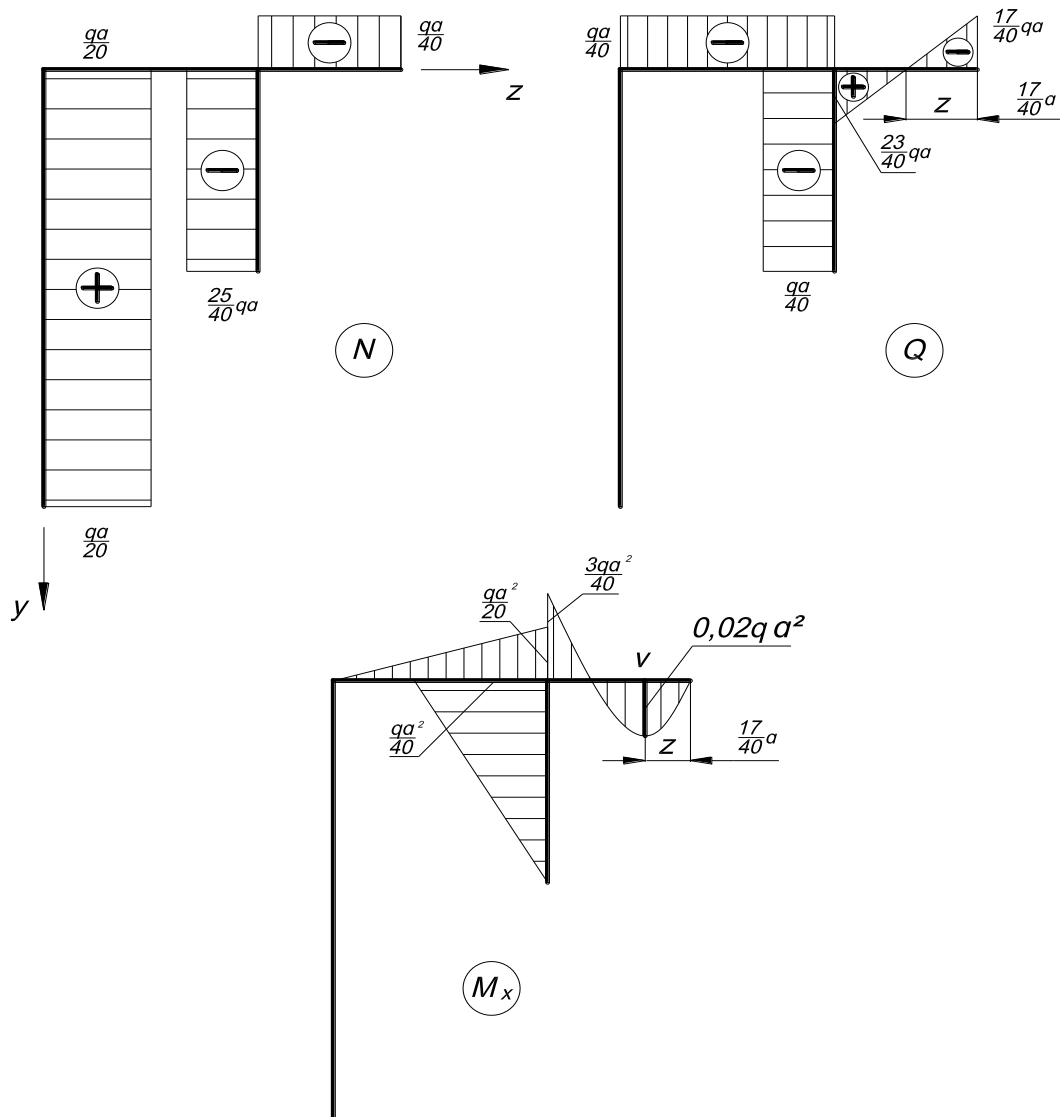


Рис. 7.11. Епюри поздовжніх, поперечних сил та епюра згинальних моментів.

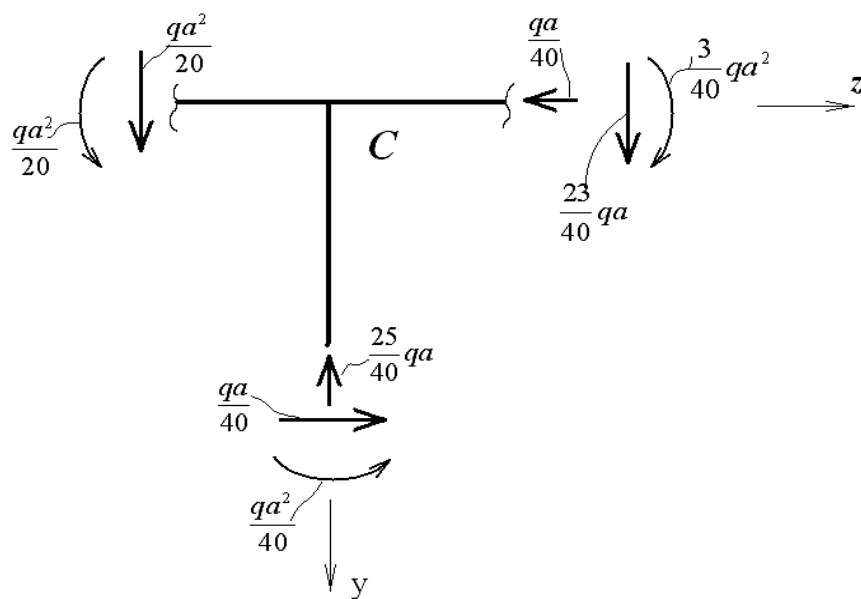


Рис. 7.12. Статичний контроль.

Статичний контроль дає відповідь щодо правильності побудови епюр N , Q , M , але не відповідає на запитання щодо розкриття статичної невизначеності системи (знаходження x_1 і x_2).

2. Кінематичний контроль:

Для перевірки правильності розкриття статичної невизначеності системи існує кінематичний контроль. Для цього перемножують кінцеву епюру згинальних моментів на будь-яку із одиничних епюр. Добуток повинен дорівнювати нулю, оскільки переміщення в цих точках відсутні.

$$\Delta = M \times \bar{M}_1 = 0.$$

Враховуючи складність епюри M_x , використовують принцип суперпозиції:

$$\Delta = M \cdot \bar{M}_1 = M_p \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_1 \times X_1 \cdot \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \times X_2 \cdot \bar{M}_1 = 0.$$

$$\Delta = \frac{1}{2EI} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{qa^2}{20} \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{2EI} \left(-\frac{1}{2} \frac{qa^2}{40} \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = 0$$

Після побудови епюр N , Q , M виконуємо подальший розрахунок рами (перевірка міцності, визначення розмірів поперечного перерізу стрижнів тощо).

7.3. Багатопрогинні нерозрізні балки (БНБ)

7.3.1. Розкриття статичної невизначеності багатопрогинних нерозрізних балок за допомогою рівнянь трьох моментів

Балки, що опираються більш ніж на три опори і не мають проміжних шарнірів називаються *багатопрогинними нерозрізними* (рис. 7.13). Вони є статично невизначеними системами (СНС).

На рис. 7.13 зображено багатопрогинну нерозрізну балку, яка має m опор. Правило нумерації опор: нумерація ведеться зліва направо і перша опора вважається нульовою. Прогини нумеруються за правою опорою. У цьому разі ступінь статичної невизначеності балки дорівнює $m-2$, де m – кількість вертикальних зв'язків.

У тому разі, коли ліва опора балки є жорстко закріпленою, ступінь статичної невизначеності балки збільшується на одиницю. Для розкриття статичної невизначеності балки основну систему можна обирати шляхом відкидання проміжних опор. При такому

виборі основної системи рівняння деформацій відкидають переміщення (прогин) в точках опор і приймають умову, що прогини на проміжних опорах дорівнюють нулю.

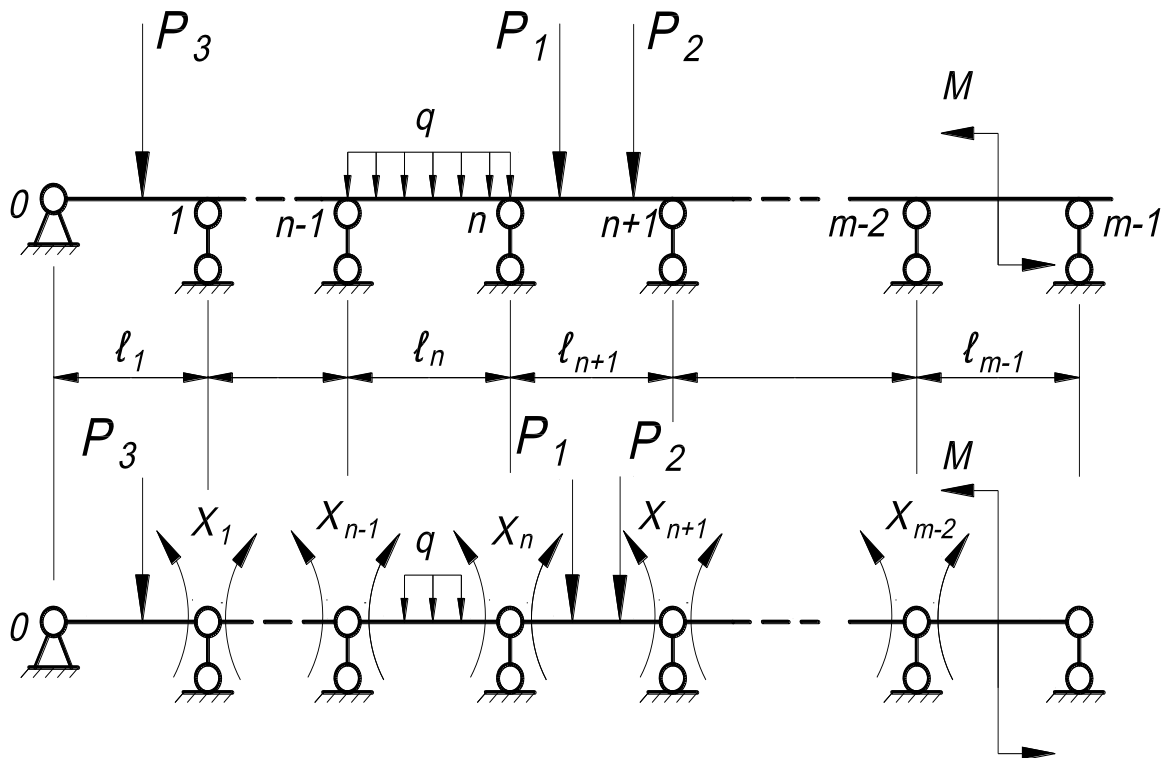


Рис 7.13. Багатопрогинна нерозрізна балка.

При цьому необхідно скласти стільки рівнянь деформацій, скільки разів система є статично невизначеною, а у кожне рівняння обов'язково будуть входити всі невідомі. Інша складність полягає у тому, що вантажна еюра M_P є досить складною, а її перемноження із одиничними еярами викликатиме складність.

Значно простіше обирати основну систему шляхом відкидання внутрішніх зв'язків («врізанням» шарнірів над проміжними опорами) (рис. 7.13, нижня балка).

При цьому еквівалентна система становить ряд простих балок, завантажених зовнішнім навантаженням і згинальними моментами в точках врізання шарнірів. При такому виборі основної системи рівняння сумісності деформацій відкидає взаємний кут повороту двох сумісних перерізів в точці врізання шарнірів.

Врізання шарніра з врівноваженням згинальними моментами зображено на рис. 7.14.

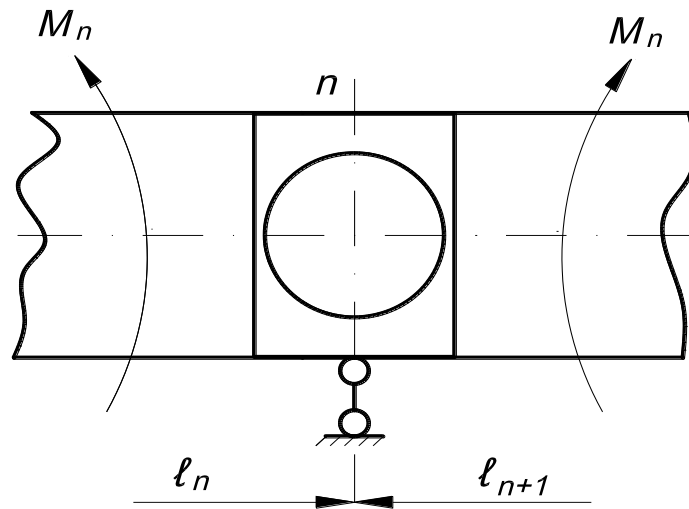


Рис. 7.14. Врізаний шарнір з рівноваженням моментом M_n .

Розглянемо n опору (рис. 7.15).

Для n -ої опори рівняння сумісності деформацій має вигляд:

$$\delta_{n(n-1)} X_{n-1} + \delta_{nn} X_n + \delta_{n(n+1)} X_{n+1} + \Delta_{np} = 0 \quad (7.7)$$

Для визначення коефіцієнтів рівняння (7.7) необхідно побудувати епюри моментів – вантажні та одиничні (рис. 7.15).

$$\Delta_{np} = \frac{1}{E_n I_n} \cdot \Omega_n \frac{a_n}{l_n} + \frac{1}{E_{n+1} I_{n+1}} \cdot \Omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}},$$

$$\delta_{n(n-1)} = \frac{1}{E_n I_n} \left(\frac{l_n \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_n}{6E_n I_n},$$

$$\delta_{nn} = \frac{1}{E_n I_n} \left(\frac{l_n \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{E_{n+1} I_{n+1}} \left(\frac{l_{n+1} \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{l_n}{3E_n I_n} + \frac{l_{n+1}}{3E_{n+1} I_{n+1}},$$

$$\delta_{n(n+1)} = \frac{1}{E_{n+1} I_{n+1}} \left(\frac{l_{n+1} \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{l_{n+1}}{6E_{n+1} I_{n+1}}.$$

Враховуючи те, що жорсткість $EI = const$ на всій довжині балки (величина постійна), можна на EI скоротити. Перенісши Δ_{np} в праву частину виразу і враховуючи те, що момент $X_n = M_n$, отримаємо:

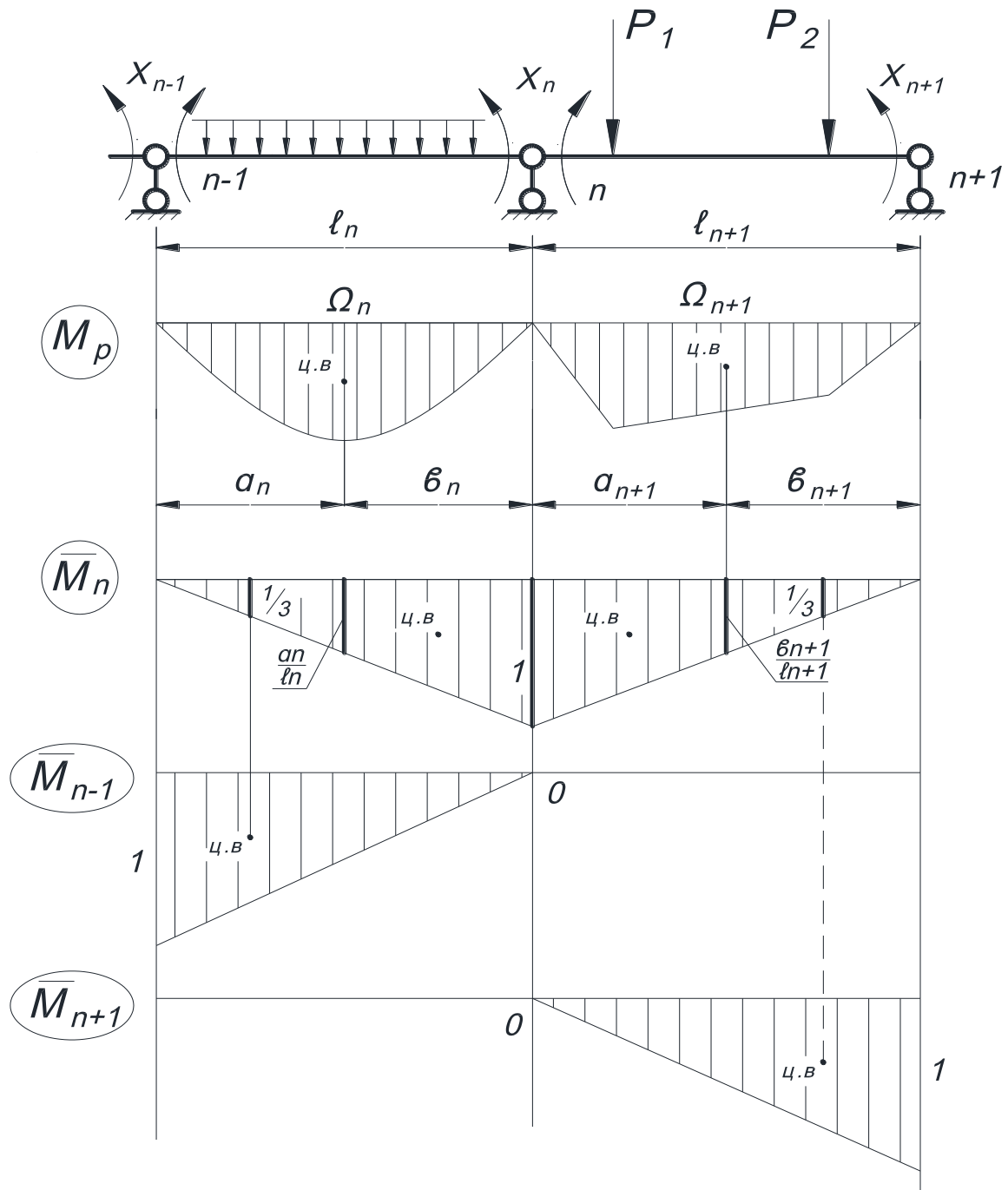


Рис. 7.15. Епюри моментів.

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = 6 \left(\Omega_n \cdot \frac{a_n}{l_n} + \Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (7.8)$$

У рівнянні (7.8) є завжди три невідомих моменти. Тому вираз (7.8) і називається **рівнянням трьох моментів**.

Таких рівнянь необхідно скласти стільки, скільки разів балка є статично невизначеною. Але в кожне рівняння буде входити лише три невідомих величини (згинальних моменти).

Приклад 1.

Розглянемо приклад складання рівнянь трьох моментів для балки (рис. 7.16):

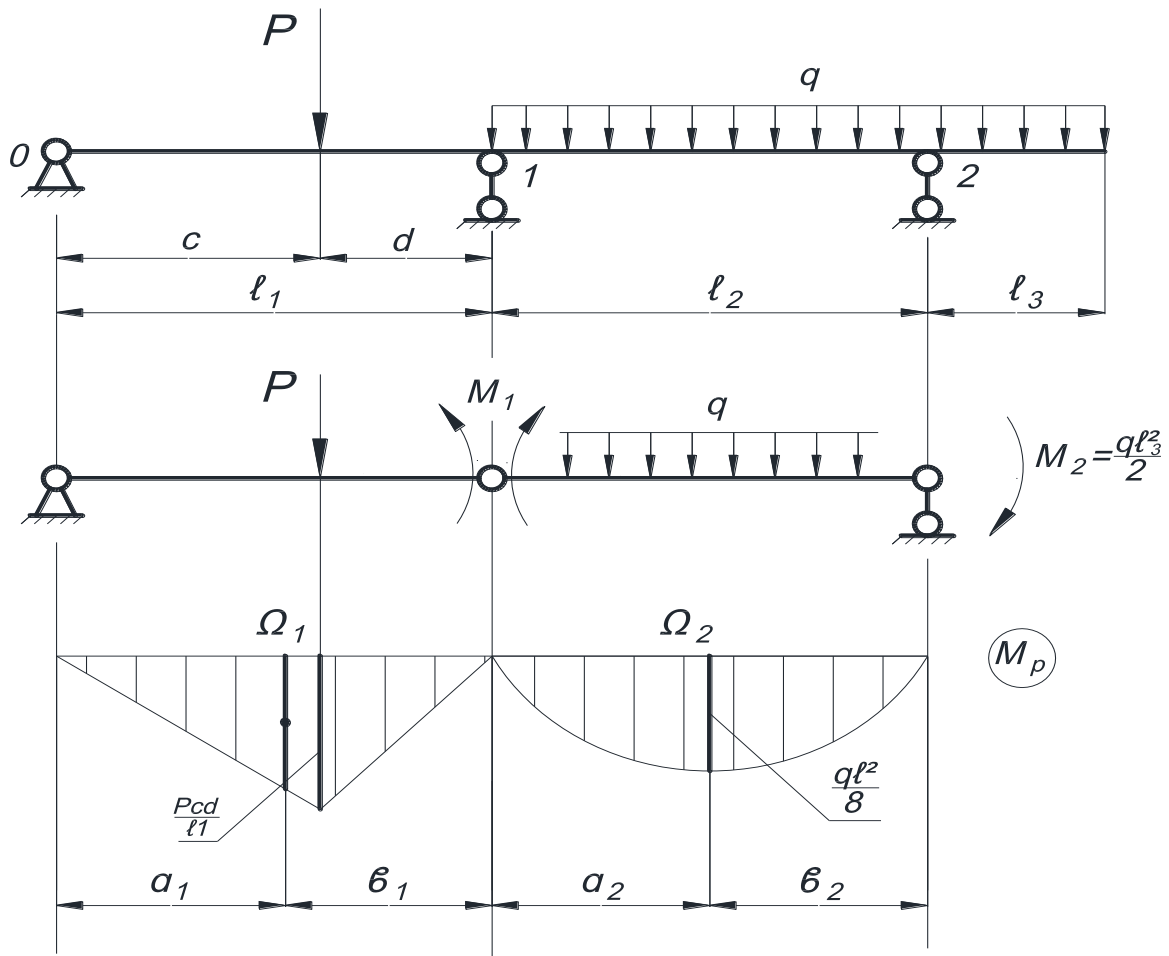


Рис. 7.16. Приклад 1.

Балка один раз є статично невизначеною.

Приймаючи $n=1$, маємо:

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \left(\Omega_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \frac{b_2}{l_2} \right);$$

$$M_0 = 0, \quad M_2 = -\frac{q \cdot l_3^2}{2},$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} P \frac{c \cdot d}{l_1} l_1 = P \frac{c \cdot d}{2}, \quad \Omega_2 = \frac{2}{3} \frac{q \cdot l_2^2}{8} l_2 = \frac{q \cdot l_2^3}{12},$$

$$a_1 = \frac{1}{3}(l_1 + c); \quad a_2 = b_2 = \frac{l_2}{2}.$$

$$2M_1(l_1 + l_2) - \frac{ql_3^2}{2} \cdot l_2 = -6 \left(\frac{Pcd}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l_1 + c}{l_1} + \frac{ql_2^3}{12} \cdot \frac{l_2}{2l_2} \right);$$

Звідси знаходимо M_1 .

Приклад 2.

Випадок, коли один кінець балки жорстко затиснений (рис. 7.17). При цьому з боку жорсткого затиснення кінця балки вводиться фіктивний прогин ($l=0$).

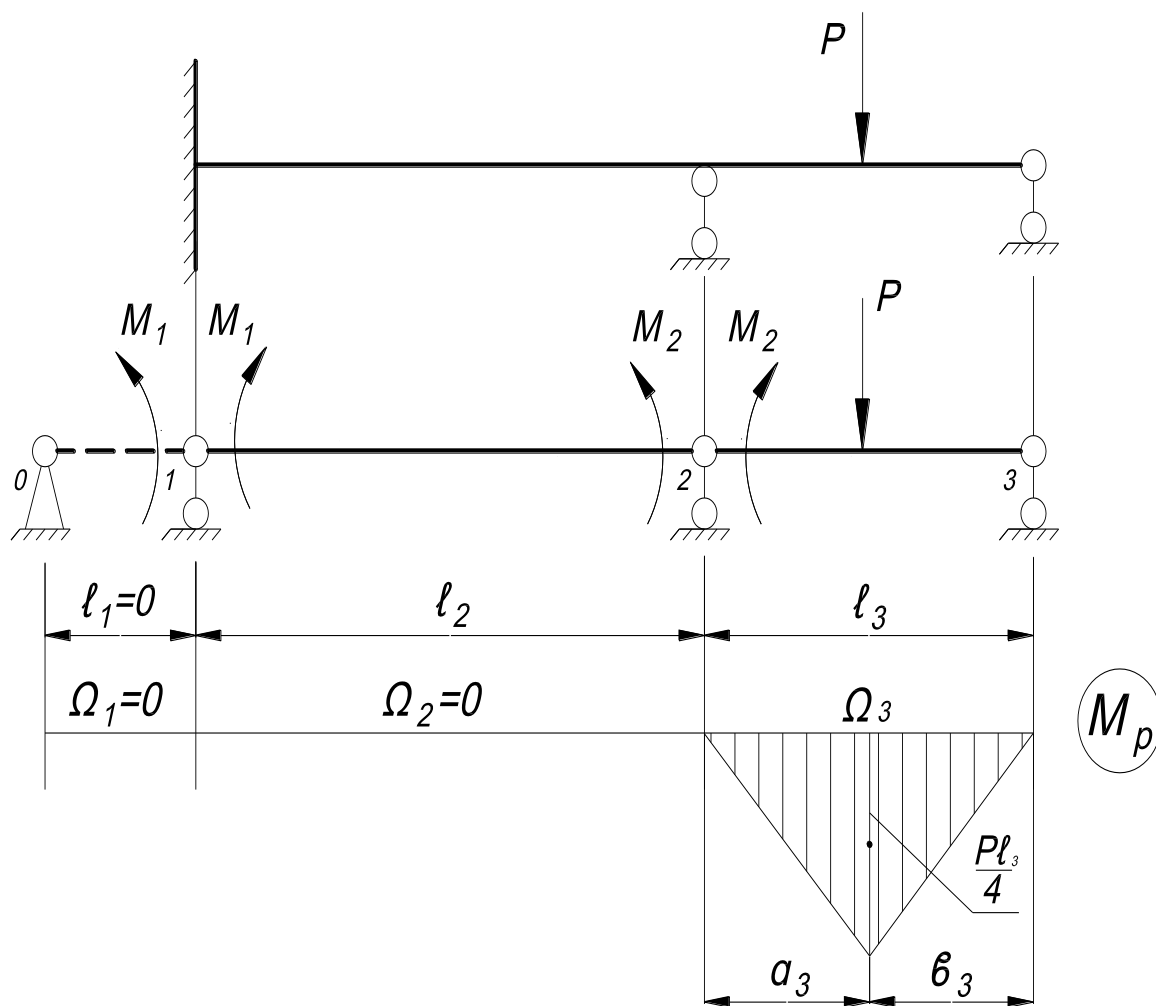


Рис. 7.17. Приклад 2.

Розглянемо опори 1 та 2, і також складемо для них рівняння трьох моментів.

$$\begin{cases} M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \left(\Omega_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \frac{b_2}{l_2} \right) \\ M_1 \cdot l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6 \left(\Omega_2 \cdot \frac{a_2}{l_2} + \Omega_3 \frac{b_3}{l_3} \right) \end{cases} \quad (7.9)$$

При цьому: $\Omega_1=0$; $\Omega_2=0$;

$$\Omega_3 = \frac{Pl^2}{8}; \quad a_3 = b_3 = \frac{l_3}{2}; \quad M_3 = 0; \quad M_0 = 0; \quad l_1 = 0.$$

Підставимо відомі величини в систему рівнянь (7.9). У результаті отримаємо:

$$\begin{cases} 2M_1 \cdot l_2 + M_2 \cdot l_2 = 0 \\ M_1 \cdot l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) = -6 \cdot \frac{Pl_3^2}{16} \end{cases} \quad (7.10)$$

У подальшому знаходимо M_1 і M_2 .

7.3.2. Визначення опорних реакцій у багатопрогинних нерозрізних балках

Розглянемо будь-який n -ий прогин багатопрогинної нерозрізної балки (рис. 7.18):

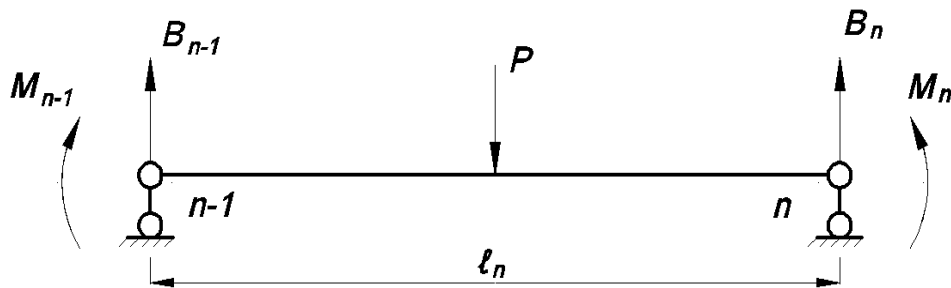


Рис. 7.18. n -ий прогин балки.

Для визначення реакцій A_n і B_n маємо залежності (7.10):

$$\begin{aligned} A_n &= A_n^0 + \frac{M_n}{l_n} - \frac{M_{n-1}}{l_n} = A_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \\ B_n &= B_n^0 + \frac{M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n}{l_n} = B_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

де: A_n^0 і B_n^0 – реакції від зовнішнього навантаження.

Розглянемо n -у опору (рис. 7.19):

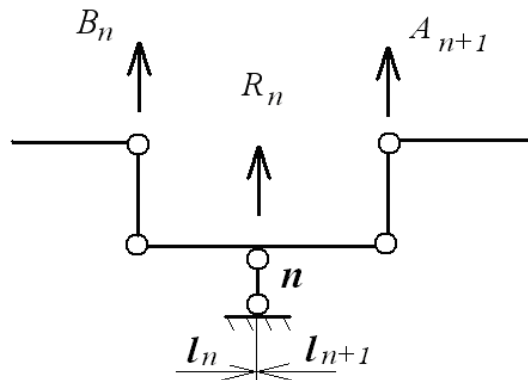


Рис. 7.19. n -а опора.

$$R_n = A_{n+1} + B_n = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}}, \quad (7.12)$$

де:
$$R_n^0 = A_{n+1}^0 + B_n^0. \quad (7.13)$$

Рівняння (7.13) – це складові опорної реакції на n -ій опорі від зовнішнього навантаження.

7.3.3. Етапи розрахунку багатопрогинних нерозрізних балок

Етапи розрахунку багатопрогинних нерозрізних балок:

1. Обираємо основну систему, шляхом «врізання» шарнірів над проміжними опорами.
2. Нумеруємо опори і прогини зліва направо (опори нумеруємо з нульової, а прогини – з першого).
3. Для основної системи будуємо епюри згинальних моментів від зовнішнього навантаження, знаходимо їх площі в кожному прогині та відстані від центрів ваги до лівої і правої опор.
4. Для кожної проміжної опори (точка врізання шарніра) складаємо рівняння трьох моментів.
5. Розв'язуємо систему рівнянь, знаходимо невідомі величини моментів.
6. За формулою (7.12) знаходимо реакції опор і виконуємо перевірку за рівняннями рівноваги ($\sum Y = 0$).
7. Будуємо епюру внутрішніх зусиль Q_y , M_x і виконуємо подальший інженерний розрахунок.

8. Виконуємо кінематичний контроль, який дає відповідь щодо правильності розкриття статичної невизначеності. Для цього з допомогою методу початкових параметрів визначаємо прогини на будь-якій із опор, який повинен дорівнювати нулю.

7.4. Практичне розв'язання задач статично-невизначених систем (СНС)

7.4.1. Задача №1 – статично невизначена рама

Задача № 1. Дано раму з геометричними розмірами та зовнішнім навантаженням q (рис. 7.20.а). Розкрити статичну невизначеність системи, побудувати епюри внутрішніх зусиль та виконати статичний і кінематичний контролю.

Рама статично невизначена двічі.

Обираємо основну систему (рис. 7.20.б), еквівалентну систему (рис. 7.20. в).

Будуємо епюри від зовнішнього силового навантаження (вантажна епюра) (рис. 7.20.г) та одиничні епюри (рис. 7.20. д, е).

Для розв'язання задачі запишемо канонічні рівняння методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Визначаємо коефіцієнти рівняння (7.14) за допомогою перемноження епюр за способом Верещагіна.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= (\bar{M}_1 \times \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \right) = \frac{4 \cdot 7^3}{3EI}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= (\bar{M}_1 \times \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \right) = \frac{7^3}{2EI}; \\ \delta_{22} &= (\bar{M}_2 \times \bar{M}_2) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \right) = \frac{7^3}{3EI}; \\ \Delta_{1P} &= (\bar{M}_1 \times \bar{M}_P) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 7 \cdot 7 \right) = \frac{7^4}{3EI}; \\ \Delta_{2P} &= (\bar{M}_2 \times \bar{M}_P) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 \right) = \frac{7^4}{4EI}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

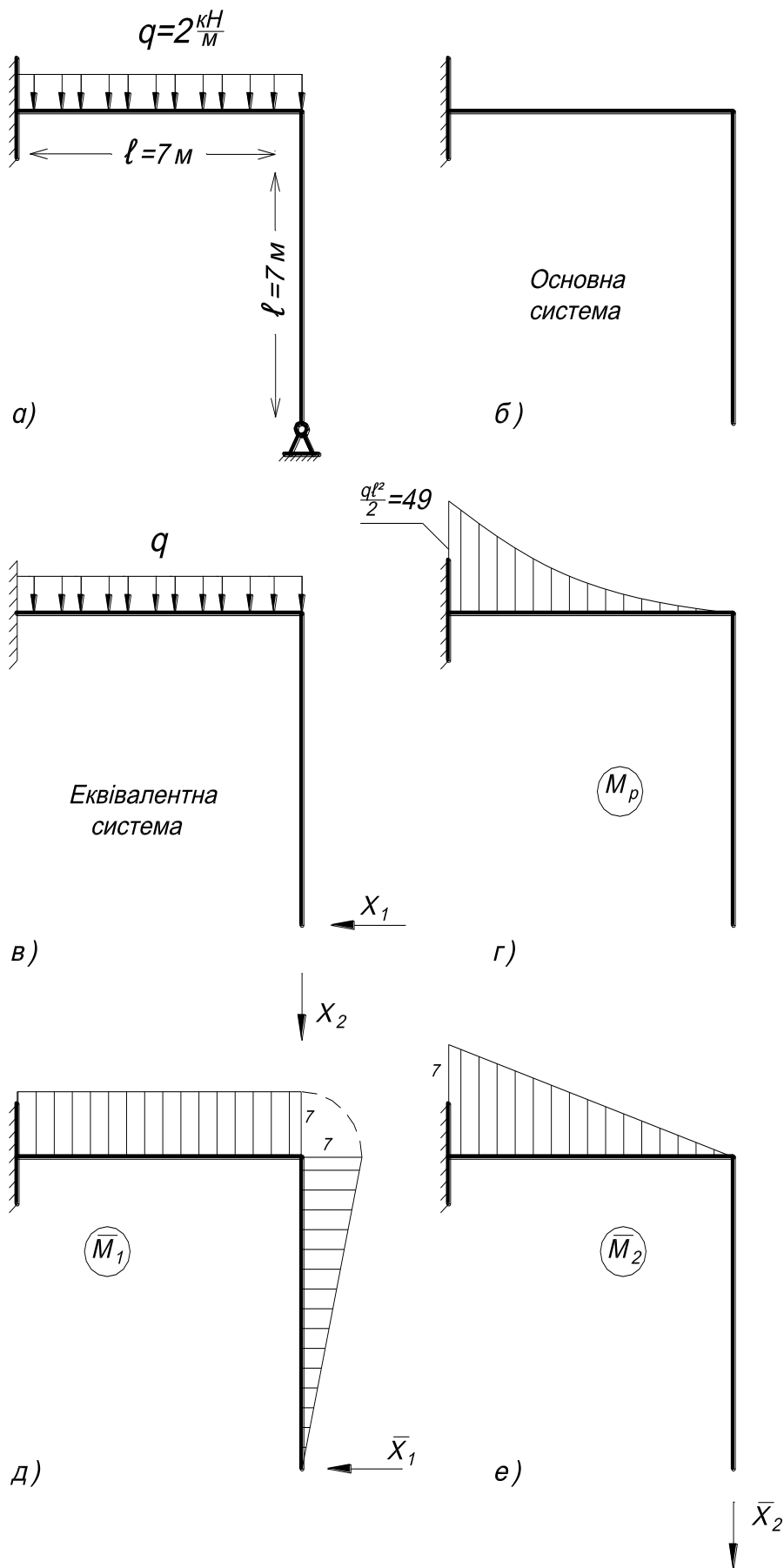


Рис. 7.21. Статично невизначена рама.

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{7^3 \cdot 4}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{7^3}{2 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 + \frac{7^4}{3 \cdot E \cdot I} = 0 \\ 2 \frac{7^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{7^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 + \frac{7^4}{4 \cdot E \cdot I} = 0 \end{cases} \quad (7.16)$$

Система має такі розв'язки:

$$\begin{cases} X_1 = 0,5 \text{ кН} \\ X_2 = -6 \text{ кН} \end{cases} \quad (7.17)$$

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 7.21. а).

Для епюри Q (рис. 7.22. б) можна знайти величину зусилля в точках рами:

$$\begin{aligned} Q_B &= -6 = X_2 \\ Q_A &= -X_2 + ql = -6 + 14 = 8 \text{ кН}, \\ z &= \frac{Q}{q} = \frac{6}{2} = 3 \text{ м} \end{aligned} \quad (7.18)$$

Будуємо виправлені епюри одиничного стану (рис. 7.22. в, г).

Для епюри M (рис. 7.22. д) можна знайти величину зусилля в точках рами:

$$\begin{aligned} M_B &= -X_1 \cdot 7 = -0,5 \cdot 7 = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_A &= M_B - \frac{q \cdot l^2}{2} + x_2 \cdot 7 = 3,5 - \frac{2 \cdot 49}{2} + 42 = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_{\max} &= M_B - \frac{2 \cdot 9}{2} + 6 \cdot 3 = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Статичний контроль (рис. 7.22. е):

$$\begin{cases} \sum Z = 0: 0,5 - 0,5 = 0; \\ \sum Y = 0: 6 - 6 = 0; \\ \sum M_B = 0: -3,5 + 3,5 = 0. \end{cases}$$

Кінематичний контроль:

$$\begin{aligned} \Delta &= M_X \cdot \overline{M}_2 = M_p \cdot \overline{M}_2 + \overline{M}_1 x_1 \cdot \overline{M}_2 + \overline{M}_2 x_2 \cdot \overline{M}_2 = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} 49 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 + 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 - \frac{1}{2} 42 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

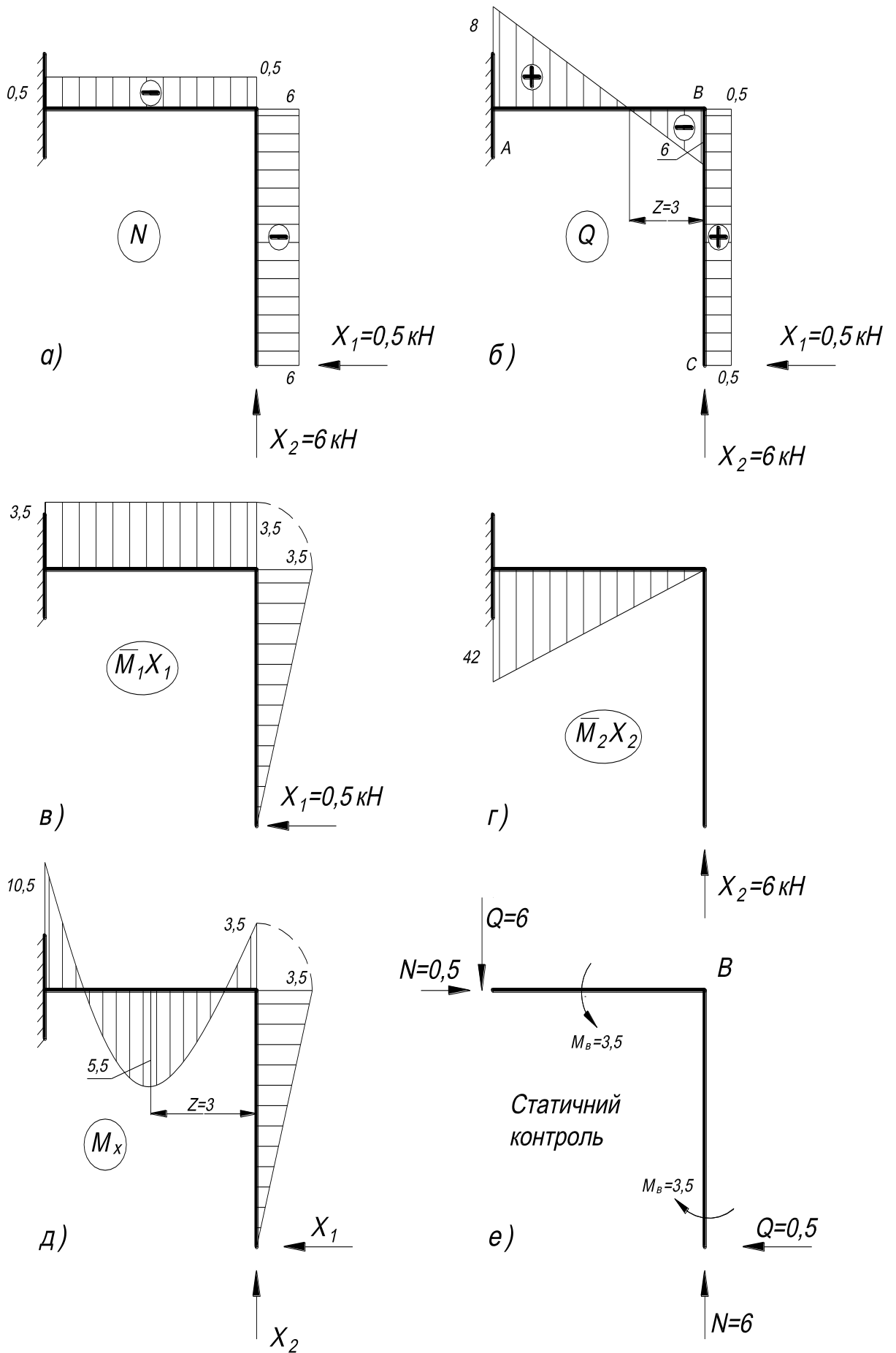


Рис. 7.22. Епюри внутрішніх зусиль і статичний контроль.

7.4.2. Задача № 2 – багатопрогинна нерозрізна балка

Задача №2. Дано багатопрогинну нерозрізну балку з геометричними розмірами та зовнішнім навантаженням q (рис. 7.23). Розкрити статичну невизначеність системи, побудувати епюри внутрішніх зусиль та виконати статичний і кінематичний контролю.

Балка статично невизначена двічі.

«Врізаємо» шарніри в балку над проміжними опорами і робимо її розрізною, при цьому врівноважуємо її у точках врізаних шарнірів внутрішніми згинальними моментами. Зліва балка має консольне затиснення.

Використовуючи прийом фіктивного прогину розкладемо консольне затиснення на шарнірно нерухому і шарнірно рухому опори з прогином між ними, який дорівнює нулю (рис. 7.22).

У кожному з прогинів будемо епюри моментів та визначаємо їх площі $\Omega_{1,2,3}$ (рис. 7.22).

Для першої та другої опор складаємо рівняння трьох моментів, використовуючи залежність (7.20):

$$\underline{n = 1}$$

$$M_0 \cdot l_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \cdot \left(\Omega_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \cdot \frac{b_2}{l_2} \right)$$

$$\underline{n = 2}$$

$$M_1 \cdot l_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6 \cdot \left(\Omega_2 \cdot \frac{a_2}{l_2} + \Omega_3 \cdot \frac{b_3}{l_3} \right)$$

$$\text{де: } l_1 = 0; \quad \Omega_1 = 0; \quad M_0 = M_3 = 0.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} 2M_1 l_2 + M_2 l_2 = -6\Omega_2 \frac{b^2}{l_2} \\ M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) = -6 \left(\Omega_2 \frac{a_2}{l_2} + \Omega_3 \frac{b_3}{l_3} \right) \end{cases}$$

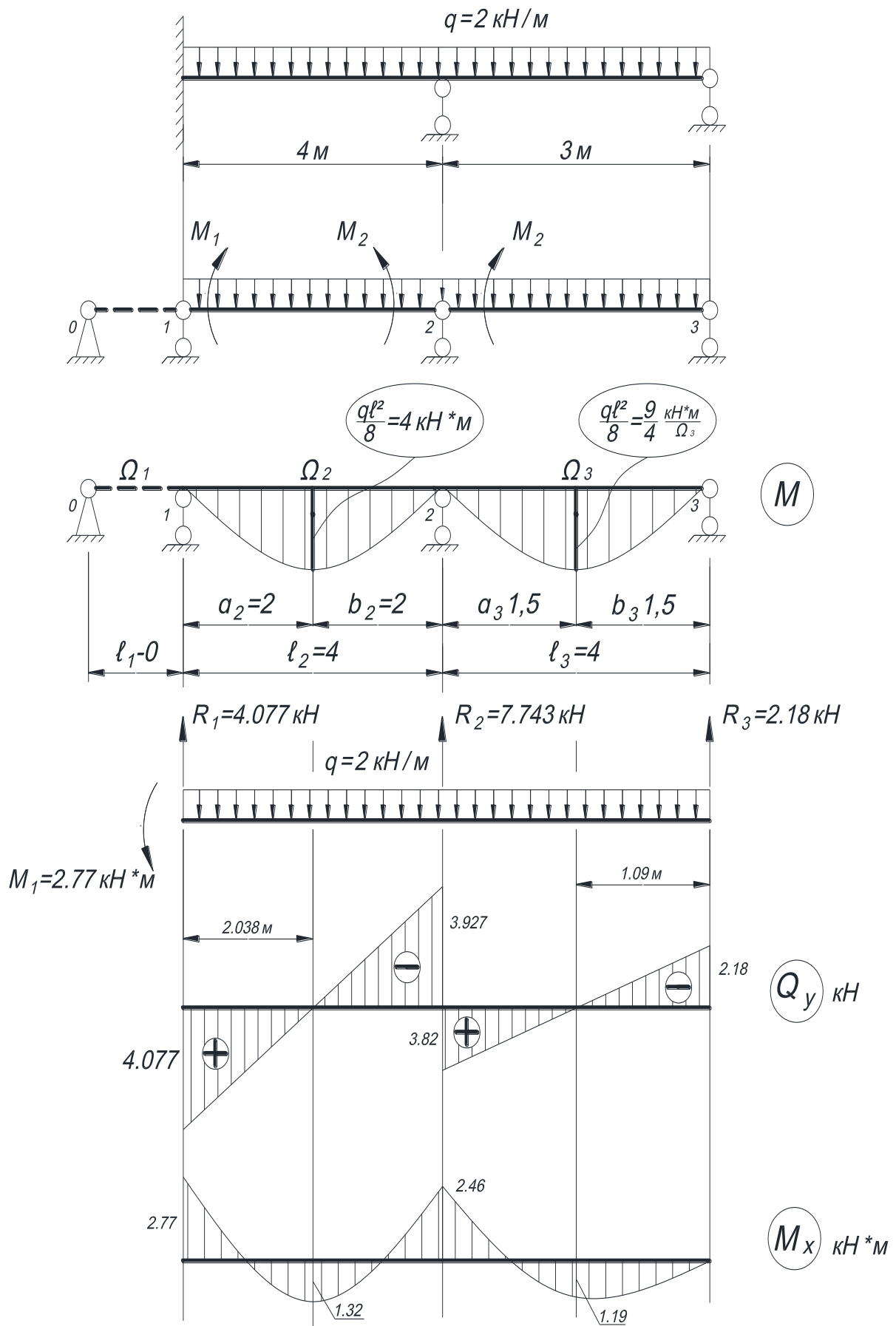


Рис. 7.23. Схема багатопрогинної балки.

Маємо: $l_2=4\text{м}; l_3=3\text{м}; a_2=2\text{м}; b_2=2\text{м}; a_3=b_3=1,5\text{м}; \Omega_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{32}{3};$

$\Omega_3 = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$. Підставивши, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 \cdot M_1 \cdot 4 + 4 \cdot M_2 = -6 \left(\frac{32}{3} \cdot \frac{2}{4} \right) \\ 4 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 (4 + 3) = -6 \left(\frac{32}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1,5}{3} \right); \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$M_1 = -2,77 \text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_2 = -2,46 \text{кН} \cdot \text{м}$$

Знак «мінус» означає, що розтягнутими є верхні волокна балки.

Знайдемо опорні реакції:

$$R_n = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}};$$

$$R_1 = R_1^0 - \frac{M_1 - M_0}{l_1} - \frac{M_1 - M_2}{l_2};$$

$$R_1 = 4 - \frac{2,77 - 0}{0} - \frac{-2,77 + 2,46}{4} = 4,077 \text{кН}$$

$$R_2 = R_2^0 - \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_2 - M_3}{l_3};$$

$$R_2 = 4 + 3 - \frac{-2,46 + 2,77}{4} - \frac{-2,46}{3} = 7,74 \text{кН}$$

$$R_3 = R_3^0 - \frac{M_3 - M_2}{l_3} - \frac{M_3 - M_4}{l_4} = 2,18 \text{кН}.$$

Контролі:

а) **Статичний:**

$$\sum y = 0: -R_1 - R_2 - R_3 + q \cdot z = -4,077 - 7,743 - 2,18 + 2 \cdot 7 = -14 + 14 = 0.$$

б) **Кінематичний:**

Прогин в перерізі $z=4$ м дорівнює нулю (оскільки опора)

$$EIU(z=4) = M_1 \frac{z^2}{2} - R_1 \frac{z^3}{6} + q \frac{z^4}{24} = 2,77 \frac{4^2}{2} - 4,077 \frac{4^3}{6} + 2 \frac{4^4}{24} = 43,49 - 43,49 = 0$$

7.5. Приклади розв'язання задач

Умова задачі: розкрити статичну невизначеність рами.

Дано: раму зображена на рис. 7.23; $h = 4$ м; $l = 2$ м; $P = 40$ кН

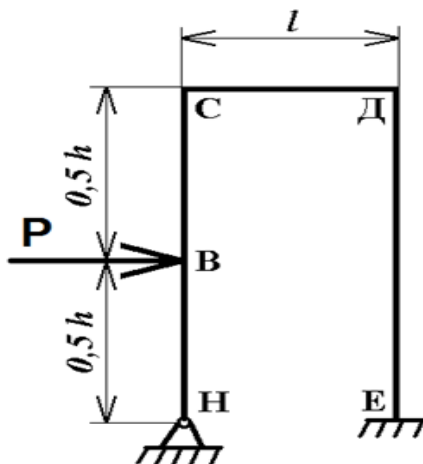


Рис. 7.23. Схема рами

1) Визначаємо ступінь статичної невизначеності рами, вибираємо основну систему та створюємо еквівалентну.

Ступінь статичної невизначеності рівний двом - дві „зайві” опори. Основна система зображена на рис. 7.24 а, геометрично не змінна. Завантажуємо основну систему зовнішнім навантаженням і зусиллями відкинутих в'язей (створюємо еквівалентну систему), яка зображена на рис. 7.24 б.

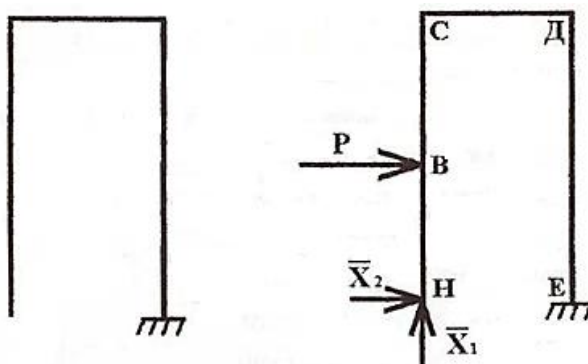


Рис. 7.24. а - основна система; б - еквівалентна система

2) Складаємо канонічні рівняння методу сил.

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3) Будуємо для основної системи одиничні (рис. 7.25 а, б) та вантажну (рис. 7.25 в) епюри моментів згинання.

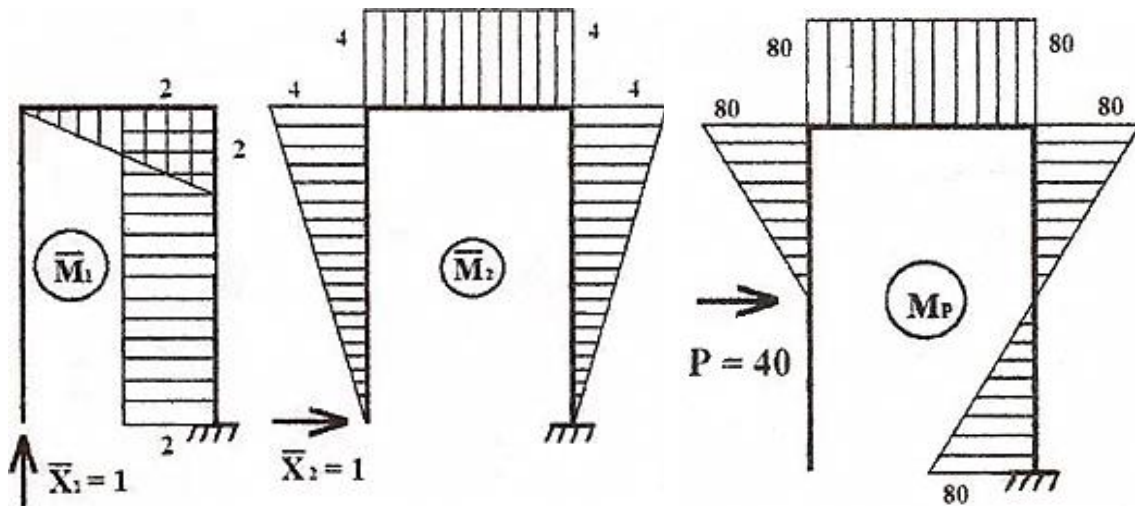


Рис.7.25. а, б - одиничні епюри; в - вантажна епюра

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{56}{3 \cdot EI};$$

$$\delta_{12} = \sigma_{21} = \frac{1}{EI} \left(-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{24}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{176}{3 \cdot EI};$$

$$\delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left(-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 - 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{160}{EI};$$

$$\delta_{2P} = \frac{1}{EI} \left(80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 + 80 \cdot 2 \cdot 4 + 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 - 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \right) = \frac{3360}{3 \cdot EI}$$

4) Підставляємо значення коефіцієнтів у систему канонічних рівнянь методу сил.

$$\begin{cases} \frac{56}{3 \cdot EI} \cdot x_1 - \frac{24}{EI} \cdot x_2 = \frac{160}{EI} \\ -\frac{24}{EI} \cdot x_1 + \frac{176}{3 \cdot EI} \cdot x_2 = -\frac{3360}{3 \cdot EI} \end{cases}$$

5) Отримаємо систему з двох рівнянь з двома невідомими, які можна знайти вирішивши систему:

$$\begin{cases} 56 \cdot x_1 - 72 \cdot x_2 = 480 & | \cdot 72 \\ -72 \cdot x_1 + 176 \cdot x_2 = -3360 & | \cdot 56 \\ \hline 4032 \cdot x_1 - 5184 \cdot x_2 = 34560 \\ -4032 \cdot x_1 + 9856 \cdot x_2 = -188160 \\ \hline 4672 \cdot x_2 = -153600 \\ x_2 \approx -32,9 \text{кН} \\ x_1 = \frac{-72 \cdot 32,9 + 480}{56} = -33,7 \text{кН} \end{cases}$$

б) Будуємо епюри моментів згинання (рис. 7.26), поздовжніх (рис. 7.27 а) і поперечних (рис. 7.27 б) сил.

Для побудови ешор моментів згинання побудуємо виправлені епюри одиничних станів.

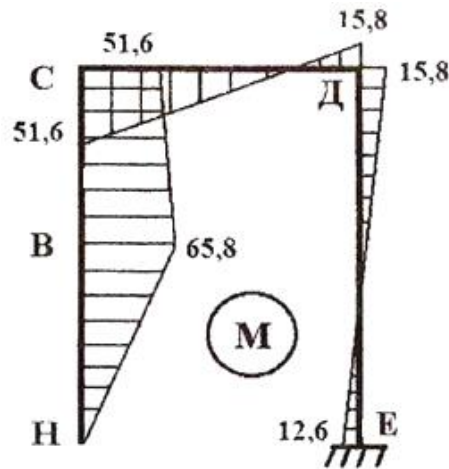


Рис.7.26. Епюра моментів згинання

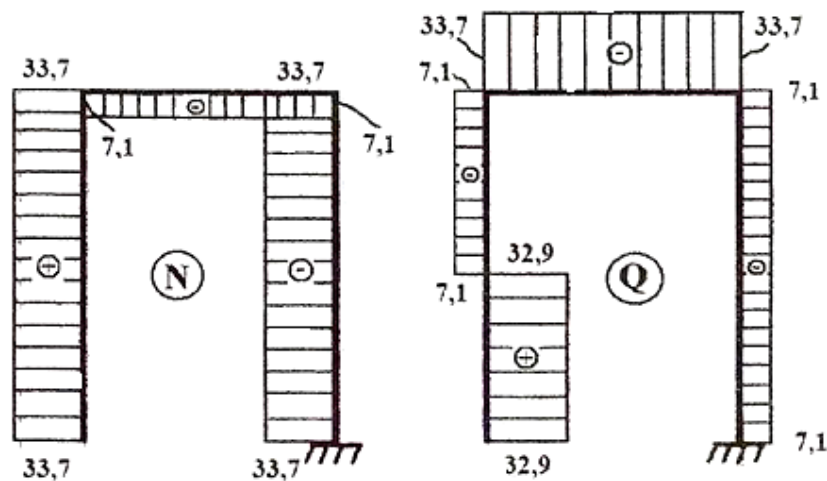


Рис.7.27. Епюри поздовжньої і поперечної сили

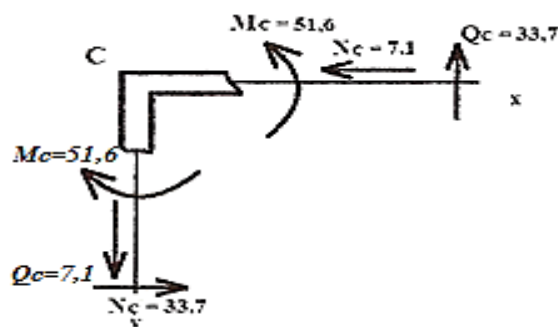


Рис. 7.28. Графічне зображення вузлового контролю (вузол С)

$$7) \sum M_c = 0; \quad 51,6 - 51,6 = 0$$

$$\sum x_i = 0; \quad -7,1 + 7,1 = 0$$

$$\sum y_c = 0; \quad -31,7 + 31,7 = 0$$

8) Кінематичний контроль перемноження будь-якої одиничної епюри моментів згинання з вантажною та епюрами виправленого одиничного стану, що в результаті повинно давати нуль. Наприклад:

$$M_1 \cdot x_1 \cdot M_1 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_1 + M_P \cdot M_1 = 0 \quad \text{або}$$

$$M_1 \cdot x_1 \cdot M_2 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_2 + M_P \cdot M_2 = 0$$

Розпишемо детальніше:

$$\begin{aligned} M_1 \cdot x_1 \cdot M_1 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_1 + M_P \cdot M_1 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 67,4 - 2 \cdot 4 \cdot 67,4 \\ + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 131,6 + 131,6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 80} - 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\ + 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \approx 0 \end{aligned}$$

Задача вирішена вірно.

7.6. Завдання для самоконтролю

Закріпити пройдений матеріал можна за допомогою мультимедійної презентації «Розрахунок статично невизначених систем та багатопрогинних нерозрізних балок».

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38116>



Мультимедійна презентація «Розрахунок статично невизначених систем та багатопрогинних нерозрізних балок».

7.7. Завдання для самостійного виконання

Завдання 1

Для зображеної на рисунку рами необхідно:

- обрати основну систему методу сил;
- скласти канонічні рівняння; побудувати дія основної системи одиничні і вантажні епюри моментів згинання;
- визначити одиничні і вантажні переміщення;
- знайти „зайві” невідомі;
- побудувати епюри моментів згинання, поперечних і поздовжніх сил для статично невизначеної рами.

Таблиця 7.1

Варіанти завдань для самостійного виконання (завдання 1)

№	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	h, м	l ₁ , м	l ₂ , м	l ₁ /l ₂ , м
1	12	3	15	2	6	3	1,5
2	16	4	12	3	7	4	2,0
3	18	5	14	4	8	5	2,5
4	20	6	16	5	9	5	2,0
5	10	7	20	6	10	6	1,5
6	12	8	21	7	4	2	2,0
7	20	9	19	8	5	3	2,5
8	22	10	22	8	3	2	1,5
9	24	11	26	9	2	2	2,0
10	26	12	12	10	7	4	2,5
11	28	4	15	3	5	3	1,5
12	14	5	16	4	8	4	2,0
13	16	6	17	5	4	2	2,0
14	20	7	18	6	2	2	1,5
15	15	9	19	7	6	3	2,0

Завдання 2.

Для даної багатопрольотної балки визначити:

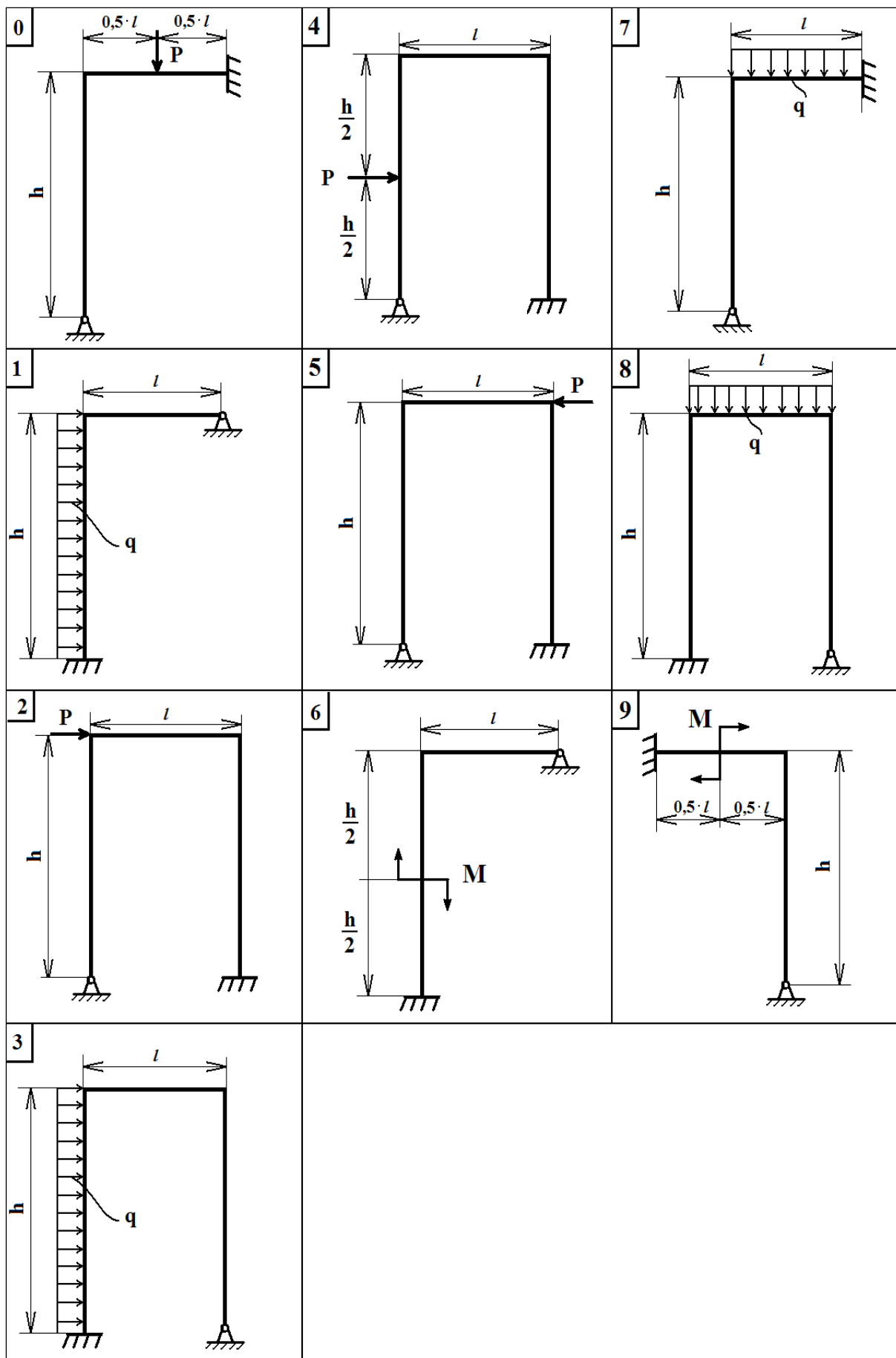
- ступінь статичної невизначеності;
- побудувати епюри M_x і Q_y ;
- знайти опорні реакції

Таблиця 7.2

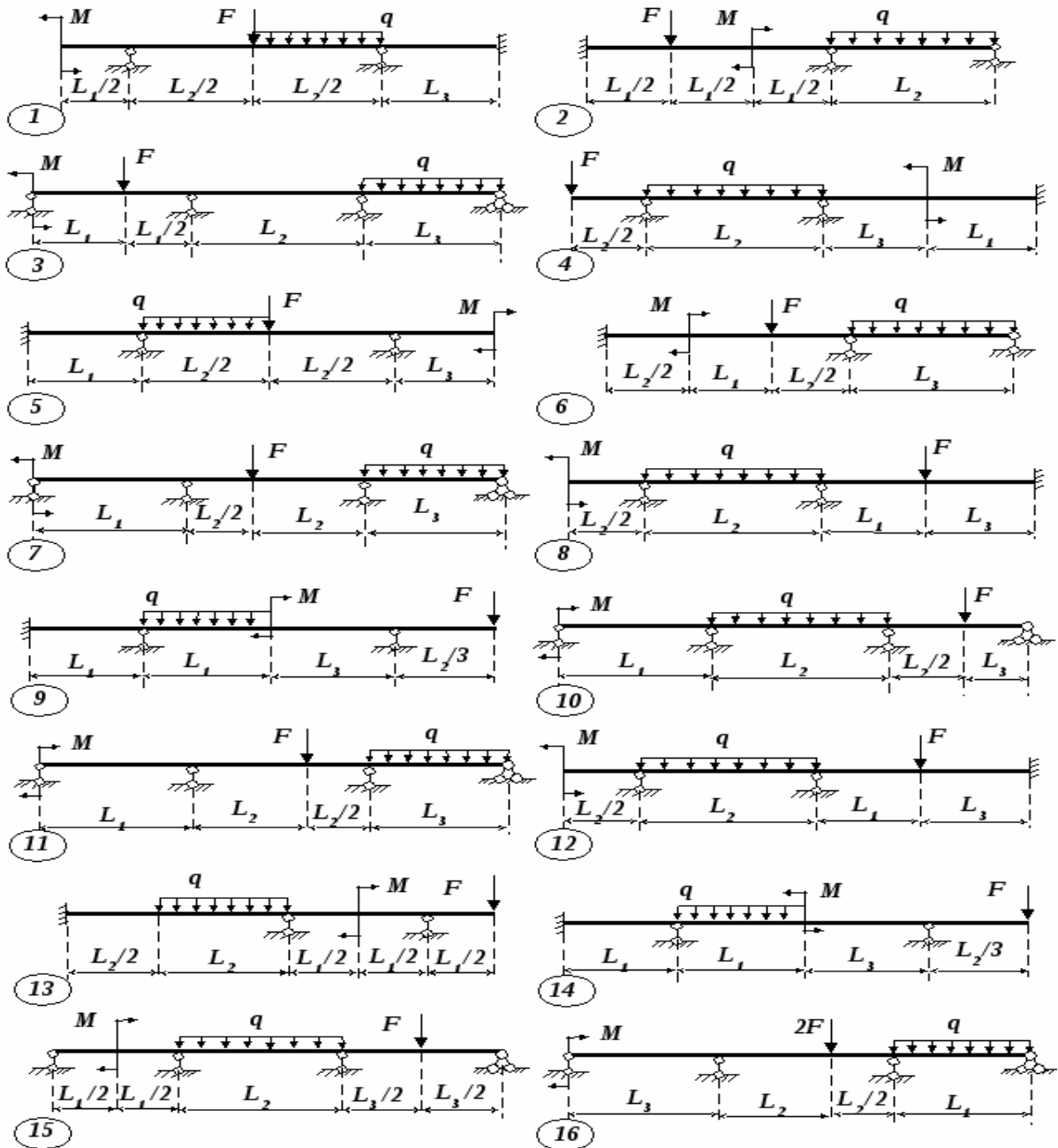
Варіанти завдань для самостійного виконання (завдання 2)

№	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	L ₁ , м	L ₂ , м	L ₃ , м
1	12	3	15	2	6	3
2	16	4	12	3	7	4
3	18	5	14	4	8	5
4	20	6	16	5	9	5
5	10	7	20	6	10	6
6	12	8	21	7	4	2
7	20	9	19	8	5	3
8	22	10	22	8	3	2
9	24	11	26	9	2	2
10	26	12	12	10	7	4
11	28	4	15	3	5	3
12	14	5	16	4	8	4
13	16	6	17	5	4	2
14	20	7	18	6	2	2
15	15	9	19	7	6	3

Схеми до завдання 1.



Схеми до завдання 2.



7.8. Лабораторна робота № 4

Тема: Визначення реакції середньої опори двопрогінної нерозрізної балки

Мета роботи: експериментальне визначення реакції середньої опори нерозрізної балки і порівняння її з результатом теоретичного розрахунку.

Загальні відомості

Розрахункова схема двопрогінної нерозрізної балки з двома консолями представлена на рис.7.29. Теоретичне значення реакції середньої опори для балки, визначене, наприклад, на основі методу сил або інших методів, показаної на рис.7.29, так само:

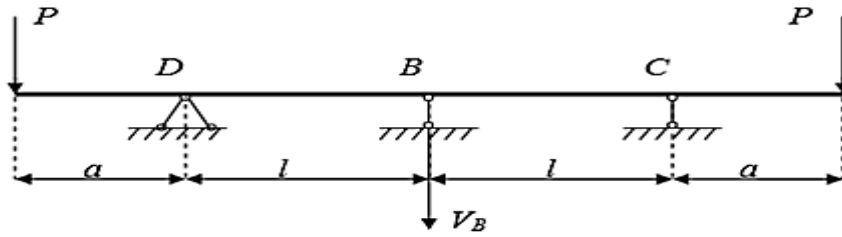


Рис.7.29. Розрахункова схема двопрогінної нерозрізної балки з двома консолями

$$V_B^T = \frac{3 \cdot P \cdot a}{l},$$

де l – прольот між опорами D і B, B і C; a - довжина консольних ділянок балки. Для визначення реакції дослідним шляхом розглядається балка на двох опорах прогином $2l$ (рис. 7.30, а).

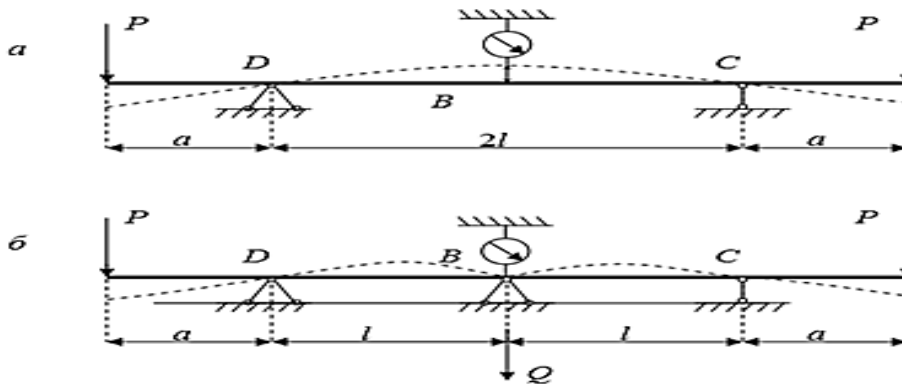


Рис.7.30. Балка на двох опорах прогином $2l$

Навантажимо балку на кінцях консолей зосередженими силами P . Під дією зазначених сил балка зігнеться і переріз B при цьому переміститься вгору (рис. 7.30, а). Дослідне значення величини реакції $V_B^{\text{оп}}$. Визначимо з умови рівності нулю переміщення балки в точці B. Для цього в перерізі B прикладемо силу Q таку, щоб переріз B повернути в початкове положення (рис. 7.30, б). Тоді шукана величина реакції буде дорівнює цій силі Q , тобто $V_B^{\text{оп}} = Q$.

Порядок виконання роботи

1. Встановити балку на дві опори, заміряти відстань $2l$ між опорами D і C і довжини консолей a .

2. Записати показання індикатора, що знаходиться в перерізі B в ненавантаженому стані балки (можна показання індикатора встановити на нуль). На консолі плавно підвісити вантажі P , записати нове показання індикатора.

3. Плавно навантажити підвіску, прикріплену в точці B. Навантаження проводити до тих пір, поки стрілка індикатора не

повернеться в початкове положення, відповідне ненавантаженому стану балки.

4. Підрахувати вага вантажу Q , що знаходиться на підвісці. Це і буде величина реакції середньої опори $V_B^{оп} = Q$.

5. Визначити відсоток розбіжності між теоретичним і експериментальним значеннями реакції:

$$\Delta = \frac{V_B^{оп} - V_T^B}{V_T^B} \cdot 100\% = \dots \dots \dots 100\% \dots \dots \dots \%$$

Звіт

Мета роботи:.....

Схема установки

Розмір балки: прольот $2l = \dots$ см; довжина консолі $a = \dots$ см.

Результати досліду: навантаження $P = \dots$ Н. Вага вантажу в прогині (величина реакції середньої опори $V_B^{оп} = Q$): $Q = \dots$ Н. Реакція середньої опори, обчислена аналітично: $V_T^B = \frac{3 \cdot P \cdot a}{l} = \dots = \dots$ Н.

Відсоток розбіжності між теоретичним і дослідним значеннями реакції:

$$\Delta = \frac{V_B^{оп} - V_T^B}{V_T^B} \cdot 100\% = \dots \dots \dots 100\% \dots \dots \dots \%$$

Посилання на онлайн лабораторну роботу з мультимедійним супроводом «Визначення реакції середньої опори двопрогинної нерозрізної балки» наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38121>



Онлайн лабораторна робота №4 з мультимедійним супроводом «Визначення реакції середньої опори двопрогинної нерозрізної балки»

7.9. Тестові завдання

Посилання на електронний тестовий навчальний тренажер наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=38117>



Електронний тестовий навчальний тренажер «Статично невизначені системи»

Розділ 8. Складний опір

8.1. Загальне поняття про складний опір

Залежно від характеру прикладання зовнішнього навантаження та умов закріплення кінців стрижня в загальному випадку в його поперечному перерізі може виникати *шість зусиль*.

Якщо в поперечному перерізі виникає одне зусилля, то стрижень знаходиться в умовах простої деформації. При виникненні двох і більше зусиль – стрижень знаходиться в умовах складного опору.

Знайдемо внутрішні зусилля в поперечному перерізі стрижня, що знаходиться під дією сили P (рис. 8.1). Сила P напрямлена під кутом α до осі z , під кутом β до осі x і під кутом γ до осі y .

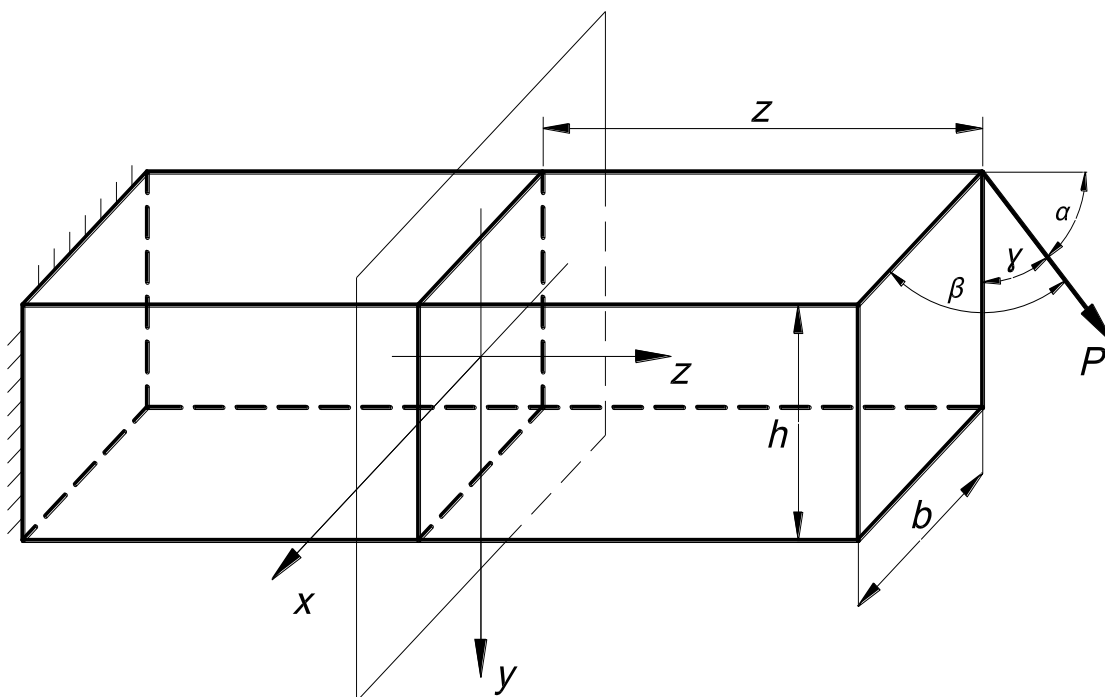


Рис. 8.1. Завантаження стрижня.

$$N_z = P \cos \alpha \text{ – поздовжня сила}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -(P \cos \alpha) \frac{h}{2} - (P \cos \gamma) \cdot z \\ M_y &= -(P \cos \alpha) \frac{b}{2} - (P \cos \beta) \cdot z \end{aligned} \right\} \text{згинальні моменти}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= P \cos \beta \\ Q_y &= P \cos \gamma \end{aligned} \right\} \text{поперечні сили}$$

$$M_z = -(P \cos \beta) \frac{h}{2} + (P \cos \gamma) \frac{b}{2} \text{ – крутний момент}$$

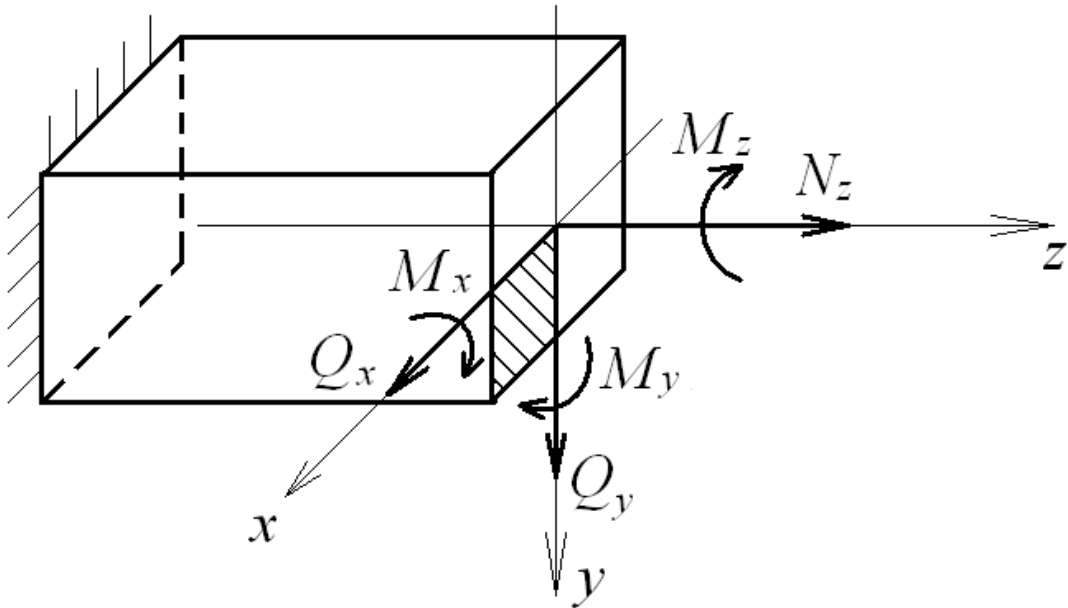


Рис. 8.2 Внутрішні зусилля в поперечному перерізі стрижня.

Три зусилля N_z , M_x , M_y призводять до виникнення нормальних напружень σ .

Q_x , Q_y та M_z – до появи дотичних напружень τ .

Для того, щоб визначити сумарне значення напруження, застосовують принцип суперпозиції, тобто визначають значення напруження від кожного компонента внутрішніх зусиль окремо, а потім їх векторно складають, враховуючи знаки.

Згинальні моменти вважають додатними, якщо вони викликають розтяг у точках, що лежать у додатній чверті перерізу (заштриховано на рис. 8.2).

Для точок у додатній чверті маємо:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

Дотичні напруження складаються геометрично:

$$\tau_x = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot h}; \quad \tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b}; \quad \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

При крученні дотичні напруження визначаються:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho = \frac{M_z}{W_\rho}.$$

Залежно від виникнення внутрішніх зусиль виділяють такі основні види складного опору стрижня:

- а) косий згин;
- б) позацентровий розтяг-стиск;
- в) одночасна дія згину і поздовжньої сили;
- г) згин з крученням.

8.1.2. Косий згин

а) Напруження при косому згині

Косий згин є тоді, коли в поперечному перерізі стрижня виникає два згинальні моменти: M_x та M_y .

Завантажимо консольну балку силою P під кутом α до осі y та розглянемо переріз $n-m$ (рис. 8.3).

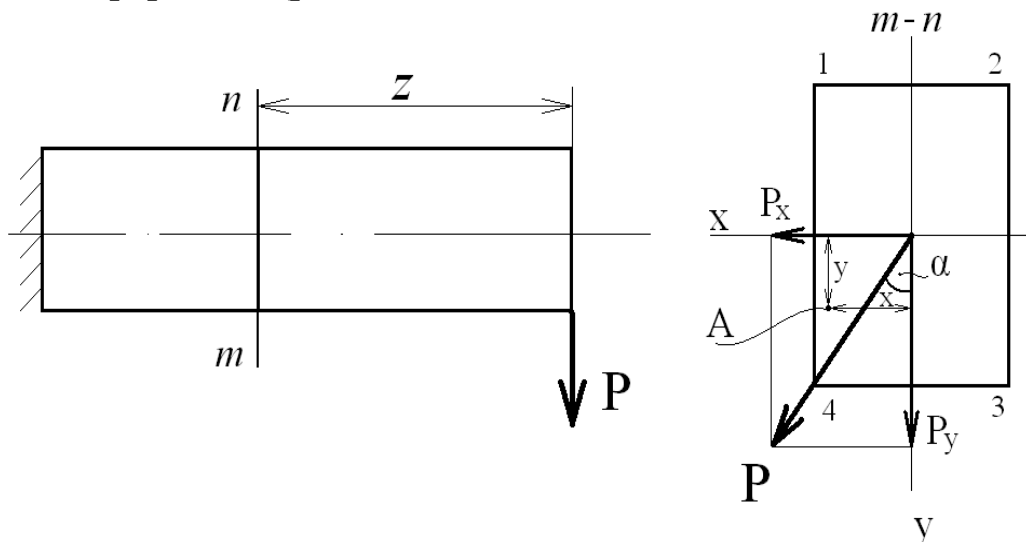


Рис. 8.3. Косий згин.

Спроекувавши силу на координатні осі, маємо:

$$\begin{aligned} P_x &= P \sin \alpha; \\ P_y &= P \cos \alpha; \end{aligned} \quad (8.1)$$

Згинальні моменти в перерізі $n-m$ визначаються:

$$\begin{aligned} M_x &= P_y \cdot z = -P \cdot z \cdot \cos \alpha; \\ M_y &= -P_x \cdot z = -P \cdot z \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Формула для визначення нормальних напружень в точці A додатної чверті поперечного перерізу має вигляд:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (8.3)$$

Максимальні напруження для прямокутного поперечного перерізу виникають у контурних точках (1, 2, 3, 4) (рис. 8.4).

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_{(3)} &= -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; \\ \sigma_{(2)} &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_{(4)} &= -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; \end{aligned}$$

де: $W_x; W_y$ – момент опору поперечного перерізу відносно осей x і y .

Побудуємо епюру σ в перерізі (рис. 8.4).

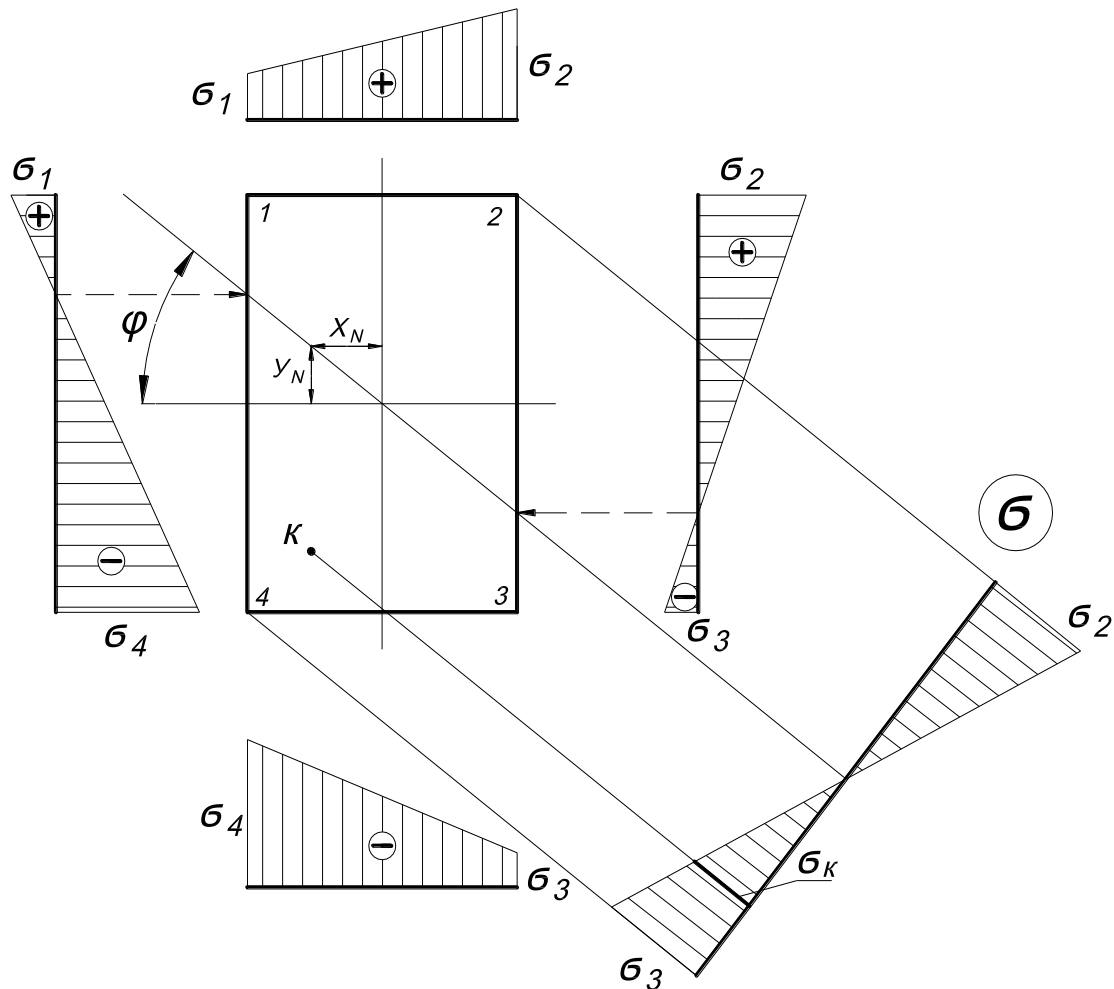


Рис. 8.4. Епюра нормальних напружень при косому згині.

б) Визначення положення нульової лінії при косому згині

Провівши із нульового значення епюри σ до перерізу пунктирну лінію, отримаємо положення нульової лінії (н.л.), яка поділяє переріз

на дві зони: стиснуту і розтягнуту. Прирівнюючи вираз (8.3) до нуля, отримаємо координати будь-якої точки нульової лінії:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y_N}{I_x} + \frac{M_y \cdot x_N}{I_y} = 0;$$

$$-\frac{y_N}{x_N} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \quad (8.4)$$

Знак « \leftarrow » показує, що нульова лінія не проходить через першу чверть, де діє сила P .

Якщо врахувати вираз (8.2), можна отримати:

$$\frac{y_N}{x_N} = \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha \quad (8.5)$$

Це означає, що силова лінія не є перпендикуляром до нульової лінії, як при прямому згині.

Тільки для симетричних поперечних перерізів (квадрат, коло, кільце) для яких $I_x = I_y$ косий згин неможливий, оскільки $\varphi = \alpha$.

в) Прогини при косому згині

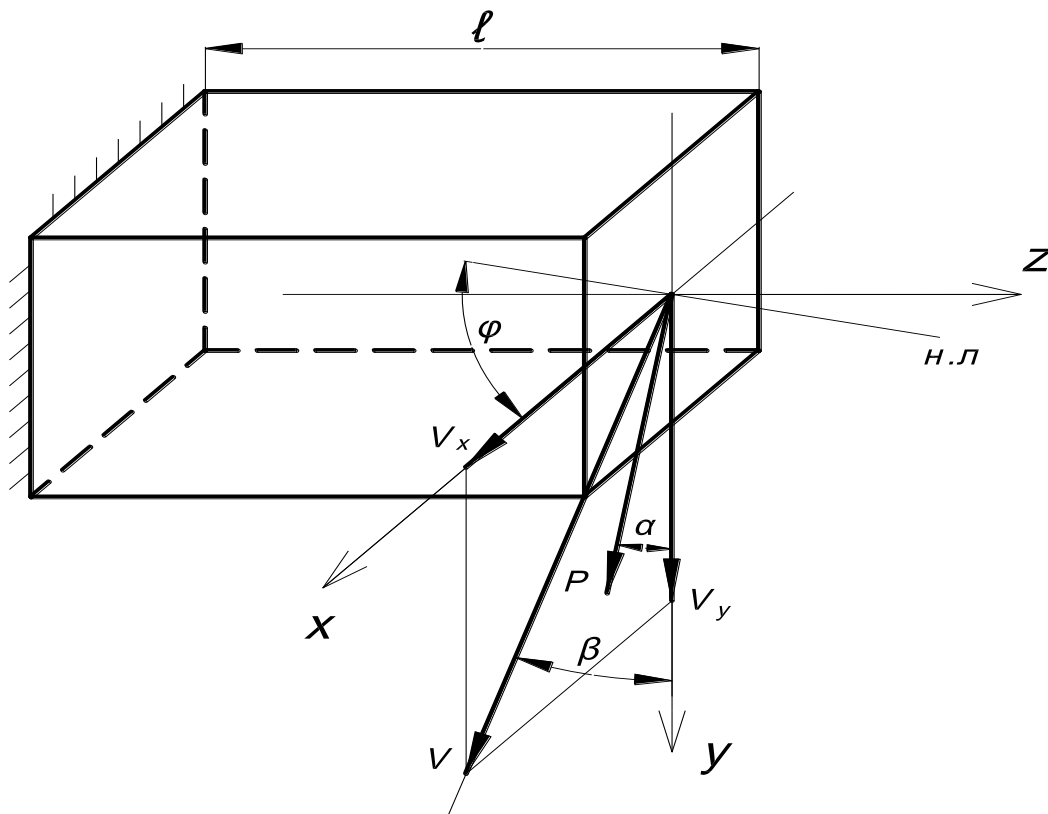


Рис. 8.5. Прогини при косому згині.

Розкладемо силу P на дві складові P_x і P_y і знайдемо окремо прогин від цих складових (рис. 8.5):

$$V_x = \frac{P_x \cdot l^3}{3EI_y}; \quad V_y = \frac{P_y \cdot l^3}{3EI_x}$$

Загальний прогин визначається як геометрична сума:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Знайдемо $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_x}{V_y} = \frac{I_x \cdot P_x}{I_y \cdot P_y};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\alpha \quad (8.6)$$

Порівнюючи вираз (8.5) з виразом (8.6), маємо, що $\varphi = \beta$. Це означає, що площина прогину перпендикулярна нульовій лінії і не збігається з силовою площиною ($\beta \neq \alpha$). Звідси пішла назва **косе згинання**.

8.1.3. Одночасна дія згину і поздовжньої сили

Якщо на стрижень діє вертикальна сила P та горизонтальна сила H (рис. 8.6.а), то він знаходиться в умовах одночасної дії згину і поздовжньої сили, які визначаються:

$$\begin{aligned} N_z &= -P, \\ M_x &= H \cdot z; \end{aligned} \quad (8.7)$$

Напруження в точці A :

$$\sigma_A = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{I_x} y \quad (8.8)$$

Для іншого випадку завантаження (рис. 8.6.б) напруження в точці A дорівнюють:

$$\sigma_A = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A. \quad (8.9)$$

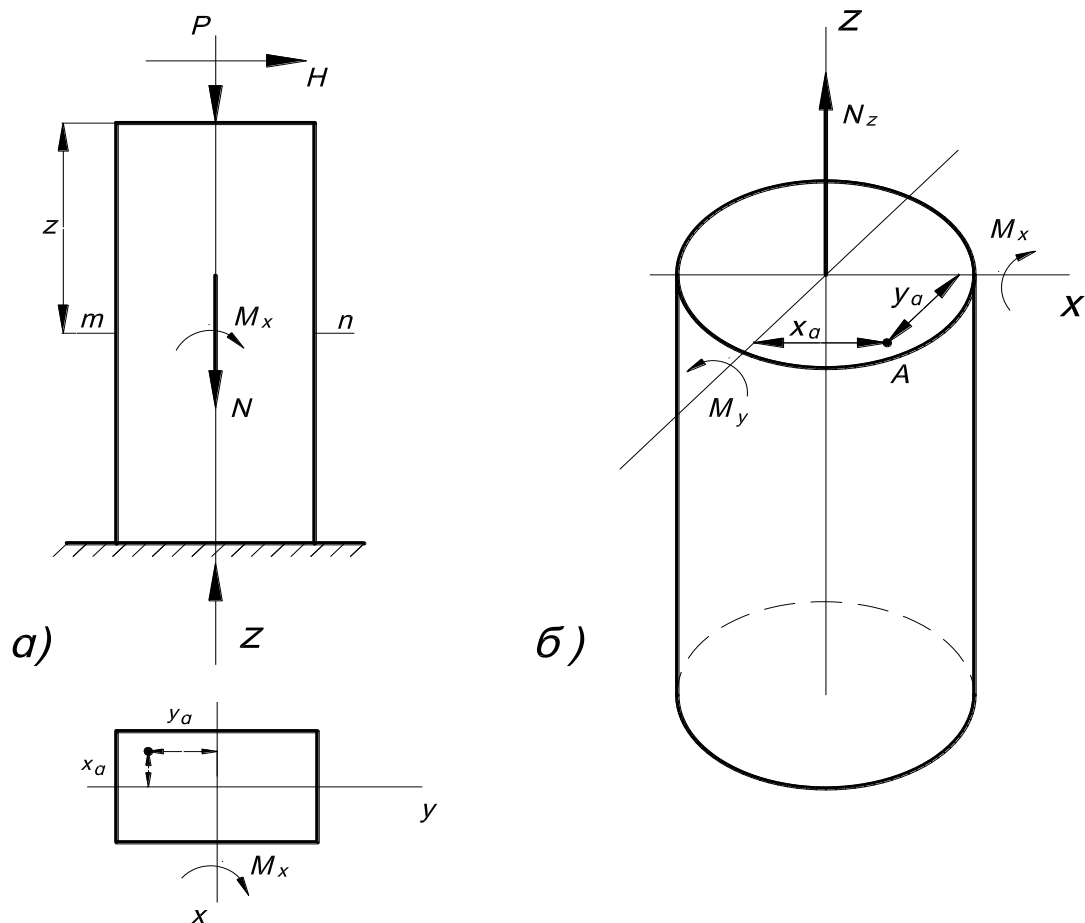


Рис. 8.6. Дія згину і поздовжньої сили.

8.1.4. Згин з крученням

Одночасна дія згину і кручення досить часто зустрічається в машинобудуванні. Розглянемо на прикладі колінчатих валів (рис. 8.7).

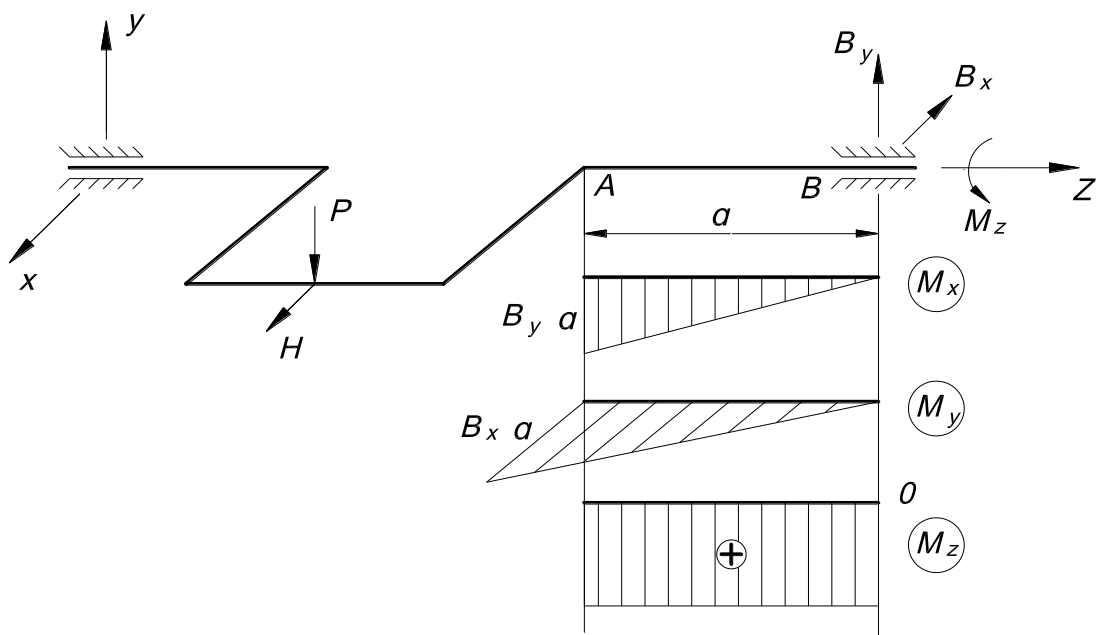


Рис. 8.7. Одночасна дія згину і кручення.

Від дії двох сил P і H в правому підшипнику виникають реакції B_y та B_x та реактивний крутний момент M_z .

Побудуємо епюри згинальних моментів M_x і M_y та крутного моменту M_z (рис. 8.7).

Сумарний згинальний момент визначиться:

$$M_{заг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (8.10)$$

Умови міцності при цьому мають вигляд:

– за нормальними напруженнями:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{заг}}{W} \leq [\sigma]. \quad (8.11)$$

– дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau]. \quad (8.12)$$

8.2. Позацентрова дія поздовжньої сили

8.2.1. Визначення напружень при позацентровому розтягу-стиску

У тому разі, коли точка прикладання поздовжньої сили не збігається з центром ваги поперечного перерізу стрижня, а напрям дії сили паралельний осі, то такий стрижень знаходиться в умовах позацентрового стиску або розтягу (рис. 8.8).

Використовуючи принцип Пуансо (перенесення сил P з точки А в точку В) (рис. 8.9) з'ясовуємо, що в будь-якому поперечному перерізі стрижня виникає три внутрішніх зусилля, які дорівнюють (рис. 8.9):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_z = -P \\ M_x = -P \cdot y_p \\ M_y = -P \cdot x_p \end{array} \right\} \quad (8.13)$$

де: x_p , y_p – координати прикладання сили, які називаються ексцентриситетами. Знак « \leftarrow » при моментах означає, що в точках додатної чверті виникає стиск.

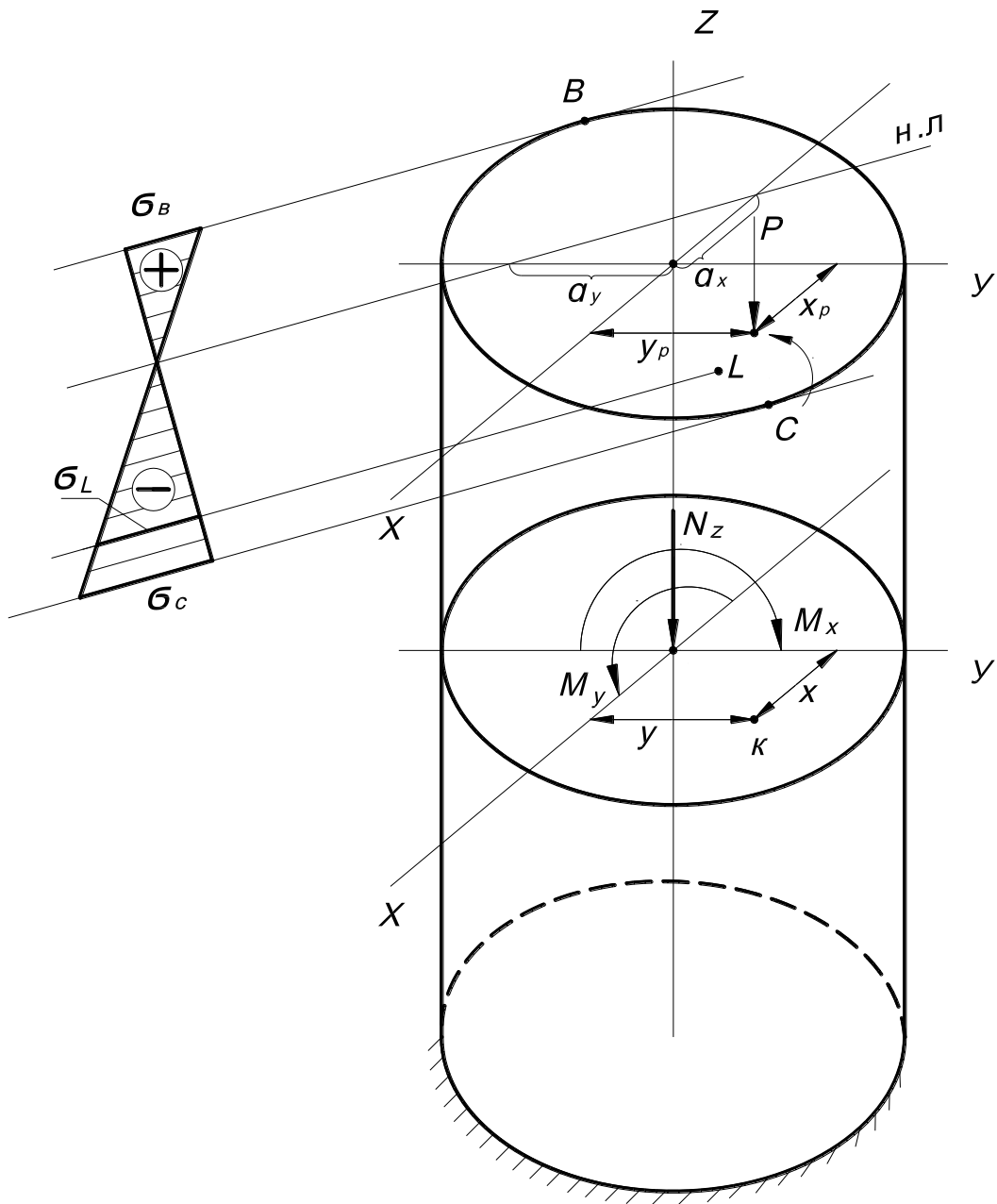


Рис. 8.8. Позацентрива дія поздовжньої сили.

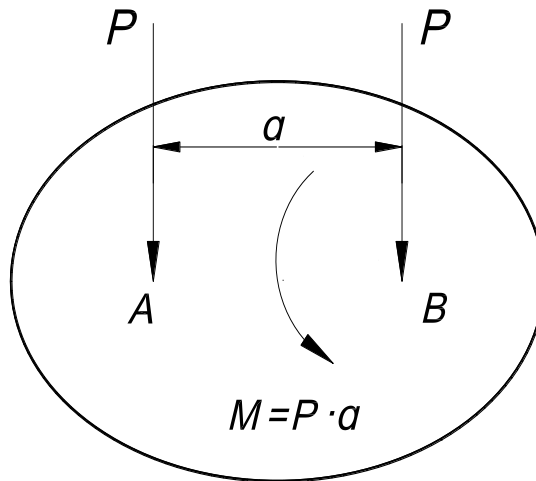


Рис. 8.9. Принцип Пуансо.

У будь-якій точці K додатної чверті можна визначити нормальні напруження за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x.$$

Використовуючи (8.13), маємо:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p}{I_x} \cdot y - \frac{P \cdot x_p}{I_y} \cdot x;$$

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y \cdot y_p}{\underbrace{I_x / F}_{i_x^2}} + \frac{x \cdot x_p}{\underbrace{I_y / F}_{i_y^2}} \right);$$

враховуючи, що $\frac{I_x}{F} = i_x^2 = \frac{I_y}{F} = i_y^2$.

Отримаємо формулу для визначення нормальних напружень при позacentровому розтягу-стиску:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y \cdot y_p}{i_x^2} + \frac{x \cdot x_p}{i_y^2} \right); \quad (8.14)$$

8.2.2. Рівняння нульової лінії

Лінію, що поділяє переріз на дві частини – стиск і розтяг, називають нульовою лінією. Для визначення положення нульової лінії у вираз (8.14) підставимо координати будь-якої її точки н.л. і прирівняємо до нуля:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} \right) = 0.$$

де y_N, x_N – координати точки нульової лінії.

Оскільки $\frac{P}{F} \neq 0$, то:

$$1 + \frac{y_p \cdot y_N}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_N}{i_y^2} = 0 \quad (8.15)$$

Вираз (8.15) є *рівняння нульової лінії*.

Положення нульової лінії зручно визначати за тими відрізками, які вона відсікає на осях координат (рис. 8.10)

$$y_N = 0; \quad x_N = a_x; \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{x_p \cdot a_x}{i_y^2} = 0.$$

$$x_N = 0; \quad y_N = a_y; \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{y_p \cdot a_y}{i_x^2} = 0.$$

Звідки можна знайти відрізки, що відсікає нульова лінія на осях координат? Провівши через ці точки перетину пряму, отримуємо положення нульової лінії:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -\frac{i_y^2}{x_p}; \\ a_y &= -\frac{i_x^2}{y_p}. \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Часто вирішується зворотна задача, тобто за відомим положення нульової лінії, визначають полюс прикладання зовнішньої сили:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= -\frac{i_y^2}{a_x}; \\ y_p &= -\frac{i_x^2}{a_y}. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Знаючи положення нульової лінії та переносячи її паралельно початковому розташуванню, знаходимо найбільш напружені точки. Це ті точки перерізу, які будуть останніми торкатися нульової лінії при паралельному її переносі (на рис. 8.8 В і С).

8.2.3. Визначення ядра перерізу

Розглянемо довільний поперечний переріз стрижня і будемо переміщувати полюс прикладання сили по прямій *OA* від центру ваги.

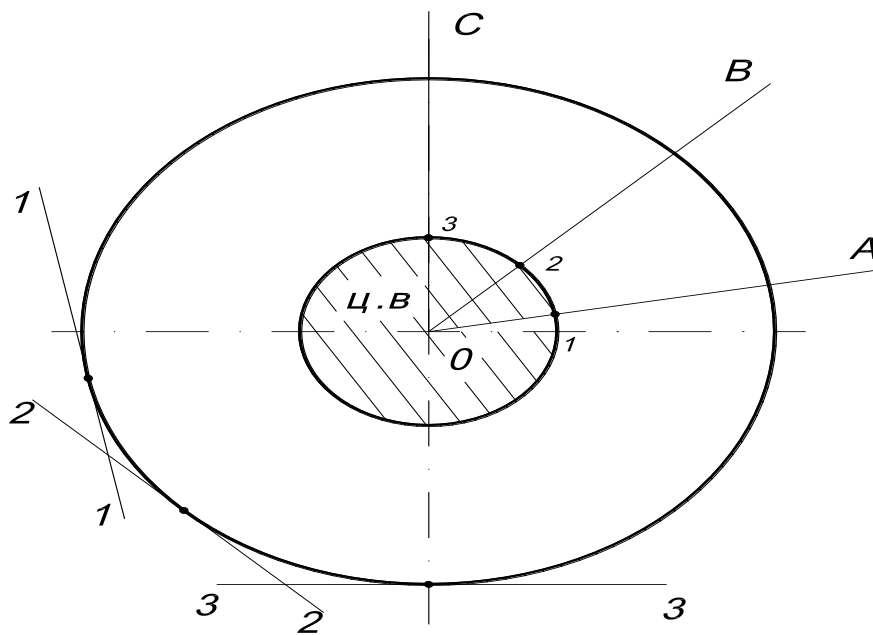


Рис. 8.10. Визначення ядра перерізу.

Якщо полюс прикладання сили в точці O , то нульова лінія знаходиться в нескінченності. При віддаленні полюса сили від центру ваги нульова лінія буде переміщуватись з нескінченності до перерізу, залишаючись паралельною сама собі. У деякому положенні нульова лінія торкнеться контуру перерізу, а точка 1, яка утвориться у результаті цього переміщення і є граничною, тобто за межі цієї точки виходити не потрібно з метою забезпечення напружень одного знаку в перерізі.

Аналогічно все відбувається і для прямих OB , OC . Якщо провести нескінченну кількість прямих, то граничні точки утворюють навколо центра ваги область (ядро перерізу).

Ядро перерізу – це область навколо центра ваги, що має таку властивість: якщо прикласти зовнішні сили у цій області, то у всьому поперечному перерізі виникнуть напруження одного знаку.

Стиснуті елементи конструкцій виготовляють із крихких матеріалів, тому небажаним є виникнення зусиль розтягу у них. Є два методи побудови ядра перерізу:

- 1) коли нульовою лінією обходять контури перерізу, а полюс сили викреслює ядро перерізу (вираз 8.16);
- 2) коли полюс сили суміщають з контурними точками поперечного перерізу, а нульова лінія викреслює ядро перерізу (вираз 8.17).

8.2.4. Побудова ядра для різних видів поперечного перерізу.

а) Прямокутний переріз.

Розглянемо чотири положення дотичної до сторін перерізу (рис. 8.11).

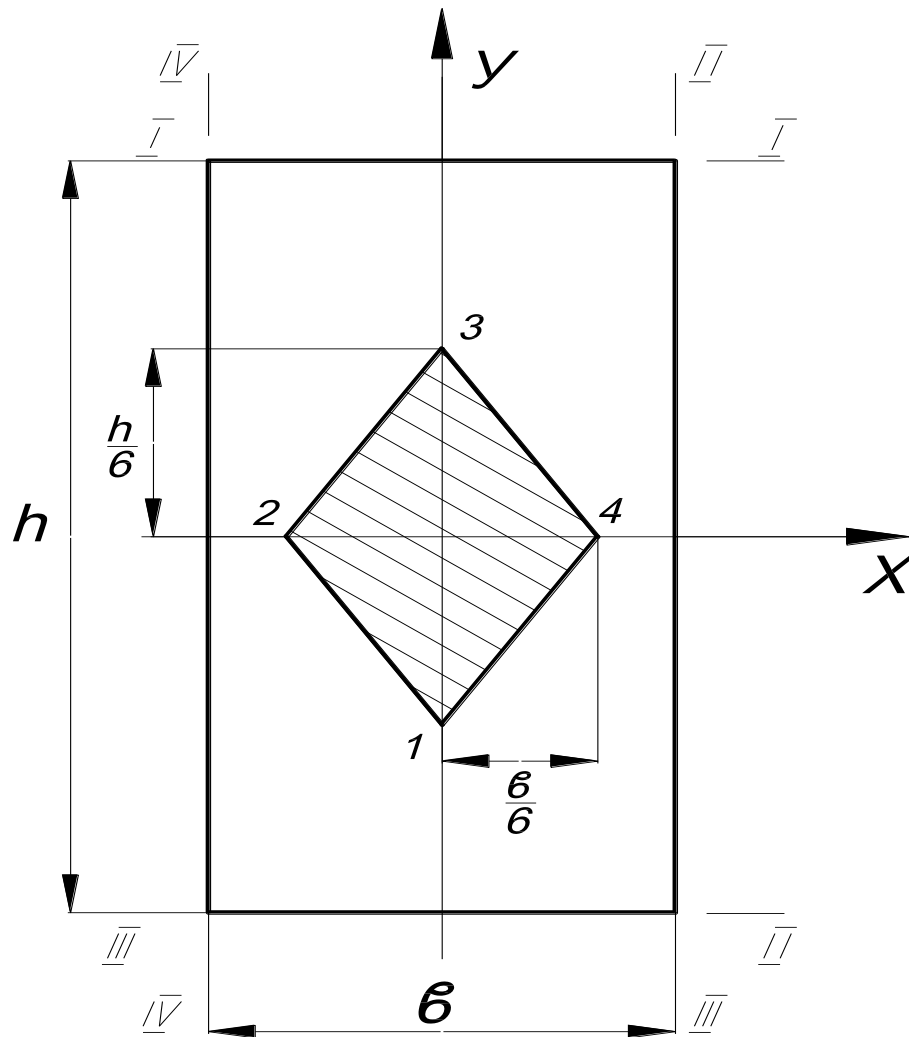


Рис. 8.11. Прямокутний переріз.

Для дотичної I-I маємо $a_x = \infty$; $a_y = \frac{h}{2}$.

Координати точки 1 ядра перерізу визначаються:

$$a_x = -\frac{ix^2}{\infty} = 0; \quad y_p = -\frac{ix^2}{a_y} = -\frac{2I_K}{hF} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}$$

Покажемо точку 1 з координатами $(0; -\frac{h}{6})$ на поперечному перерізі.

Для дотичної III-III отримаємо точку 3 з координатами $(0; \frac{h}{6})$.

Для дотичних II-II та IV-IV отримуємо відповідні точки 2 і 4 з координатами $(-\frac{b}{6};0)$; $(\frac{b}{6};0)$.

З'єднавши точки 1,2,3,4 отримуємо ядро для прямокутного перерізу, яке має форму ромба.

б) *Двотавровий переріз.*

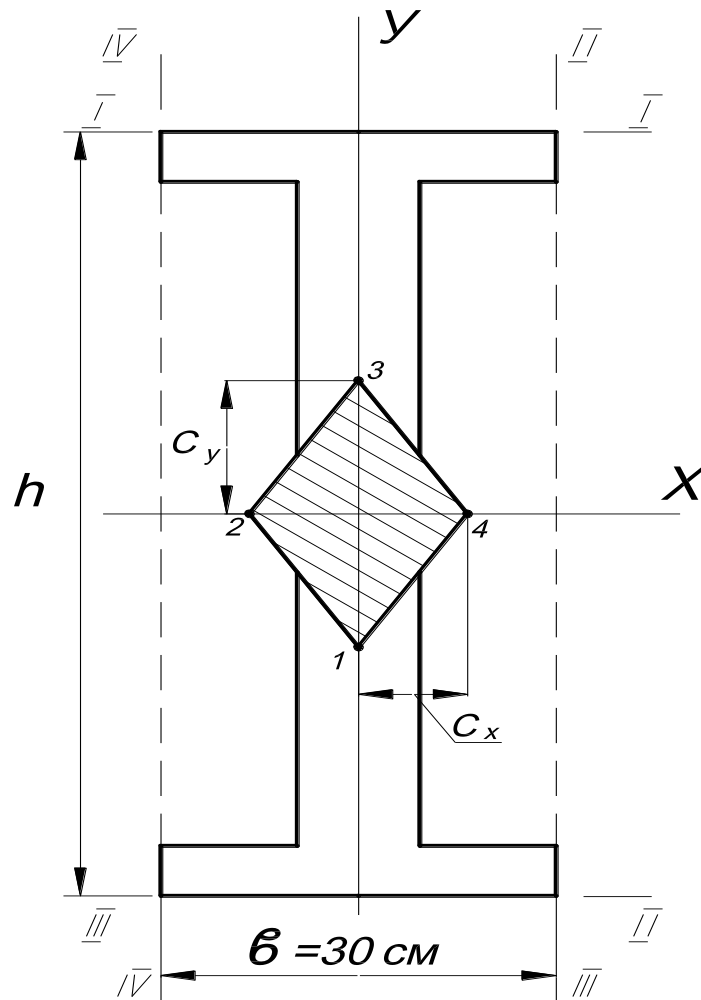


Рис. 8.12. Двотавровий переріз.

Враховуючи симетрію достатньо знайти дві величини ядра перерізу.

Для точок, що лежать на вісі y :

$$C_y = \pm \frac{i_x^2}{h/2} \quad (8.18)$$

а для двох інших точок на вісі x отримуємо:

$$C_x = \pm \frac{i_y^2}{b/2} \quad (8.19)$$

Числове значення відрізків, виражених (8.18; 8.19) залежить від співвідношення двотавра, але ядро перерізу завжди буде мати вид ромба.

в) **Суцільний круглий переріз.**

Враховуючи, що круглий переріз симетричний відносно центру, (полярна симетрія), достатньо розглянути одне довільне положення дотичної (рис. 8.13).

$$r = \pm \frac{ix^2}{R} = \pm \frac{I_x}{FR} = \frac{\pi R^4}{4\pi R^2 R} = \pm \frac{R}{4} \quad (8.20)$$

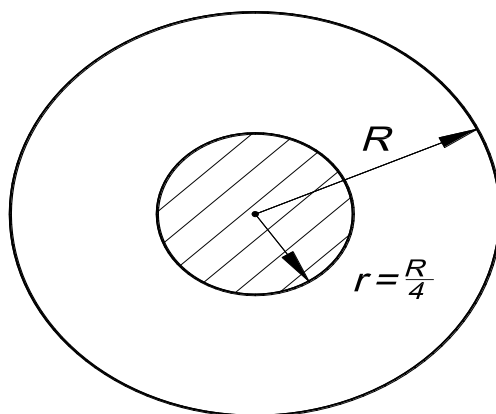


Рис. 8.13. Круглий переріз

Таким чином, ядро для круглого перерізу радіуса R окреслено також колом з радіусом r .

8.3. Складний опір. Розв'язання задач

8.3.1. Приклади розрахунку на міцність та жорсткість при позацентровому стиску і косому згині

Приклад 1.

Для стрижня прямокутного поперечного перерізу з розмірами $a=60$ см, $b=30$ см завантаженого силою $P=90$ кН, прикладеною в точці A з координатами $x_p=15$ см; $y_p=15$ см; (рис. 8.14) необхідно: побудувати плоску і просторову епюри нормальних напружень; перевірити умови міцності, прийнявши $[\sigma_{ст}] = 10$ МПа; $[\sigma_p] = 2$ МПа; знайти значення допустимого навантаження із умов міцності на стиск і розтяг; побудувати ядро перерізу.

Розв'язання:

1. Визначаємо відрізки, які відсікає нульова лінія на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_P},$$

$$i_y^2 = -\frac{I_y}{F} = -\frac{b \cdot a^3}{12 \cdot b \cdot a} = -\frac{a^2}{12} = 300 \text{ см}^2,$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F} = \frac{a \cdot b^3}{12 \cdot a \cdot b} = \frac{b^2}{12} = 75 \text{ см}^2,$$

$$a_x = -\frac{300}{15} = -20 \text{ см},$$

$$a_y = -\frac{75}{10} = -7,5 \text{ см}.$$

2. Визначаємо значення нормальних напружень у кутових (контурних) точках і будуємо плоску і просторову епюри нормальних напружень (рис. 8.14).

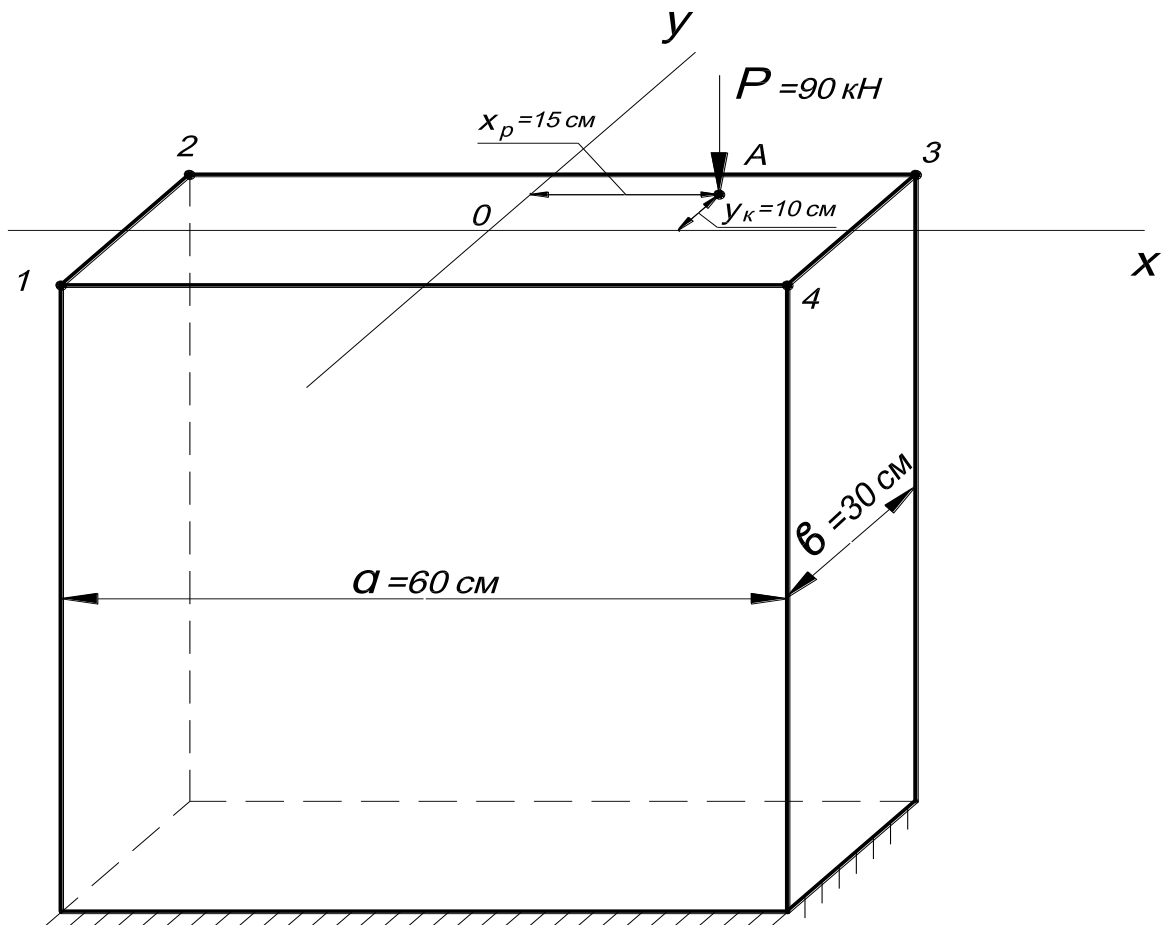
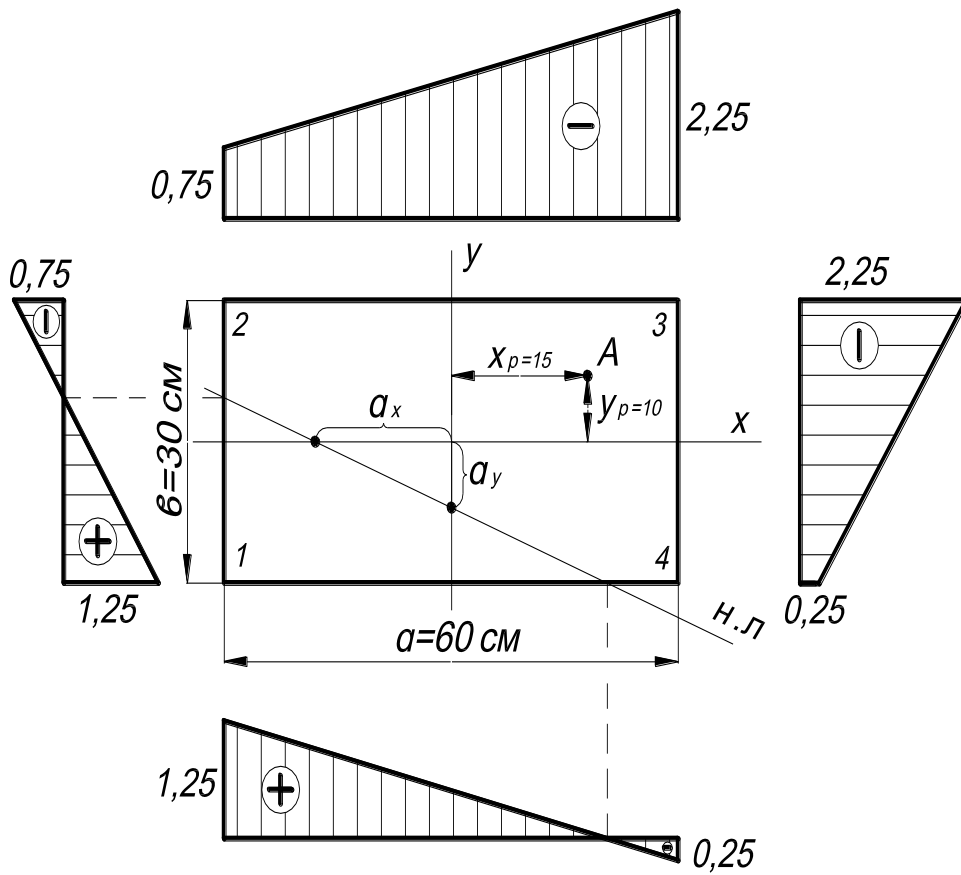
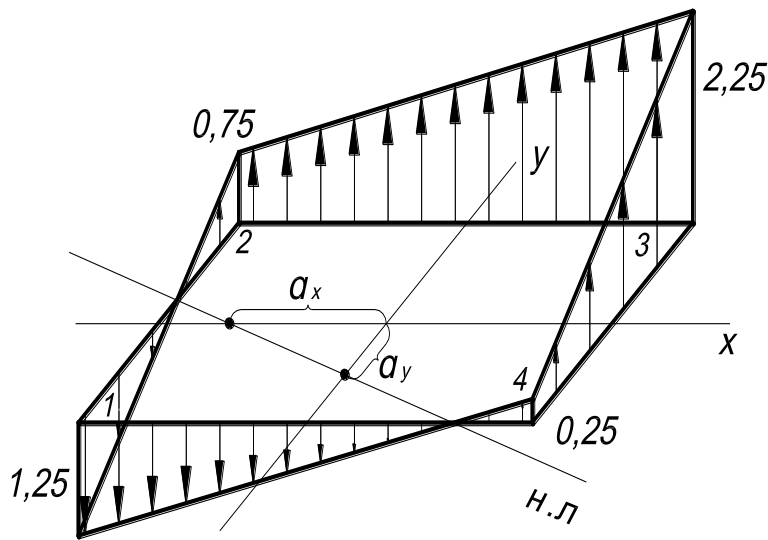


Рис. 8.14. Схема завантаження стрижня при позакентровому стиску.



а)



б)

Рис. 8.15. Епюри нормальних напружень:
а – плоска; б – просторова.

Нормальні напруження визначаються за формулою :

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

точка 1

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 1,25 \text{ МПа};$$

точка 2

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma_2 = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 0,75 \text{ МПа};$$

точка 3

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -2,25 \text{ МПа}$$

точка 4

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(\frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -0,25 \text{ МПа}.$$

3. Перевіряємо умови міцності:

На розтяг (точка 1):

$$\sigma_{(1)} = 1,25 \text{ МПа} < [\sigma]_p = 2,0 \text{ МПа}$$

На стиск (точка 3):

$$\sigma_{(3)} = 2,25 \text{ МПа} < [\sigma]_c = 10,0 \text{ МПа}$$

Умови на стиск і розтяг виконуються.

4. Визначаємо величину допустимого навантаження стрижня із умов міцності:

На стиск (точка 3):

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

$$[P]_c = \frac{[\sigma]_c \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y_3}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_3}{i_y^2}} = \frac{-10,0 \cdot 10^6 \cdot (60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}}} = -400 \text{кН}$$

Перевіряємо умови міцності на розтяг точки 1:

$$\sigma_{(1)} = \frac{400 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(10 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = 3,8 \text{МПа} > [\sigma] = 2,0 \text{МПа}$$

Відбудеться руйнування в точці 1.

Визначаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг (точка 1):

$$[P]_p = -\frac{[\sigma]_p \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2}} = \frac{2,0 \cdot 10^6 \cdot (30 \cdot 60) \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{(10 \cdot (-15)) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot (-30)) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}}} = -144 \text{кН}$$

Визначаємо величину напружень в точці 3:

$$\sigma_{(3)} = -\frac{144 \cdot 10^3}{(60 \cdot 30) \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{(10 \cdot 15) \cdot 10^{-4}}{75 \cdot 10^{-4}} + \frac{(15 \cdot 30) \cdot 10^{-4}}{300 \cdot 10^{-4}} \right) = -3,6 \text{МПа} < [\sigma]_c = -10,0 \text{МПа}$$

Умова міцності виконується.

Таким чином, приймаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг, яке дорівнює 144 кН.

Будуємо епюру нормальних напружень від допустимого значення навантаження (рис. 8.16).

5. Побудуємо ядро перерізу (рис. 8.17). Для цього використовуємо метод, коли нульовою лінією «обходимо» контур поперечного перерізу, а полюс прикладеної сили викреслює ядро.

$$x_p = -\frac{i_y^2}{a_x} ; \quad y_p = -\frac{i_x^2}{a_y} .$$

Положення нульової лінії I-I

$$I - I : a_x = \infty ; \quad x_p = -\frac{300}{\infty} = 0$$

$$a_y = \frac{b}{2} = 15 \text{см} . \quad y_p = -\frac{75}{15} = -5 \text{см}$$

На (рис.8.17) – точка 1.

Положення нульової лінії II-II

$$a_y = \infty; a_x = 30 \text{ см}; y_p = -\frac{75}{\infty} = 0; x_p = -\frac{300}{30} = -10 \text{ см.}$$

Положення нульової лінії III-III

$$a_y = 15 \text{ см}; a_x = 0; y_p = -\frac{75}{15} = 5 \text{ см}; x_p = -\frac{300}{\infty} = 0.$$

Положення нульової лінії IV-IV

$$a_y = \infty \text{ см}; a_x = -30 \text{ см}; y_p = -\frac{75}{\infty} = 0; x_p = -\frac{300}{-30} = 10 \text{ см.}$$

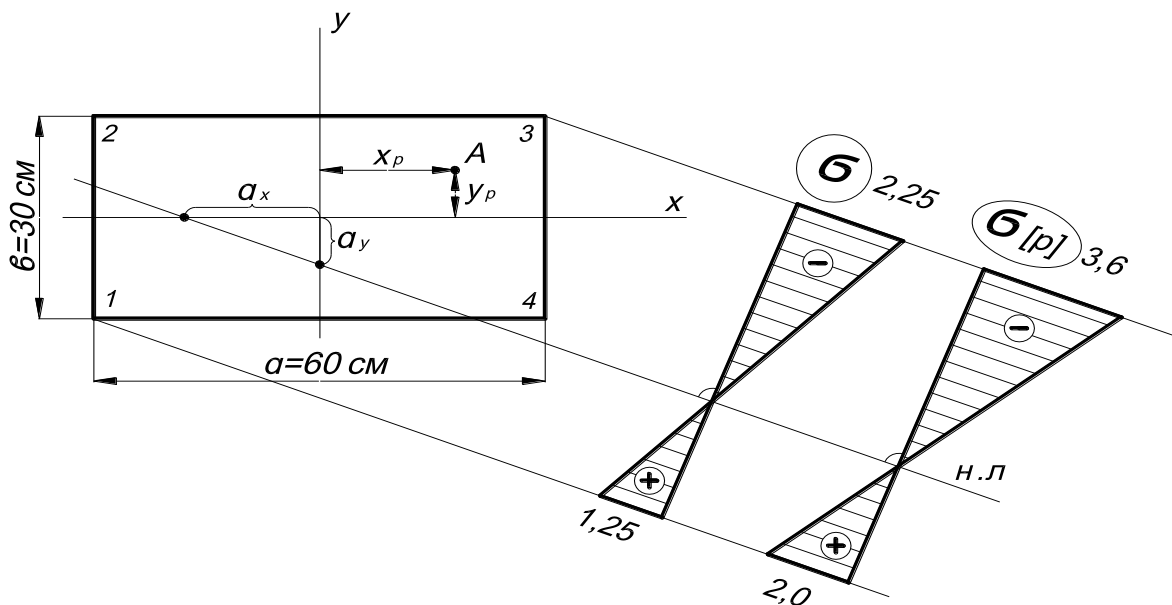


Рис. 8.16. Плошка епюра нормальних напружень від допустимого значення навантаження із умов міцності на розтяг.

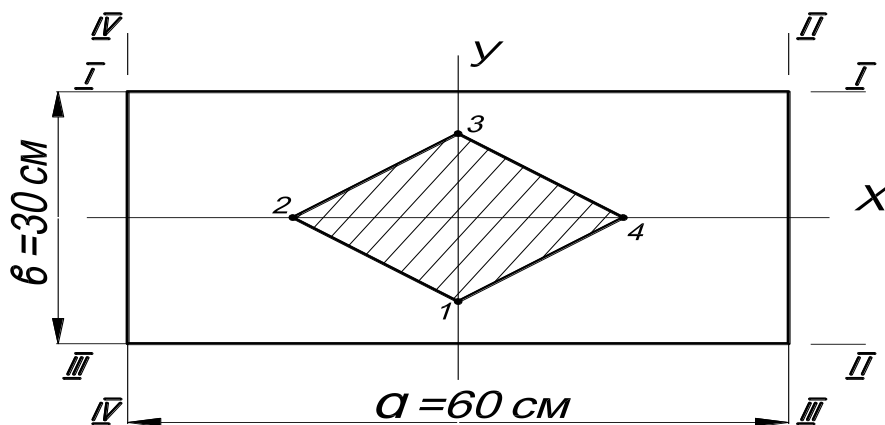


Рис. 8.17. Побудова ядра перерізу.

З'єднуючи точки 1,2,3,4, отримуємо ядро перерізу (рис. 8.17), яке має форму ромба.

Приклад 2.

Підібрати номер двотаврового профілю балки, завантаженої силою $P_1=60\text{кН}$ у вертикальній площині і силою $P_2=10\text{кН}$ – в горизонтальній площині, прийнявши $[\sigma] = 160\text{МПа}$.

Схему завантаження балки наведена на рис. 8.18.

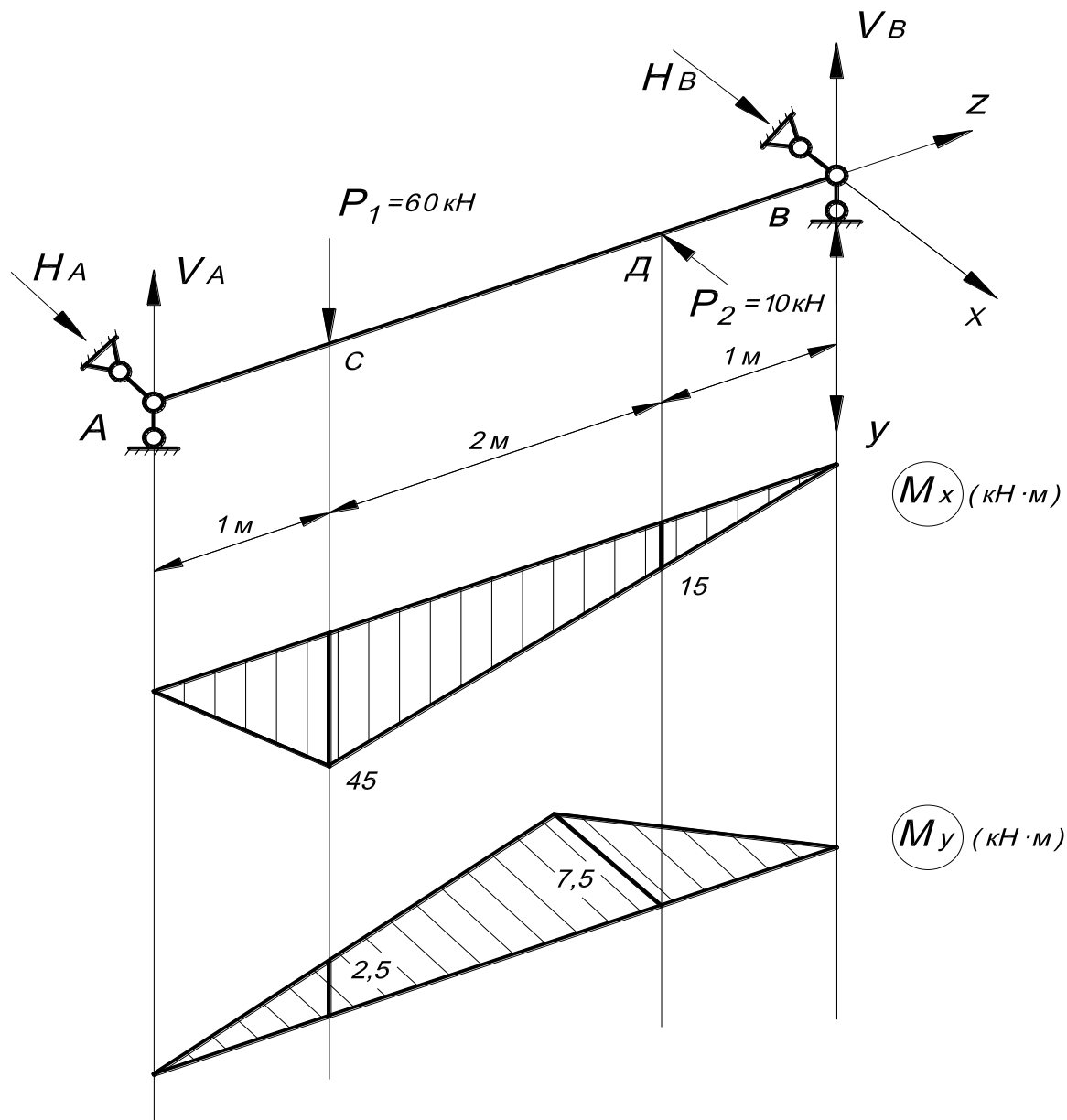


Рис. 8.18. Схема завантаження балки та епюри згинальних моментів у двох площинах.

1. Визначаємо опорні реакції:

$$V_A=45\text{кН}; H_A=2,5\text{кН}; V_B=15\text{кН}; H_B=7,5\text{кН}.$$

2. Будуємо епюри згинальних моментів у двох площинах: M_x ; M_y (рис. 8.18).

3. Встановлюємо небезпечний переріз, який може бути в точках С або Д. Припустимо, що небезпечним є переріз С, в якому:

$$M_x = 45 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Для перерізу С визначаємо необхідний момент опору, прийнявши орієнтовно $W_C = \frac{W_x}{W_y} = 8,7$.

При цьому:

$$W_x = \frac{M_x + cM_y}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 417 \text{ см}^3.$$

За таблицями сортаменту приймаємо ІN30 для $W_x = 472 \text{ см}^3$; $W_y = 45,9 \text{ см}^3$.

5. Перевіряємо умови міцності для цього перерізу:

- точка С.

$$\max \sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 145,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

- точка Д.

$$\max \sigma_D = \frac{15 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 182 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Тобто умова міцності в перерізі Д не виконується.

6. Підбираємо двотавровий переріз із умов міцності перерізу Д.

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 501 \text{ см}^3.$$

За сортаментом приймаємо ІN30а, для якого $W_x = 518 \text{ см}^3$; $W_y = 60,1 \text{ см}^3$.

7. Перевіряємо умови міцності:

- точка Д.

$$\max \sigma_D = \frac{15 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{60,1 \cdot 10^{-6}} = 154 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

- точка С.

$$\max \sigma_C = \frac{45 \cdot 10^3}{518 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{60,1 \cdot 10^{-6}} = 128,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Кінцево приймаємо ІN30а.

8.4. Кривий брус

8.4.1. Загальні поняття. Побудова епюр внутрішніх зусиль

В інженерній практиці, особливо в машинобудуванні часто зустрічаються бруси (стрижні) з криволінійною віссю – криві бруси (стрижні). Прикладом цьому можуть бути: гак підйомного крана; замкнуте кільце, ресора тощо (рис. 8.19).

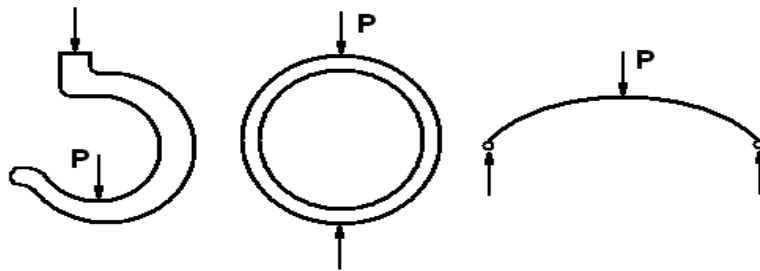


Рис 8.19. Приклади кривого бруса: гак крана, кільце, ресора.

Обмежимося розрахунком кривих стрижнів, вісь яких лежить в одній площині – плоскі стрижні. Поперечний переріз, як правило, має одну вісь симетрії – вертикальну, а силова площина збігається з цією віссю. У поперечному перерізі таких стрижнів виникає три внутрішні зусилля (M_x , Q_y , N_z), які знаходяться за допомогою методу перерізів (рис. 8.20).

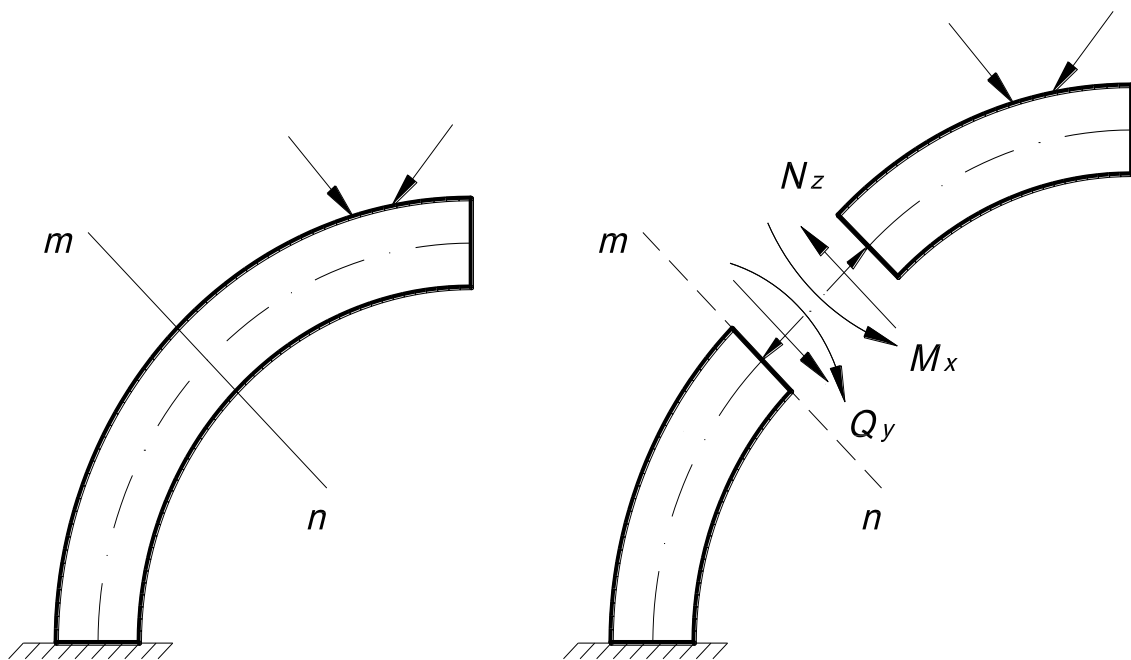


Рис. 8.20. Метод перерізу для визначення M_x , Q_y , N_z кривого стрижня.

Правило знаків:

а) для визначення N_z потрібно спроектувати зовнішні сили, що діють на відсічену, на дотичну до осі. $N_z > 0$ – якщо викликає розтяг і навпаки;

б) для визначення Q_y необхідно спроектувати зовнішні сили на площину перерізу. $Q_y > 0$, якщо відсічена частина повертається відносно перерізу за ходом годинникової стрілки, і навпаки;

в) момент M_x є добутком сили на плече. $M_x > 0$, якщо викликає стискання внутрішніх волокон.

Розглянемо на прикладі методику визначення внутрішніх зусиль у конкретному перерізі кривого бруса та побудову їх епюр.

Приклад: Для бруса, вісь якого є дугою кола (рис. 8.21) знайти внутрішні зусилля (N_z , M_x , Q_y) в перерізі К та побудувати епюри внутрішніх зусиль. Для таких брусів положення перерізу зручно визначати в полярних координатах (радіусом R і кутом φ).

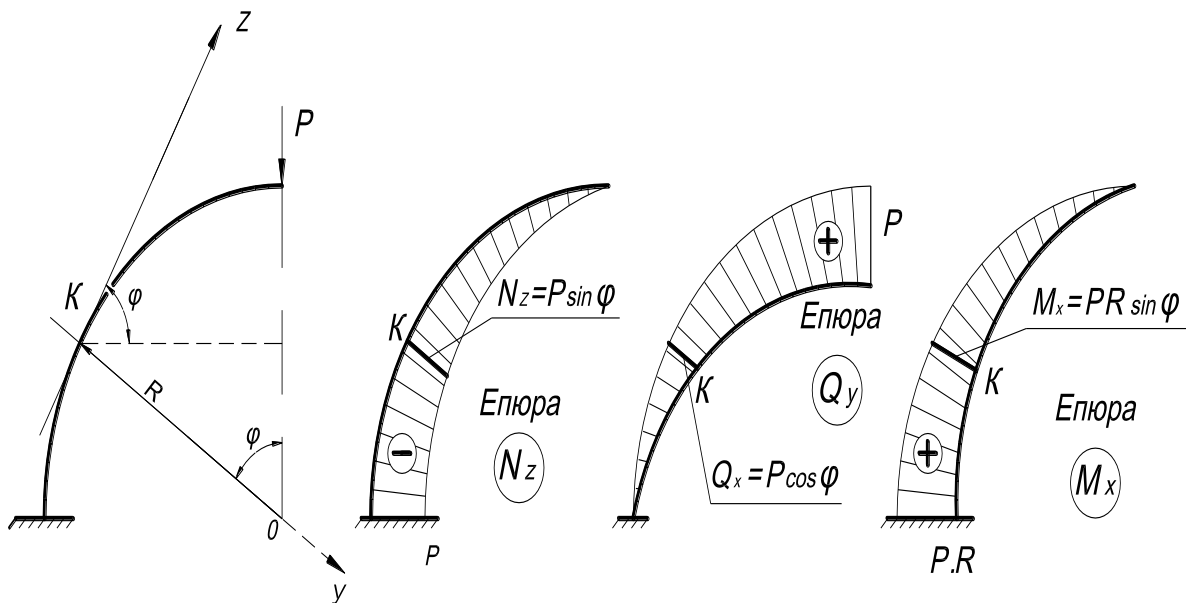


Рис. 8.21. Епюри внутрішніх зусиль для кривого бруса.

При побудові епюр внутрішніх зусиль (рис. 8.21) обумовимо, що:

- для Q_y і N_z додатні ординати відкладають зовні від осьової лінії, а від'ємні – всередину;
- епюра M_x будується на розтягнутих волокнах.

8.4.2. Центральний розтяг-стиск кривого бруса

У тому разі, якщо в поперечному перерізі стрижня виникає тільки N_z , а M_x , і Q_y відсутні, то він знаходиться в умовах центрального розтягу-стиску. Це можливо при завантаженні стрижня вісь якого є дугою кола при рівномірному радіальному навантаженні (рис. 8.22).

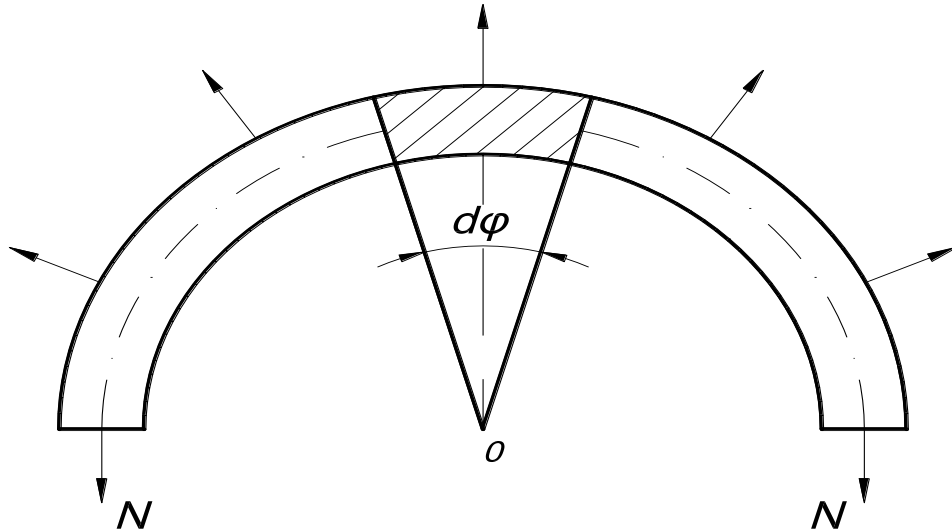


Рис. 8.22. Центральний розтяг кривого бруса, вісь якого є дугою кола.

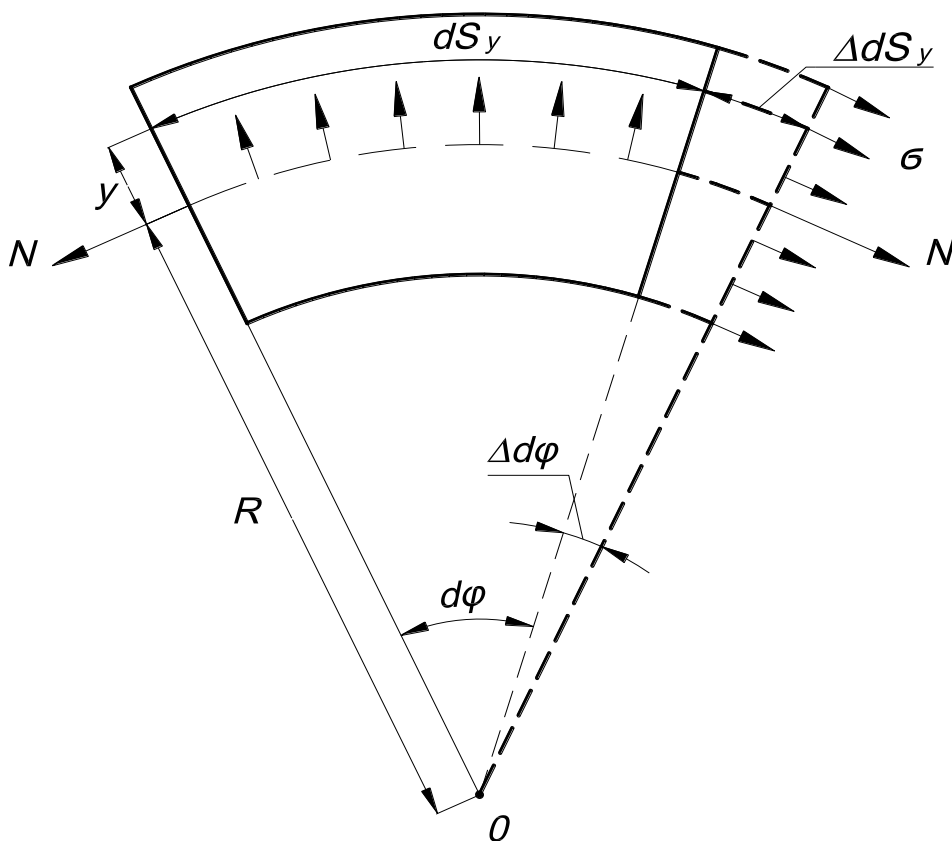


Рис. 8.23. Рівновага сектора кривого бруса при центральному розтягу.

Розглянемо сектор кривого бруса. Базуючись на гіпотезі плоских перерізів, деформацію елемента уявімо, як поворот правого перерізу відносно центра кривизни на кут $\Delta d\varphi$.

Початкова довжина довільного волокна, яке знаходиться на відстані « y » від центра ваги перерізу дорівнює:

$$dS_y = d\varphi(R + y),$$

а його абсолютне подовження відповідно:

$$\Delta dS = \Delta d\varphi(R + y) \quad (8.21)$$

Відносна деформація:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dS}{dS} = \frac{\Delta d\varphi(R + y)}{d\varphi(R + y)} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = const \quad (8.22)$$

Припустивши, що волокна не тиснуть одне на одне, згідно з законом Гука маємо

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} E = const \quad (8.23)$$

тобто для кривого бруса, як і для прямого стрижня при центральному розтягу нормальні напруження розподіляються в поперечному перерізі рівномірно.

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma \int_F dF = \sigma F$$

У результаті отримуємо $\sigma = \frac{N}{F}$.

8.4.3. Чистий згин кривого бруса.

Якщо в поперечному перерізі бруса виникає тільки згинальний момент M_x , а N_z і Q_y відсутні, то він знаходиться в умовах чистого згину. Розглянемо сектор кривого бруса, поперечний переріз якого має вертикальну вісь симетрії і вона збігається з силовою площиною (рис. 8.24).

Деформація елемента відбувається шляхом повороту правого перерізу відносно нульової лінії на кут $\Delta d\varphi$.

Очевидно, що початкова довжина волокна на відстані « y » від нульової лінії дорівнює:

$$dS_\rho = d\varphi(r + y) = d\varphi\rho$$

Абсолютне подовження цього волокна:

$$\Delta dS_{\rho} = \Delta d\varphi y \quad (8.24)$$

Відносна деформація цього волокна:

$$\varepsilon_{\rho} = \frac{\Delta dS_{\rho}}{dS_{\rho}} = \frac{\Delta d\varphi y}{d\varphi \rho} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{r + \rho} \quad (8.25)$$

Згідно з законом Гука, враховуючи, що волокна не тиснуть одне на одне, маємо:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{r + \rho} \quad (8.26)$$

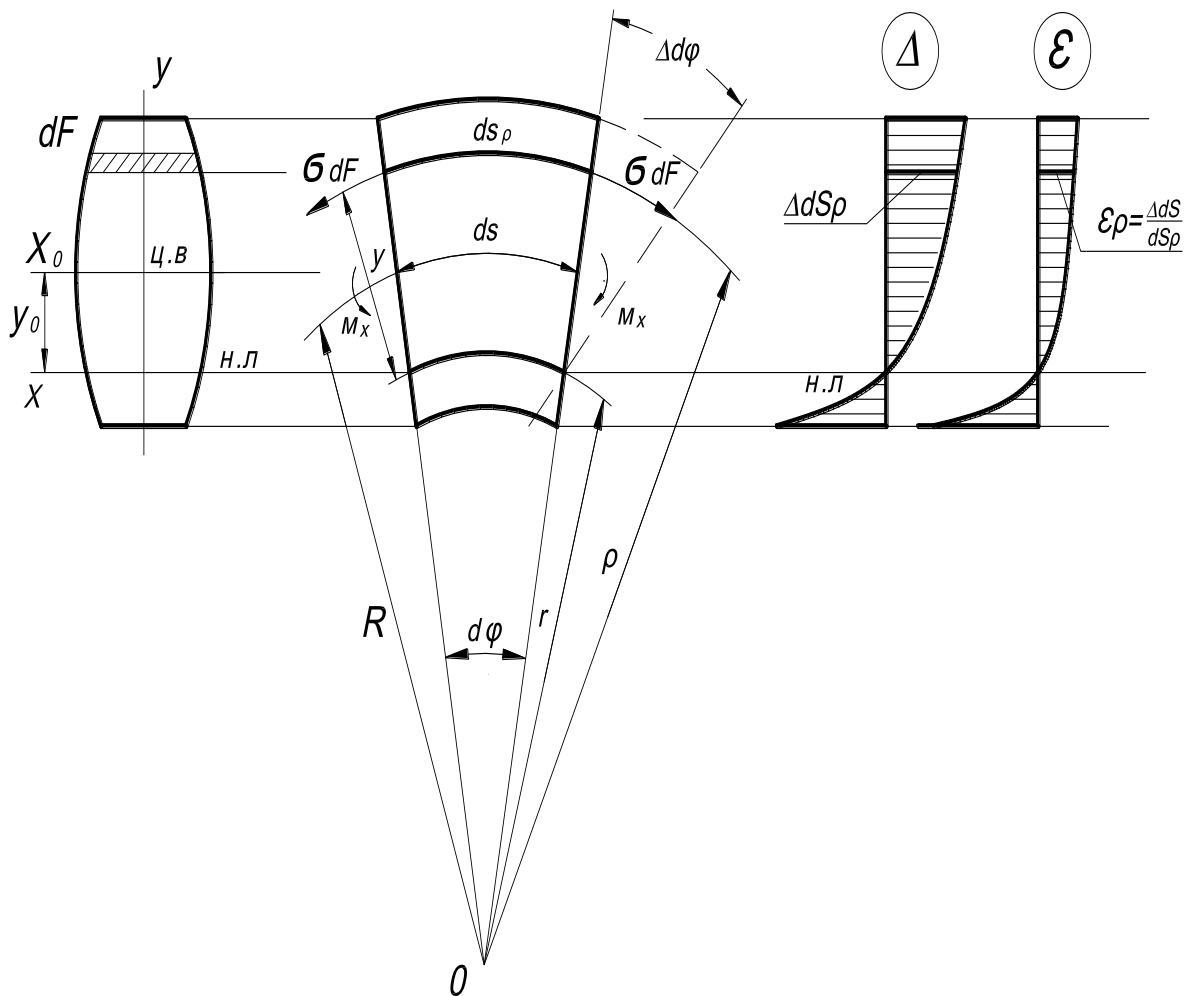


Рис. 8.24. Деформація елемента кривого бруса при чистому згині.

При чистому згині поздовжня сила в поперечному перерізі відсутня, тому:

$$N_z = \int_F \sigma d\varphi = 0 \quad (8.27)$$

З врахуванням виразу (8.26) отримаємо:

$$\int_F E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \frac{y}{r+y} dF = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y}{r+y} dF = 0 \quad (8.28)$$

$$\text{очевидно, що } \int_F \frac{y}{r+y} dF = 0 \quad (8.29)$$

Вираз (8.29) свідчить, що нейтральна вісь у кривому брусі при чистому згині не проходить через центр ваги, оскільки неможливим при цьому є:

$$\int_F y dF = 0$$

Виразимо внутрішній момент у перерізі через напруження та прирівняємо його до зовнішнього момента:

$$M_x = \int_F (\sigma dF) y = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2}{r+y} dF, \quad (8.30)$$

Інтеграл у виразі (8.30) представимо:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F \left(y - \frac{ry}{r+y} \right) dF = \int_F y dF - r \int_F \frac{y}{r+y} dF$$

Враховуючи вираз (8.29), отримуємо:

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F y dF = S_x = Fy_0. \quad (8.31)$$

де $S_x = Fy_0$ – статичний момент площі поперечного перерізу відносно нейтральної вісі.

Підставивши вираз (8.31) у (8.30), маємо:

$$M_x = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_x$$

Звідси:

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_x}{ES_x} \quad (8.32)$$

Підставивши (8.32) у (8.26), отримуємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{S_x} \frac{y}{\rho} = \frac{M_x}{S_x} \frac{y}{r+y} \quad (8.33)$$

Формула (8.33) суттєво відрізняється від формули для прямого бруса тим, що до знаменника входить змінна величина ρ , яка залежить від y .

Відповідно до цього, еюра нормальних напружень для прямокутного поперечного перерізу кривого бруса змінюється за законом гіперболи (рис. 8.25).

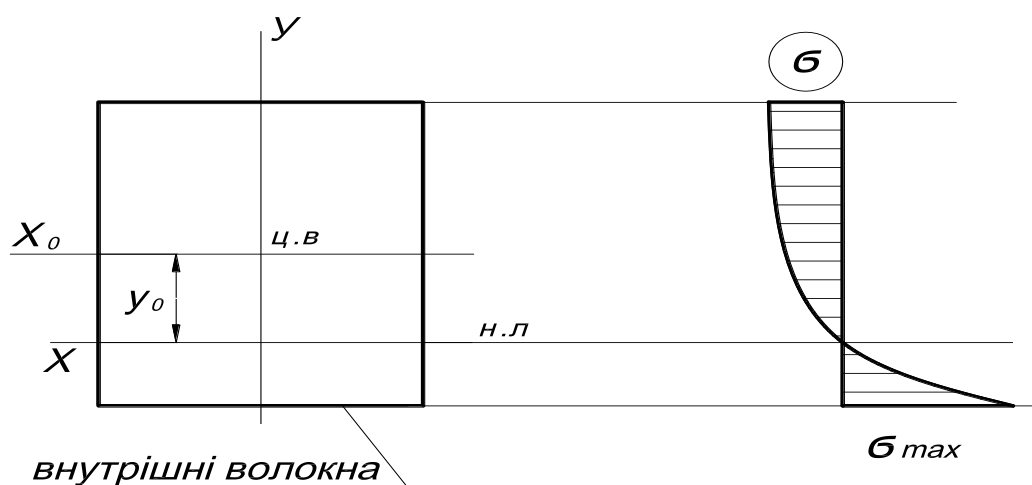


Рис. 8.25. Еюра нормальних напружень при чистому згині кривого бруса.

Максимальне напруження в перерізах, що мають дві осі симетрії, виникають у крайньому волокні, ближньому до центра кривизни. Знак σ_{\max} , знайденого за виразом (8.33), потрібно визначати із фізичного тлумачення.

Для порівняння формул при визначенні σ прямого і кривого брусів, змінимо формулу (8.33).

Із формули (8.21) знайдемо:

$$S_x = \int_F \frac{y^2}{r + y} dF = \frac{1}{r} \int_F \frac{y^2}{r + y/r} dF.$$

Позначимо $\int_F \frac{y^2}{r + y/r} dF = \hat{I}_x$ і назвемо його моментом інерції для перерізу кривого бруса.

При $r \rightarrow \infty$ момент інерції для кривого бруса збігається із звичайним осьовим моментом інерції.

Таким чином:

$$S_x = \frac{1}{r} \hat{I}_x \tag{8.34}$$

Підставивши (8.34) в (8.33) та враховуючи, що $\rho = r + y$, отримаємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{\widehat{I}_x} \cdot \frac{y}{1 + y/r} \quad (8.35)$$

Якщо $r \rightarrow \infty$, то вираз (8.35) перетвориться у формулу для визначення напружень при чистому згині прямого бруса:

$$\sigma = \frac{M_x}{\widehat{I}_x} \cdot y \quad (8.36)$$

8.5. Розрахунок кривого бруса

8.5.1. Визначення положення нульової лінії при чистому згині кривого бруса

При чистому згинанні кривого стрижня в поперечному перерізі виникають нормальні напруження, які визначаються:

$$\sigma = \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y}{r + y} = \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y}{\rho} \quad (8.37)$$

Невідомими при цьому є: r – радіус кривизни нульової лінії та y_0 – відстань від центра ваги до нульової лінії.

$$\text{Вони пов'язані залежністю: } y_0 = R - r \quad (8.38)$$

Існує точний і наближений метод розв'язання задачі.

Точний спосіб розв'язання задачі:

Виходимо із виразу, що

$$\int_F \frac{y}{r + y} dF = 0 \quad (8.39)$$

Враховуючи, що: $r + y = \rho$; то $y = \rho - r$ (рис. 8.26).

Із виразу (8.39) отримаємо:

$$\int_F \frac{y}{r + y} dF = \int_F \frac{\rho - r}{\rho} dF = \int_F dF - r \cdot \int_F \frac{dF}{\rho} = 0$$

$$\text{Звідси: } r = \frac{F}{\int \frac{dF}{\rho}} \quad (8.40)$$

Обчислення інтеграла знаменника залежить від форми поперечного перерізу.

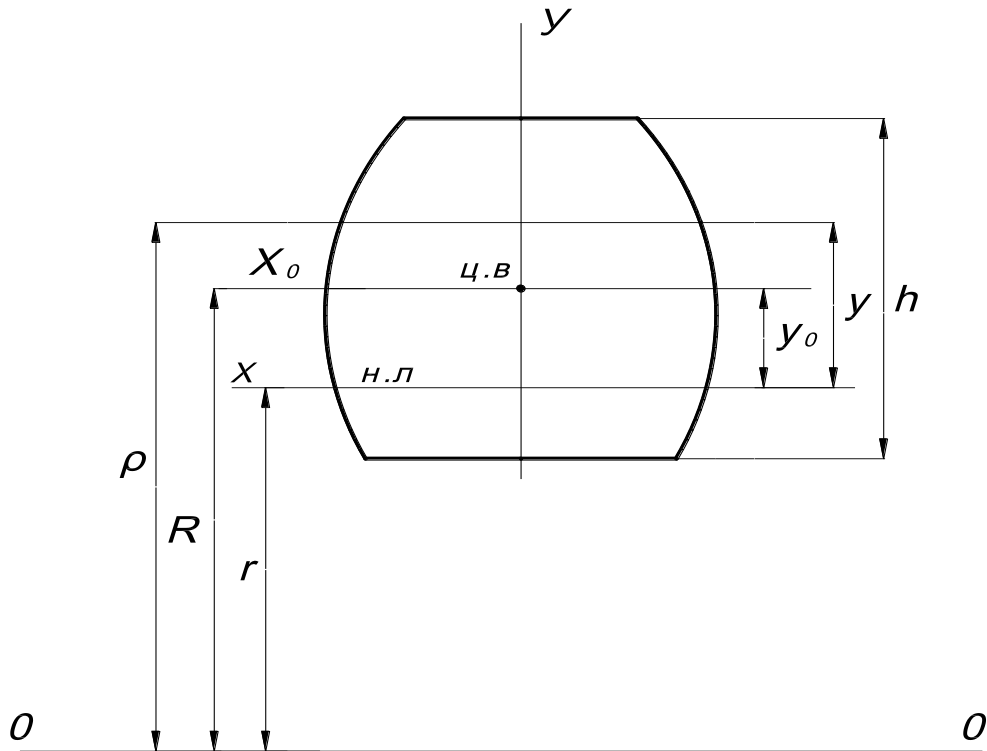


Рис. 8.26. Поперечний переріз кривого бруса.

Розглянемо прямокутний переріз (рис. 8.27).

Для прямокутника:

$$dF = b \cdot d\rho, \quad (8.41)$$

Тому:

$$\int_F \frac{dF}{\rho} = b \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho} = b \cdot (\ln R_2 - \ln R_1) = b \cdot \frac{\ln R_2}{R_1}.$$

Підставляючи значення інтеграла у вираз (8.40) отримаємо:

$$r = \frac{b \cdot h}{b \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (8.42)$$

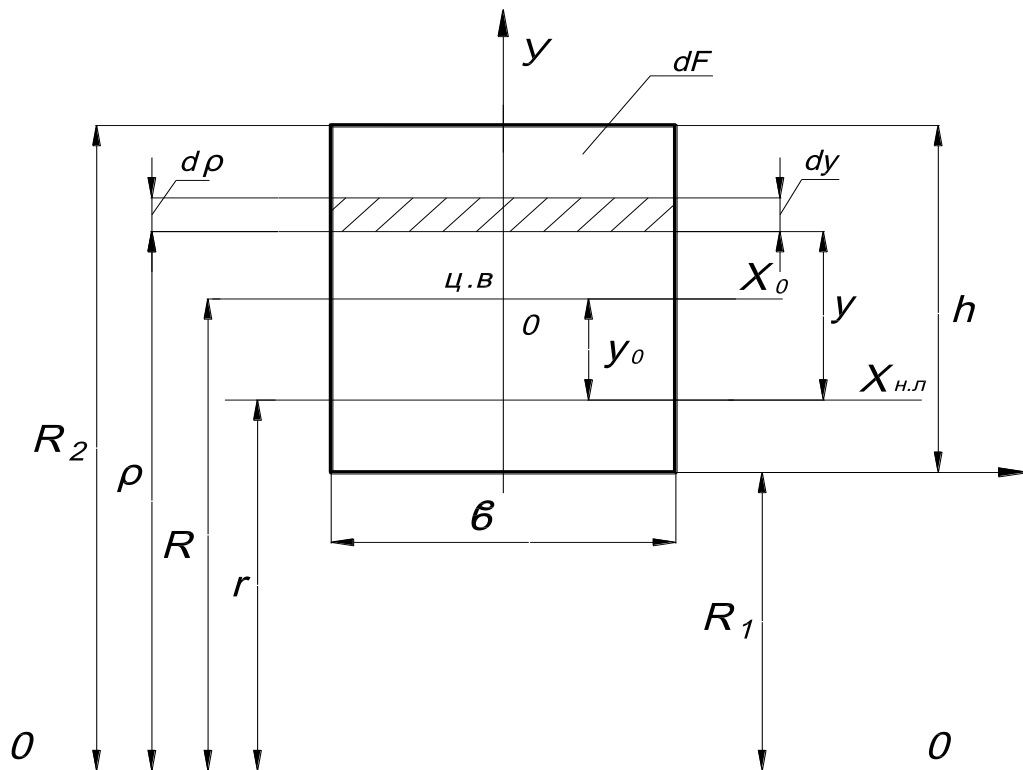


Рис. 8.27. Прямокутний поперечний переріз кривого бруса.

Наближений спосіб визначення положення нульової лінії.

Очевидно, що:

$$S_x = y_0 \cdot F \quad (a)$$

$$S_x = \frac{1}{\rho} \cdot \hat{I}_x \quad (b) \quad (8.43)$$

Прирівнявши (a) і (b), отримаємо:

$$y_0 = \frac{\hat{I}_x}{r \cdot F} \quad (8.44)$$

Для стрижнів середньої кривизни $\frac{h}{R} < \frac{1}{2}$ можливо прийняти, що

$$r \approx R \text{ і } \hat{I}_x \approx I_{x_0};$$

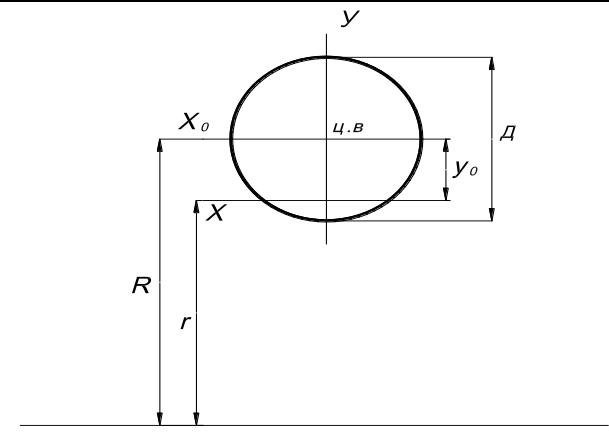
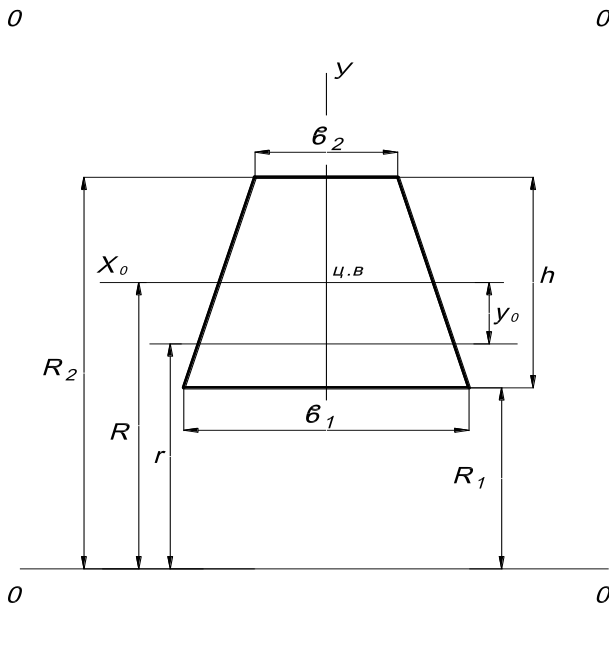
Тому із виразу (8.44) маємо:

$$y_0 = \frac{I_{x_0}}{R \cdot F} \quad (8.45)$$

Для прямокутного поперечного перерізу отримуємо:

$$y_0 = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot R \cdot b \cdot h} = \frac{h^2}{12 \cdot R} \quad (8.46)$$

Цей метод застосовується для стрижнів середньої та малої кривизни. Приведемо точне і наближене розв'язання задачі для інших видів поперечного перерізу.

Вид перерізу	Точне вирішення: $r = \frac{D^2}{8 \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{D^2}{4}} \right)}$ Наближене вирішення: $y_0 = \frac{D^2}{16 \cdot R}$
	<p>Точне вирішення:</p> $r = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h^2}{2 \cdot \left[(b_1 \cdot R_1 - b_2 \cdot R_2) \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2) \cdot h \right]}$ <p>Наближене вирішення:</p> $y_0 = \frac{b_1^2 + 4 \cdot b_1 \cdot b_2 + b_2^2}{18 \cdot (b_1 - b_2)^2} \cdot \frac{h^2}{R}$
	

8.5.2. Напруження при одночасній дії поздовжньої сили та згинального моменту

У разі, коли в поперечному перерізі кривого бруса великої кривизни $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ виникає згинальний момент M_X і поздовжня сила N_z

(рис. 8.28), то нормальні напруження визначаються за формулою, враховуючи знаки.

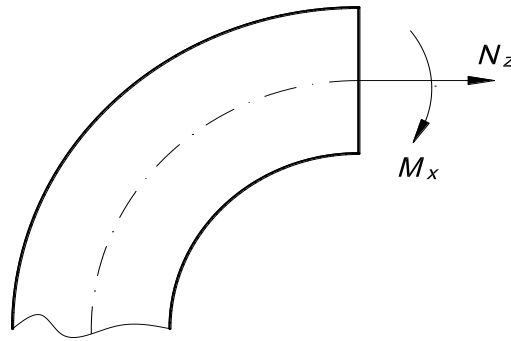


Рис. 8.28. Одночасна дія M_x і N_z

$$\sigma = \pm \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y}{r+y} \quad (8.47)$$

У виразі (8.47) величина моменту згину знаходиться відносно вісі, що проходить через центр ваги перерізу, оскільки напруження від поздовжньої сили $\frac{N_z}{F}$ знайдено із умови, що поздовжню силу прикладено в центрі ваги поперечного перерізу.

Умови міцності кривого бруса залежать від його кривизни:

а) для стрижнів великої кривизни: $\frac{h}{R} > \frac{1}{5}$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y}{r+y} \leq [\sigma] \quad (8.48)$$

б) для стрижнів малої кривизни: $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

8.5.3. Розрахунок гака крана

Розглянемо приклад розрахунку гака крана завантаженого вантажем $P=25$ кН (рис. 8.29).

Поперечний переріз гака можливо розглядати як трапецію з розмірами: $v_1=4$ см; $v_2=1$ см; $h=9$ см; $R_1=3$ см; $R_2=12$ см.

1. Визначаємо радіус кривизни центра ваги поперечного перерізу гака крана $m - n$:

$$R = R_1 + \frac{b_1 + 2 \cdot b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 3 + \frac{4 + 2 \cdot 1}{4 + 1} \cdot \frac{9}{3} = 6,6 \text{ см}$$

2. Визначаємо радіус кривизни нульової лінії:

$$r = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h^2}{2 \cdot \left[(b_1 \cdot R_1 - b_2 \cdot R_2) \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2) \cdot h \right]} = \frac{(4 + 1) \cdot 9^2}{2 \cdot \left[(4 \cdot 12 - 1 \cdot 3) \ln \frac{12}{3} - (4 - 1) \cdot 9 \right]} = 5,72 \text{ см}$$

3. Знаходимо відстань між осями x і x_0 (зміщення нейтральної вісі відносно центра ваги перерізу):

$$y_0 = R - r = 6,6 - 5,72 = 0,88 \text{ см}$$

4. Площа поперечного перерізу дорівнює:

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h = \frac{4 + 1}{2} \cdot 9 = 22,5 \text{ см}^2$$

5. Знаходимо статичний момент поперечного перерізу відносно нейтральної вісі:

$$S_x = y_0 \cdot F = 0,88 \cdot 22,5 = 19,8 \text{ см}^3$$

6. Визначаємо координати крайніх волокон перерізу $m - n$ відносно вісі X та радіус кривизни крайніх волокон:

$$y_n = R_2 - r = 12 - 5,72 = 6,28 \text{ см}$$

$$y_m = R_1 - r = 3 - 5,72 = -2,72 \text{ см}$$

$$\rho_n = R_2 = 12 \text{ см}$$

$$\rho_m = R_1 = 3 \text{ см}$$

7. Значення поздовжньої сили і згинального моменту в перерізі $m - n$:

$$N_z = 25 \text{ кН}$$

$$M_x = P \cdot R = 25 \cdot 0,066 = 1,65 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

За формулою (8.47) знаходимо напруження в крайніх волокнах перерізу $m - n$:

$$\sigma_m = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y_m}{\rho_m} = 86,7 \text{ МПа}$$

$$\sigma_n = \frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{S_x} \cdot \frac{y_n}{\rho_n} = -32,5 \text{ МПа}$$

Епюру напружень від дії одного тільки згинального моменту відображено на рис. 8.30а, а від сумісної дії поздовжньої сил і моменту – рис. 8.30.5б.

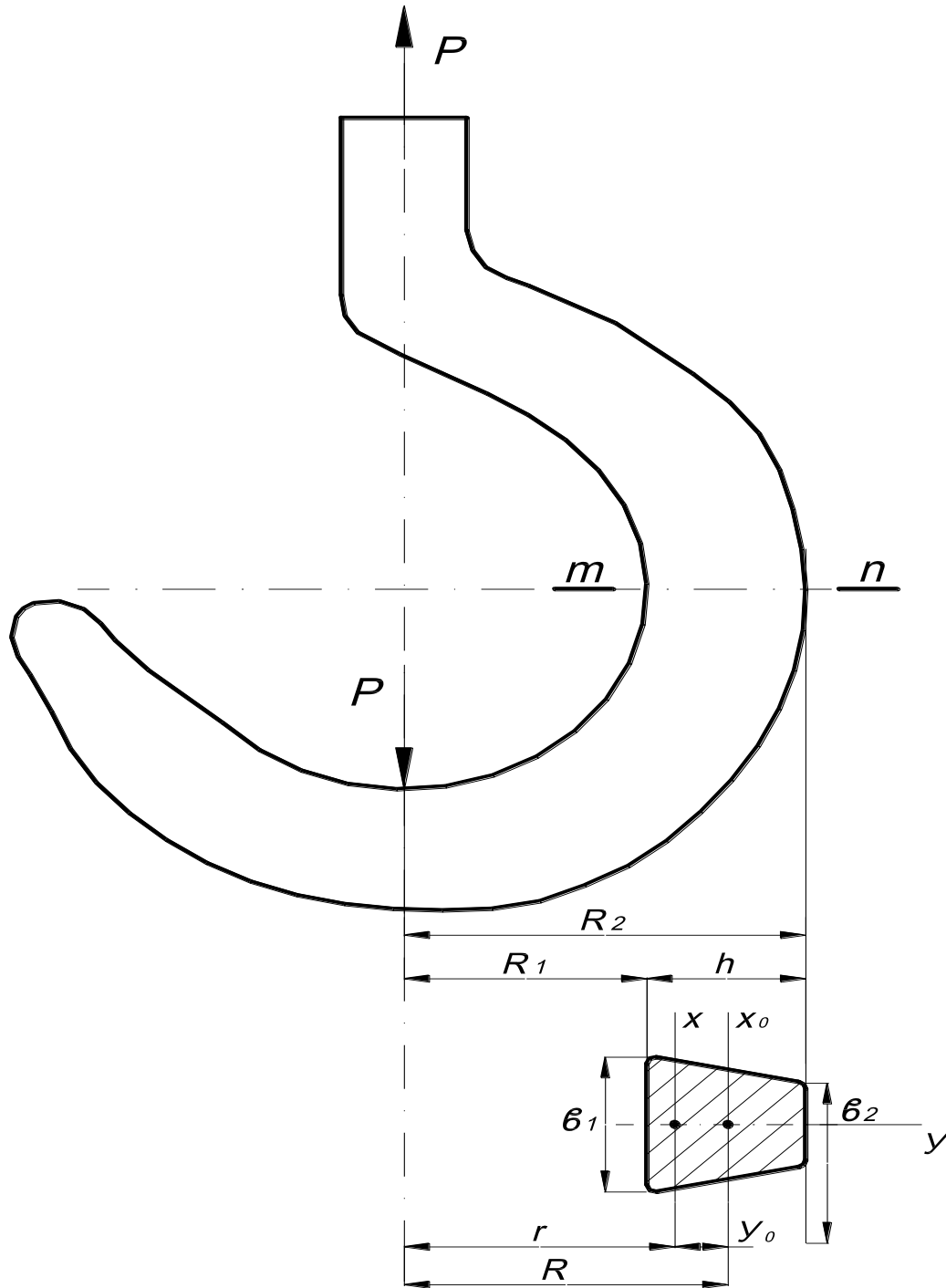


Рис. 8.29. Гак крана.

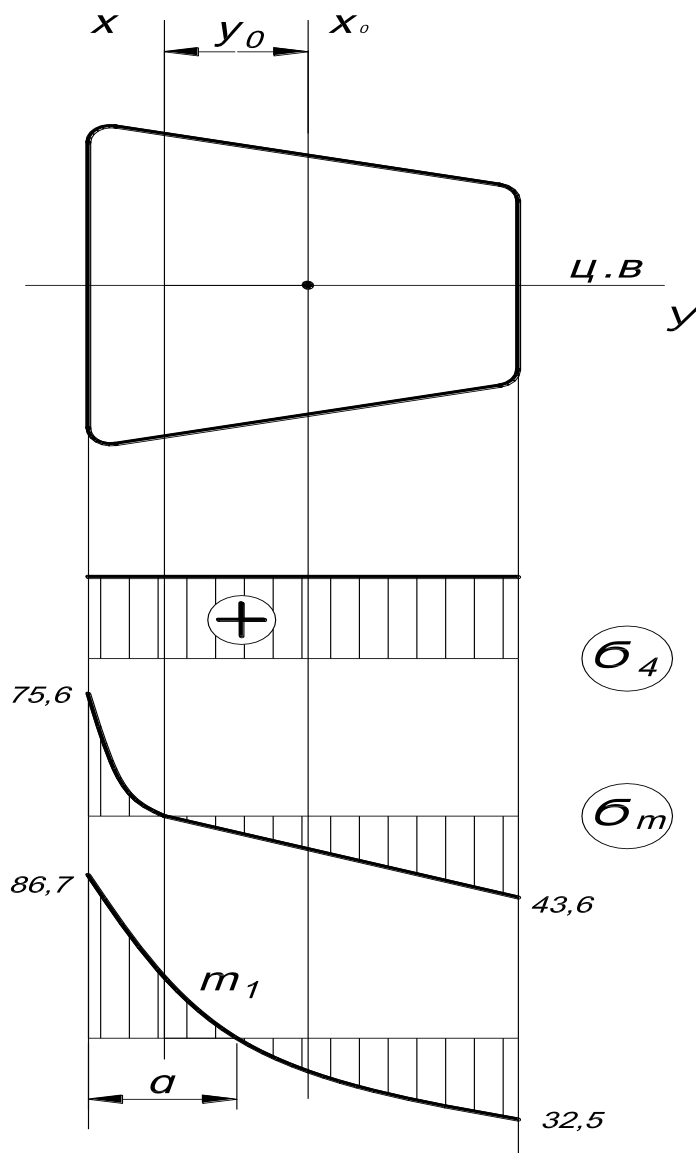


Рис. 8.30. Епюри нормальних напружень.

а) – від дії згинального моменту M_x ; б) – від сумісної дії поздовжньої сили N_z і згинального моменту M_x .

8.6. Приклади розв'язання задач

Приклад 1.

Умова задачі: дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою P в точці A і горизонтальною силою в точці B (обидві точки розташовані на осі балки). На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, напрямлені перпендикулярно до площини рисунку.

Необхідно:

- 1) побудувати епюри $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ і встановити положення

небезпечного перерізу;

2) підібрати розміри поперечного перерізу h і b за допустимими напруженнями;

3) визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень.

Дано: $P = 20$ кН; $l = 2$ м; $h/b = 1,5$; $[\sigma] = 10$ МПа. Схема зображена на рис. 8.31.

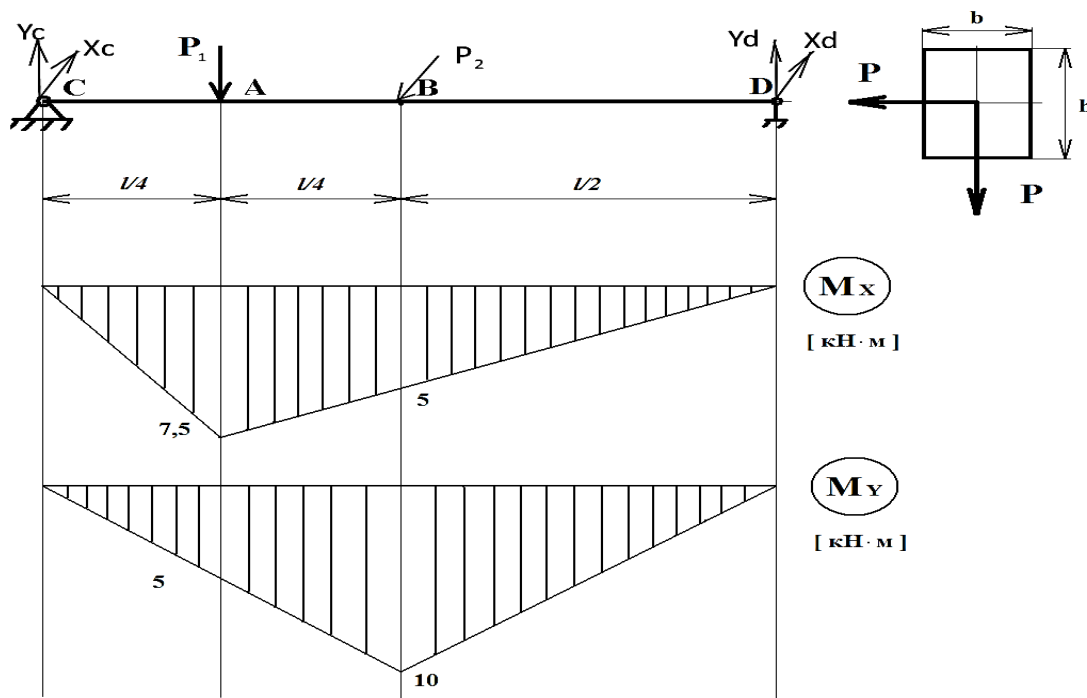


Рис.8.31 Схема балки з епюрами моментів згинання

1) На балку CD діє просторова система сил P_1 і P_2 . Реакції опори в точці C X_c та Y_c , а в точці D - X_D та Y_D . Реакція Z_c опори C дорівнює нулю, бо вздовж осі Z сили не діють. З умов рівноваги балки CD знаходимо:

$$X_c = 10 \text{ кН}; \quad Y_c = 15 \text{ кН}; \quad X_D = 10 \text{ кН}; \quad Y_D = 5 \text{ кН}.$$

Побудуємо епюри моментів згинання $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ від дії прикладених сил та визначимо положення небезпечного перерізу.

В будь-якому перерізі CD діють внутрішні згинальні моменти M_x у вертикальній площині і M_y в горизонтальній площині. Знайдемо згинальні моменти M_x та M_y у точках A, B, C, D балки.

Точка C: $M_{cx} = 0$; $M_{cy} = 0$.

Точка A: $M_{ax} = Y_c \cdot l/4 = 15 \cdot 1/4 \cdot 2 = 7,5 \text{ кНм}$;

$$M_{Ay} = X_c \cdot 1/4l = 10 \cdot 1/4 \cdot 2 = 5 \text{ кНм};$$

Точка В: $M_{Vx} = Y_c \cdot 1/2l - P_1 \cdot 1/4 l = 15 \cdot 1/4 \cdot 2 = 7,5 \text{ кНм};$

$$M_{Vy} = X_c \cdot 1/2l = 10 \cdot 1 = 10 \text{ кНм};$$

Точка D: $M_{Dx} = 0; M_{Dy} = 0.$

Небезпечний переріз В-В.

$$M_x = 5 \text{ кН} \cdot \text{м} = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м}; M_y = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} = 10000 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2) Із умов міцності по нормальним напруженням підбираємо розміри прямокутного поперечного перерізу.

Необхідний момент опору:

$$W_x = \frac{M_x + \kappa \cdot M_y}{[\sigma]};$$

де $\kappa = \frac{h}{b} = 1,5$ – відношення сторін прямокутника поперечного перерізу.

$$W_x = \frac{5000 + 1,5 \cdot 10000}{10^7} = 0,002 \text{ м}^3;$$

$$W_x = 2000 \text{ см}^3$$

Момент опору для прямокутного поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad b = \frac{h}{1,5}; \quad W_x = \frac{h^3}{6 \cdot 1,5} = \frac{h^3}{9} = 2000 \text{ см}^3$$

$$h = \sqrt[3]{9 \cdot 2000} = \sqrt[3]{18000} = 26,2 \text{ см};$$

$$b = \frac{h}{1,5} = \frac{26,2}{1,5} = 17,46 \approx 17,5 \text{ см}$$

Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі:

$$\text{tg} \beta = \kappa \cdot \frac{M_y}{M_x} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \frac{M_y}{M_x} = (1,5)^2 \cdot \frac{10000}{5000} = 4,5;$$

$$\beta = \text{arctg}(4,5) = 77,5^\circ$$

Знаходимо напруження:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

де I_x, I_y - моменти інерції поперечного перерізу.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{17,5 \cdot 26,2^3}{12} = 26228 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{26,2 \cdot 17,5^3}{12} = 11701 \text{ см}^4;$$

Точка 1. $X_1 = 8,75$ см; $Y_1 = -13,1$ см;

$$\sigma_1 = \frac{5000 \cdot (-0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{1000 \cdot (0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = 5 \text{ МПа};$$

Точка 2. $X_2 = -8,75$ см; $Y_2 = -13,1$ см;

$$\sigma_2 = \frac{5000 \cdot (-0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{1000000 \cdot (-0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = -10 \text{ МПа};$$

Точка 3. $X_3 = -8,75$ см; $Y_3 = 13,1$ см;

$$\sigma_3 = \frac{5000 \cdot (0,131)}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{10000 \cdot (-0,0875)}{11701 \cdot 10^{-8}} = -5 \text{ МПа};$$

Точка 4. $X_4 = 8,75$ см; $Y_4 = 13,1$ см;

$$\sigma_4 = \frac{5000 \cdot 13,1}{26228 \cdot 10^{-8}} + \frac{10000 \cdot 0,0875}{11701 \cdot 10^{-8}} = 10 \text{ МПа}.$$

Приклад 2.

Умова задачі: Чавунний короткий стрижень, стискається поздовжньою силою P прикладеного в точці А. Необхідно:

1) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через P і розміри перерізу.

2) знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання [Б]ст і розтягання [Б]р.

Дано: $a = 5$ см; $b = 5$ см; $[\sigma]_{\text{ст}} = 150$ МПа; $[\sigma]_{\text{р}} = 25$ МПа. Схема завантаження колони зображена на рис. 8.32.

1) Визначаємо положення головних центральних осей інерції перерізу прийнявши за початок відліку центр ваги першу (нижню) фігуру:

$$Z_c = 0; \quad Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{0 + 5 \cdot 10 \cdot 7,5}{10 \cdot 5 + 10 \cdot 5} = 3 \text{ см}$$

2) Визначаємо величини головних центральних моментів інерції і радіусів інерції:

$$I_y = \frac{10 \cdot 5^2}{12} + \frac{5 \cdot 15^2}{12} = 1510,42 \text{ см}^4;$$

$$i^2_y = \frac{1510,42}{F} = \frac{1510,42}{125} = 12,08 \text{ см}^2;$$

$$I_z = \frac{5 \cdot 10^3}{12} + (4,5)^2 \cdot 10 \cdot 5 + \frac{15 \cdot 5^3}{12} + (-3)^2 \cdot 15 \cdot 5 = 2260,42 \text{ см}^4;$$

$$i^2_z = \frac{I_z}{F} = \frac{2260,42}{125} = 18,08 \text{ см}^2.$$

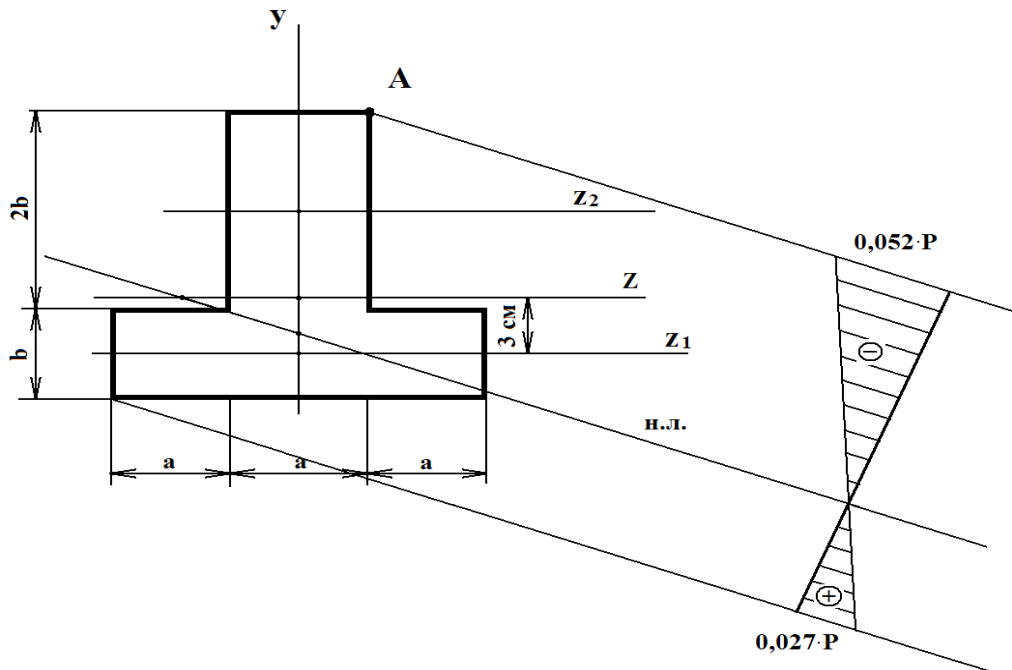


Рис.8.32. Схема до задачі із побудовою епюри нормальних напружень

3) Визначаємо положення нульової лінії (н.л.) для знайденої точки прикладання сили P :

$$a_z = -\frac{i_y^2}{Z_p} = -\frac{12,08}{2,5} = -4,83 \text{ см};$$

$$a_y = -\frac{i_z^2}{Y_p} = -\frac{18,08}{9,5} = -1,98 \text{ см}$$

4) Визначаємо напруження в найбільш напружених точках прикладання сили P :

Точка А:

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_p \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{Z_p \cdot z_A}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot 9,5}{18,08} + \frac{2,5 \cdot 2,5}{12,08} \right) = -0,052 \cdot P;$$

Точка В:

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_p \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{Z_p \cdot z_B}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot (-5,5)}{18,08} + \frac{2,5 \cdot (-7,5)}{12,08} \right) = 0,027 \cdot P.$$

5) Визначаємо допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях:

$$\text{т.А: } [P] = \frac{-[\sigma]_{\text{ст}} \cdot F}{1 + \frac{Y_p \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{Z_p \cdot z_A}{i_y^2}} = \frac{-150 \cdot 10^6 \cdot 0,0125}{1 + \frac{9,5 \cdot 9,5}{18,08} + \frac{2,5 \cdot 2,5}{12,08}} = -0,288 \cdot 10^6 \text{ Н} \approx 288 \text{ кН}$$

$$\text{т.В: } [P] = \frac{-[\sigma]_{\text{ст}} \cdot F}{1 + \frac{Y_p \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{Z_p \cdot z_B}{i_y^2}} = \frac{25 \cdot 10^6 \cdot 0,0125}{1 + \frac{9,5 \cdot (-5,5)}{18,08} + \frac{2,5 \cdot (-7,5)}{12,08}} = 0,0908 \cdot 10^6 \text{ Н} \approx 91 \text{ кН}$$

Приймаємо $[P]=91$ кН, тобто із умови міцності на розтягання.

$$\text{При цьому: } \sigma_A = -\frac{91 \cdot 10^3}{0,0125} (1 + 4,99 + 0,55) = 47288640 \text{ Па} \approx 47,3 \text{ МПа}$$

8.7. Завдання для самоконтролю

Закріпити отриманні знання можна за допомогою мультимедійної презентації до розділу «Складний опір».

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38139>



Мультимедійна презентація «Складний опір»

8.8 .Завдання для самостійного виконання

Задача 1

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою Q в точці А і горизонтальною силою в точці В (обидві точки розташовані на осі балки).

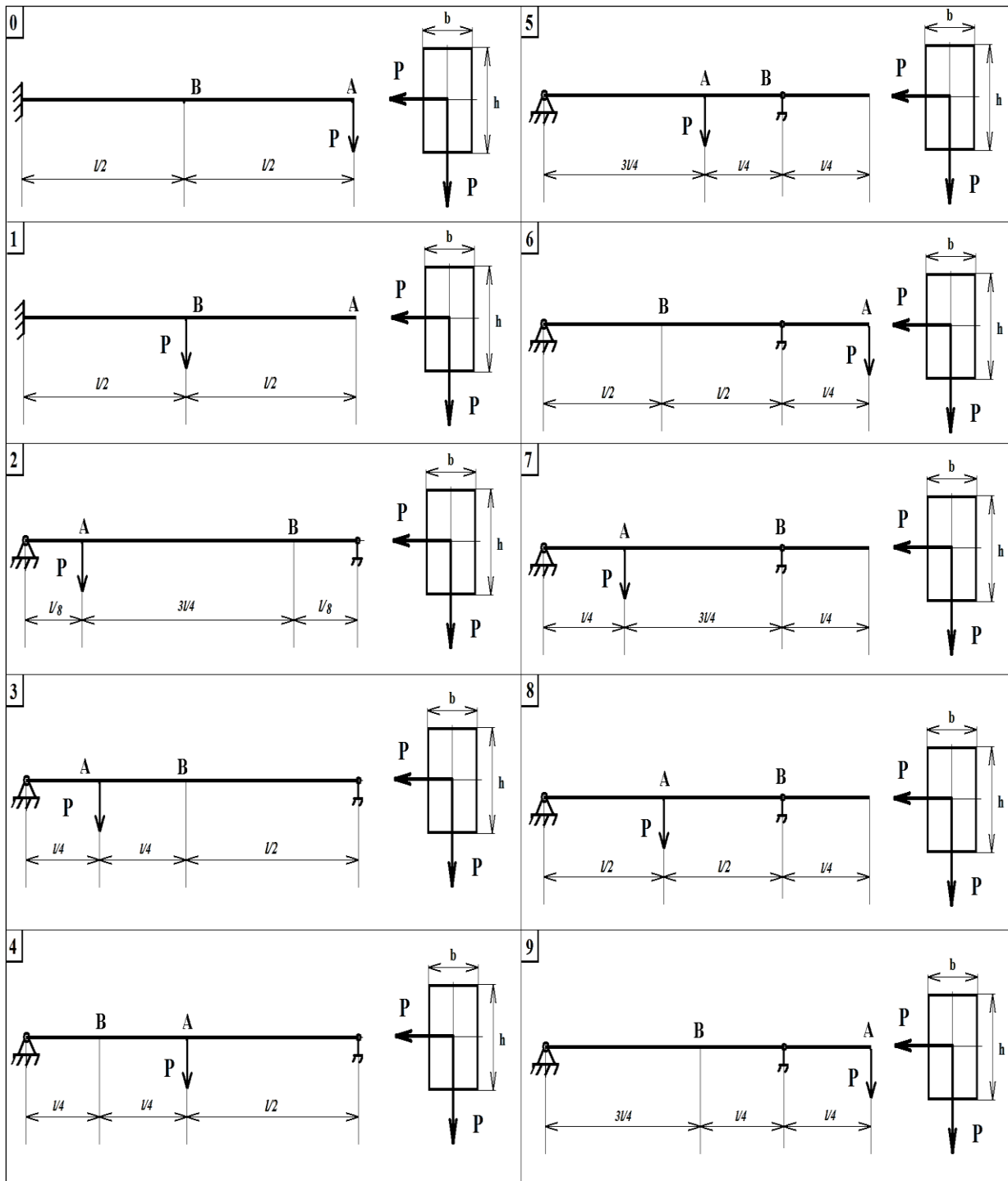
На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, напрямлені перпендикулярно до площини рисунку. Необхідно:

- побудувати епюри $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ і встановити положення небезпечного перерізу; підібрати розміри поперечного перерізу h і b за допустимими напруженнями;
- визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень.

Таблиця 8.1

Завдання для самостійного виконання (задача 1)

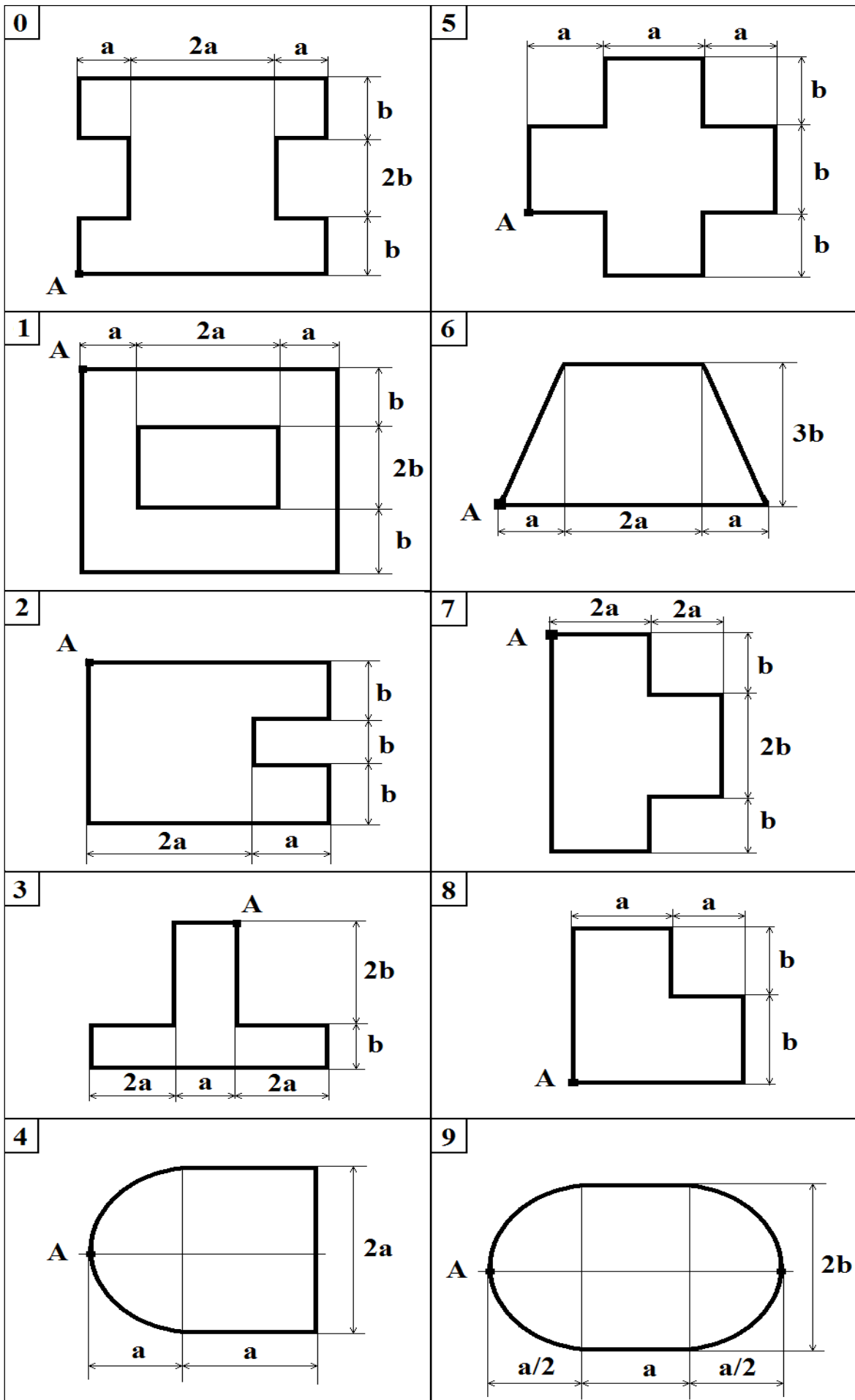
№	$[\sigma]$, МПа	P , кН	L , м	h/b
1	12	8	1,2	1,2
2	10	9	1,5	1,5
3	11	5	1,8	1,8
4	9	3	1,3	1,3
5	9	5	1,4	1,4
6	8	2	1,9	1,9
7	12	1	1,0	1,0
8	11	8	1,1	1,1
9	8	9	1,5	15
10	8	5	1,3	1,3



Задача 2

Чавунний короткий стрижень, стискається поздовжньою силою P , прикладеною в точці А. Необхідно:

- обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через P і розміри перерізу;
- знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання $[\sigma]_{ст}$ і розтягання $[\sigma]_р$.



Завдання для самостійного виконання (задача 2)

№	а, см	в, см	$[\sigma]_{\text{ст}}$	$[\sigma]_{\text{р.}}$
1	5	6	120	30
2	3	5	130	45
3	5	7	100	22
4	7	8	160	27
5	8	8	60	23
6	5	9	90	25
7	7	6	80	28
8	6	4	100	30
9	5	8	70	46
10	9	4	100	23

8.9. Тестові завдання

Пропонується скористатися електронним тестовим навчальним тренажером до розділу «Складний опір».

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=38118>



*Електронний тестовий навчальний тренажер
до розділу «Складний опір»*

Розділ 9. Стійкість стиснутих стрижнів

9.1.1. Загальні поняття

Під час проектування інженерних об'єктів до них висувають вимогу надійності. Поняття надійності включає в себе виконання умов міцності, жорсткості та стійкості.

Стійкість – це здатність системи витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги.

На інженерні об'єкти, окрім розрахункових навантажень, діють додаткові (часто не враховуються розрахунком) сили, які прагнуть вивести систему із заданого стану рівноваги.

Якщо малі сили викликають малі відхилення системи від розрахункового стану рівноваги, то такий стан називають **стійким**, і навпаки, **нестійкий стан системи** – великі відхилення при незначних збудженнях. Прикладом цього є положення кулі на опуклій і увігнутій поверхнях (рис. 9.1).

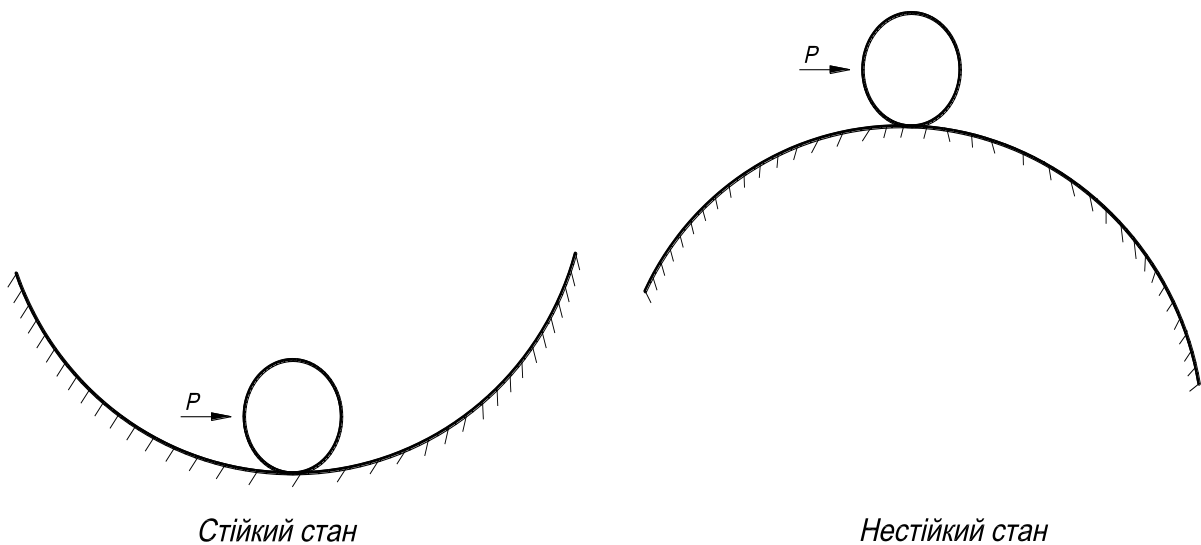


Рис. 9.1. Визначення стану системи.

Аналогічні явища поширені і при центральному стиску стрижня. Коли стискаюча сила P менша деякої критичної $P_{кр}$, то прямолінійний стан рівноваги стрижня буде стійким. Коли $P > P_{кр}$ прямолінійний стан є нестійким, оскільки незначне збудження викликає значні відхилення стрижня від початкового прямолінійного стану рівноваги.

Небезпечним є те, що при наближенні $P \approx P_{кр}$ залежність між прогином і стискаючою силою є нелінійною. Це явище називають

поздовжнім згином. Воно є небезпечним і недопустимим в експлуатації інженерних об'єктів. У цьому разі очевидно, що до стиску приєднується згин з моментом $M = P \cdot v$ і нормальні напруження стрімко зростають, що призводить до миттєвого руйнування конструкції.

Відповідно до цього поперечні перерізи таких стрижнів повинні визначатися не із умов міцності при стиску, а із умов того, щоб стискаючі напруження були менші за критичні.

$$\sigma < \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} .$$

9.1.2. Формула Ейлера для визначення критичної сили

Існує багато методів для дослідження стійкості рівноваги пружних систем. Найбільш універсальним є динамічний метод, який базується на вивченні коливань системи навколо деякого стану рівноваги. Цей метод потребує спеціальних знань в галузі динаміки коливань пружних систем і, оскільки більшість задач реальної практики розв'язуються більш простим методом – методом Ейлера, він і застосовується в інженерній практиці.

Метод Ейлера базується на аналізі розмежувань можливих форм рівноваги пружної системи. У разі, коли $P < P_{кр}$ прямолінійний стан рівноваги є стійким, коли $P > P_{кр}$ стан рівноваги прямолінійний є нестійким, а стійким буде криволінійний стан рівноваги.

Таким чином, існує таке значення стискаючої сили, при якому відбувається розмежування форм рівноваги. Цю силу називають **критичною**. Для визначення критичної сили розглянемо шарнірно закріплений стрижень у злегка зігнутому стані (рис. 9.2). Згинальний момент у довільному поперечному перерізі дорівнює:

$$M_x = P \cdot v .$$

Диференціальне рівняння зігнутої осі стрижня:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Pv}{EI} \quad (9.1)$$

$$\text{або } \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{Pv}{EI} = 0; \quad \frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = 0 , \quad (9.2)$$

$$\text{де: } k^2 = \frac{P}{EI} \quad (9.3)$$

Інтеграл диференціального рівняння (9.2) має вигляд:

$$v = A \cos kz + B \sin kz \quad (9.4)$$

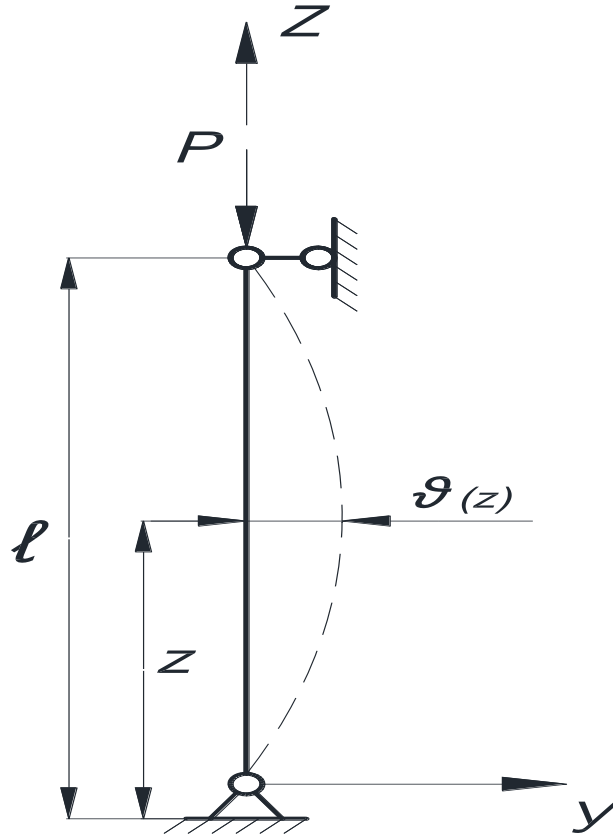


Рис. 9.2. Шарнірно закріплений стрижень.

Сталі інтегрування A і B знаходимо із граничних умов:

$$1) z = 0, v_{(z=0)} = A \cdot 1 = 0, A = 0,$$

$$v = B \sin kz.$$

Стрижень згинається за законом синусоїди.

$$2) z = l, v_{(z=l)} = B \sin kl = 0:$$

Можливі два варіанти:

а) $B = 0$ – при цьому стрижень не згинається, тому такий варіант нас не цікавить;

$$б) \sin kl = 0, kl = \pi, 2\pi, \dots, n\pi. \quad (9.5)$$

Підставивши вираз (9.5) в (9.3), отримаємо рішення, що

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \frac{(2\pi)^2 EI}{l^2}, \dots, \frac{(n\pi)^2 EI}{l^2}. \quad (9.6)$$

Тобто отримано не одне, а безліч рішень. При цьому кожному рішенню відповідає своя форма рівноваги (рис. 9.3).

Оскільки найбільш вірогідною є форма втрати рівноваги, що відповідає першому випадку, і нас цікавить найменше значення критичної сили, то вона визначається:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_E \quad (9.7)$$

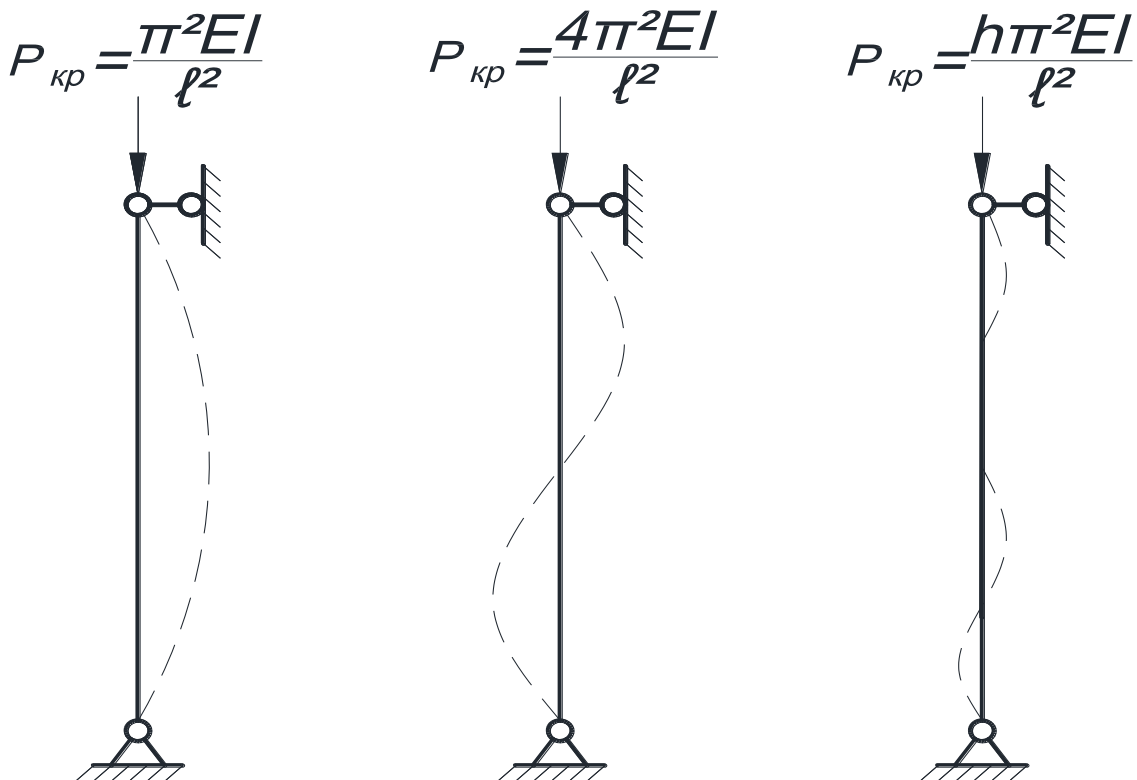


Рис. 9.3. Можливі форми рівноваги.

Цю критичну силу, яку отримав Ейлер у 1744 р. називають ще **Ейлеровою силою**.

Цікаво відмітити, що величина критичної сили залежить переважно від геометричних характеристик і не залежить від характеристик міцності, тому стрижні, виготовлені з різних матеріалів можуть мати однакове значення $P_{кр}$, на відміну від розтягу, де величина допустимого навантаження в значній мірі залежить від міцнісних характеристик матеріалу:

$$N_{дон} = [\sigma] \cdot F .$$

9.1.3. Вплив умов закріплення кінців стрижня на величину критичної сили

В інженерній практиці можливі такі умови закріплення кінців центрально стиснутого стрижня (рис. 9.4).

Для кожного випадку закріплення стрижня необхідно виконати розрахунок, аналогічний Ейлеровому. Результати підтвердили, що ці розрахунки можна відтворити у єдиній узагальнюючій формулі:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (9.8)$$

де: $\mu l = l_0$ – приведена довжина до шарнірно закріпленого стрижня, а μ – коефіцієнт приведення довжини, який залежить від умов закріплення стрижня.

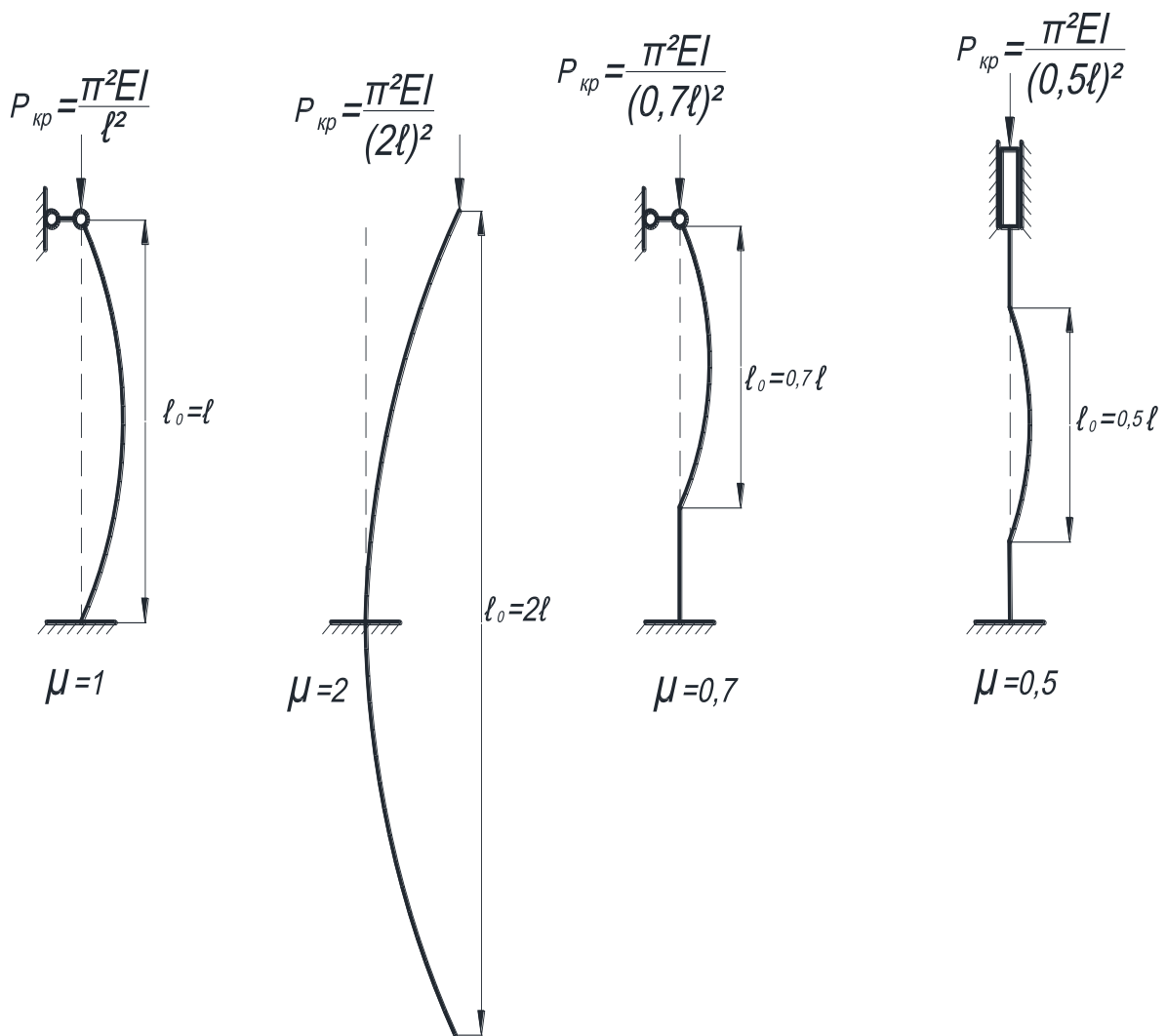


Рис. 9.4. Можливі варіанти закріплення кінців стрижня.

Розглянемо приклад обчислення критичної сили для стрижня двотаврового перерізу, затиснутого нижнім кінцем (рис. 9.5).

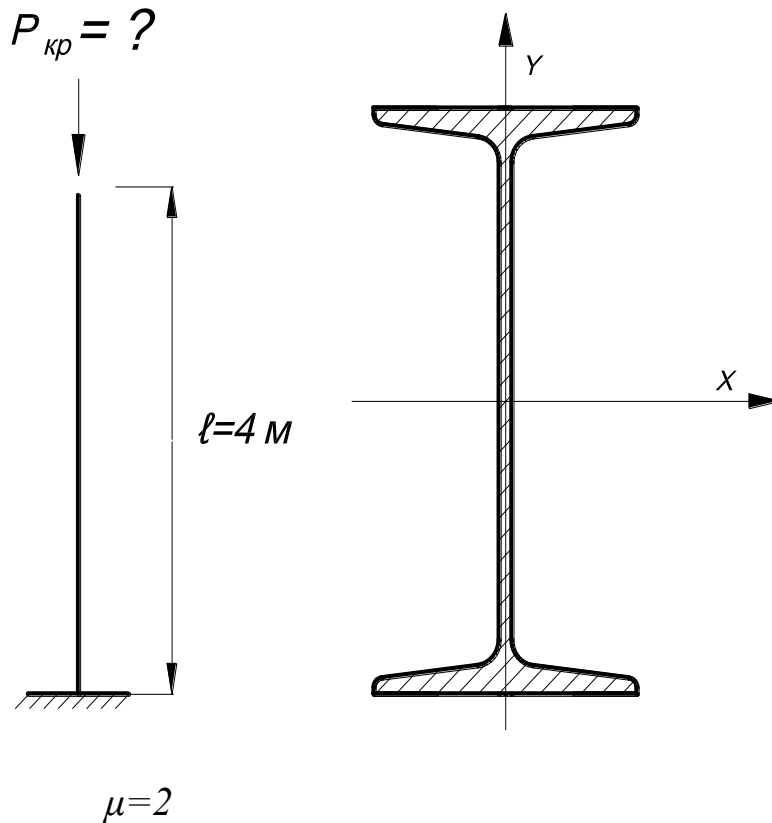


Рис. 9.5. Схема завантаження двотаврового стрижня.

Дано: I№22: $I_x=2560 \text{ см}^4$; $I_y=157 \text{ см}^4$; $F=30,6 \text{ см}^2$;
 $E=2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Стрижень втратить стійкість у площині меншої жорсткості, тому необхідно прийняти $I_{min}=I_y=157 \text{ см}^4$;

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{(3,14)^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 157 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 4)^2} = 50,79 \text{ кН},$$

Критичне напруження:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{50,79}{30,6} = 16,6 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210,0 \text{ МПа}.$$

Оскільки величина допустимого напруження $[\sigma] = 210,0 \text{ МПа}$, а у нас напруження $\sigma_{кр} = 16,6 \text{ МПа}$, то очевидна актуальність проблеми розрахунку стрижня на стійкість. При цьому дійсне напруження повинно бути меншим за критичне.

9.2. Стійкість стиснутих стрижнів. Формула Ясинського

9.2.1. Границі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського

Формула Ейлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} \quad (9.9)$$

отримана в 1744 році, тривалий час (близько 70 років) була предметом суперечок і дискусій, причина яких в тому, що для деяких випадків стиску були розбіжності між теоретичними результатами та експериментальними даними. Пізніше було з'ясовано, що формула Ейлера виведена при деформації матеріалу в пружній стадії (справедливість закону Гука)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

А значить її неможливо використовувати у випадках, коли критичне напруження перевищує границю пропорційності.

Встановимо границі застосування формули Ейлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\mu \cdot l)^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{\mu \cdot l}{i}\right)^2}. \quad (9.10)$$

Позначимо $\frac{\mu \cdot l}{i} = \lambda$ – гнучкість. (9.11)

З врахуванням цього:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Підставимо у вираз (9.10) $\sigma_{нц}$ замість $\sigma_{кр}$, маємо:

$$\sigma_{нц} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}, \quad (9.12)$$

звідки знайдемо граничне значення гнучкості:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{нц}}} \quad (9.13)$$

Тому зрозуміло, що коли:

$\lambda > \lambda_0$, $\sigma_{кр} < \sigma_{нц}$ - користуються формулою Ейлера :

$\lambda < \lambda_0$, $\sigma_{кр} > \sigma_{нц}$ - формулою Ейлера, користуватися неможливо.

У разі, коли $\lambda < \lambda_0$, матеріал деформується у пружно-пластичній стадії і виведення формули є досить складним.

Ясинський запропонував емпіричну формулу:

$$\sigma_{кр} = a - v \cdot \lambda \quad (9.14)$$

де: a і v – емпіричні коефіцієнти, що залежать від матеріалу.

Наприклад:

- Сталь 3 $\sigma_{кр} = 3100 - 11,4 \cdot \lambda$;

- Дерево $\sigma_{кр} = 293 - 1,94 \cdot \lambda$

Таким чином, формули Ейлера і Ясинського дають можливість розв'язувати задачу стійкості в усьому діапазоні гнучкостей.

Зобразимо графічну залежність між $\sigma_{кр}$ і λ (рис. 9.15).

У тому разі, якщо $\lambda < 40,0 \div 50,0$, проблеми стійкості немає, стрижень вважають коротким і він руйнується від втрати міцності.

Поряд з емпіричною Ясинський вивів і теоретичну формулу із застосуванням так званого приведенного модуля пружності:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E_r \cdot I}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (9.16)$$

де: E_r – приведений модуль пружності.

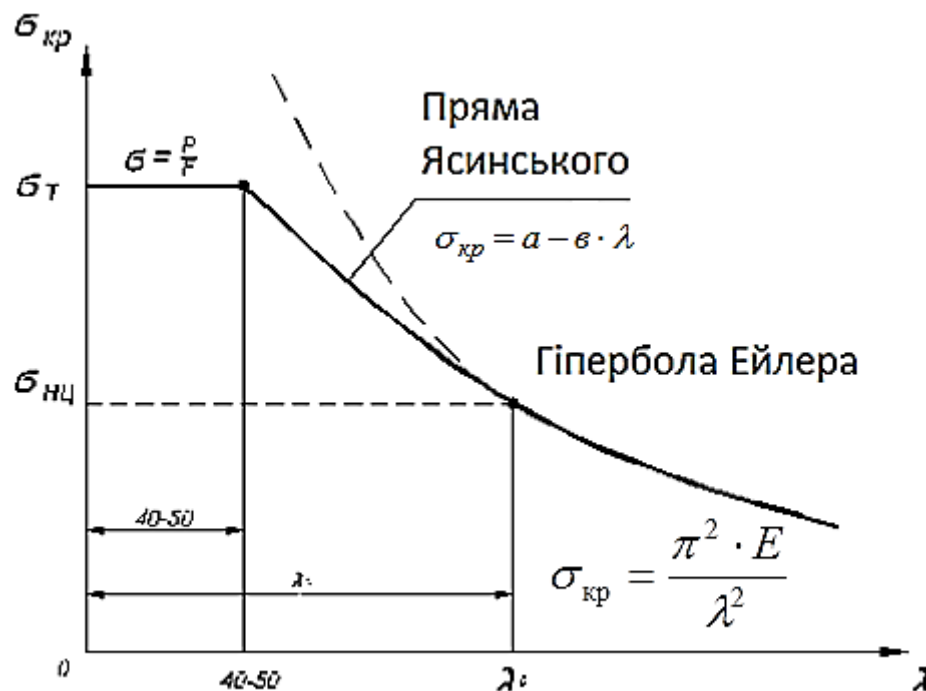


Рис. 9.6. Графічна залежність між критичним напруженням та гнучкістю стрижня.

Ідея застосування приведенного модуля E_r полягає у тому, що початково стиснутий стрижень при подальшому згині починає працювати як стрижень з різними модулями пружності при розтягу та стиску.

9.2.2. Практичний розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість

Задача розрахунку стиснутих стрижнів на стійкість здійснюється у першу чергу, для визначення розмірів поперечного перерізу. При цьому напруження у стиснутому стрижні не повинні перевищувати критичні:

$$\sigma = \frac{N}{F_{br}} \leq \frac{P_{кр}}{F_{br}} = \sigma_{кр}, \quad (9.17)$$

де F_{br} – площа поперечного перерізу без врахування послаблення.

Для надійної роботи стрижня необхідно передбачити запас міцності, тобто:

$$\sigma = \frac{N}{F_{br}} \leq \frac{\sigma_{кр}}{n_1} \quad (9.18)$$

де: n_1 – коефіцієнт запасу міцності.

Умова міцності на розтяг має вигляд:

$$\sigma = \frac{N}{F_{netto}} \leq [\sigma] \quad (9.19)$$

Введемо поняття – коефіцієнт поздовжнього згину (коефіцієнт зменшення допустимого напруження):

$$\varphi \cdot [\sigma] = \frac{\sigma_{кр}}{n_1} \quad (9.20)$$

де φ – залежить від критичного напруження, а значить є функцією гнучкості:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_1[\sigma]} = f(\lambda)$$

Підставимо вираз (9.20) у (9.19):

$$\sigma = \frac{N}{F_{br}} \leq \varphi[\sigma];$$

Поділивши на φ , маємо:

$$\frac{\sigma}{\varphi} = \frac{N}{\varphi F_{br}} \leq [\sigma] \quad (9.21)$$

Позначимо $\frac{\sigma}{\varphi} = \sigma_{кр}$

Умова стійкості має вигляд:

$$\sigma_{кр} = \frac{N}{\varphi \cdot F_{вр}} \leq [\sigma] \quad (9.22)$$

Зручність цієї формули полягає в тому, що як при розтягу, так і при стиску користуємося одним значенням $[\sigma]$.

З виразу (9.22) визначаємо площу поперечного перерізу:

$$F = \frac{N}{\varphi \cdot [\sigma]} \quad (9.23)$$

Складність цієї формули в тому, що в ній є два невідомих.

Задачу розв'язують методом послідовного наближення.

Початково задають значення $\varphi_0=0,5$, визначають площу за формулою (9.23), потім визначають осьовий момент інерції, радіус інерції і гнучкість. А потім за таблицею згідно визначеною гнучкістю знаходять значення φ_1 , яке буде відрізнятися від φ_0 . Потім знаходять

$$\varphi_{cp} = \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$$

і підставляють значення у формулу (9.23).

Наближення виконують доти поки: $\sigma_{кр} = \frac{N}{\varphi_{кін} \cdot F} \leq [\sigma]$ будуть відрізнятися не більше ніж на $\pm 5\%$.

9.2.3. Розв'язання прикладу

Підібрати двотавровий поперечний переріз центрально стиснутого стрижня, затиснутого нижнім кінцем і завантаженого силою $P=1200\text{кН}$. Довжина стрижня $l=2,6\text{ м}$. (рис. 9.7).

$$[\sigma] = 210,0\text{МПа};$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5\text{ МПа}$$

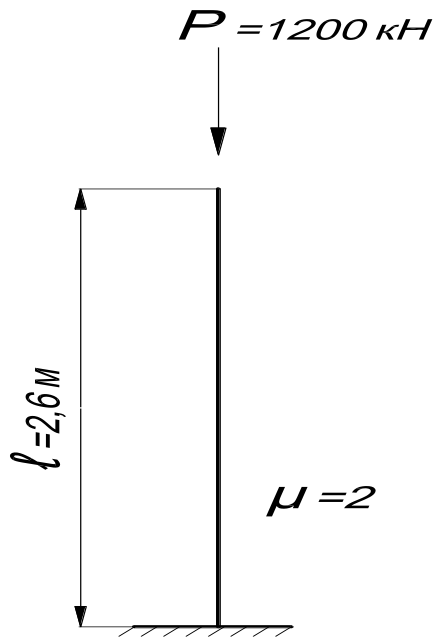


Рис. 9.7. Схема завантаження стрижня.

У першому наближенні вважаємо $\varphi_0 = 0,5$

$$F = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 114 \text{ см}^2$$

За таблицями сортаменту вважаємо:

I №55

$$F = 114 \text{ см}^2$$

$$i_{\min} = 3,44 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{2 \cdot 260}{3,44} = 151$$

$$\varphi_{(151)} = 0,3$$

(9.25)

Визначаємо напруження:

$$\sigma_p = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,32 \cdot 114 \cdot 10^{-4}} = 329,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа} - \text{перевантаження.}$$

У другому наближенні вважаємо:

I № 60:

$$F = 132 \text{ см}^2; i_{\min} = 3,6 \text{ см};$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 260}{3,6} = 144;$$

(9.26)

$$\varphi(144) = 0,34 \text{ при } \lambda = 144.$$

$$\sigma_p = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,34 \cdot 132 \cdot 10^{-4}} = 267,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа},$$

перевантаження більше 5 %.

У подальшому приймаємо:

I №65

$$F = 153 \text{ см}^2$$

$$i_{\min} = 3,77 \text{ см}^2$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 260}{3,77} = 138 \quad (9.27)$$

$$\varphi_{(138)} = 0,7$$

Розрахунок ве навантаження становить :

$$\sigma_p = \frac{1200 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 153 \cdot 10^{-4}} = 212 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа}$$

Перевантаження становить:

$$\frac{212 - 210}{212} \cdot 100\% = 0,94\% , \text{ що менше } 5\%.$$

Знайдемо величину критичної сили:

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot F = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}}{138^2} \cdot 153 \cdot 10^{-4} = 1663 \text{ кН}.$$

Знайдемо коефіцієнт запасу стійкості:

$$k_{ст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1663}{1200} = 1,39 \quad \text{— коефіцієнт запасу стійкості, який}$$

знаходиться у межах нормативного значення.

Наприкінці вважаємо двотавр № 65.

9.3. Стійкість при позацентровому стиску

9.3.1. Розрахунок позацентрово стиснутого гнучкого стрижня

Поряд з центральним стиском проблема стійкості існує і при позацентровому стиску стрижня, коли його гнучкість більше 40. Задача розрахунку позацентрового стиску гнучкого стрижня цікава тим, що тут має місце складна нелінійна залежність між напруженням і стискаючою силою.

На рис. 9.8 зображено позacentрово стиснутий гнучкий стрижень.

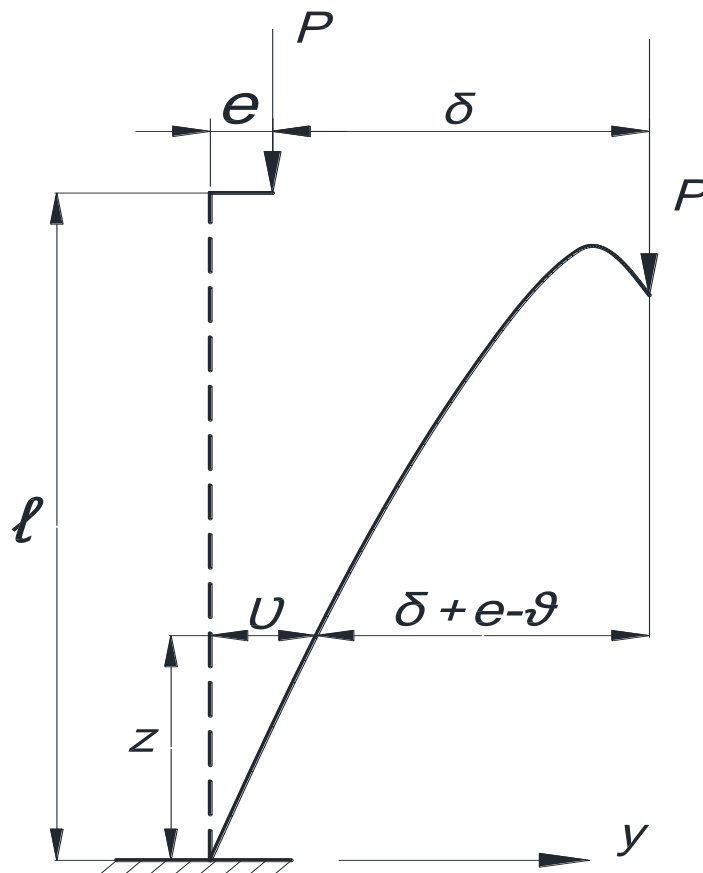


Рис. 9.8. Схема завантаження позacentрово стиснутого гнучкого стрижня.

У деякому поперечному перерізі стрижня з ординатою z відхилення від вертикалі складає v .

Згинальний момент у цьому перерізі:

$$M_x = -P(\delta + e - v)$$

де e – це початковий ексцентриситет прикладеної сили.

Диференціальне рівняння зігнутої вісі стрижня має вигляд:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{P(\delta + e - v)}{EI}; \text{ або } \frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = k^2(\delta + e) \quad (9.28)$$

$$\text{де: } k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$\text{Розв'язок диференціального рівняння (9.28) має вигляд} \\ v = A \cos kz + B \sin kz + e + \delta \quad (9.29)$$

У виразі (9.29) маємо дві невідомі сталі величини A і B . Виразу (9.29) недостатньо, щоб знайти ці сталі величини. Тому візьмемо похідну по координаті z від виразу.

$$\begin{aligned} 1) \quad z=0, \\ dv/dz=0, \\ (-Aksinkz+Bkcoskz)=Bk=0, \text{ відповідно} \\ z=0 \\ B=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad z=l, \\ V_{(z=l)}=A+e+\delta=0, \quad A=-(e+\delta) \\ \text{Підставимо в (9.29) значення } A \text{ і } B \text{ отримаємо:} \end{aligned}$$

$$V=(e+\delta)(1-\cos kz) \quad (9.30)$$

Виключаючи із (9.30) δ як невідому, маємо:

$$\text{При } z=l, v=\delta.$$

$$\text{Тому: } (\delta+e)(1-\cos kl)=\delta \quad (9.31)$$

У ліву частину (9.31) додавши і віднявши, знаходимо, що

$$\delta+e=e/\cos kl \quad (9.32)$$

Підставимо вираз (9.31) у (9.30) знайдемо:

$$v = \frac{e}{\cos kl}(1 - \cos kz) \quad (9.33)$$

Розглянемо опорний поперечний переріз ($z = 0$). Очевидно, що максимальний згинальний момент буде в опорному перерізі:

$$M_{\max} = -P(\delta + e) = -\frac{Pe}{\cos kl} \quad (9.34)$$

Найбільш напруженими точками будуть точки, розташовані праворуч від осі X ; напруження в них буде:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} - \frac{M_{\max}}{W_x}, \quad \sigma_{\max} = -\frac{P}{F} - \frac{Pe}{W_x \cos kl} = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{eF}{W_x \cos kl}\right) \quad (9.35)$$

Знайдемо відстань до крайньої точки ядра перерізу.

$$\frac{W_x}{F} = \frac{I_x}{y_{\max} F} = \frac{ix^2}{y_{\max}} \quad (9.36)$$

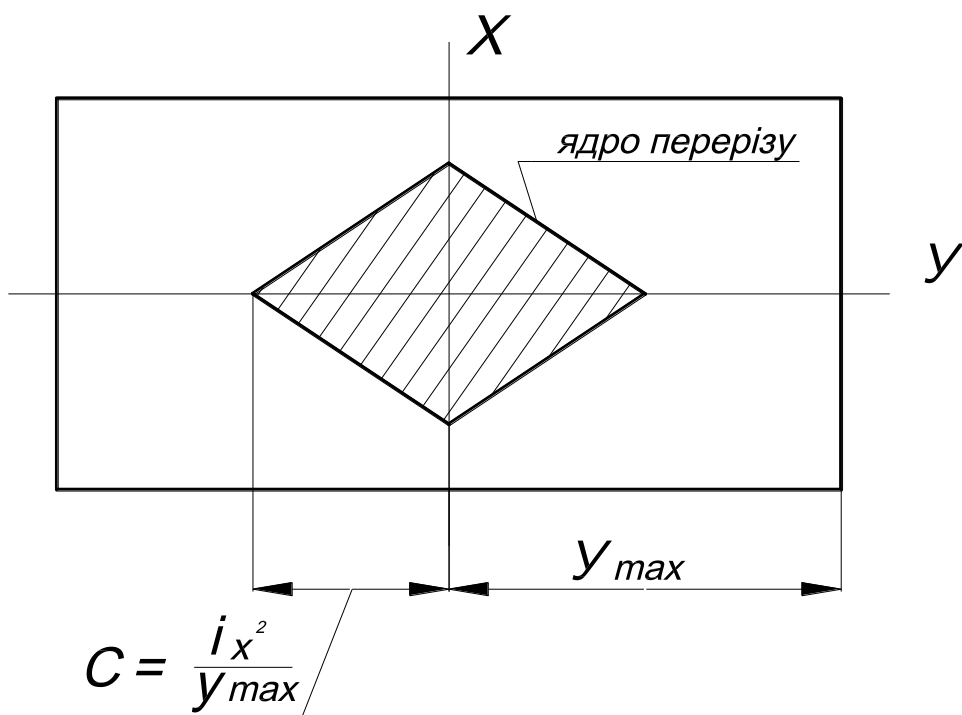


Рис. 9.9. Поперечний переріз стрижня.

Із рис. 9.9 очевидно, що вираз (9.36) є крайньою точкою ядра перерізу.

Позначимо $e/c = m_e$ – відносний ексцентриситет прикладання сили.

Отримаємо:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{m_e}{\cos kl}\right) = \sigma_0 \left(1 + \frac{m_e}{\cos kl}\right), \quad (9.37)$$

де: $\sigma_0 = \frac{P}{F}$ - напруження від центрального стиску.

Із виразу (9.37) очевидно, що між максимальним напруженням σ_{\max} і стискаючою силою P для гнучкого стрижня залежність є нелінійною та складною, і графічно її можна зобразити так (рис. 9.10):

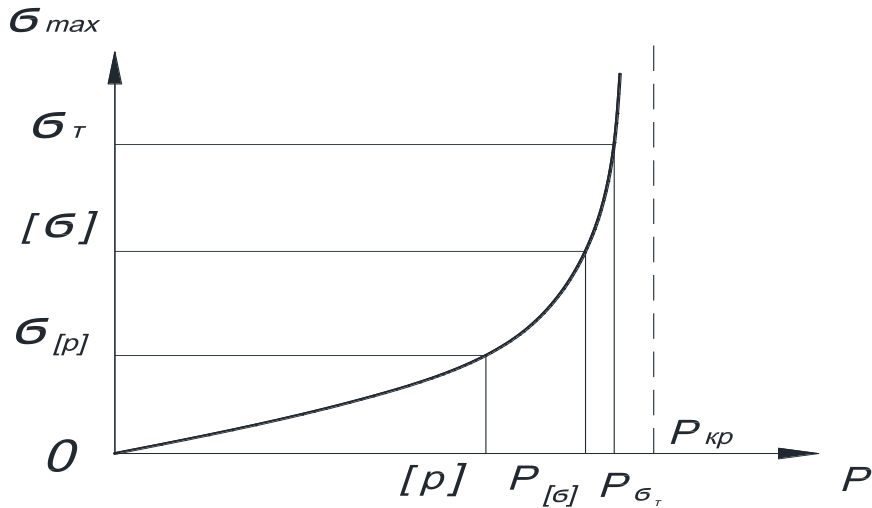


Рис.9.10. Графічна залежність між стискаючою силою та максимальним дотичним напруженням.

Робота позацентрово стиснутого гнучкого стрижня небезпечна тим, що в інтервалі $P_{[\sigma]} - P_{\sigma_T}$ незначне збільшення стискаючої сили призводить до значного зростання напружень.

Тому за коефіцієнтом запасу міцності, залежно від стискаючої сили P неможливо робити висновки про запас міцності конструкції у цілому. Форма кривої залежності домінантно залежить від початкового ексцентриситету e ; при чому чим більше початковий ексцентриситет, тим інтенсивніше буде зростати δ (рис. 9.11).

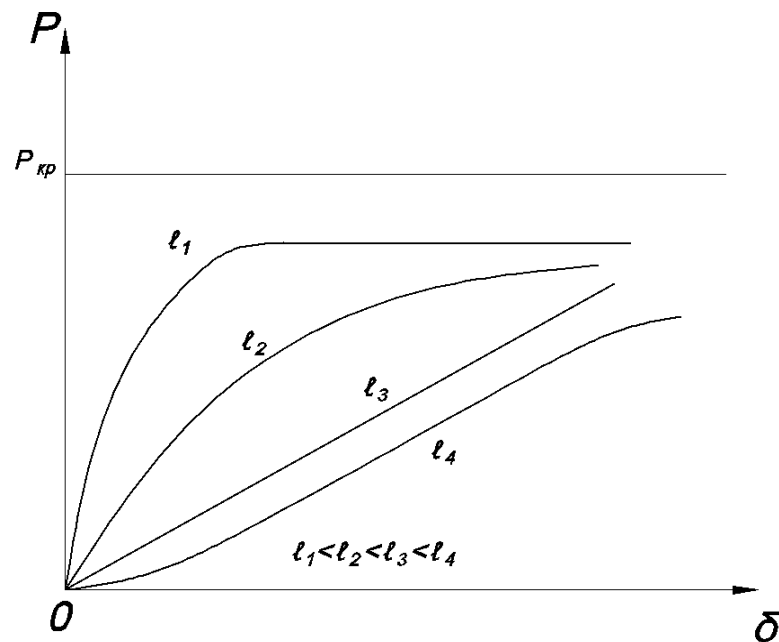


Рис. 9.11. Залежність стиснутої сили та найбільшого прогину від величини початкового ексцентриситету.

Особливу небезпеку мають випадкові ексцентриситети, які в методиці розрахунку врахувати важко. Тому цей недолік компенсується збільшенням коефіцієнту запасу міцності.

9.3.2. Практичне визначення напружень при позацентровому стиску гнучкого стрижня

Для стрижня, завантаженого силою $P=2000$ кН, прикладеною з ексцентриситетом $e=30$ см (рис. 9.12), знайти максимальне напруження опорного перерізу.

Максимальне напруження в точці А визначають за формулою:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{m_e}{c \cos ke} \right), \text{ де } e/c = m_e \text{ знаходимо:}$$

$$c = \frac{ix^2}{y_{\max}} = \frac{20 \cdot 40^3}{12 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 20} = 6,7 \text{ см}$$

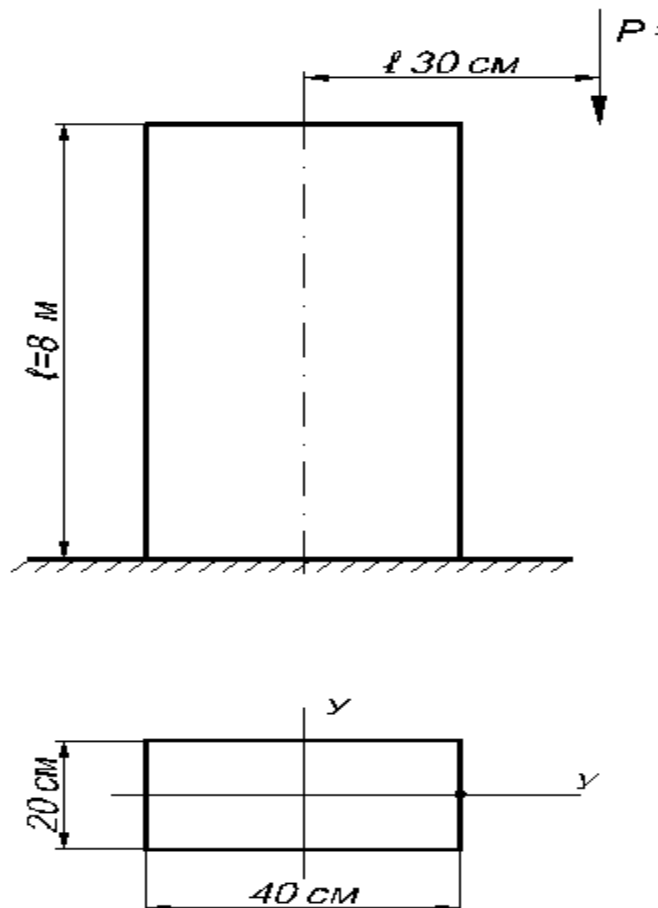


Рис. 9.12. Схема завантаження позацентрово стиснутого стрижня.

У подальшому $m_e = \frac{e}{c} = \frac{30}{6,7} = 4,48$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_x}} = \sqrt{\frac{2000}{2 \cdot 10^5 \cdot \frac{20 \cdot 403}{12}}} = 0,001 \text{ см}^{-1}$$

Знайдемо:

$$\cos kl = \cos(0,001 \cdot 800) \frac{180^\circ}{\pi} = \cos 0,458^\circ = \cos 0^\circ 27' \approx 1,0$$

$$\text{Кінцево знайдемо: } \sigma_A = \frac{2000}{800} \left(1 + \frac{4,48}{1} \right) = 137 \text{ МПа}$$

9.4. Поздовжньо-поперечний згин

9.4.1. Загальні поняття про поздовжньо-поперечний згин.

Точне визначення прогинів

Якщо на стрижень діють поперечне навантаження і поздовжній стиск, то він знаходиться в умовах поздовжньо-поперечного згину.

Для масивних стрижнів при визначенні нормальних напружень у поперечних перерізах стрижня використовується принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції), тобто визначають напруження від стиску і від згину окремо, а потім їх складають, враховуючи знаки. Але така методика розрахунку не підходить для гнучких стрижнів, оскільки поздовжньо-стискаюча сила призводить до виникнення додаткового моменту, який досягає значної величини і розрахунки проводять за, так званою, деформованою схемою (рис. 9.13).

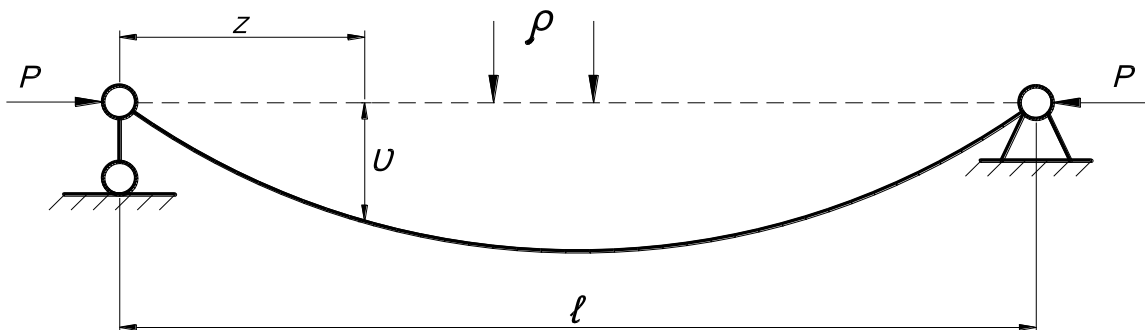


Рис. 9.13. Схема поздовжньо-поперечного згину стрижня.

У будь-якому поперечному перерізі згинальний момент визначається:

$$M = M_0 + P \cdot v, \quad (9.38)$$

де M_0 – момент згину від поперечного навантаження;

$P \cdot v$ – додатковий момент від поздовжньої стискаючої сили.

При цьому задача є статично невизначеною. При «точному» розв'язку задачі використовують формулу:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{M_0 + Pv}{EI} \quad (9.38)$$

Перепишемо його в іншому вигляді:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{P}{EI} v = -\frac{M_0}{EI} \quad (9.39)$$

Загальне розв'язання диференціального рівняння (9.39) становить суму двох інтегралів: інтеграла однорідного диференціального рівняння і власного інтеграла, який залежить від правої частини. Розглянемо на конкретному прикладі розв'язок задачі (рис. 9.14).

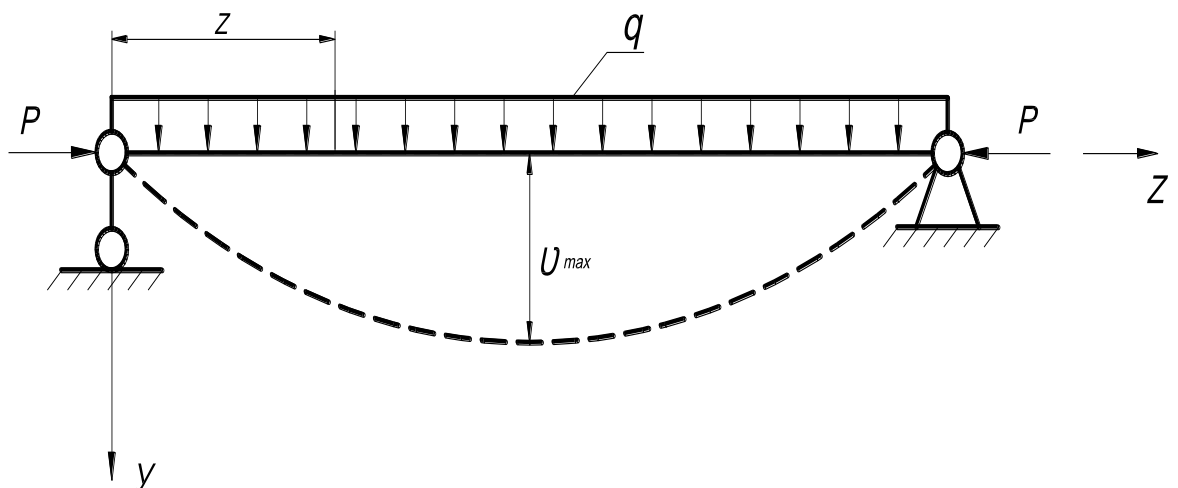


Рис. 9.14. Схема завантаження балки.

Момент згину у довільному поперечному перерізі від поперечного навантаження визначається:

$$M_0 = \frac{q \cdot z}{2}(l - z) \quad (9.40)$$

Диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = -\frac{qz}{2EI}(l - z) \quad (9.41)$$

де: $k^2 = \frac{P}{EI}$

Інтеграл однорідного диференціального рівняння (9.41) (ліва частина):

$$v_1 = A \cos kz + B \sin kz \quad (9.42)$$

Додатковий інтеграл має вигляд:

$$v_2 = -\left[\frac{q}{2p} z(l - z) + \frac{q}{k^2 p} \right] \quad (9.43)$$

Таким чином, загальний інтеграл:

$$v = v_1 + v_2 = A \cos kz + B \sin kz - \frac{q}{2p} z(l - z) - \frac{q}{k^2 p} \quad (9.44)$$

Постійні A і B знайдемо із граничних умов:

а) при $z=0$: $v_{(z=0)}=0$

б) при $z=l$: $v_{(z=l)}=0$

Постійні в (9.44) отримаємо із двох рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} A - \frac{q}{k^2 p} = 0 \\ A \cos kl + B \sin kl - \frac{q}{k^2 p} = 0 \end{array} \right.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно сталих A і B і підставляючи їх значення у вираз (9.44), отримуємо:

$$v = \frac{q}{k^2 p} \left[\cos kz + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kz \right] - \frac{q}{2p} z(l - z) - \frac{q}{k^2 p} \quad (9.45)$$

Враховуючи, що:

$$kl = l \sqrt{\frac{P}{EI}} = l \sqrt{\frac{P \pi^2 l^2}{EI \pi^2 l}} = \pi \sqrt{\frac{P}{\pi^2 EI}} = \pi \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}} \quad (9.46)$$

З урахуванням (9.45) вираз (9.46) прийме вигляд:

$$v = \frac{q}{P} \left[\frac{l^2}{\pi^2} \frac{P_{KP}}{P} \left(\cos \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}} - 1 + \frac{1 - \cos \pi \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}}}{\sin \pi \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}}} \cdot \sin \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}} \cdot z \right) - \frac{z(l-z)}{2} \right] \quad (9.47)$$

Якщо підставити у вираз (9.47) $z=l/2$, то отримаємо найбільший прогин:

$$v_{\max} = \frac{ql^2}{8P} \left[\frac{P_{KP}}{P} \frac{8}{\pi^2} \left(\sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{KP}}} - 1 \right) - 1 \right] \quad (9.48)$$

Найбільший згинальний момент у середині прогину балки дорівнює:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + Pv_{\max} \quad (9.49)$$

Після цього можливо знайти максимальне стискаюче напруження:

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} - \frac{M_{\max}}{W_X} \quad (9.50)$$

Із прикладу видно, що «точний» розв'язок досить складний, тим більше, що задача особливо ускладнюється, якщо навантаження поділяє балку на ряд ділянок, для яких необхідно скласти свої рівняння і проводити їх інтегрування.

9.4.2. Наближений спосіб визначення прогинів при поздовжньо-поперечному згині

Враховуючи складність «точного» способу визначення прогинів в інженерній практиці часто використовують наближений спосіб визначення прогинів. Загальний прогин можна представити як (рис. 9.15).

$$v = v_o + \Delta v \quad (9.51)$$

де v_o – прогин від поперечного навантаження;

Δv – додатковий прогин від стискаючої сили P .

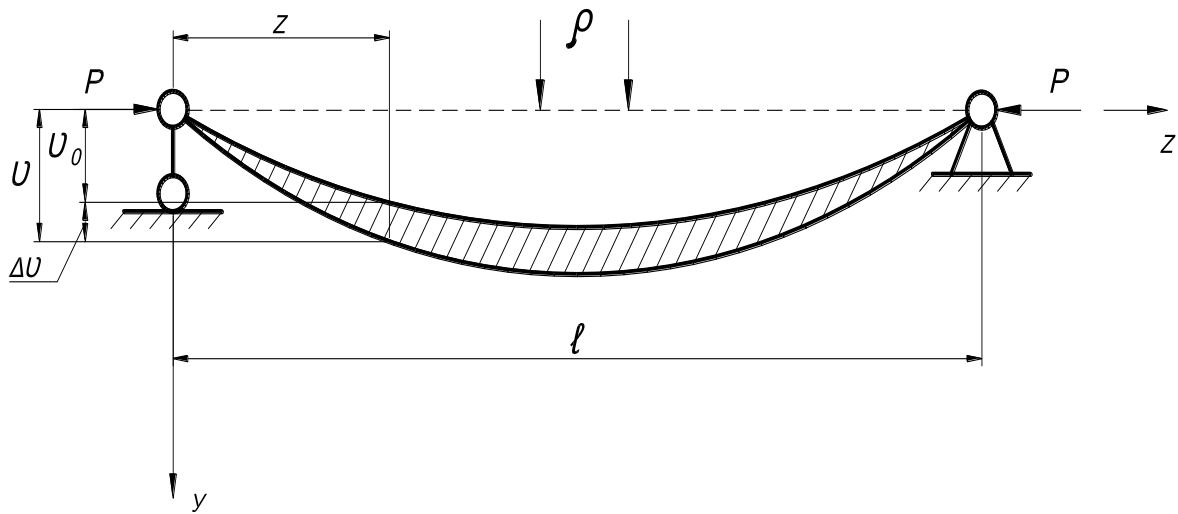


Рис. 9.15. Наближений спосіб визначення прогину.

Виходячи із цього диференціальне рівняння має вигляд:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} - \frac{Pv}{EI} \quad (9.52)$$

У випадку якщо $P=0$ маємо $\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI}$ (9.53)

тому: $\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{P}{EI}$ (9.54)

Припустимо, що додатковий прогин (заштрихований) змінюється за законом синуса (у цьому і є наближеність метода)

$$\Delta v = f \sin \frac{\pi z}{l} \quad (9.55)$$

Взявши похідну двічі із (9.55), отримаємо:

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v \quad (9.56)$$

Підставивши вираз (9.56) у (9.54) маємо:

$$\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v = \frac{Pv}{EI} \quad (9.57)$$

Або ж згідно (9.57)

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = \frac{P \cdot v}{EI} \quad (9.58)$$

Звідси:
$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}};$$

Враховуючи, що $\frac{\pi^2 EI}{l^2} = P_{KP}$, маємо:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{P}{P_{KP}}}. \quad (9.59)$$

Формулу (9.59) можливо застосовувати і при інших випадках закріплення кінців стрижня. Але тоді необхідно у формулі (9.59) критичну силу визначати за виразом:

$$P_{KP} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}.$$

Слід мати на увазі, що коли сила P наближується до критичної P_{KP} , прогини прагнуть до нескінченості. Тоді як «точний», так і наближений способи не дають бажаного результату. У цьому випадку потрібно базуватися на диференціальному рівнянні:

$$\frac{\frac{d^2 v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M_0 + Pv}{EI} \quad (9.60)$$

В інтервалі навантажень $0 \leq P \leq 0,8P_{KP}$ точність, яку дає формула (9.60) є достатньою.

В інженерній практиці стискаюча сила загалом не перевищує $(0,5 \div 0,6)P_{KP}$. Тому наближений спосіб успішно використовується в інженерних розрахунках.

9.4.3. Приклад визначення напружень при поздовжньо-поперечному згині

На прольотну балку на двох опорах діють: зосереджена поперечна сила P_l та стискаюча сила P (рис. 9.16):

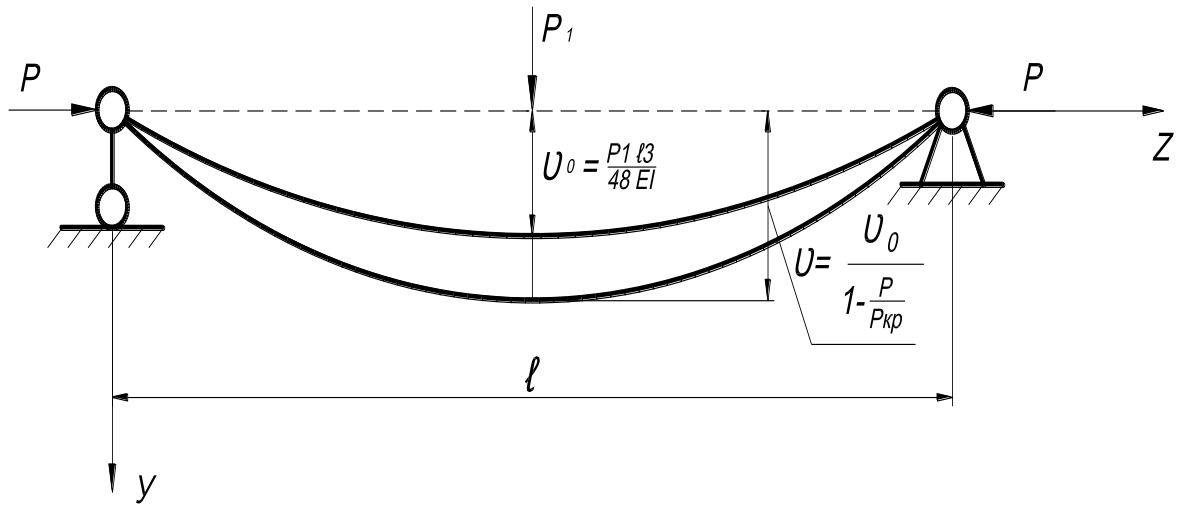


Рис. 9.16. Схема завантаження балки при поздовжньо-поперечному згині.

Прогин в середині балки від поперечного навантаження дорівнює:

$$v_0 = \frac{P_1 l^3}{48EI} \quad (9.61)$$

Прогин від поперечної і поздовжньої сили, що діють одночасно:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} \quad (9.62)$$

Згинальний момент у середині прогину балки:

$$M = M_0 + P \cdot v = M_0 + P v_0 \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}} \quad (9.63)$$

Найбільше стискаюче нормальне напруження у верхніх волокнах поперечного перерізу середини прогину балки визначається:

$$\sigma_{\max} = -\left(\frac{P}{F} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{P v_0}{W_x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{кр}}}\right) \quad (9.64)$$

Із цього виразу видно, що при поздовжньо-поперечному згині максимальні напруження нелінійно пов'язані із стискаючою силою P (за аналогією із позацентровим стисканням гнучкого стрижня).

9.5. Динамічне навантаження

9.5.1. Загальні поняття

На інженерні об'єкти, окрім статичних навантажень, діють і динамічні навантаження, які за досить короткий час змінюють свою величину і напрям.

Динамічні навантаження призводять до коливання окремих частин об'єкта, з чим пов'язане виникнення сил інерції, які можуть досягати значної величини, перевищуючи статичне навантаження.

Сили інерції залежать як від маси конструкції, так і характеру навантаження і призводять до виникнення додаткових напружень, які можуть перевищувати напруження від основних сил.

Динамічне навантаження визначають за формулою:

$$S_D = \mu S_{cm}, \quad (9.65)$$

де S_{cm} – динамічне навантаження при статичному його прикладанні;

μ – динамічний коефіцієнт, який залежить від виду динамічного навантаження, маси системи її жорсткості та інших факторів.

Розрахунок на динамічне навантаження є досить складним, оскільки важно врахувати всі фактори, тому розглянемо прості приклади розрахунку.

9.5.2. Врахування сил інерції при розрахунку троса

Розглянемо розрахунок троса при підніманні вантажу G з прискоренням a (рис. 9.17).

При нерухомому навантаженні ($\bar{a} = 0$) зусилля в перерізі $m-n$ визначається:

$$N_{cm} = G + qz, \quad (9.66)$$

де: q – вага одного погонного метра троса.

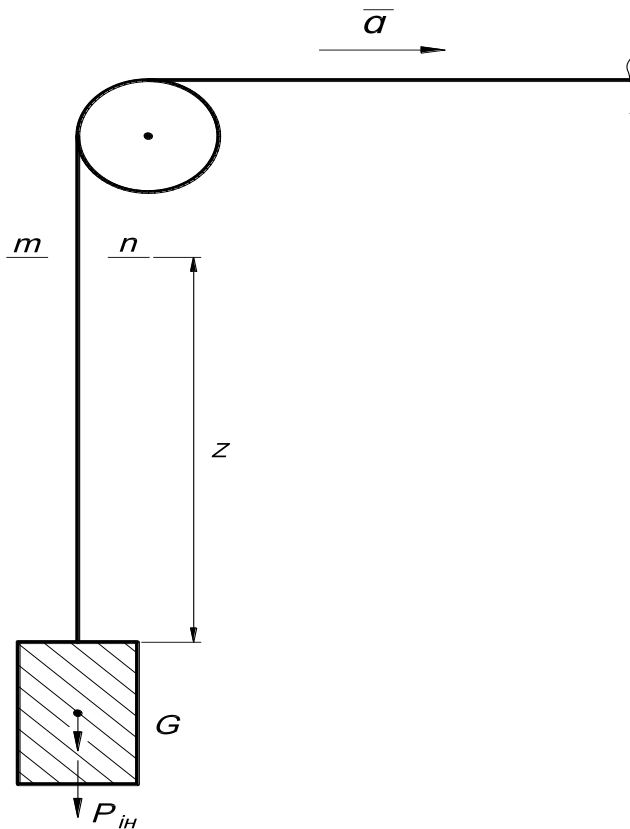


Рис. 9.17. Схема піднімання вантажу G з прискоренням a .

За умови піднімання вантажу з прискоренням a треба скласти рівняння руху, що не завжди є простим.

Значно простіше використовувати для цього принцип д'Аламбера, згідно з яким будь-яку рухоми систему розглядаємо як систему, що знаходиться в спокої, якщо до всіх її точок прикласти сили інерції. Сила інерції дорівнює добутку маси тіла на її прискорення і напрямлена в бік, зворотний вектору прискорення.

$$P_{in} = \frac{G + q \cdot z}{g} \cdot a \quad (9.67)$$

де: g – прискорення вільного падіння.

За допомогою принципу д'Аламбера будь-яка динамічна задача за формою розв'язання прирівнюється до статичної задачі (складання рівнянь рівноваги).

$$N_{д} = N_{cm} + P_{in} = G + q \cdot z + \frac{G + q \cdot z}{g} \cdot a = (G + q \cdot z) \left(1 + \frac{a}{g} \right) = N_{cm} \cdot \mu, \quad (9.68)$$

$$\text{де: } \mu = 1 + \frac{a}{g} \text{ – динамічний коефіцієнт} \quad (9.69)$$

Звідки:
$$N_D = \mu N_{ст} \quad (9.70)$$

Динамічне напруження визначається:

$$\sigma_D = \frac{N_D}{F} = \mu \sigma_{ст} \quad (9.71)$$

Таким чином, при підніманні вантажу G з прискоренням a динамічне напруження може в декілька разів перевищувати статичне. Це особливо важливо при розрахунку тросів ліфтів, підйомних кранів тощо. Тому швидкість піднімання вантажу в цих випадках обмежують. Якщо вантаж опускати з прискоренням a , то в формулі (9.71) потрібно поставити знак «мінус».

При вільному падінні вантажу ($a=g$). Напруження в тросі відсутнє (трос падає за падаючим вантажем без натягу).

9.5.3. Розрахунок на удар

Під ударом розуміють взаємодію рухомих тіл у результаті їх зіткнення, що призводить до різкої зміни швидкостей точок цих тіл за досить малий відрізок часу. Прикладом удару є дія ковального молоту на шматок металу, удар при забиванні паль, взаємодія колеса потяга з рельсом при переїзді через стик рейси та інші.

Час удару вимірюється в тисячних, а інколи і мільйонних долях секунди, але при цьому сила удару досягає значної величини.

На рис. 9.18 зображено графік залежності сили удару від часу.

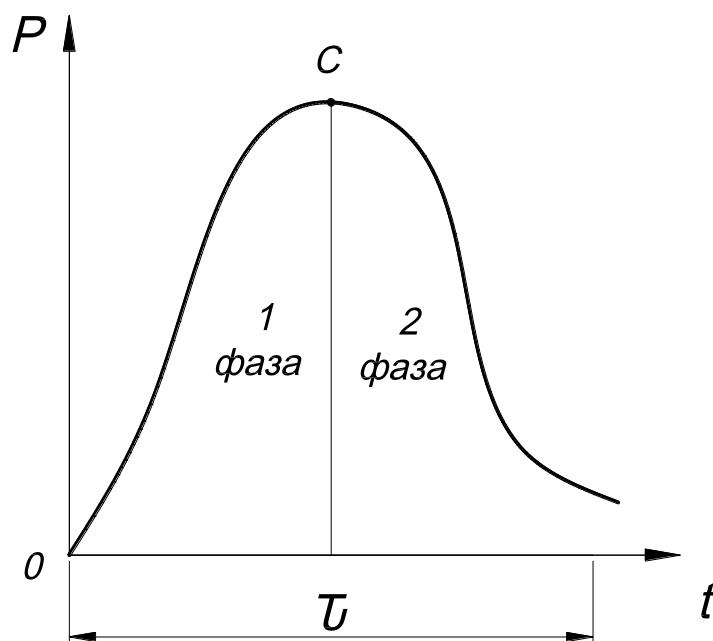


Рис. 9.18. Графік удару.

У точці С сила удару досягне максимуму. Імпульс сили удару

$$S = \int_0^{\tau} P(t)dt$$

дорівнює зміні кількості руху і може бути знайдений з

високою точністю. Але визначення сили P_{max} і тривалості удару τ є досить складною задачею як в теоретичному, так і практичному аспекті, яка на сьогодні не повністю розв'язана.

Тому виконують умовний розрахунок на удар. У межах відповідних припущень визначають силу, статичне прикладання якої в точці удару спричинить динамічне переміщення системи. Цю силу умовно називають динамічною силою P_D . (Розрахунок справедливий, коли маса падаючого тіла значно більша маси стрижня).

Розглянемо випадок, коли падаюче тіло вагою G ударяє по іншому тілу вагою G_0 , яке закріплене на невагомій пружній пружині (рис. 9.19). Удар вважаємо абсолютно пружним.

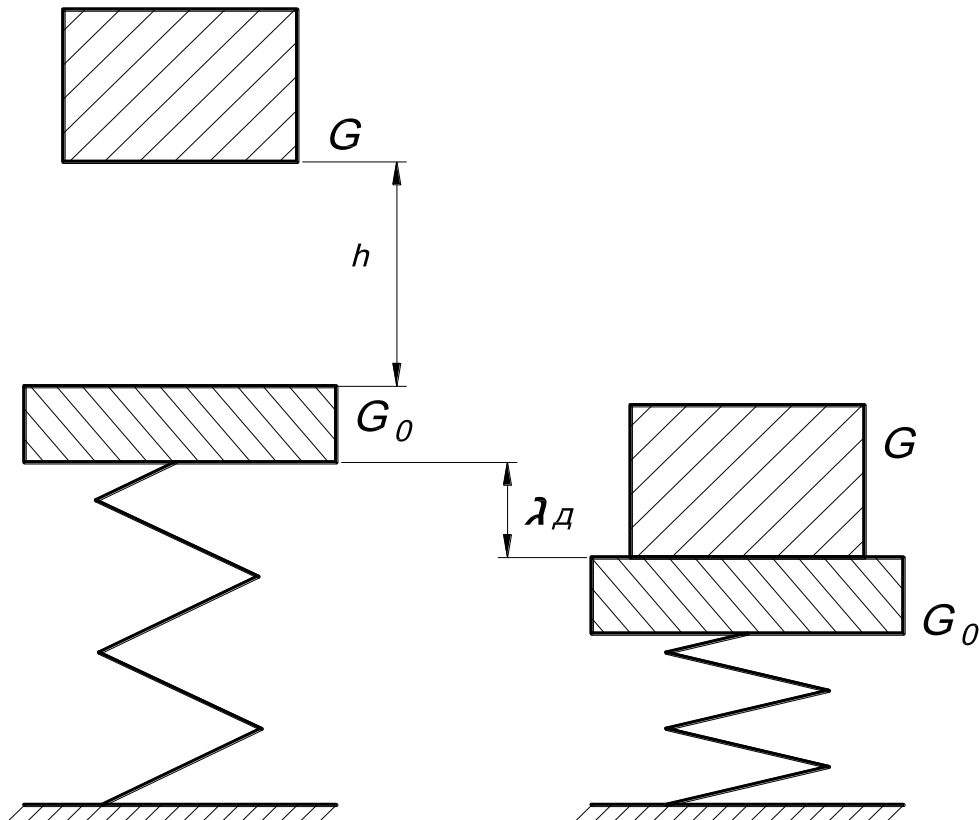


Рис. 9.19. Удар при падінні вантажу G .

Позначимо жорсткість пружини (сила, що викликає опускання верхнього кінця пружини на одиницю) через C .

Якщо силу G прикласти статично (без падіння), то переміщення $\lambda_{ст}$ визначиться:

$$\lambda_{cm} = G / C \quad (9.72)$$

При динамічному прикладанні сили пружина стиснеться на величину λ_D , яку можливо визначити через динамічну силу P_D .

$$\lambda_D = \frac{P_D}{C} \quad (9.73)$$

Швидкість падіння вантажу G до моменту удару дорівнює:

$$v^2 = 2gh \quad (9.74)$$

Після зіткнення двох тіл їх швидкості однакові і дорівнюють v_1 тобто два тіла з'єдналися в одне і продовжують стискати пружину.

Припустимо, що тривалість удару τ настільки мала, що вантаж G_0 отримавши швидкість v_1 , почав разом з вантажем G стискати пружину тільки після того, як закінчився удар.

Тоді за теоремою про зміну кількості руху маємо:

$$\frac{G}{g} v_1 = \left(\frac{G}{g} + \frac{G_0}{g} \right) v_1 \quad (9.75)$$

Відповідно:

$$v_1 = \frac{G}{G + G_0} v \quad (9.76)$$

При подальшому русі пружина стискається, а швидкість тіл за часом зменшується. У момент найбільшого стискання $v_I=0$, а сила досягає максимального значення.

$$P_D + G_0 \quad (9.77)$$

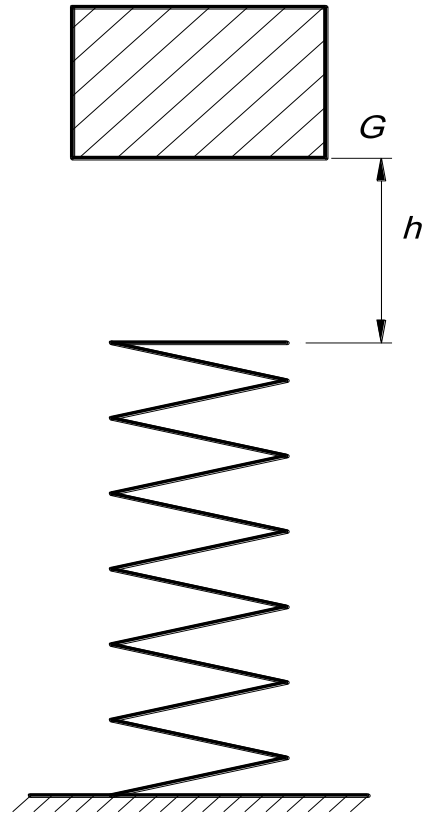
Приймаємо цілий ряд припущень і теоретичних викладок, знайдемо:

$$\lambda_D = \lambda_{cm} + \sqrt{\lambda_{cm}^2 + 2h \frac{\lambda_{cm}}{1 + \frac{G_0}{G}}} = \mu \lambda_{cm} \quad (9.78)$$

$$\text{де: } \mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_0}{G}}} \quad (9.79)$$

У разі, коли вантаж G падає на невагому пружину, тобто $G_0=0$ (рис. 9.20), то динамічний коефіцієнт визначається.

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{cm}}} \quad (9.80)$$



а)

Рис. 9.20. Падіння G на невагому пружину.

а) **Поздовжній удар.**

При поздовжньому ударі, що викликає стиск (рис. 9.21 а), або розтяг (рис. 9.21 б) стрижня, величину λ необхідно замінити подовженням (скороченням) стрижня Δl .

$$\Delta l_{д} = \mu \Delta l_{cm}$$

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{cm}}} \quad (9.81)$$

де:
$$\Delta l_{cm} = \frac{G \cdot l}{EF}$$

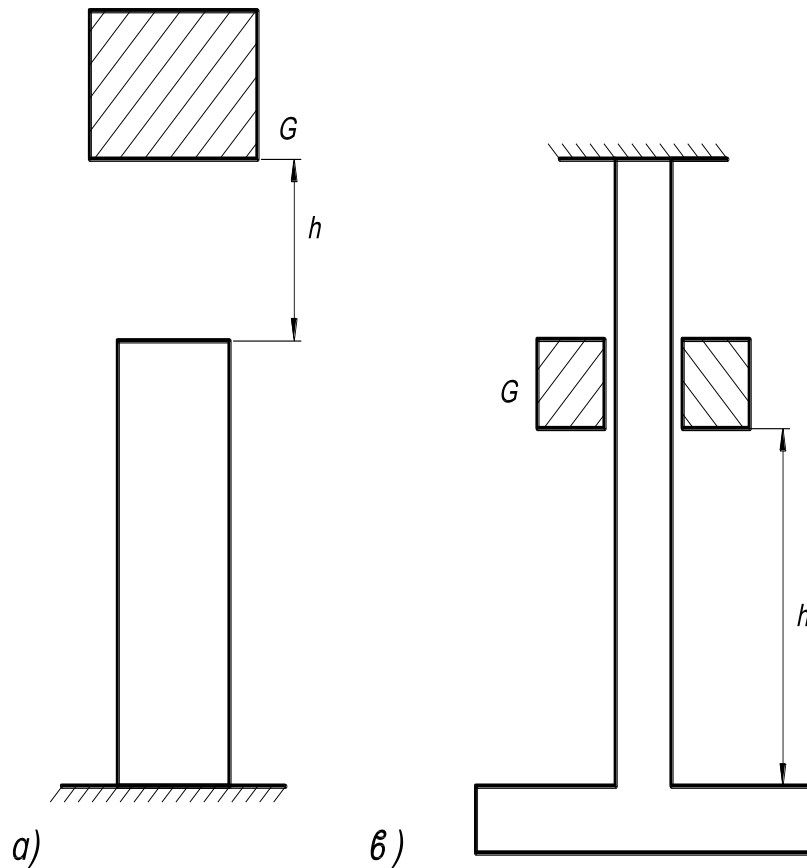


Рис. 9.21. Поздовжній удар, що викликає:
а) стиск; в) розтяг.

Силу стискання, а також відповідні напруження можливо знайти за допомогою динамічного коефіцієнта (9.82).

$$P_D = \mu G, \quad (9.83)$$

$$\sigma_D = \mu \sigma_{ст}. \quad (9.84)$$

Із формули (9.84) видно, що чим більше статичне подовження $\Delta l_{ст}$, тим менше динамічний коефіцієнт і, відповідно, менше значення сили удару. Цим можна пояснити, що при буксируванні важких барж буксирувальні канати мають велику довжину, оскільки при випадковому ударі, що виникають з різних причин (баржа сіла на міль) короткі канати не витримують динамічного навантаження і рвуться.

Якщо під стрижень при поздовжньому ударі поставити додаткову пружину, то величина $\Delta l_{ст}$ значно збільшиться, і відповідно, зменшиться динамічний коефіцієнт.

Встановлення еластичних прокладок між механізмом (машиною), який здійснює динамічні навантаження і фундаментом значно зменшує ударні зусилля.

3б) Поперечний удар.

При поперечному ударі (рис. 9.22) теж можна користуватися формулою (9.85), де величина $\lambda_{ст}$ замінюється величиною статичного прогину.

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{ст}}} \quad (9.85)$$

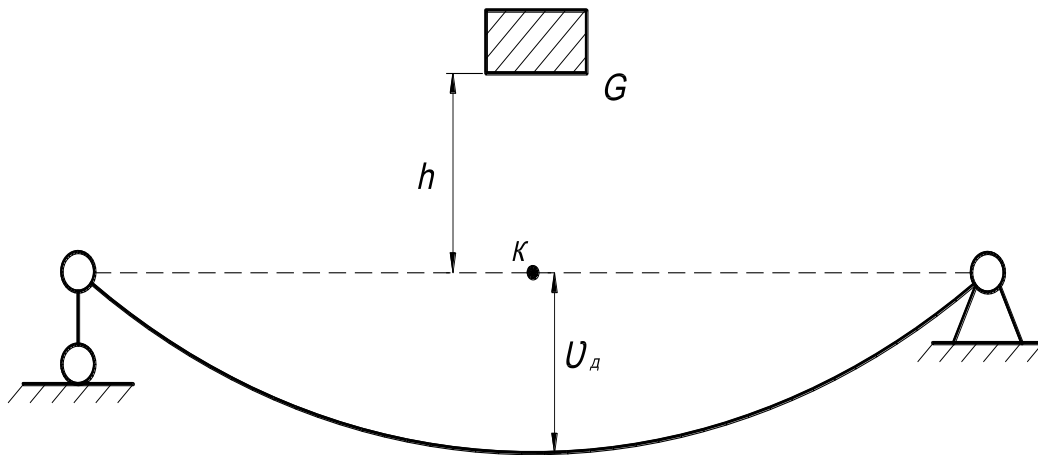


Рис. 9.22. Поперечний удар.

Величини динамічного прогину v_D , динамічного напруження або другого силового фактора легко визначається з допомогою динамічного коефіцієнта.

$$v_D = \mu v_{ст}, \quad (9.86)$$

$$\sigma_D = \mu \sigma_{ст}, \quad (9.87)$$

$$S_D = \mu S_{ст}. \quad (9.88)$$

Розглянемо випадок, коли висота падіння вантажу G дорівнює нулю. Таке завантаження називають «несподіваним».

Фізично цю задачу представимо так: якщо на канаті підвісити вантаж, закріпивши його над балкою таким чином, щоб він торкнувся верха балки, але не тиснув на неї, а передавався в цілому на канат. Якщо при цьому миттєво розрізати канат, то сила від вантажу всією своєю величиною раптово перейде на балку.

Напруження і прогин у цьому разі будуть у двічі більшими, ніж при статичному навантаженні, тобто коли сила прикладається повільно.

У тому разі, якщо вантаж падає на балку, що має значну масу, якою неможливо нехтувати, то рішення дуже ускладнюється. Застосовують наближене рішення – при цьому розподілену по довжині масу заміняємо приведеною масою, зосередженою в точці удару (рис. 9.23).

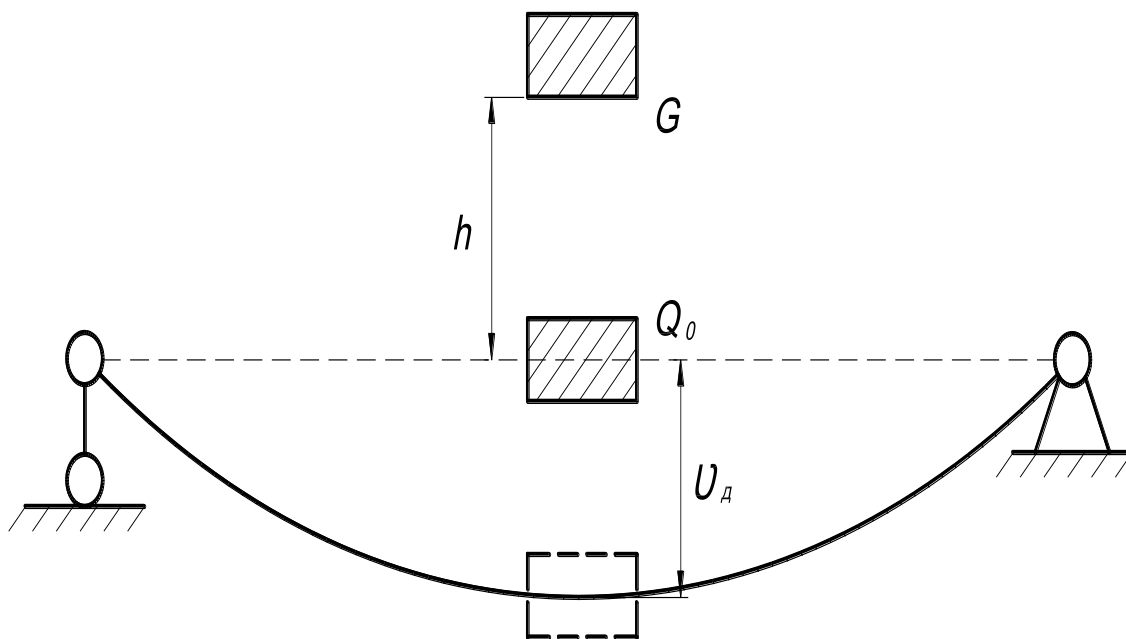


Рис. 9.23. Врахування маси балки при поперечному ударі.

Динамічний коефіцієнт в цьому випадку визначається:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{cm}} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{Q_0}{G_0}}}, \quad (9.89)$$

де Q_0 – вага балки;

k – коефіцієнт приведення ваги.

Величина k залежить від способів закріплення стрижня та виду удару (поздовжній чи поперечний) (рис. 9.24).

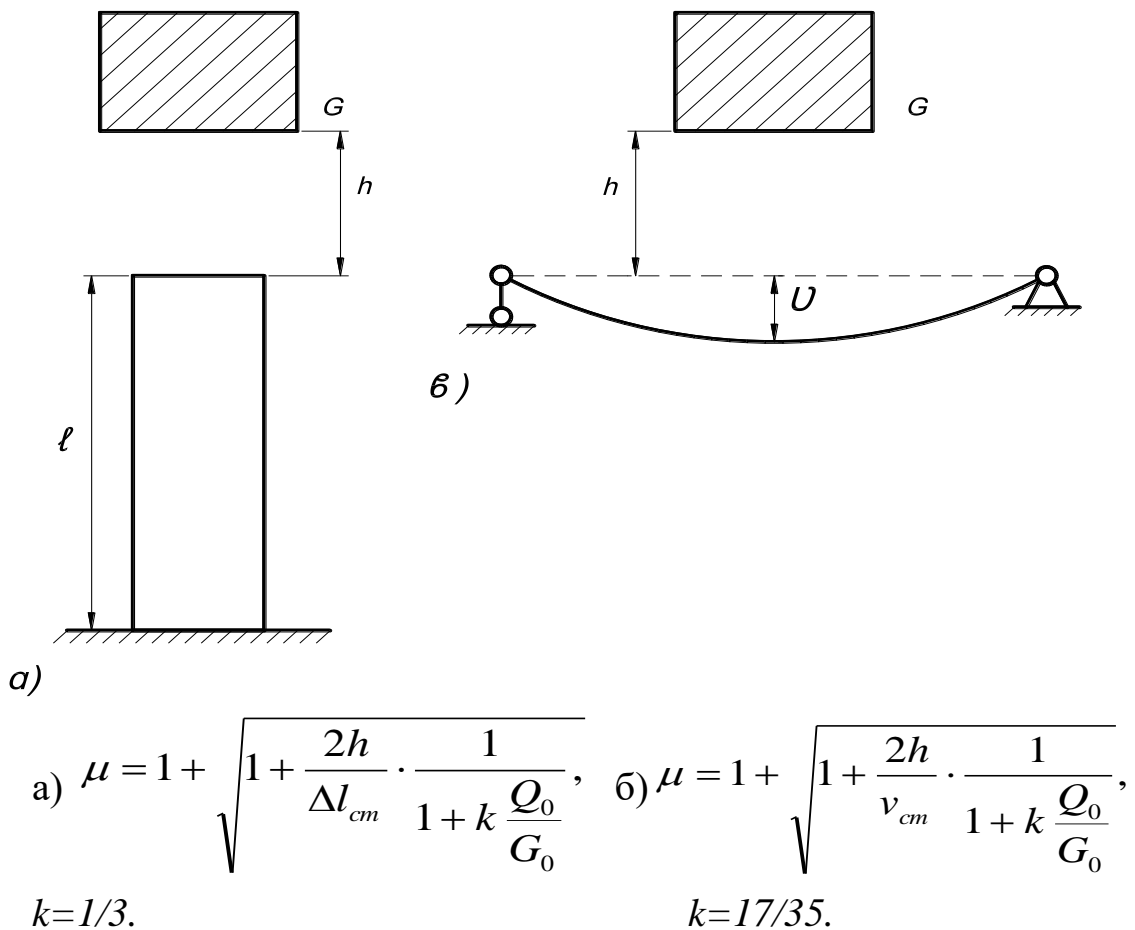


Рис. 9.24. Види удару:
а) – поздовжній удар; б) – поперечний удар.

9.5.4. Поняття про хвильову теорію удару

Розглянута вище методика розрахунку на удар, яка базується на заміні системи з нескінченно великою кількістю ступенів вільності на систему з однією ступеню вільності є досить наближеною. Ступінь її наближення в багатьох випадках є нез'ясованим.

Закономірність при цьому така: чим більшу жорсткість має система, по якій наносять удар, тим менш достовірними є результати, отримані із наведених формул.

Більш точні результати можливо отримати при розгляді так званої хвильової теорії удару.

При цьому за допомогою сучасної вимірної техніки (осцилографи) за швидкістю розповсюдження хвиль, що виникають у деталі при ударі, визначають найбільшу деформацію і відповідну силу удару.

На підставі отриманих осцилограм деформацій визначають найбільшу силу удару P_D . Знайшовши P_D , визначають динамічний коефіцієнт:

$$\mu = \frac{P_D}{P_{ст}}, \quad (9.90)$$

і відповідно динамічне напруження:

$$\sigma_D = \frac{P_D}{F} \quad (9.91)$$

9.6. Міцність матеріалів при повторно змінних напруженнях

9.6.1. Поняття про руйнування від втоми матеріалу

Бурхливий розвиток техніки спричинив створення швидкісних машин та механізмів. Під час їх експлуатації деякі деталі руйнувалися при навантаженнях менших, ніж ті, що є небезпечними при сталих напруженнях. Це такі деталі, як вісі вагонів, бандажі коліс, ресори, шатуни, лопатки турбін та інші.

Руйнування деталей відбувалось без видимих залишкових деформацій за умови, що вони виготовлені із пластичних матеріалів.

Виникла думка, що під дією змінних за часом напружень матеріал з часом «перероджується», мов би «втомлюється» і замість пластичного стає крихким.

Достовірні й ретельно проведені рентгенографічні та металографічні дослідження, виконані в лабораторних умовах довели, що структура і механічні властивості матеріалу від дії змінних за часом напружень не змінюються, але термін «втома», хоча він не відповідає фізичній природі явища, залишився. Слід зазначити, що і до сьогодні природу цих руйнувань ще не повністю з'ясовано.

Найбільш вірогідним поясненням цього явища є те, що механізм пластичної деформації як при змінних так і при постійних навантаженнях має однакову природу – відбувається викривлення кристалічних решіток. Але між цими навантаженнями є суттєва різниця. Пластичною деформацією від статичного навантаження охоплено весь об'єм деталі, а при динамічному (змінному) – пластична деформація зосереджується в малих об'ємах (концентраторах). При таких напруженнях у місцях концентрації

утворюються тріщини. Тріщини при змінних навантаженнях періодично закриваються і розкриваються. У результаті цього крупні зерна подрібнюються. Цим пояснюється наявність гладкої поверхні тріщини в місці руйнування.

Необхідно відмітити, що з виникненням першої тріщини на її кінці напруження досягає значної величини і вона швидко прогресує. Тому і характер руйнування миттєвий (крихкий).

Таким чином, під втомою на сьогодні розуміють процес послідовного накопичення пошкоджень матеріалу при дії змінних за часом напружень, що приводить до його руйнування.

Властивість матеріалу протидіяти руйнуванню від втоми називають – витривалістю.

9.6.2. Види циклів повторно змінних напружень

Визначимо напруження в точці K вала при його обертах (рис. 9.25).

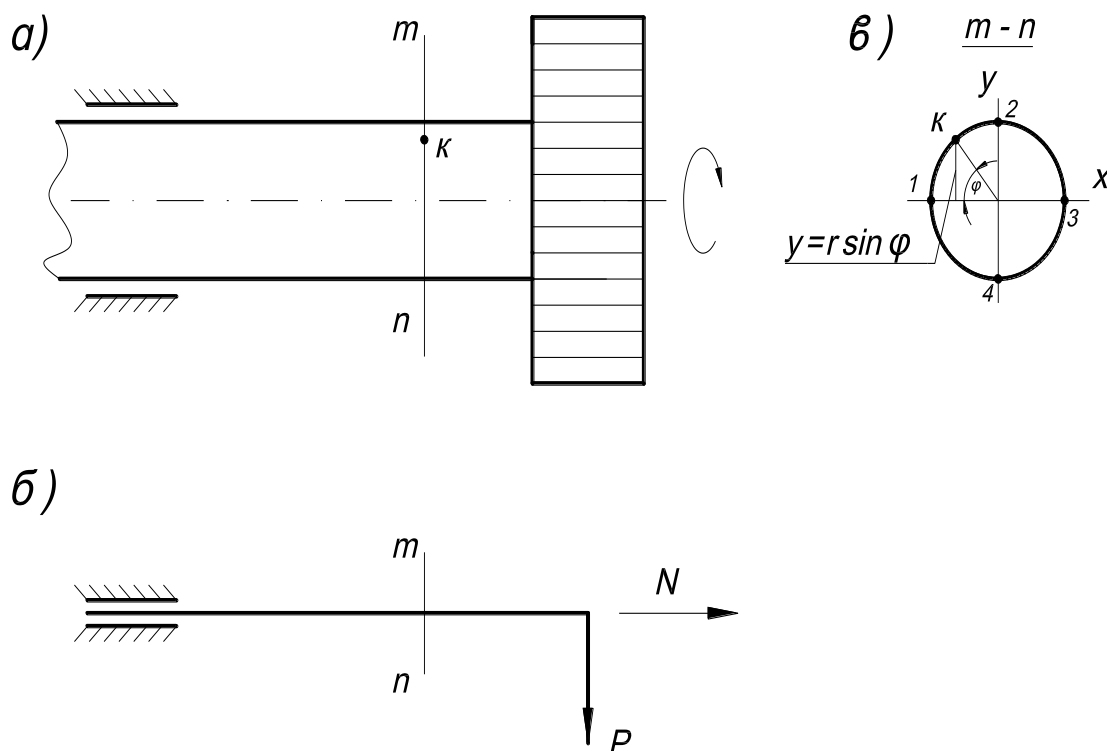


Рис. 9.25. Дія змінного навантаження.

Координата точки K залежно від кута φ визначається за виразом:

$$y = r \sin \varphi, \quad (9.92)$$

де r – радіус вала.

Нормальне напруження в перерізі $m - n$ від згинального моменту, викликаного силою P , дорівнює:

$$\sigma = \frac{M}{I_X} y = \frac{M \cdot r}{I_X} \sin \varphi = \sigma_{\max} \sin \varphi, \quad (9.93)$$

де: $\sigma_{\max} = \frac{M \cdot r}{I_X}$.

Кут φ змінюється залежно від кутової швидкості ω за законом $\varphi = \omega t$.

Тоді: $\sigma = \sigma_{\max} \sin \omega t$ (9.94)

Найбільші напруження розтягу σ_{\max} в точці К будуть тоді, коли вона займе положення точки 2, а σ_{\min} - відповідно точки 4. У точках 1 і 3 напруження відсутні.

За виразом (9.94) побудуємо графік (рис. 9.26).

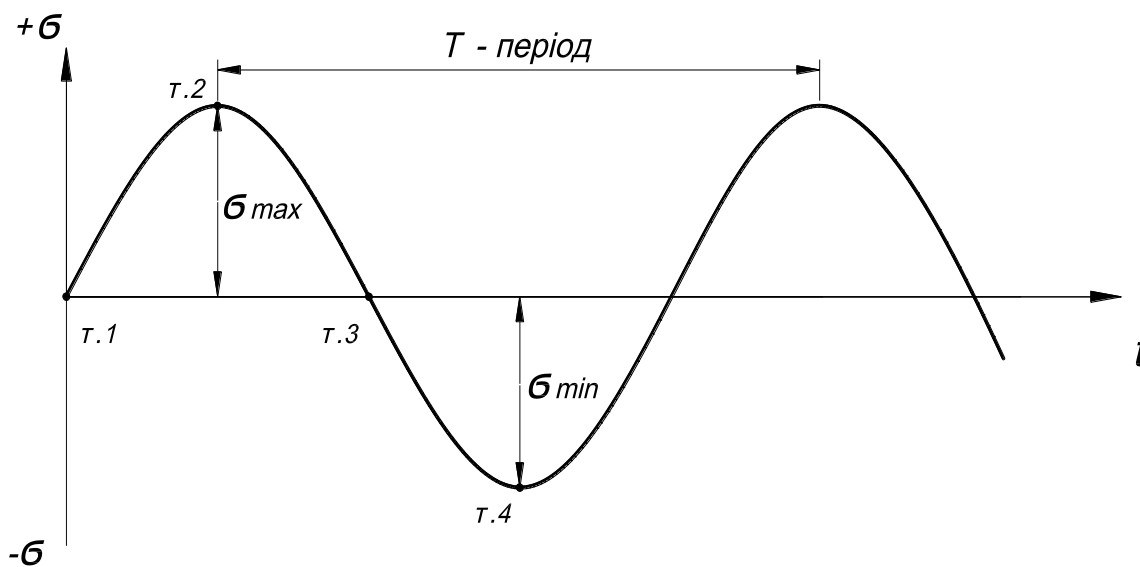


Рис. 9.26. Графік зміни напружень за часом.

Зміну напружень за один період називають циклом.

Існують різні цикли напружень залежно від співвідношення σ_{\max} та σ_{\min} . На рис. 9.26 зображено симетричний цикл, оскільки $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$. Якщо до вала прикласти поздовжню постійну розтягуючу силу N (рис. 9.27), то до напружень у виразі (9.94) додається постійне середнє напруження циклу $\sigma_m = \frac{N}{F}$.

У цьому випадку напруження будуть змінюватися за законом, зображеному на рис. 9.27.

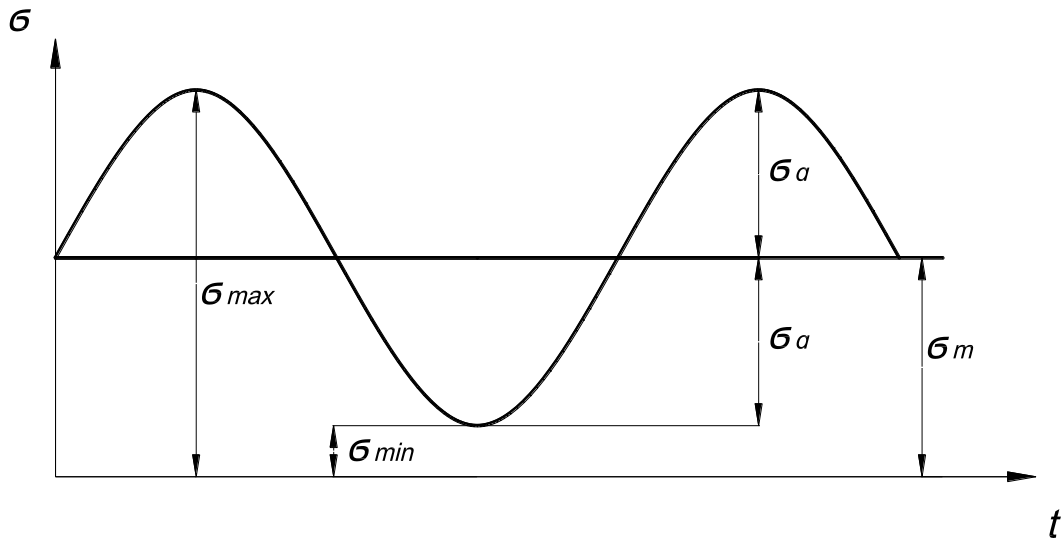


Рис. 9.27. Асиметричний цикл.

Такий закон зміни напружень називається асиметричним циклом. При цьому $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min}$.

Якщо σ_{\max} і σ_{\min} мають різні знаки, цикл називають знакозмінним, а якщо знаки σ_{\max} і σ_{\min} однакові – знакопостійними.

Коли σ_{\max} або σ_{\min} дорівнюють нулю, цикл називають нульовим.

Згідно з рис. 9.27 очевидно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a \\ \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a \end{array} \right\}, \quad (9.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \\ \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \end{array} \right\}, \quad (9.96)$$

де σ_a – амплітудне значення напруження (амплітуда циклу).

Основною характеристикою циклу є коефіцієнт асиметрії циклу:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (9.97)$$

Цикли називають подібними, якщо вони мають однакові коефіцієнти асиметрії.

9.6.3. Поняття про границю втоми

Не будь-які повторно змінні напруження спричинять втомне руйнування. Воно може настати тоді, коли змінні напруження перевищують критичне значення, яке називають – границею втоми.

Границею втоми називають найбільше значення екстремального напруження (σ_{\max} або σ_{\min}), які не спричинять руйнування від втоми при нескінченній кількості циклів навантаження.

При розрахунках на втому для визначення допустимого напруження треба знати граничні напруження. Ці напруження знаходять експериментально, проводячи випробування на втому.

Для цього беруть 6-10 полірованих без концентраторів напружень зразків діаметром 7-10 мм і випробовують їх на спеціальних машинах, наприклад МУИ – 6000 при симетричному циклі, що є найбільш простим.

Першому зразку дають повторно-перемінне напруження $\sigma = (0,5 \div 0,6)\sigma_s$ і фіксують число циклів N_1 , при якому він зруйнується.

Другому зразку дають трохи менші напруження. Природно, що він зруйнується при $N_2 > N_1$.

Далі випробовують третій зразок при $\sigma_3 < \sigma_2$ і фіксують, що він зруйнується при $N_3 > N_2$.

Для кожного наступного зразка випробування проводять при менших значеннях напружень, ніж у попередніх, поки черговому зразку не буде задане таке напруження, при якому він не зруйнується навіть при практично нескінченно великій кількості циклів повторно змінних навантажень.

Результати випробувань наносять на координатну площину $\sigma - N$ (рис. 9.28) і з'єднують експериментальні точки плавною кривою, яка називається кривою втомленості (кривою Веллера).

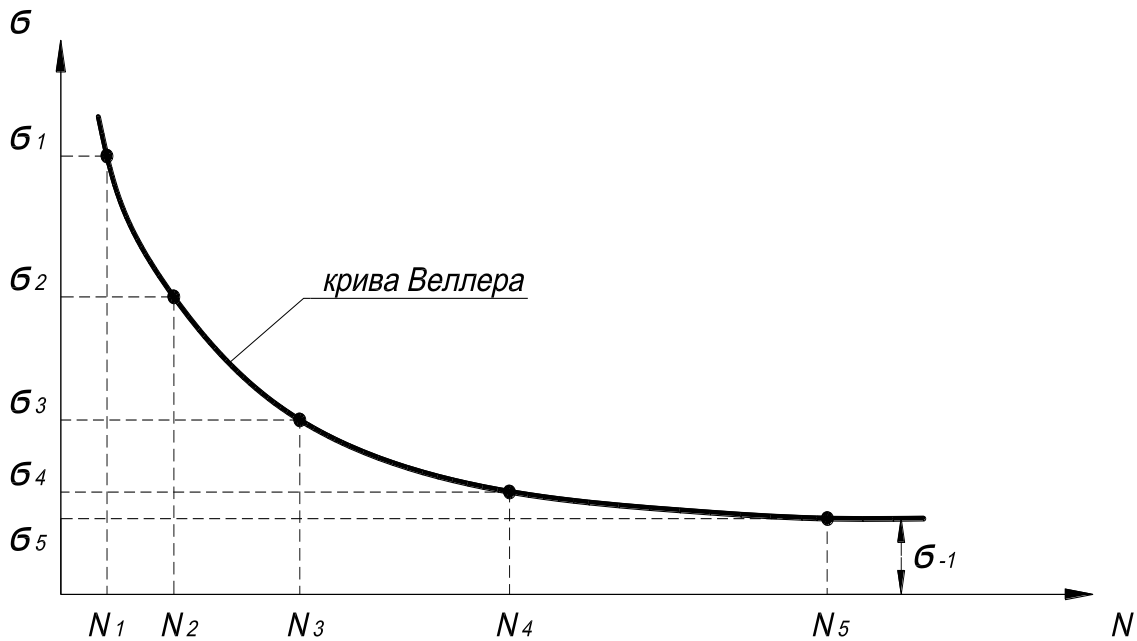


Рис. 9.28. Крива Веллера (крива втоми)

Ця крива характерна тим, що з деякого значення напруження вона проходить практично горизонтально, а відповідно напруження і є границею втоми при симетричному циклі.

Досліди довели, якщо зразок не зруйнувався при 10^7 обертів (циклів), то він не зруйнується взагалі. Цю величину називають «базою випробувань».

Для кольорових металів ця величина вважається 10^8 циклів.

Щоб уявити кількісно ці значення, зазначимо, що вісь залізничного потягу при русі від Києва до Львова випробовує $3 \cdot 10^6$ циклів напруження, тобто це близько 1/3 тривалості випробувань.

9.6.4. Діаграма граничних амплітуд

Експериментально встановлено, що границя втоми при асиметричному циклі більша, ніж при симетричному і залежить від коефіцієнта асиметрії циклу:

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

При графічній ілюстрації залежності границі втоми і коефіцієнта асиметрії необхідно для кожного R визначити своє σ_R . Зробити це практично неможливо не тільки через нескінченність дослідів, але і тривалість їх проведення.

Роблять так: за обмеженою кількістю випробувань для 3-4 значень R будують діаграму граничних циклів.

Граничним циклом називають такий цикл, у якого максимальне напруження дорівнює границі втоми, тобто $\sigma_{\max} = \sigma_R$.

По осі ординати відкладають значення амплітудного σ_a , а по осі абсцис – середнього σ_m напружень граничного циклу. Кожна пара напружень $\sigma_a - \sigma_m$, що визначає граничний цикл, ілюструється деякою точкою на діаграмі (рис. 9.29).

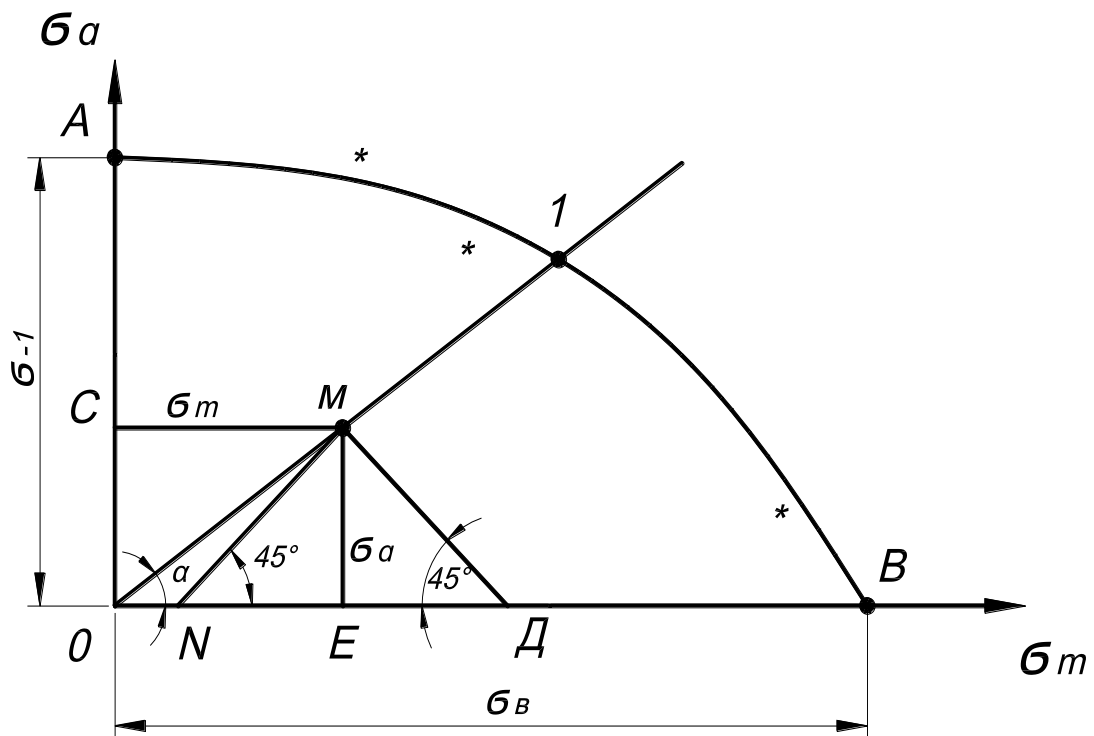


Рис. 9.29 Діаграма граничних напружень (амплітуд).

Як підтвердили досліди ці точки в загальному випадку розташовуються по кривій АВ, яка на осі ординат відсікає відрізок, що дорівнює границі втоми симетричного циклу σ_{-1} (при цьому $\sigma_m = 0$), а на осі абсцис – відрізок, що дорівнює границі міцності при розтягу (стиску) матеріалу, тобто:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_e = \sigma_1$$

Будь-яка точка M , розташована всередині цієї діаграми, відповідає циклу, який визначається величинами $\sigma_m (CM)$ і $\sigma_a (ME)$.

Для графічного знаходження σ_{\max} і σ_{\min} цього циклу із точки М проводять відрізки MN і MD до перетину з віссю абсцис під кутом 45° .

$$\text{Тоді: } NE = EM = ED = \sigma_a,$$

$$\sigma_{\max} = OD = OE + ED = \sigma_m + \sigma_a,$$

$$\sigma_{\min} = ON = OE - EN = \sigma_m - \sigma_a.$$

Цикли, у яких коефіцієнти асиметрії однакові (подібні цикли), будуть характеризуватися точками, розташованими на прямій 01, кут нахилу якої до горизонтальної вісі дорівнює:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}.$$

При цьому точка 1 відповідає граничному циклу із всіх вказаних подібних циклів.

За допомогою діаграми можливо визначити граничні напруження для будь-якого циклу залежно від значення коефіцієнта асиметрії.

9.6.5. Фактори, що впливають на величину границі втоми

На значення границі втоми впливають властивості матеріалу, вид деформації, ступінь асиметрії циклів, концентратори напружень, розміри деталі, якість обробки поверхні, корозія, температура, частота зміни напружень та інші.

Окремо відмітимо нижченаведені три фактори, оскільки їх вплив вивчений більше, ніж інші.

а) Концентрація напружень

Тріщини при повторно змінних напруженнях з'являються, як правило, у місцях концентрації напружень.

Ступінь концентрації напружень оцінюється коефіцієнтами концентрації:

- теоретичним α_σ ;
- ефективним k_σ .

При визначенні α_σ припускаємо, що матеріал зразка ізотропний і абсолютно пружний, тобто не враховуємо реальних характеристик (неоднорідність, схильність до пластичних деформацій та інше).

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном.}}} \quad (9.98)$$

де: $\sigma_{\text{ном.}}$ – номінальні напруження, що визначаються за загальними формулами, без врахування ефекту концентрації);

σ_{\max} – максимальні напруження з врахуванням концентрації.

Проілюструємо це на рис. 9.30.

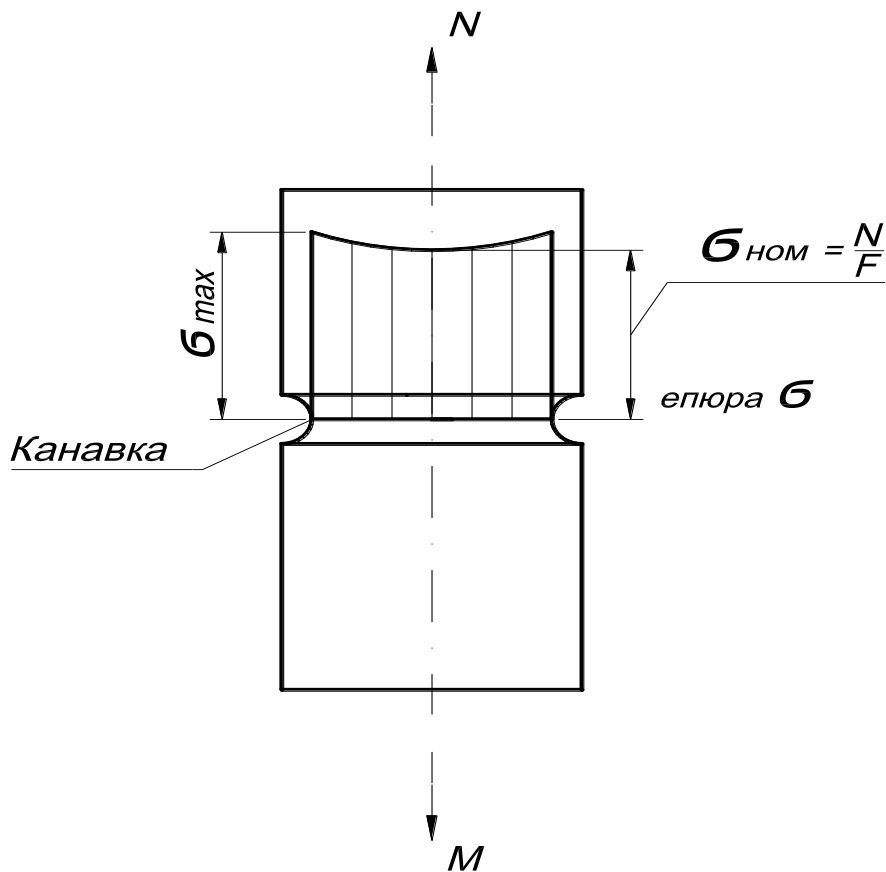


Рис. 9.30. Ілюстрація виразу (9.98).

Ефективний коефіцієнт концентрації дорівнює:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}}, \quad (9.99)$$

де σ_{-1} – границя втоми при симетричному циклі полірованого зразка;

σ_{-1k} – границя втоми такого ж зразка при симетричному циклі за наявності канавок (концентратора напружень).

Встановлено, що $k_\sigma < \alpha_\sigma$, оскільки він враховує реальні особливості матеріалу.

Зниження ефекту концентрації за рахунок реальних властивостей матеріалу оцінюється коефіцієнтом чутливості q , який визначається:

$$q_\sigma = \frac{k_\sigma - 1}{\alpha_\sigma - 1} \quad (9.100)$$

Очевидно, що він є меншим за одиницю.

б) Абсолютні розміри деталі

Експериментально встановлено, що розміри зразка суттєво впливають на величину границі втоми: із збільшенням розмірів, границя втоми зменшується.

Так наприклад, границя втоми для сталі, з якої виготовляються вагонні вісі при $\varnothing 7,5$ мм $\sigma_{-1}=230$ МПа, а для осі в натуральну величину $\varnothing 170$ мм $\sigma_{-1}=120$ МПа, тобто менше в два рази.

Цьому факту на сьогоднішній час немає повного пояснення. Існує декілька гіпотез, одна з яких говорить: вважають, що в більших за розмірами зразках з більшим об'ємом матеріалу більше дефектних місць (раковини, мікротріщини, неметалеві включення, сліди від обробітку поверхні та інші), які знижують границю втоми. У малих зразках цих дефектних місць менше.

Зміну величини границі втоми у зв'язку зі зміною розмірів зв'язків оцінюють масштабним коефіцієнтом ϵ_σ – це відношення границі втоми реальної деталі до границі втоми зразка діаметром $6 \div 12$ мм, виготовленого із матеріалу деталі. При цьому вважають, що стан поверхні деталі і зразка однакові.

в) Якість поверхні деталі

Вплив якості поверхні деталі на величину границі втоми такий: чим краща якість поверхні деталі, тим вища границя втоми. Це пов'язано з тим, що більш «неякісна» поверхня деталі створює додаткові місця концентрації напружень і відповідно, більш сприятливі умови для утворення мікротріщин. Відповідно до цього, найбільш «відповідальні» деталі полірують. Спеціальний обробіток поверхні деталі (цементация, загартування струмами високої частоти та інше) підвищують границю втоми.

Якість поверхневого шару деталі оцінюється коефіцієнтом поверхневої чутливості β_σ . Це відношення границі втоми при симетричних циклах зразка з даною поверхнею до границі втоми зразка з полірованою поверхнею.

9.6.6. Розрахунок на міцність при повторно змінних напруженнях

У розрахунках на міцність при повторно змінних напруженнях міцність деталі прийнято оцінювати за величиною фактичного коефіцієнта запасу n , порівнюючи його з допустимим значенням коефіцієнта запасу $[n]$, який встановлюється нормами.

Умова міцності має вигляд:

$$n \geq [n] \quad (9.101)$$

Коефіцієнт запасу n можливо визначити наближено за допомогою діаграм граничних напружень (амплітуд) (рис. 9.31).

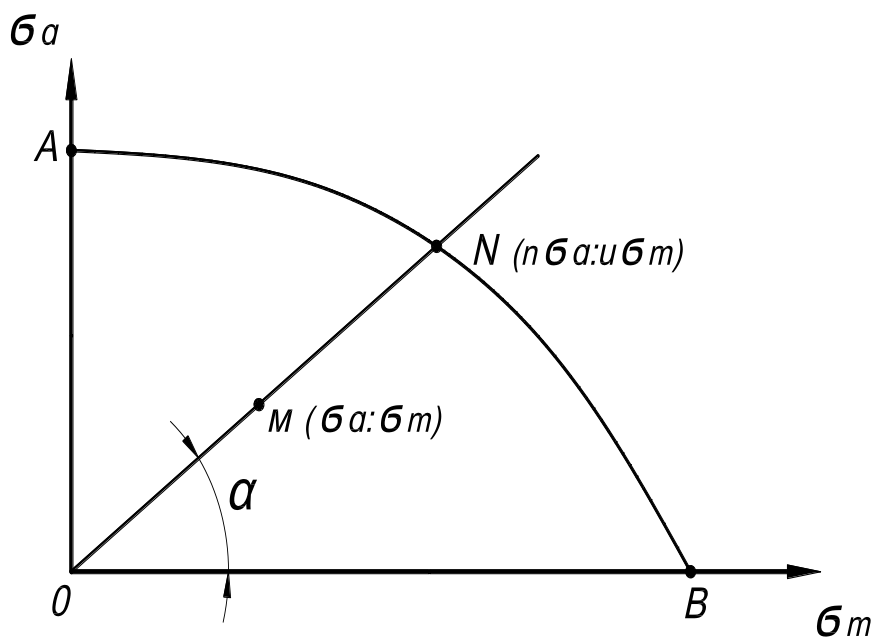


Рис. 9.31. Визначення коефіцієнта запасу n .

Точка M характеризує робочий цикл для зразка з координатами σ_a і σ_m .

Точка N характеризує граничний цикл із всіх подібних (розташованих по прямій під кутом α до горизонтальної осі).

Коефіцієнт запасу для полірованого зразка n дорівнює відношенню відрізків.

$$n = \frac{ON}{OM} \quad (9.102)$$

Помноживши значення n на коефіцієнти, що враховують вплив різних факторів на границю втоми, отримуємо значення коефіцієнта запасу для реальної деталі.

$$n \cdot q_z \cdot \varepsilon_\sigma \cdot \beta_\sigma \quad (9.103)$$

9.7. Приклади розв'язання задач

Умова задачі:

Для стрижня із заданою довжиною, опорними закріпленнями і типом поперечного перерізу необхідно:

- 1) із умови стійкості стержня підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа;
- 2) із умови стійкості окремих гілок стержня визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

Дано: $P = 620$ кН; $l = 6$ м. Схема завантаження стрижня зображена на рисунку 9.33.

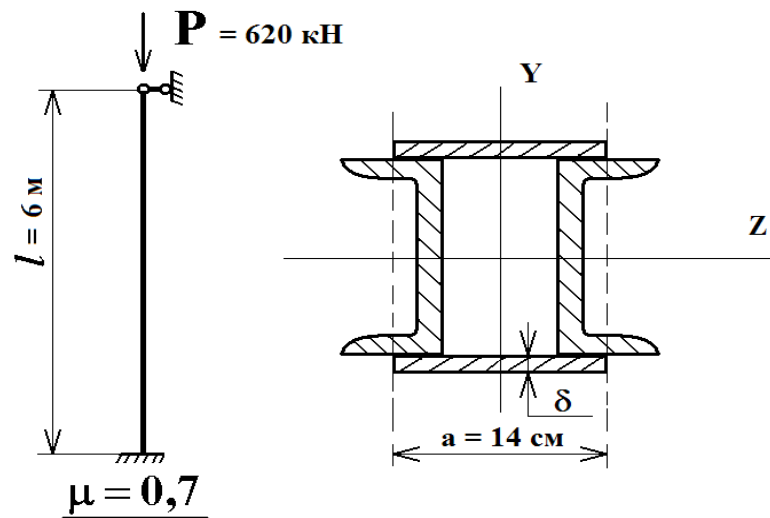


Рис. 9.33. Схема завантаження до задачі

$$2F = \frac{P}{\varphi_0[\sigma]} = \frac{620 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2 \cdot 38,75 \text{ см}^2;$$

Приймаємо 2 швелера №30.

Із сортаменту для швелера маємо: $F = 40,5 \text{ см}^2$; $i_z = 12,0 \text{ см}$;

$$\lambda_z = \frac{M_z \cdot l}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 600}{12} = 35$$

Знаходимо за таблицею значення поздовжнього згинання φ_1 .

Усереднюємо значення коефіцієнту

$$\varphi_1 = 0,935; \quad \varphi_{\text{сер}} = \frac{0,5+0,935}{2} = 0,717$$

Робимо друге наближення.

$$2F = \frac{620 \cdot 10^3}{0,717 \cdot 160 \cdot 10^6} = 5,404 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2 \cdot 27,02 \text{ см}^2;$$

Приймаємо 2 швелера №22.

$$F = 26,7 \text{ см}^2; \quad i_z = 8,89 \text{ см}$$

Визначаємо величину гнучкості

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{8,89} = 47,2; \quad \varphi_2 = 0,899;$$

$$\varphi_{\text{сер}} = \frac{0,899+0,717}{2} = 0,808;$$

$$2F = \frac{620 \cdot 10^3}{0,808 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4,796 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 2 \cdot 23,98 \text{ см}^2$$

Приймаємо 2 швелера №20

$$F = 23,4 \text{ см}^2; \quad i_z = 8,07 \text{ см};$$

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{8,07} = 52,04; \quad \varphi_3 = 0,884;$$

$$\sigma_p = \frac{620 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,00234} = 132478 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 132,5 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,884 \cdot 160 \cdot 10^6 = 141,44 \text{ МПа}$$

$$\text{Перевантаження } \Delta = \frac{141,44 - 132,5}{141,44} \cdot 100\% = 6,32\%.$$

Приймаємо 2 швелера №18 а:

$$F = 22,2 \text{ см}^2; \quad i_z = 7,32 \text{ см}$$

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{7,32} = 52,04; \quad \varphi_4 = 0,872;$$

$$\sigma_p = \frac{620 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,00222} = 139639,6 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 139,6 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,872 \cdot 160 \cdot 10^6 = 139,5 \text{ МПа};$$

$$\text{Перевантаження } \Delta = \frac{139,6 - 139,5}{139,6} \cdot 100\% = 0,08\%$$

За кінцевим рішенням приймаємо кінцево 2 швелера №18а:

$$i_{\text{max}} = i_z = 7,32 \text{ см}; \quad i_{\text{min}} = i_y = 2,18 \text{ см}; \quad t = 0,51 \text{ см}.$$

Визначаємо відстань „а” – відстань між швелерами:

$$a = 2\sqrt{i_{\text{max}}^2 - i_{\text{min}}^2} = 2\sqrt{7,32^2 - 2,18^2} = 14 \text{ см}$$

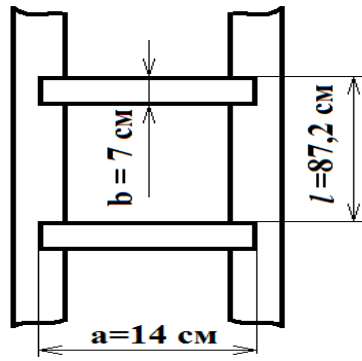


Рис.9.34. Геометричні розміри з'єднання профілів

Визначаємо решту відстаней (зображено на рисунку 9.34).

$$B = 0,5 \cdot a = 0,5 \cdot 14 = 7 \text{ см};$$

$$\delta = 0,7 \cdot t = 0,7 \cdot 0,51 = 0,36 \text{ см}$$

із умови стійкості визначаємо відстані між пластинами:

$$l = 40 \cdot i_{\min} = 40 \cdot 2,18 = 87,2 \text{ см}$$

9.8. Лабораторна робота №5

Тема: Визначення критичної сили стиснутого стрижня

Мета роботи: дослідження явища втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги при осьовому стисканні стрижня. Дослідна перевірка формули Ейлера для визначення критичної сили.

Загальні відомості

Розглянемо досить довгий в порівнянні з його поперечними розмірами стрижень, шарнірно закріплений на кінцях і навантажений осьовою силою P (рис. 9.35, а).

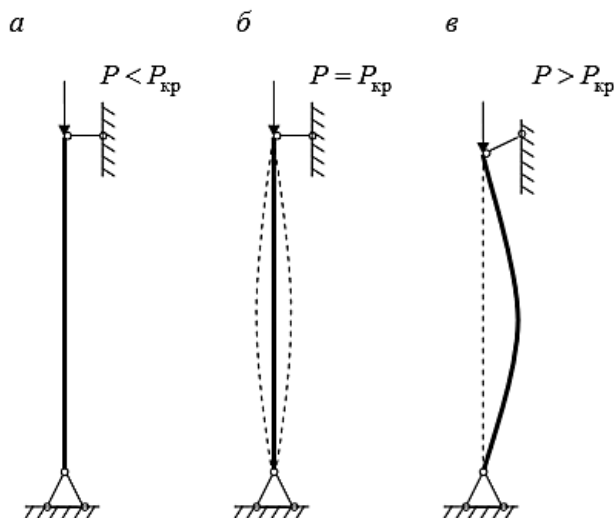


Рис.9.35. Стрижень, шарнірно закріплений на кінцях

При порівняно малій величині сили, меншої деякого критичного значення $P < P_{кр}$ стрижень буде зберігати прямолінійну форму рівноваги. Якщо відхилити стрижень в сторону, наприклад, шляхом застосування короткочасно діючої горизонтальної сили, він буде після ряду коливань повертатися до первісної прямолінійної форми, як тільки буде видалена додаткова сила, яка викликала відхилення. Така форма рівноваги стрижня називається стійкою. При значенні стискаючої сили рівній критичному значенню $P = P_{кр}$, стрижень буде перебувати в стані рівноваги. Будучи трохи відхиленням від початкового прямолінійного положення, він залишається в рівновазі і в відхиленому стані (рис. 9.35, б). І, нарешті, якщо сила P стане більшою критичної $P > P_{кр}$, то прямолінійна форма рівноваги стрижня буде нестійкою. При силі яка більше критичної стрижень отримає нову криволінійну форму рівноваги (рис. 9.35, в), або зруйнується. У практичних розрахунках критичну силу розглядають як небезпечне (граничне) навантаження. Найменше значення центрально прикладеної стискаючої сили P , при якому прямолінійна форма рівноваги стрижня стає нестійкою, називається критичною силою. Величина критичної сили визначається за формулою Ейлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{(\mu \cdot l)^2}$$

де: E – модуль Юнга;

I_{min} - мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу стрижня;

μ - коефіцієнт приведення довжини, який залежить від способу закріплення кінців стрижня;

l – довжина стрижня.

Для чотирьох найбільш частих випадків закріплення кінців стрижня коефіцієнт μ має наступні значення:

- для стрижня з шарнірно закріпленими кінцями $\mu = 1$;
- для стрижня з одним забитим і іншим шарнірно закріпленим кінцем $\mu = 0,7$;
- для стрижня з забитими кінцями $\mu = 0,5$;
- для стрижня з одним забитим і іншим вільним кінцем $\mu = 2$.

Критичне напруження в стрижні визначається за формулою:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / A = (\pi^2 \cdot E) / \lambda^2$$

$\lambda = \frac{l \cdot \mu}{i_{min}}$ – гнучкість стрижня;

$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ – мінімальний радіус інерції перерізу стрижня;

A - площа поперечного перерізу стрижня.

Формула Ейлера застосовна лише в тому випадку, якщо втрата стійкості стрижня відбувається при напрузі, меншій границі пропорційності:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$$

де $\sigma_{пц}$ – границя пропорційності матеріалу.

Умова застосування формули Ейлера може бути виражена в залежності від гнучкості стрижня. Формула Ейлера застосовується, якщо стійкість λ дорівнює або більше граничного її значення $\lambda_{гр}$, тобто:

$$\lambda \geq \lambda_{гр}$$

де $\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2}{\sigma_{пц}}}$ – гранична гнучкість стрижня.

Встановлено, що формула Ейлера застосовна при гнучкості, що перевищують: для чавуну - 80; для дерева - 110; для сталі Ст.3 - 100.

При значеннях гнучкості λ , менших граничних значень, формула Ейлера не може бути застосована, так як втрата стійкості відбувається при напрузі, що перевершують межу пропорційності. У цих випадках критичні напруги визначаються за емпіричною формулою Ясинського, яка для сталі і дерева записується так:

$$\sigma_{кр} = a - b \cdot \lambda$$

де a, b – коефіцієнти, що залежать від матеріалу.

Для сталі Ст. 3 при гнучкості $\lambda = 40 \div 100$ величина a = 310 МПа, b = 1,14 МПа.

Для сосни при гнучкості $\lambda = 40 \div 100$ величина a = 29,3 МПа, b = 0,194 МПа.

Для стрижнів з малою гнучкістю ($\lambda = 0 \div 40$) величина напруги дорівнює межі текучості матеріалу.

Випробувальна машина

Випробування стрижнів на стійкість проводяться на випробувальній машині ГЗП, гранична напружна здатність якої може

бути 20 кН або 50 кН. Можливе застосування будь-якої іншої випробувальної машини вертикального типу, призначеної для статичних випробувань на стиск досить довгих стрижнів або спеціально виготовленої установки.

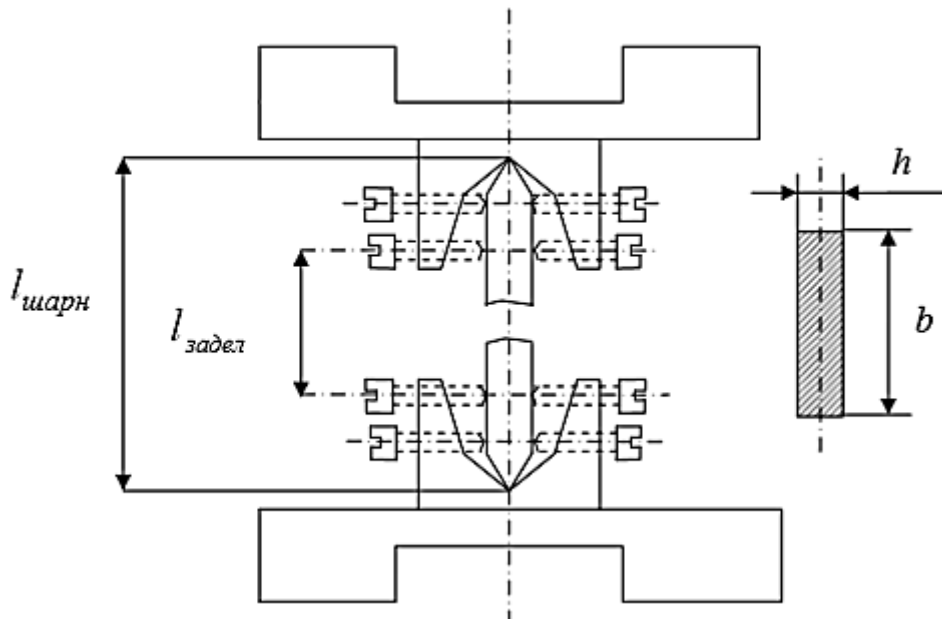


Рис.9.36. Випробувальна машина

До захватів машини прикріплюються спеціальні затискачі для закріплення кінців плоского стрижня. При відгвинчених гвинтах кінці зразка можуть вільно повертатися, спираючись на затискачі своїми гострими ребрами, це відповідає випадку шарнірного закріплення ($\mu = 1$); довжина стрижня вимірюється від його кінців. При загвинчених гвинтах кінці стрижня не можуть повертатися, що відповідає випадку жорсткого закріплення обох кінців стрижня ($\mu = 0,5$). У цьому випадку довжина стрижня вимірюється між осями гвинтів. Якщо жорстко закріплений тільки один кінець стрижня, а інший може вільно повертатися ($\mu = 0,7$), то довжина стрижня вимірюється від незакріпленого кінця до осі загвинченого гвинта.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти розміри поперечного перерізу і довжину стрижня.
2. Встановити стрижень в затискачах випробувальної машини. У звіті записати характер закріплення верхнього і нижнього кінця стрижня.

3. Обчислити стійкість за формулою:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}}$$

4. Повільно і ступенями навантажувати стрижень вручну. Під час навантаження спостерігати за величиною навантаження і поведінкою стрижня. При випробуванні на машині навантаження спочатку плавно зростає, потім при досягненні певної величини навантаження стрижень почне згинатися, і зростання навантаження припиниться. Це значення навантаження є критичним і записується в звіті.

5. Обчислити величину критичної сили. При цьому, якщо величина гнучкості стрижня дорівнює або вище граничного її значення (перед $\lambda \geq \lambda_{gr}$), то величина критичної сили визначається за формулою Ейлера, якщо нижче ($\lambda < \lambda_{gr}$), то $P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A$, де $\sigma_{кр}$ визначається за формулою Ясинського.

6. Порівняти величину критичної сили, отриману дослідним шляхом, з обчисленою за формулою Ейлера. Визначити відсоток розбіжності.

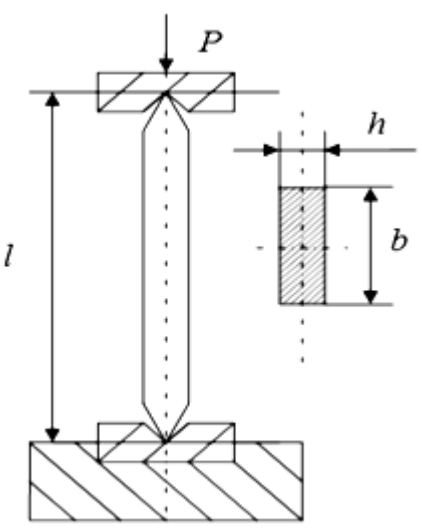
7. Результати випробування пред'явити за формою, що додається.

Звіт:

Мета роботи:.....

Випробувальна машина:

Схема навантаження:

	<p>Матеріал: Ст.3 Розміри зразка: b=.....см. h=.....см. l=.....см. Модуль Юнга: E=200ГПа. Коефіцієнт приведення довжини $\mu = \dots\dots\dots$</p>
---	---

Площа поперечного перерізу $A = b \cdot h = \dots\dots\dots \text{см}^2$

Найменший момент інерції перерізу: $I_{min} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \dots = \dots\dots\dots \text{см}^4$

Найменший радіус інерції: $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ см.

Гнучкість стрижня: $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Виконання умови виконання формули Ейлера (Ясинського):
(λ $\lambda_{\text{гр}}$)...

Величина критичної сили, отриманої з досліду: $P_{\text{кр}}^{\text{оп}} = \dots\dots\dots$ Н.

Розбіжність у відсотках між теоретичним і дослідним значеннями критичної сили: $\delta = \frac{P_{\text{кр}} - P_{\text{кр}}^{\text{оп}}}{P_{\text{кр}}} \cdot 100\% \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ %.

Посилання на онлайн лабораторну роботу №5 з мультимедійним супроводом «Визначення критичної сили стиснутого стрижня» наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38122>



*Онлайн лабораторна робота №5 з мультимедійним супроводом
«Визначення критичної сили стиснутого стрижня».*

9.8. Завдання для самоконтролю

*Пропонується скористатися мультимедійною презентацією
«Стійкість стиснутих стрижнів»*

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38140>



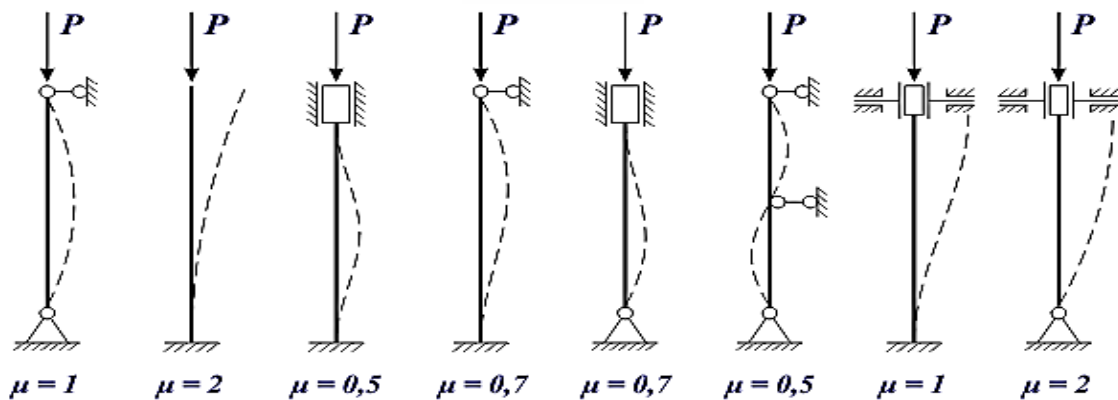
Мультимедійна презентація «Стійкість стиснутих стрижнів»

9.9. Завдання для самостійного виконання

Для стрижня із заданою довжиною, опорними закріпленнями і типом поперечного перерізу необхідно:

- із умови стійкості стрижня підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа;
- із умови стійкості окремих гілок стрижня визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$



Таблиця 9.1

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, кН	700	300	400	560	670	450	600	340	590	650
L, м	9	8	10	6	7	8	5	4	7	9

9.10. Тестові завдання

Посилання на електронний тестовий навчальний тренажер наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=38119>



Електронний тестовий навчальний тренажер
«Стійкість стиснутих стрижнів»

ГЛОСАРІЙ

Для того, щоб визначитися з незнайомими термінами впродовж вивчення дисципліни, можна скористатися глосарієм. Посилання та QR код приведені нижче

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/glossary/view.php?id=19037>



Онлайн глосарій з дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій»

Підсумковий контроль

Для закріплення навичок, отриманих під час вивчення курсу наведено посилання на електронний тестовий навчальний тренажер.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/quiz/view.php?id=38124>



*Електронний тестовий навчальний тренажер
«Підсумковий контроль»*

Залік

Також за посиланням можна переглянути список питань до заліку.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38112>



Питання до заліку

За посиланням можна переглянути список питань до заліку.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/assign/view.php?id=38108>



Питання до іспиту

Посилання на календарний план на осінній семестр наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/resource/view.php?id=38102>



Календарний план III семестр

Посилання на календарний план на весняний семестр наведено нижче.

<http://moodle.mnau.edu.ua/mod/resource/view.php?id=38101>



Календарний план IV семестр

Додаток 2

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівносторонні (за ГОСТ 8509-86)

Позначення:

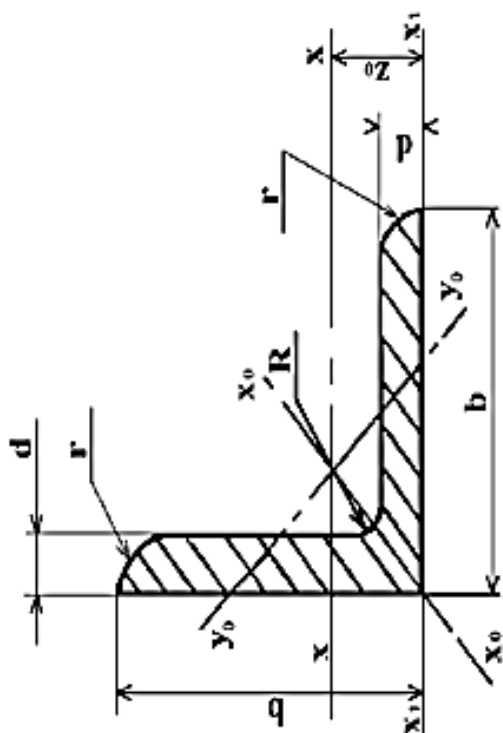
b - ширина полиці;

d - товщина полиці;

J - момент інерції;

i - радіус інерції;

Z_0 - відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці



Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F , см^2	J_x , см^4	i_x , см	$J_{x_{\text{max}}}$, см^4	$i_{x_{\text{max}}}$, см	$J_{y_{\text{min}}}$, см^4	$i_{y_{\text{min}}}$, см	J_{x1} , см^4	Z_0 , см	Маса 1М , кг
	b	d										
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
6,5	65	6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
		6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
			9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,58	2,48	28,29	1,90	7,73

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см ²	J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x_{max}} , см ⁴	i _{x_{max}} , см	J _{Y_{omin}} , см ⁴	i _{Y_{omin}} , см	J _{x1} , см ⁴	Z ₀ , см	Маса 1м, кг
	b	d										
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
7,5	75	8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
8	80	8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
		5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
9	90	7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
		6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу	J_x , см^4	i_x , см	$J_{x0 \max}$, см^4	$i_{x0 \max}$, см	$J_{y0 \min}$, см^4	$i_{y0 \min}$, см	J_{x1} , см	Z_0 , см	Маса 1м , кг
	b	d										
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
11	110	12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3
		7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
12,5	125	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
14	140	12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
16	160	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
		10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
16	160	12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4

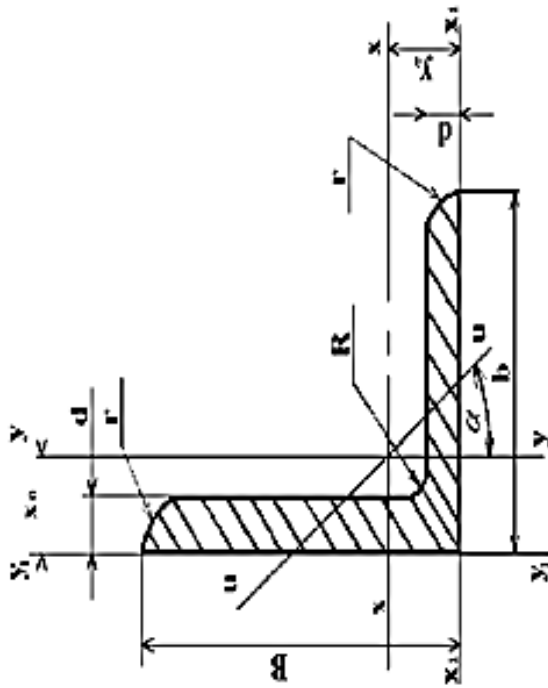
Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_{\text{max}}}, \text{см}^4$	$i_{x_{\text{max}}}, \text{см}$	$J_{y_{\text{min}}}, \text{см}^4$	$i_{y_{\text{min}}}, \text{см}$	$J_{x_1}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$	Маса $1\text{м}, \text{кг}$
	b	d										
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
20	200	13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
22	220	330	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
25	250	28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

Кутники нерівнобокі (за ГОСТ 8510-86)

Позначення:

- B— ширина більшої полиці;
- b— ширина меншої полиці;
- d— товщина полиці;
- J— момент інерції;
- i— радіус інерції;

x_0, y_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць



Номер профілю	Розміри, мм			Площа F, см ²	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$J_{U_{\min}}, \text{см}^4$	$i_{U_{\min}}, \text{см}$	Кут нахил у осі $u, \text{tg}\alpha$	$J^{x_1}, \text{см}^4$	$J^{y_1}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	Маса 1м, кг
	B	b	d													
5,6/3,6			4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
6	6	6	5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
			4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
6,3/4	63	40	5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
7/4,5	70	45	8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
			5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
	8		8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43

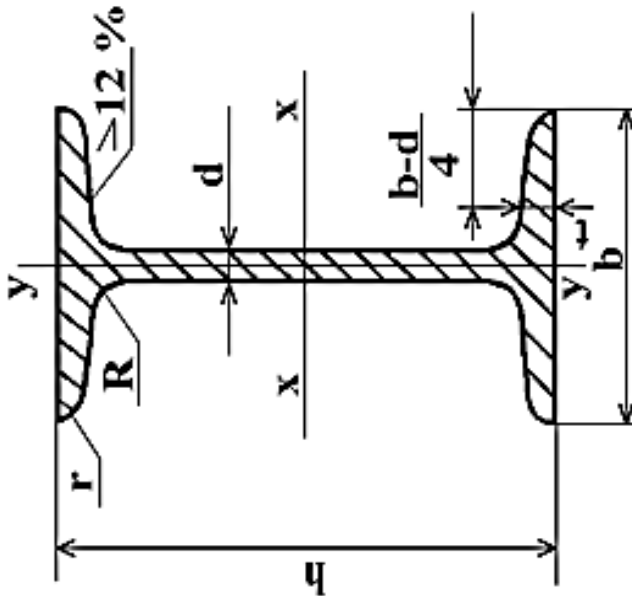
Номер про-фітло	Розміри, мм			Площа F , см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	J_y , см ⁴	i_y , см	$J^{U\min}$ см ⁴	$i_{U\min}$ см	Кут нахил у осі $u, \text{tg}\alpha$	J_{x_1} , см ⁴	J_{y_1} , см ⁴	x_0 см	y_0 см	Маса 1м, кг
	B	b	d													
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90		5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
10/6,3	100		8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
			6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
11/7	100	63	7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
12,5/8	110	70	10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
			6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
14/9	125	80	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
			7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
16/10	140	90	8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
16/10	60	100	12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
			8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
16/10	60	100	10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
			9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
16/10	60	100	10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа F , $см^2$	J_x , $см^4$	i_x , $см$	J_y , $см^4$	i_y , $см$	$J_{U^{min}}$, $см^4$	$i_{u^{min}}$, $см$	Кут нахил у осі u , $tg\alpha$	J_{X_1} , $см^4$	J_{Y_1} , $см^4$	x_0 , $см$	y_0 , $см$	Маса $1M$, $кг$
	B	b	d													
18/11	180	10	10	18,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
		12	110	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2342	537	2,52	5,97	26,4
20/12,5	200	11		34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
		12	125	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
		14		43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
		16		49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	12		48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
		16	160	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
		18		71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
		20		78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

Балки двогаврові (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

- h – висота балки
- b – ширина полиці
- d – товщина стінки
- t – середня товщина полиці
- J – момент інерції
- W – момент опору
- i – радіус інерції
- S – статичний момент площі



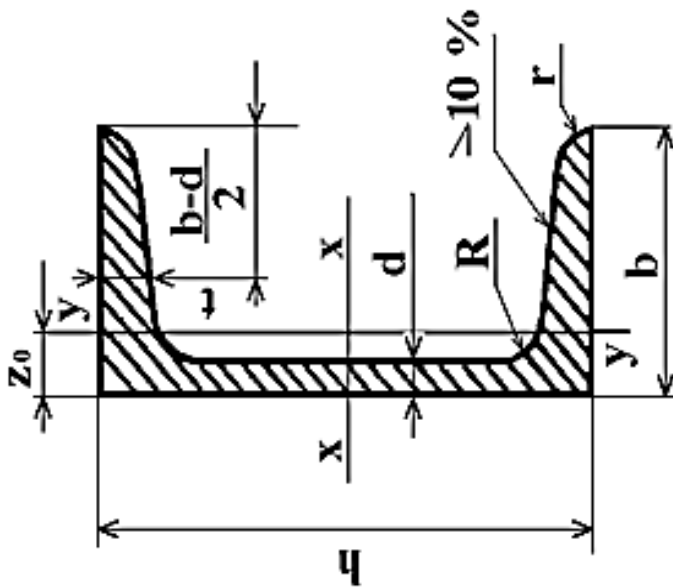
Номер профілю	Розміри, мм				Площа F , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18 ^a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20 ^a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см ²	$J_x,$ см ⁴	$W_x,$ см ³	$i_x,$ см	$S_x,$ см ³	$J_x,$ см ⁴	$W_y,$ см ³	$i_y,$ см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22 ^a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24 ^a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27 ^a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30 ^a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Швелери (за ГОСТ 8420-89)

Позначення:

- h – висота балки
- b – ширина полиці
- d – товщина стінки
- t – середня товщина полиці
- J – момент інерції
- W – момент опору
- i – радіус інерції
- S – статичний момент площі
- Z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки



Номер профілю	Розміри, мм				Площа F , см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см	Маса $1M$, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см ²	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^2 , см ³	J_x , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см	Маса 1М, кг
	h	b	d	t										
14 ^a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16 ^a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18 ^a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20 ^a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22 ^a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24 ^a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

ЛІТЕРАТУРА

1. Цурпал І. А. Механіка матеріалів і конструкцій / І. А. Цурпал. – К. : Вища школа, 2005. – 367 с.
2. Ройзман В. П. Опір матеріалів: навчальний посібник / В. П. Ройзман. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 124 с.
3. Агамиров Л. В. Сопротивление материалов: краткий курс для студентов вузов / Л. В. Агамиров. – М.: Издательство АСТ, 2003. – 256 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко – К. : Вища школа, 1993. – 460 с.
5. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – К. : Наукова думка, 1975. – 360 с.
6. Цурпал И. А. Краткий курс сопротивления материалов / И. А. Цурпал. – К. : Вища школа, 1989. – 331 с.
7. Королев П. Г. Сборник задач по сопротивлению материалов / П. Г. Королев. – К. : Вища школа, 1997. – 288 с.
8. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1965. – 560 с.
9. Александров А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 2009. – 560 с.
10. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов / Ф. З. Алмаметов, С. И. Арсеньев, Н. А. Курицын, А. М. Мишин. – М. : Высшая школа, 2003. – 367 с.
11. Биргер И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
12. Бондаренко А. Н. Курс лекций по сопротивлению материалов / А. Н. Бондаренко. – МИИТ, 2007. – 69 с.
13. Беляев Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М. : Наука, 1976. – 169 с.
14. Механика разрушения и прочность материалов : справочное пособие в 4-х томах. – К. : Наукова думка, 1988. – 200 с.

15. Миролубов И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролубов. – М.: Высшая школа, 1985. – 400 с.
16. Макаров Е. Г. Сопротивление материалов / Е. Г. Макаров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.
17. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М. : Физматгиз, 1962. – 612 с.
18. Смирнов А. Ф. Сопротивление материалов / А. Ф. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1975. – 480 с.
19. Сурьянинов Н. Г. Методы построения эпюр в статически определимых и статически неопределимых системах / Н. Г. Сурьянинов. – К. : Наукова думка, 2001. – 155 с.
20. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
21. Фесик С. П. Справочник по сопротивлению материалов / С. П. Фесик. – К. : Будівельник, 1982. – 280 с.
22. Шалашилин В. И. Сопротивление материалов / В. И. Шалашилин, А. Г. Горшков, В. Н. Трошин. – М. : МАИ, 2000. – 615 с.
23. Аникина В. М. Шпаргалка по сопротивлению материалов / В. М. Аникина, И. С. Давыдова. – К. : Аллель, 2007. – 64 с.
24. Сопромат. Экзаменационные ответы / А. И. Резниченко, В. П. Дыба, С. М. Ложаев, И. Ю. Красюкова. – Феникс, 2004. – 224 с.
25. Бабенко Д. В. Лабораторний практикум з курсу «Механіка матеріалів і конструкцій» для студентів спеціальності 7.091902 «Механізація сільського господарства» / Д. В. Бабенко, С. П. Опанюк. – Миколаїв, 1999. – 161 с.
26. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій : конспект лекцій. Ч. 1. / Д. В. Бабенко. – Миколаїв : МДАУ, 2011. – 148 с.
27. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: конспект лекцій. Ч. 2. / Д. В. Бабенко – Миколаїв : МДАУ, 2011. – 168 с.
28. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: практикум / Д. В. Бабенко, О. А. Горбенко, Н. А. Доценко. – Миколаїв, МНАУ, 2017. – 384 с.

З М І С Т

Вступ.....	3
Розділ 1. Основні поняття курсу «Механіка матеріалів і конструкцій».....	5
1.1. Основні положення та гіпотези курсу «Механіка матеріалів і конструкцій».....	5
1.1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Коротка історична довідка. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій».....	5
1.1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему.....	6
1.1.3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій».....	8
1.1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла.....	9
1.1.5. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій».....	11
1.2. Основні поняття курсу ММіК.....	13
1.2.1. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів.....	13
1.2.2. Види простих деформацій стрижня.....	14
1.2.3. Поняття про напруження та деформацію в точці.....	17
1.3. Завдання для самоконтролю.....	19
1.4. Тестові завдання.....	20
Розділ 2. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	21
2.1. Поняття геометричних характеристик плоских перерізів.....	21
2.1.1. Загальні поняття.....	21
2.1.2. Моменти інерції простих фігур.....	23
2.1.3. Моменти інерції відносно паралельних осей.....	25
2.1.4. Залежність між моментами інерції при повороті координат осей.....	26
2.1.5. Головні вісі та головні моменти інерції.....	28
2.1.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості.....	29
2.2. Завдання для самоконтролю.....	31
2.3. Приклади розв'язання задач.....	31
2.3.1. Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі.....	31

2.3.2. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів.....	34
2.3.3. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для двох елементів.....	37
2.3.4. Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів.....	40
2.4. Завдання для самостійного виконання.....	44
Розділ 3. Центральний розтяг і стиск стрижнів.....	47
3.1. Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів.....	47
3.1.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою.....	47
3.1.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску.....	49
3.1.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень.....	51
3.1.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня.....	53
3.2. Механічні властивості матеріалів.....	55
3.2.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості.....	55
3.2.2. Дійсна діаграма розтягу.....	58
3.2.3. Випробування матеріалів на стиск.....	59
3.2.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів.....	61
3.2.5. Потенціальна енергія при розтязі-стиску.....	62
3.2.6. Лабораторна робота № 1 «Випробування маловуглецевої сталі статичним навантаженням»....	63
3.3. Розрахунок при центральному розтягу-стиску.....	75
3.3.1. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску.....	75
3.3.2. Статично-невизначенні системи (СНС) при розтягу- стиску.....	78
3.3.3. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них.....	80
3.4. Приклади виконання завдань для самостійного виконання.....	84
3.4.1. Розрахунок ступінчастого стрижня на розтягання-стискання....	84
3.4.2. Розрахунок статично невизначеної системи на розтягання-стискання.....	88
3.5. Завдання для самоконтролю.....	91

3.5.1. Механічні властивості матеріалів.....	91
3.6. Завдання для самостійного виконання.....	92
3.7. Тестові завдання.....	94
Розділ 4. Напружений стан в точці.....	95
4.1. Поняття напруженого стану в точці.....	95
4.1.1. Напружений стан в точці.....	95
4.1.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС).....	97
4.1.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані.....	98
4.1.4. Головні напруження та головні площини.....	100
4.1.5. Екстремальні дотичні напруження.....	101
4.1.6. Коло Мора.....	104
4.2. Деформований стан у точці.....	105
4.2.1. Головні деформації.....	105
4.2.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці.....	108
4.2.3. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах.....	109
4.2.4. Зміна об'єму матеріалу під час деформації.....	111
4.2.5. Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані.....	114
4.3. Теорії міцності.....	115
4.3.1. Загальні поняття про теорії міцності.....	115
4.3.2. I теорія міцності.....	116
4.3.3. II теорія міцності.....	117
4.3.4. III теорія міцності.....	118
4.3.5. IV енергетична теорія міцності.....	121
4.3.6. Теорія міцності граничних напружених станів.....	120
4.3.7. Поняття про нові теорії міцності.....	121
4.4. Завдання для самоконтролю.....	122
4.5. Тестові завдання.....	122
Розділ 5. Кручення та зсув.....	123
5.1. Зсув.....	123
5.1.1. Поняття про чистий зсув.....	123
5.1.2. Закон Гука при чистому зсуві.....	125
5.1.3. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві.....	126

5.1.4. Потенціальна енергія при чистому зсуві.....	128
5.1.5. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув.....	129
5.2. Кручення.....	132
5.2.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр.....	132
5.2.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу.....	134
5.2.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу.....	138
5.2.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу.....	138
5.3. Приклади розв'язання задач.....	140
5.4. Завдання для самостійного виконання.....	142
5.5. Лабораторна робота №3	
Тема: Випробування сталевого круглого зразка на кручення.....	144
5.6. Завдання для самоконтролю.....	150
5.7 Тестові завдання.....	150
Розділ 6. Згин.....	151
6.1. Плоский згин.....	151
6.1.1. Основні типи опорних зв'язків. Визначення опорних реакцій.....	151
6.1.2. Внутрішні сили при згині. Диференціальні залежності між M_x , Q_y та q . Правила спрощеної побудови епюр M_x та Q_y	153
6.1.3. Приклади побудови епюр M_x і Q_y	156
6.2. Чистий згин.....	161
6.2.1. Загальні поняття про чистий згин.....	161
6.2.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині.....	162
6.2.3. Приклад чистого згину.....	165
6.3. Поперечний згин.....	166
6.3.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині.....	166
6.3.2. Поняття про центр згину.....	174
6.4. Міцність балок при згині.....	176
6.4.1. Аналіз напруженого стану при згині.....	176
6.4.2. Перевірка міцності балок при згині.....	179
6.4.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності.....	181
6.4.4. Приклади вирішення задач.....	184
6.4.5. Завдання для самоконтролю.....	188
6.4.6. Завдання для самоконтролю.....	189
6.5. Переміщення при згині.....	189
6.5.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки, визначення	

прогинів та кутів повороту шляхом його інтегрування.	
Розв'язання прикладів.....	189
6.5.2. Перевірка жорсткості балки при згині.....	197
6.6. Визначення переміщень при згині.....	197
6.6.1. Метод початкових параметрів.....	197
6.6.2. Приклади розрахунку балок на жорсткість.....	200
6.7. Метод Мора для визначення переміщень.....	203
6.7.1. Застосування принципу можливих переміщень для пружних систем.....	203
6.7.2. Формула Мора для визначення переміщень.....	204
6.7.3. Обчислення інтеграла Мора за способом Верещагіна.....	208
6.8. Приклади розв'язання задач на згинання плоских стрижнів.....	213
6.9. Тестові завдання.....	222
6.10. Завдання для самостійного виконання.....	222
Розділ 7. Статично невизначені системи.....	225
7.1. Прості статично-невизначені системи (СНС).....	225
7.1.1. Основні поняття та визначення.....	225
7.1.2. Канонічні рівняння методу сил.....	227
7.1.3. Етапи розрахунку статично невизначених систем.....	228
7.2. Розрахунок плоских статично-невизначених рам за методом сил.....	231
7.2.1. Плоскі статично невизначені рами. Загальні поняття.....	232
7.2.2. Приклад розрахунку плоских статично невизначених рам.....	233
7.3. Багатопрогинні нерозрізні балки (БНБ).....	239
7.3.1. Розкриття статичної невизначеності багатопрогинних нерозрізних балок за допомогою рівнянь трьох моментів.....	239
7.3.2. Визначення опорних реакцій у багатопрогинних нерозрізних балках.....	245
7.3.3. Етапи розрахунку багатопрогинних нерозрізних балок.....	246
7.4. Практичне розв'язання задач статично-невизначених систем (СНС).....	247
7.4.1. Задача №1 – статично невизначена рама.....	247
7.4.2. Задача № 2 – багатопрогинна нерозрізна балка.	251
7.5. Приклади розв'язання задач.....	254
7.6. Завдання для самоконтролю.....	257
7.7. Завдання для самостійного виконання.....	257
7.8. Лабораторна робота № 4	

Тема: «Визначення реакції середньої опори двопрогінної нерозрізної балки»	260
Розділ 8 . Складний опір	263
8.1. Загальні поняття про складний опір.....	263
8.1.2. Косий згин.....	265
8.1.3. Одночасна дія згину і поздовжньої сили	268
8.1.4. Згин з крученням.....	269
8.2. Позацентрова дія поздовжньої сили.....	270
8.2.1. Визначення напружень при позацентровому розтягу-стиску.....	270
8.2.2. Рівняння нульової лінії.....	272
8.2.3. Визначення ядра перерізу.....	273
8.2.4. Побудова ядра перерізу для різних видів поперечного перерізу.....	275
8.3. Складний опір. Розв'язання задач.....	277
8.3.1. Приклади розрахунку на міцність та жорсткість при позацентровому стиску і косому згині.....	277
8.4. Кривий брус.....	285
8.4.1. Загальні поняття. Побудова епюр внутрішніх зусиль.....	285
8.4.2. Центральний розтяг-стиск кривого бруса.....	287
8.4.3. Чистий згин кривого бруса.....	288
8.5. Розрахунок кривого бруса.....	292
8.5.1. Визначення положення нульової лінії при чистому згині кривого бруса.....	292
8.5.2. Напруження при одночасній дії поздовжньої сили та згинального моменту.....	295
8.5.3. Розрахунок гака крана.....	296
8.6. Приклади розв'язання задач.....	299
8.7. Завдання для самоконтролю.....	304
8.8. Завдання для самостійного виконання.....	304
8.9. Тестові завдання.....	307
Розділ 9. Стійкість стиснутих стрижнів	308
9.1. Загальні поняття.....	308
9.1.2. Формула Ейлера для визначення критичної сили.....	309
9.1.3. Вплив умов закріплення кінців стрижня на величину критичної сили.....	312
9.2. Стійкість стиснутих стрижнів. Формула Ясинського.....	314

9.2.1. Границі застосування формули Ейлера. Формула Ясинського...	314
9.2.2. Практичний розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.....	316
9.2.3. Розв'язання прикладу.....	317
9.3. Стійкість при позацентровому стиску.....	319
9.3.1. Розрахунок позацентрово стиснутого гнучкого стрижня.....	319
9.3.2. Практичне визначення напружень при позацентровому стиску гнучкого стрижня.....	324
9.4. Поздовжньо-поперечний згин.....	325
9.4.1. Загальні поняття про поздовжньо-поперечний згин. Точне визначення прогинів.....	325
9.4.2. Наближений спосіб визначення прогинів при поздовжньо-поперечному згині.....	328
9.4.3. Приклад визначення напружень при поздовжньо- поперечному згині.....	330
9.5. Динамічне навантаження.....	332
9.5.1. Загальні поняття.....	332
9.5.2. Врахування сил інерції при розрахунку троса.....	332
9.5.3. Розрахунок на удар:.....	334
9.5.4. Поняття про хвильову теорію удару.....	341
9.6. Міцність матеріалів при повторно змінних напруженнях.....	342
9.6.1. Поняття про руйнування від втоми матеріалу.....	342
9.6.2. Види циклів повторно змінних напружень.....	343
9.6.3. Поняття про границю втоми.....	346
9.6.4. Діаграма граничних амплітуд.....	347
9.6.5. Фактори, що впливають на величину границі втоми.....	349
9.6.6. Розрахунок на міцність при повторно змінних напруженнях.....	352
9.7. Приклади розв'язання задач.....	353
9.8. Лабораторна робота №5 Тема: Визначення критичної сили стиснутого стрижня.....	354
9.9. Завдання для самоконтролю.....	360
9.10. Завдання для самоконтролю.....	360
Глосарій.....	362
Література.....	376
Зміст.....	378

Навчальне видання

Бабенко Дмитро Володимирович

Горбенко Олена Андріївна

Доценко Наталія Андріївна

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ:
ПРАКТИКУМ ДЛЯ НАВЧАННЯ В УМОВАХ
ІНФОРМАЦІЙНО-ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА**

Навчальний посібник

за редакцією проф. Д. В. Бабенка

Технічний редактор: О. А. Горбенко; Н. А. Доценко

Комп'ютерний дизайн обкладинки: Н. А. Доценко

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 24

Тираж 100 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету.

54020, м. Миколаїв, вул.Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.