МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2021

УДК 519.8(075.8):330.4
Д70

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 30 серпня 2021 року, протокол № 1.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

Н. С. Ручинська – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

Д70 **Дослідження операцій** : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. – Миколаїв : МНАУ, 2021. – 147 с.

Курс лекцій призначений для вивчення теоретичних та практичних аспектів застосування методів дослідження операцій для розв’язання економічних задач.

Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «Дослідження операцій», що передбачені освітньо-професійною програмою «Комп’ютерні науки» підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп’ютерні науки», галузі знань 12 «Інформаційні технології». До кожної теми подаються докладні теоретичні відомості та задачі прикладного характеру.

УДК 519.8(075.8):330.4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасне суспільство досягло такого рівня, коли виникає нагальна потреба в розробці ефективних методів управління організаційними системами різного призначення та різних рівнів.

Бурхливий розвиток науки та техніки, широке впровадження автоматизованих засобів управління, збільшення масштабів виробництва, асортименту продукції, ускладнення зв'язків між учасниками ринку, нестабільність економічної ситуації потребує прийняття своєчасних раціональних управлінських рішень. На сьогодні пред'являються високі вимоги до ефективності планування та управління виробничими процесами на основі застосування сучасної методології моделювання та інструментарію прийняття управлінських рішень. Тому в сучасних умовах підвищується актуальність підготовки фахівців високого рівня.

Курс лекцій призначений для вивчення теоретичних та практичних аспектів застосування методів дослідження операцій для розв'язання економічних задач. В основу покладені питання, вивчення яких необхідне для розуміння принципів дослідження економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Опанування тем дисципліни дозволяє сформувати у здобувачів вищої освіти визначену систему компетентностей та досягти очікуваних результатів навчання.

Посібник складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [1,5,7,8,11,16,17,21,32]. Особливістю укладеного посібника є простота викладення теоретичного матеріалу на основі практичної його реалізації. Для успішного вивчення курсу «Дослідження операцій» здобувачам вищої освіти достатньо базових знань з розділів вищої математики, математичного програмування та інформатики.

Тема 1. Основні поняття та принципи дослідження операцій

План

1.1. Історія розвитку дослідження операцій.
1.2. Об’єкт, мета та цілі дослідження.
1.3. Основні етапи операційного дослідження.
1.4. Типові класи задач дослідження операцій.
1.5. Класифікація задач дослідження операцій.

1.1. Історія розвитку дослідження операцій

Як самостійний науковий напрямок дослідження операцій оформилося на початку 40-х років. Перші публікації з цієї галузі з’явилися у 1939-1940 рр. В роки Другої світової війни дослідження операцій широко використовувалося при плануванні бойових дій. Так, спеціалісти з цієї галузі працювали в командуванні бомбардувальної авіації США і досліджували фактори, що впливають на ефективність бомбардування. Були розроблені рекомендації, що привели до чотирикратного підвищення ефективності бомбардування.

Таким чином, науковці давали поради військовим щодо прийняття рішень при аналізі та дослідженні військових операцій. Звідси і виникла назва дисципліни. Пізніше принципи і методи дослідження операцій (ДО) стали використовуватися у цивільній сфері: у промисловості, для управління фінансами, у сільському господарстві та ін.

1.2. Об’єкт, мета та цілі дослідження

Розвиток сучасного суспільства досяг того рівня, коли виникає нагальна потреба в розробці ефективних методів управління організаційними системами різного призначення та різних рівнів. Прикладами таких систем є окремі виробництва, галузі господарства, структури управління (військові, державні), господарські комплекси і т. ін.

Виконання безпосередніх емпіричних досліджень відповідних процесів та явищ практично неможливе з багатьох причин: вартості досліду, певної його унікальності (неповторності), обмежень у часі, неможливості визначити результати впливу тих чи інших чинників і т. ін. З урахуванням цих обставин емпіричні дослідження заміняються дослідженнями відповідних математичних моделей.

Під ***операцією*** розуміють будь-яку діяльність людини, що спрямована до якоїсь мети (у виробництві, у військовій операції, у перевезенні вантажів, у плануванні робіт, у прийнятті політичного рішення та ін.).

Приклади операцій.

1. Підприємство випускає декілька видів виробів, при виробництві яких використовуються деякі обмежені ресурси різного типу. Необхідно скласти план випуску виробів кожного виробу, щоб максимізувати прибуток при виконанні обмежень на використані ресурси.

2. Необхідно створити мережу тимчасових торгівельних точок, щоб забезпечити максимальну ефективність продаж. Для цього необхідно визначити: число точок, їх розміщення, кількість персоналу та їх зарплату, ціни на товар.

Припустимо, що людина приймає рішення (часто – дуже важливе, бо від нього залежить її доля, доля її підприємства, доля військової операції, напрямок розвитку держави). Виникає питання: наскільки це рішення є вірним? Виникає потреба об'єктивної кількісної оцінки прийнятого рішення.

Дослідження психологів показали, що людина почуває себе невпевнено, якщо при прийнятті рішення потрібно врахувати більше ніж 10 змінних або суперечливих факторів. Але в реальних умовах виробництва на процеси впливають сотні (а іноді і тисячі) факторів. Тому науковий підхід до кількісної оцінки прийнятого рішення за допомогою методів дослідження операцій є дуже важливим.

Дослідження операцій – це теорія використання наукових кількісних методів для прийняття найкращого рішення у різних галузях діяльності людини. Ця наука дає об’єктивні, кількісні рекомендації по управлінню цілеспрямованими діями людини.

Об'єктом дисципліни «Дослідження операцій» є аналіз функціонування виробничо-господарських систем і розробка методів оптимального управління ними з використанням відповідних математичних моделей.

Вирішення цих проблем досягається системним, всебічним вивченням процесів у досліджуваних системах, синтезом якісних досліджень і певного математичного апарату в поєднанні з широкими можливостями сучасних комп'ютерів.

Метою дослідження операцій є наукове кількісне обґрунтування рішень, що приймаються по управлінню у господарчих, військових та державних справах. У деяких випадках (наприклад, у багатьох комбінаторних задачах) отримати оптимальне (найкраще) рішення неможливо, і тому приймається субоптимальне (не найгірше) рішення.

Предметом дослідження операцій є: військові операції; рішення у політиці та виробництві, сільському господарстві, фінансових справах і т.п. Ми будемо розглядати виробничі процеси у господарчій діяльності людини.

Отже, ***дослідження операцій*** – це комплексна математична дисципліна, що займається побудовою, аналізом та застосуванням математичних моделей прийняття *оптимальних* рішень при проведенні *операцій*.

1.3. Основні етапи дослідження операцій

Процес операційного дослідження не може відбуватися та контролюватися силами однієї людини. Для розв'язання певної проблеми потрібна співпраця різних фахівців.

Етапи дослідження операцій.

1. Ідентифікація проблеми

На цьому етапі виділяються основні стадії:

– формулювання задачі або мети дослідження;

– виявлення можливих альтернатив розв'язання даної задачі;

– визначення вимог, умов та обмежень, вибір множини параметрів, що наявні даній проблемній ситуації.

Залежно від підходу до класифікації параметрів виділяють наступні.

За критерієм цільового призначення:

– параметри ***стану*** виділяють досліджуваний об'єкт серед інших того ж призначення і дають можливість обчислити величини тих характеристик, для визначення яких і розробляється модель;

– до параметрів ***управління*** належать характеристики, змінюючи які можна впливати на досліджуваний стан.

За критерієм визначеності:

– ***екзогенні*** (зовнішні) – відображають фізичне втілення досліджуваного об’єкта та зовнішні умови, тобто поза розробленою математичною моделлю;

– ***ендогенні*** (внутрішні) – змінні, величини яких обчислюються за математичною моделлю.

Наприклад, необхідно визначити ефективну спеціалізацію, тобто головну галузь багатогалузевого господарства. Можливі *екзогенні* змінні: площі орних земель, сіножатей, саду, наявність засобів механізації, трудові ресурси, транспортна мережа і т. ін. *Ендогенні* – обсяги можливих прибутків кожної галузі виробництва, питання працевлаштування – саме для їх обчислення необхідно будувати відповідну математичну модель.

2. Побудова моделі

На цьому етапі група розробників, враховуючи особливості задачі, повинна вибрати модель, що найбільше підходить для адекватного описання досліджуваної системи. При побудові такої моделі повинні бути встановлені кількісні співвідношення для виразу цільової функції та обмежень у вигляді функцій.

Термін ***«модель»*** походить від французького *«tocieie»*, латинського *«modulus»* – означає зразок, норма, міра.

Модель **–** це об'єкт, що заміщує оригінал і відображає найважливіші ознаки і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез. У загальному розумінні ***модель*** – це пізнання. Іншим визначенням терміну «***модель»*** є образ, зображення або прообраз будь-якого об'єкта або системи об'єктів, що використовується за певних умов як «замінник».

Під ***економіко-математичною моделлю*** розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Реальні соціально-економічні процеси досить складні, їх поточний стан і перебіг в часі визначаються сукупністю багатьох чинників (факторів). Тому є необхідність заміни реальних процесів на спрощені для вивчення зразки-моделі. Ми розглядаємо основні моделі досліджуваних явищ і процесів в системах як математичні моделі.

Математична модель задачі дослідження операцій включає:

– описання змінних, які необхідно знайти;

– описання критеріїв оптимальності;

– описання множини допустимих розв’язків (обмежень, що накладаються на змінні).

3. Розв’язання поставленої задачі за допомогою моделі

На даному етапі крім знаходження оптимального розв’язку, необхідно (коли це можливо) забезпечення додаткової інформації про можливі зміни розв’язку при зміні параметрів системи. Цю частину дослідження зазвичай називають *аналізом моделі на чутливість*.

Розв’язання задачі виконується такими найбільш розповсюдженими методами: лінійного програмування, нелінійного програмування, динамічного програмування, дискретного програмування з умовою цілочисельності, стохастичного програмування.

4. Перевірка адекватності моделі

Модель можна вважати адекватною, якщо вона може забезпечити досить надійне прогнозування поведінки системи. На даному етапі можливі два випадки. Якщо результати незадовільні, то уточнюють вхідну інформацію та побудовану математичну модель і повторно шукають розв’язок. Якщо ж результати співставлення розрахунків і практичних вимог мають сенс, то вирішують питання практичного використання результатів розв’язку.

5. Реалізація результатів дослідження

На даному етапі необхідно оформити кінцеві результати дослідження у вигляді детальних інструкцій таким чином, щоб вони легко сприймалися тими, хто буде в подальшому керувати системою.

Мета дослідження операцій – кількісно та якісно обґрунтувати рішення, що приймається. Кінцеве рішення приймає відповідальна особа (або група людей).

Основний принцип розробника: ***«Розробляй не те, що замовник просить, а те, що йому потрібно».***

1.4. Типові класи задач дослідження операцій

Управління запасами. Із збільшенням запасів створюються умови для більш ритмічної роботи виробництва. Запас – це гарантія можливості виконання будь-якого замовлення. Якщо запасів не вистачає, то можливі значні збитки за рахунок невиконання зобов'язань. Але разом з тим збільшується «змертвілий» капітал і витрати на зберігання.

Розподіл ресурсів. Ресурси – це гроші, матеріали, людська праця і т.п. Ресурси завжди обмежені і в різних випадках забезпечують різний прибуток.

Ремонт та заміна обладнання. Застаріле обладнання вимагає витрат на ремонт і має знижену продуктивність. Потрібні розрахунки для прийняття рішення по визначенню термінів ремонту та заміни обладнання, які забезпечують найбільший прибуток.

Задачі ***масового обслуговування***: розглядають питання створення та функціонування черг (на заводському конвеєрі; у залізничній касі; для літаків над аеропортом, що йдуть на посадку і т. ін. Потрібно розв'язати проблему якісного обслуговування при мінімальних витратах на обладнання.

Задача ***рюкзака.*** Рюкзак (вантажна машина, вагон, судно, літак) має обмежену вантажність. Потрібно так заповнити рюкзак, щоб отримати максимальний прибуток.

Задачі ***комівояжера, створення сумішей, наймання (звільнення) працівників, мереженого планування робіт*** та ін.

1.5. Класифікація задач дослідження операцій

1. *Класифікація за залежністю параметрів задачі від часу:*

– *статична* задача. Рішення приймається при умові, що всі параметри задачі заздалегідь відомі і не міняються з часом. Рішення приймається один раз.

– *динамічна* задача. Під час розв'язання задачі параметри змінюються в часі. Процедура прийняття рішення відбувається поетапно та може бути представлена у вигляді процесу, що залежить від часу, в тому числі неперервного. Приклад – навігаційна задача.

2. *Класифікація в залежності від достовірності інформації про задачу:*

– ***детермінована*** задача. Всі параметри завчасно відомі. Для розв'язання таких задач в основному застосовуються методи *математичного програмування***.**

– ***недетермінована*** задача. Не всі параметри задачі завчасно відомі. Наприклад, необхідно прийняти рішення про керування пристроєм, деякі вузли якого можуть непередбачувано виходити з ладу. Оптимальний розв'язок недетермінованої задачі знайти практично неможливо. Хоча деякий «розумний» розв'язок знайти можна.

– ***стохастична*** задача. Не всі параметри задачі завчасно відомі, однак є статистичні дані про невідомі параметри (ймовірності, функції розподілу, математичне сподівання і т. ін.)

– задача ***в умовах (повної) невизначеності***. Статистичні дані про невідомі параметри відсутні. Такі задачі в основному вивчаються в рамках *теорії ігор*.

3. *Класифікація за видом критерію оптимальності:*

– ***формалізована*** – мінімум або максимум цільової функції;

– ***неформалізована*** – критерій оптимальності може мати будь-який вигляд, навіть не описаний математично;

– ***однокритеріальна*** задача – має одну цільову функцію;

– ***багатокритеріальна*** задача має декілька критеріїв або цільових функцій.

Тема 2. Методика проведення дослідження операцій та методи економіко-математичного моделювання

План

2.1. Виконання плану розробки проекту дослідження операцій.

2.2. Відшукання оптимального розв'язку задачі, використовуючи можливості Microsoft Excel.

2.1. Виконання плану розробки проекту дослідження операцій

Фахівець з дослідження операцій мусить чітко розуміти, що будь-які обґрунтовані та змістовні розрахунки і рекомендації мають сенс лише за умови їх практичного втілення та ефективності.

Використання правильної методики суттєво підвищує ймовірність *уникнення невірно сформульованої задачі* дослідження, а також *можливості невірного розв'язання правильно поставленої задачі.* Якщо дослідник (або група) керується вірною методикою, то більше гарантій, що розбудована модель досліджуваної системи адекватна меті дослідження, а при впровадженні результатів забезпечить очікувану ефективність.

Етапи виконання плану розробки проекту дослідження операцій

1. Визначення мети та значимості цілей

Цілі групуються за двома ознаками:

1) цілі або результати, які необхідно досягти в процесі роботи системи;

2) цілі (результати), які необхідно зберегти (наприклад, зменшення собівартості продукції за умови збереження її якості).

Метою виконання проекту дослідження операцій є оцінка та поліпшення роботи виробничої або організаційної системи в залежності від її функціонального призначення. Накреслюючи мету та цілі дослідження, необхідно потурбуватися про їх раціональне визначення: вони не повинні бути всеосяжними, щоб не перевищити межі наявних можливостей, або другорядними, щоб не «загубити» основне призначення системи. Маючи реєстр цілей, необхідно зробити аналіз рівня їх взаємозалежності та відкинути ті, які не є визначальними або свідчать про досягнення інших цілей.

Оскільки розглядається проблема дослідження операцій з використанням математичних моделей, в яких є кількісні показники, то виникає питання узгодження розмірностей величин, в тому числі при визначенні цілей.

Щоб користуватися математичним апаратом, необхідно представити цілі у кількісних вимірах і ввести єдину розмірність. Цілі упорядковуються за ступенем їх значимості, потім до розмірності головної цілі зводяться розмірності інших. Головна ціль оцінюється переважно у грошових одиницях як найбільш широко використовуваних одиницях виміру в економічних розрахунках.

У теорії експертних оцінок пропонується універсальний *метод оцінки відносної значимості цілей реєстру* – шляхом упорядкованого уточнення порівняльних експертних оцінок для кожної цілі.

2. Дослідження стратегій

Мета може мати декілька альтернатив її досягнення. Необхідно визначити ефективність кожної стратегії стосовно кожної цілі, тобто визначити ступінь досягнення будь-якої цілі по втіленню кожної із відповідних стратегій. Цю ефективність теж необхідно характеризувати числовою мірою або як наслідок розв’язання відповідної математичної моделі.

За умови відомої математичної моделі можливих стратегій такі критерії будуть представлені сукупністю лінійних або нелінійних нерівностей або рівнянь стосовно набору змінних відповідної моделі. Наголосимо, що в багатьох випадках ефективність будь-якої стратегії змінюється в часі, а також суттєво залежить від зовнішніх умов.

Можливі випадки, коли альтернативні стратегії та їх ефективність відомі з попереднього досвіду або в порівнянні з аналогічними ситуаціями. Але більш вагомими є випадки, коли жодна з відомих стратегій не може гарантувати досягнення цілі. За таких умов виникає необхідність розробки нових стратегій (засобів досягнення цілі).

3. Планування етапів розбудови проекту

Визначення термінів виконання проміжних етапів стимулює творчу активність виконавців і є необхідною умовою своєчасного завершення проекту.

План є по суті календарним графіком виконання узгоджених між собою етапів, тому його доцільно мати у вигляді структурної схеми, з урахуванням координат часу (рис.1).

Етапи проекту деталізуються до рівня окремих завдань, узгоджених між собою за вхідною та вихідною інформацією. Чим детальніше розроблено план, тим достовірніше та ефективніше можна обґрунтувати оцінки термінів і ресурсів, необхідних для виконання проекту.

Рис.1. Етапи виконання плану розробки проекту

4. Визначення проблеми дослідження

Визначення проблеми дослідження – надзвичайно суттєвий етап. В багатьох випадках саме він визначає успіх та ефективність дослідження або невдачу. На цьому етапі необхідні тісні ділові контакти із замовником та особами, які будуть реалізувати результати та рекомендації планового дослідження.

На основі одержаних даних і відповідного аналізу визначається суть досліджуваної проблеми та загальна схема розбудови операційної моделі і зміст подальшої роботи.

Питання, які доцільно з'ясувати на стадії визначення проблеми:

1. Чи можна всю проблему представити сукупністю окремих, менш об'ємних, часткових субпроблем з метою їх незалежного паралельного або послідовного дослідження.

2. Необхідно з'ясувати рівень деталізації проекту. Основну увагу потрібно звернути на міру адекватності, щоб уникнути розбудови «зміщеної моделі», в якій не враховано певні суттєві та постійно діючі фактори.

Після визначення проблеми та рівня її деталізації переходять до розбудови відповідних математичних моделей та їх узгодженості.

5. Побудова математичної моделі

Побудова математичної моделі допомагає об'єднати складні, хоч іноді й не чітко визначені фактори, пов'язані з проблемою прийняття рішень, у логічно чітку схему, яку можна детально проаналізувати. Саме такий аналіз дозволяє одержати й оцінити альтернативні можливості функціонування досліджуваної системи та передбачити наслідки управлінських рішень. Модель повинна давати чітку та адекватну уяву про досліджувану структуру. Визначення вірного балансу між рівнем адекватності математичної моделі тій реальній системі, яку вона повинна описувати, та можливостями одержати за використання моделі практично цінні розв'язки є складним і важливим завданням, яке вимагає як високого фаху, так і змістовного аналізу відповідної системи. Не можна побудувати універсальну методику вибору та створення математичної моделі за будь-якого конкретного випадку.

Ретельний якісний аналіз завжди мусить передувати кількісному аналізу, щоб з'ясувати ті фактори, які є визначальними для досліджуваної проблеми або задачі.

Математична модель є відображенням співвідношень складових елементів досліджуваної системи у вигляді аналітичних залежностей і логічних зв'язків. У загальному випадку модель віддзеркалює взаємозв'язки між параметрами управління, параметрами стану, технологічними параметрами та показниками ефективності в кількісній мірі. Якісно побудована модель є запорукою успіху розробки та впровадження операційного проекту.

6. Інформаційне забезпечення та вибір числових методів

Інформаційне забезпечення ефективного функціонування операційної системи будується за принципом банку даних, вся необхідна інформація зберігається на технічних носіях.

Завершивши розробку математичної моделі і визначивши зміст вхідної та вихідної інформації, яка має бути використана при прийнятті управлінських рішень, необхідно вибрати на комп'ютері числовий метод реалізації математичної моделі або їх сукупності. Існує значна бібліотека числових методів розв'язання відповідних математичних задач.

Слід провести певний аналіз адекватності числових методів та розробленої математичної моделі. Особливо треба простежити, щоб спрощення, які приймаються при виборі або розбудові числового методу, не спотворили зміст створеної математичної моделі.

7. Розробка технічного завдання, програмування та налагодження

Без використання комп'ютерів неможливо забезпечити функціонування практично значимого операційного проекту. Розробка технічного завдання має бути виконана максимально ретельно, з чітко окресленими вимогами до форми та змісту вхідних і вихідних даних, етапів контролю, постійної та змінної інформації.

Особливу увагу необхідно приділити змісту та формі представлення (документам) вхідної та вихідної інформації, їх погодженню з керівництвом і працюючими відповідними структурами. Вихідні дані мають бути однозначно зрозумілими, добре та зручно розташованими, максимально скорочувати пошук необхідної інформації та максимально забезпечувати визначення ефективності різнопланового призначення функціонуючої структури.

8. Накопичення даних

На етапі накопичення даних основною метою є підготовка й аналіз інформації, необхідної для перевірки правильності моделі та можливостей практичного використання результатів впровадження проекту дослідження операцій. Суттєвим питанням накопичення інформації є її точність та подання.

9. Перевірка дієздатності моделі

Спочатку вибирають аналітичні та експериментальні методи перевірки *узгодженості* з дійсністю результатів розрахунків за моделлю, *чутливості та дієздатності моделі*.

Узгодженість. Переконавшись у достовірності та необхідному рівні вхідної інформації, по завершенні розрахунків перевіряють їх практичний сенс, відповідність здоровому глузду та логіці, якщо параметри вхідної інформації змінювати в певних межах, а також оцінку результатів розрахунків керівниками та фахівцями відповідної галузі.

Перевірка моделі на чутливість обов’язково виконується при використанні числових методів в розрахунках. Мета заходу – перевірити характер зміни певної вихідної інформації при зміні вхідної інформації в певних межах з відомим кроком.

Реальність. Мета запровадження будь-якої операційної системи – поліпшити поточне функціонування структури та мати можливість оцінити наслідки управлінських рішень за певних умов у близькому або більш віддаленому майбутньому. Одним з ефективних засобів такої перевірки є дослідження за допомогою операційної системи ситуацій, які були в минулому, та порівняння прийнятих управлінських рішень з рекомендаціями, запропонованими за відповідних умов у минулому.

Дієздатність операційної системи визначає, наскільки оперативно та з якими затратами коштів і праці можна одержати інформацію, потрібну для оперативної діяльності або прогнозування майбутнього. Особлива увага має бути приділена здатності моделі давати реалістичні рекомендації при врахуванні зовнішніх умов для оцінки одноразових рішень за важливістю їх наслідків, наприклад, оцінки доцільності оновлення старого або організації нового виробництва. Найбільш вагомим моментом перевірки моделей прийняття одноразових рішень є аналіз і критична оцінка одержаних результатів по завершенні розрахунків.

Проблема впровадження та використання. Ефективність впровадження операційної системи суттєво залежить від того, в якій мірі вдалося організувати співпрацю керівників різних ланок структури з виконавцями проекту.

Представники сторін, які співпрацюють по впровадженню операційного проекту, повинні чітко розуміти необхідність певних зусиль для усунення можливих недоліків, які в будь-якому прояві завжди властиві новому. Світовий досвід переконливо засвідчує безумовну доцільність та ефективність використання наукових досягнень в організації функціонування структур різнопланового призначення.

2.2. Відшукання оптимального рішення задачі за допомогою «Пошук розв'язання»

«Пошук розв'язання» («*Розв'язувач»*) – надбудова, що входить в комплекс Excel. Її основне призначення – розв'язання лінійних та нелінійних задач оптимізації.

За допомогою *«Пошук розв'язання»* можна розв'язувати наступні задачі:

– пошук оптимуму при наявності обмежень (умовна оптимізація);

– пошук безумовного оптимуму – задача знаходження максимуму чи мінімуму цільової функції за відсутності обмежень;

– пошук допустимого розв'язку – не задається цільова функція;

– розв'язання систем рівнянь – цільова функція не задається, обмеження у вигляді рівнянь;

– підбір параметрів – задається конкретне значення цільової комірки, без обмежень. Знаходяться декілька параметрів, що дозволяють отримати задане значення цільової функції.

Задача. Із сировини двох видів виготовляється продукція трьох видів: $П_1$, $П_2$, $П_3$. Техніко-економічні показники задано в таблиці. Визначити обсяги виробництва, при яких загальний прибуток від реалізації буде найбільшим.

Вид сировини	Витрати сировини для виробництва одиниці продукції			Запаси сировини
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
I	5	3	1	240
II	2	1	2	160
Прибуток	20	13	10	

Розв'язання

Складемо модель задачі:

x_1 – буде виготовлено у.о. продукції $П_1$;

x_2 – буде виготовлено у.о. продукції $П_2$;

x_3 – буде виготовлено у.о. продукції $П_3$;

$$Z = 20x_1 + 13x_2 + 10x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 240, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 160, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Для розв'язання задачі використаємо *«Пошук розв'язання»*. В результаті отримаємо (рис. 2):

	A	B	C	D	E	F	G
1	Змінні	x_1	x_2	x_3			
2	Значення	0	64	48			
3							
4	Обмеження				Ліва частина	Знак	Права частина
5	Ресурс I	5	3	1	240	<=	240
6	Ресурс II	2	1	2	160	<=	160
7							
8	Цільова функція						
9	Z=	20	13	10	**1312**	-> max	

Рис. 2. Результати розв'язання оптимізаційної задачі

Таким чином, необхідно виготовити продукції $П_2$ у кількості 64 од., $П_3$ у кількості 48 од. Продукція $П_1$ не виготовляється. При цьому максимальний прибуток 1312 од.

При розв’язанні задачі можливі випадки:

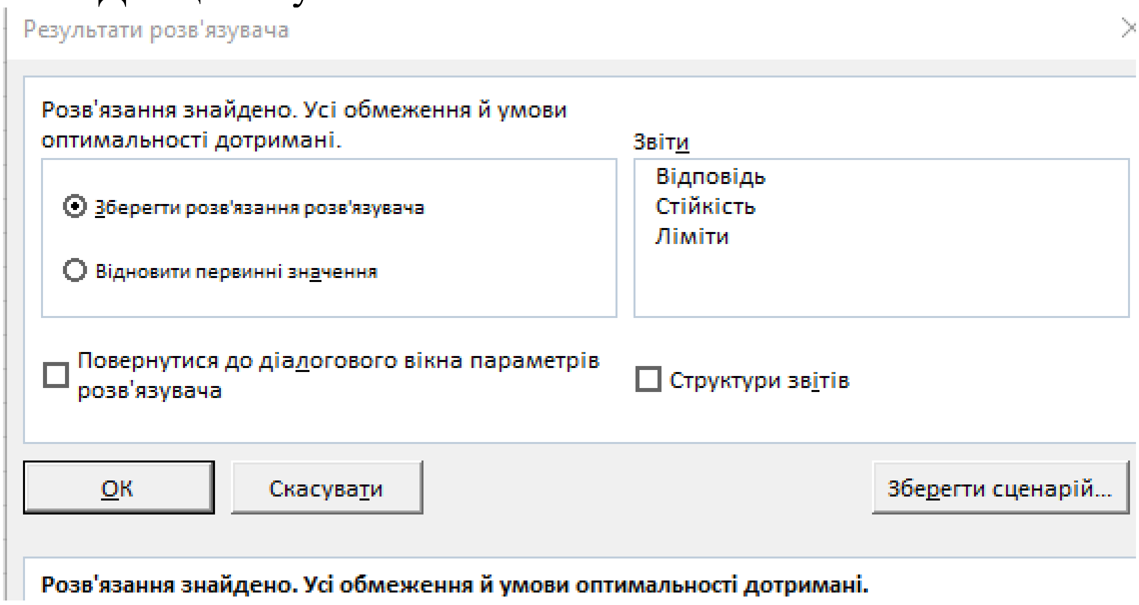
– Рішення знайдено (можна його зберегти, можна відмовитись).

– Пошук не може знайти підходящого розв’язку – тобто необхідно впевнитися, що модель створено правильно, немає взаємовиключних обмежень.

– Помилка в моделі – обмеження задано неправильно, або взагалі є посилання на неіснуючу комірку.

Після отримання розв’язку можна створити звіти трьох типів: *Відповідь, Стійкість, Ліміти*

Для цього у вікні



потрібно обрати необхідний тип звітів (до натискання кнопки ОК), потім натиснути ***Ок***.

У звіті – ***Відповідь*** виводяться вихідні та отримані в результаті пошуку значення комірок. Крім того вказано, які обмеження є зв’язуючими (ті, що лімітують).

Звіт – ***Стійкість*** дає інформацію для аналізу чуттєвості моделі. Тобто показує, наскільки чуттєвим є оптимальне рішення до невеликих змін параметрів моделі.

У звіті – ***Ліміти*** показані найменші і найбільші значення, які може приймати кожна змінна, коли задовольняються умови та не міняються значення інших змінних.

За допомогою надбудови *«Пошук розв’язання»* можна розв’язувати велику кількість задач. Зокрема, її можна застосувати до розв’язування системи рівнянь з декількома невідомими.

Тема 3. Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів

План

3.1. Загальна постановка задачі.

3.2. Формулювання задачі про визначення оптимального асортименту.

3.3. Загальний запис задачі раціональної відгодівлі тварин.

3.4. Модель задачі про оптимальне завантаження обладнання.

3.1. Загальна постановка задачі

Серед першочергових проблем, для вирішення яких доцільно застосовувати дослідження операцій:

– Визначення номенклатури (набору) продукції та видів послуг, а також оптимізація обсягів виробництва на певний перспективний період.

– Розподіл наявних матеріальних та фінансових ресурсів.

– Визначення розмірів асигнувань на придбання обладнання та його комплектацію.

– Визначення ціни, яка забезпечуватиме оптимальний рівень прибутку.

– Визначення обсягів нагромадження власних фінансових коштів для розвитку виробничої діяльності.

– Визначення впливу змін вартісних показників на економічну ефективність підприємства, тощо.

Загальна змістовна постановка задачі: виходячи з особливостей технологічних процесів підприємства та наявних виробничих ресурсів, знайти таку виробничу програму, яка б забезпечувала отримання максимального прибутку від реалізації виготовленої продукції.

Залежно від ступеня повноти і достовірності інформації, яку має в своєму розпорядженні особа, що приймає рішення, існують різні умови прийняття рішень.

Якщо інформація є абсолютно повною і достовірною, то такі умови називаються ***умовами визначеності***, а управлінські рішення, прийняті в цих умовах, називаються детермінованими.

3.2. Формулювання задачі про визначення оптимального асортименту (Задача про оптимальне використання сировини)

Нехай на випуск n видів продукції $П_1, П_2,..., П_n$ витрачається m видів ресурсів (сировина, матеріали, трудові ресурси тощо) $A_1, A_2,..., A_m$. Відомі витрати a_{ij} ресурсів i-го виду на одиницю продукції j-го виду, обсяг b_i ресурсів i-го виду і величина прибутку c_j від реалізації одиниці продукції j-го виду.

Необхідно так організувати випуск продукції, виходячи із наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток.

Таблиця 1

Види ресурсів	Види продукції						Запаси ресурсів
	$П_1$	$П_2$	…	$П_j$	…	$П_n$	
A_1 A_2 … A_m	a_{11} a_{21} … a_{m1}	a_{12} a_{22} … a_{m2}	… … … …	a_{1j} a_{2j} … a_{mj}	… … … …	a_{1n} a_{2n} … a_{mn}	b_1 b_2 … b_n
Прибуток від одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	
Випуск продукції	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	

Економіко-математична модель має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

В якості цільової функції обираємо максимум прибутку, тобто сума добутку прибутку від одиниці продукції на кількість виробленої продукції. Обмеженнями є вимога не перевищення витрат наявних ресурсів.

3.3. Загальний запис задачі раціональної відгодівлі тварин

Потрібно вибрати найдешевший харчовий раціон для відгодівлі тварин, який має містити необхідну кількість поживних речовий. Заради простоти припустимо, що кормовий раціон складається з трьох видів кормів B_1, B_2, B_3 і для забезпечення відповідного приросту маси тварини мають споживати за добу деяку мінімальну кількість біологічно необхідних поживних речовин A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Введемо позначення: a_{ij} – кількість поживних речовин A_i в одиниці корму B_j; β_i – мінімальна добова потреба поживної речовини A_i; p_j – вартість одиниці корму B_j; x_j – кількість одиниць корму B_j, що входить в раціон.

Загальна кількість спожитої речовини A_i не може бути меншою її мінімальної добової потреби β_i .

Таблиця 2

Види поживних речовин	Види кормів			Мінімальна добова потреба у поживних речовинах
	B_1	B_1	B_1	
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	β_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	β_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	β_3
A_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	β_4
A_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	β_5
Вартість одиниці корму	p_1	p_2	p_3	

Цільова функція – мінімальна вартість отриманого корму.

Споживання відповідного виду корму повинно бути не менше мінімальної добової потреби у поживних речовинах. Ця вимога і формує обмеження.

Економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq \beta_j , \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

3.4. Модель задачі про оптимальне завантаження обладнання

Підприємству задано план (***N_1, N_2, …,N_n***) з випуску продукції ***$П_1$, $П_2$,…,$П_n$*** за деякий час ***T***. Продукція обробляється ***m*** взаємозамінним устаткуванням ***B_1, B_2, …, B_m*** з різними потужностями. Відомі: ***a_{ij}*** – норми часу на обробку одиниці продукції ***i***-го виду на ***j***-му устаткуванні; ***A_j*** – фонд часу ***j***-го типу устаткування; ***N_i*** – план випуску продукції ***i***-го виду; ***c_{ij}*** – собівартість обробки ***i***-го виду продукції на ***j***-му устаткуванні.

Необхідно так спланувати випуск продукції ***$П_j$***, щоб її вартість була найменшою і план випуску продукції було виконано.

Нехай ***x_{ij}*** – кількість продукції ***i***-го виду продукції, яка обробляється на ***j***-му устаткуванні. Складемо модель.

Фактичні витрати часу на обробку всієї продукції не можуть перевищувати відведені фонди, тому $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le A_j$.

Оскільки план повинен виконуватись, то $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = N_i$.

Загальна вартість оброблюваної продукції повинна бути мінімальною:.

Остаточно економіко-математична модель матиме вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le A_j, \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = N_i, \\ x_{ij} \ge 0, \quad \mathrm{i} = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Тема 4. Транспортна логістика. Оптимізація транспортних перевезень

План

4.1. Поняття транспортної логістики.

4.2. Традиційна транспортна задача та її розв’язання за допомогою вбудованого шаблону SolvSamp.

4.3. Розв’язування транспортних задач.

4.4. Задача про призначення, її різновиди та розв’язання.

4.1. Поняття транспортної логістики

В сучасних умовах ***логістику*** розглядають як науково-практичний напрям господарювання, основною метою якого є ефективне керування матеріальними та інформаційними потоками галузях виробництва та обігу. В сучасному розумінні цей термін виник в 1974 році. Приклад логістичної мережі торгової компанії бачимо на рис. 1:

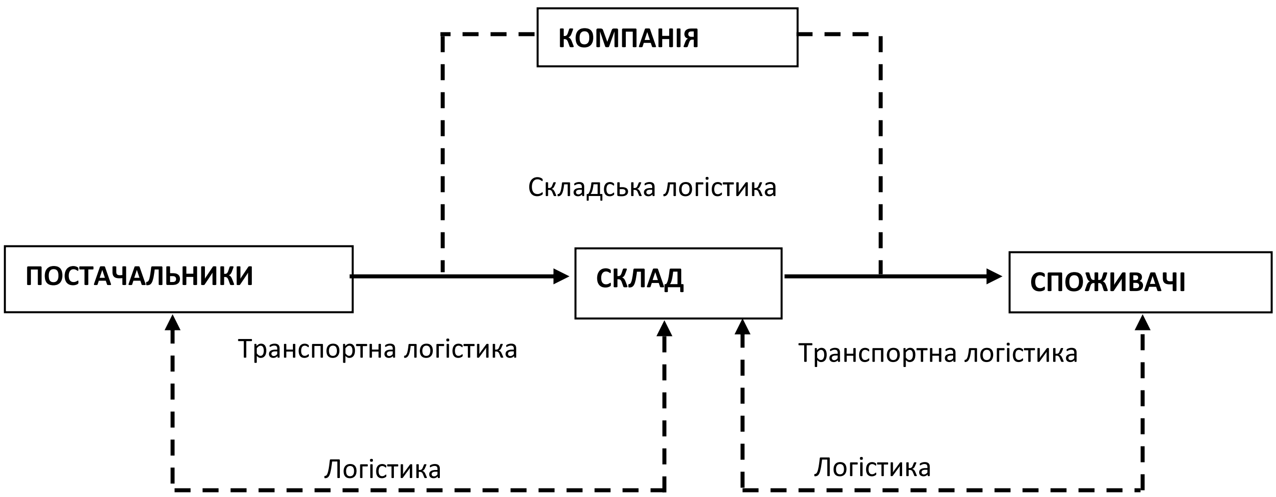


Рис.1. Логістична мережа торгової компанії

Транспортна логістика стосується питань оптимізації транспортних систем.

До задач транспортної логістики відносяться:

– вибір виду та типу транспортних засобів;

– сумісне планування транспортного процесу зі складськими та виробничими процесами;

– сумісне планування транспортних процесів на різних видах транспорту (у випадку змішаних перевезень);

– забезпечення технологічної єдності транспортно-складського процесу;

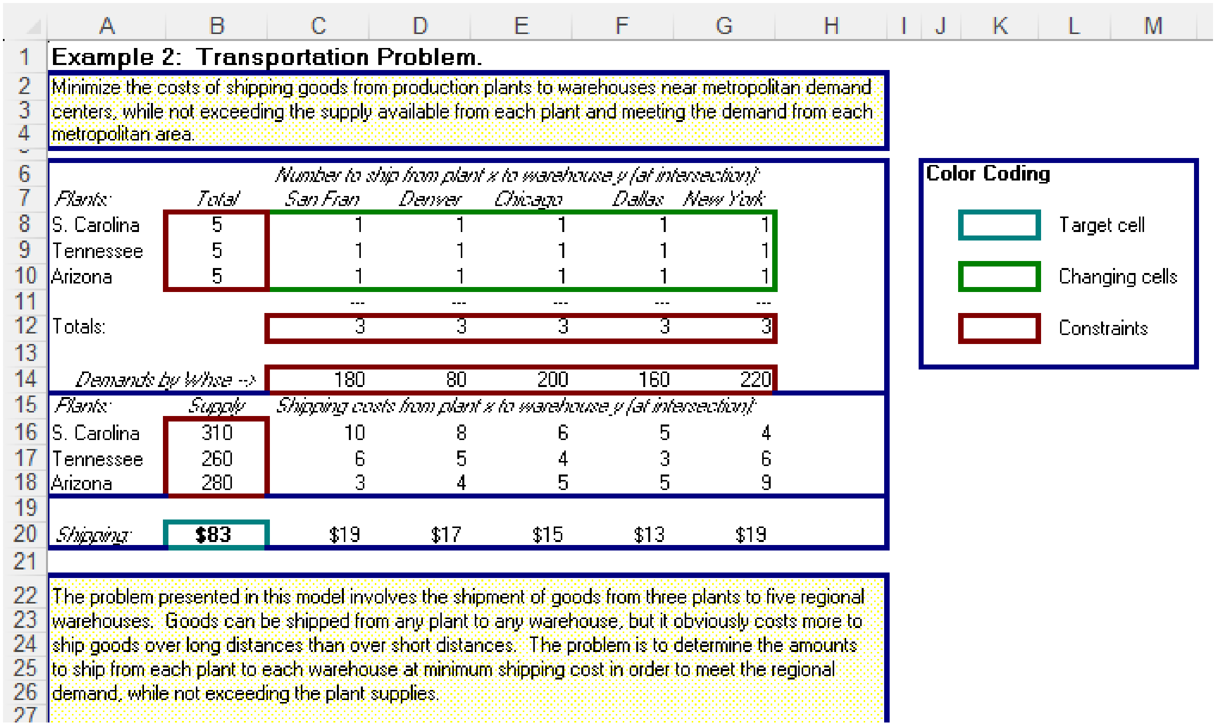
– визначення раціональних маршрутів доставки.

Основна задача транспортної логістики – переміщення необхідної кількості товару в потрібну точку оптимальним маршрутом за необхідний час та з найменшими витратами.

Така задача та її математична модель вперше були сформульовані у 1941р. Ф. Хічкоком. З часом сфера застосування транспортної моделі розширюється, а сама модель вдосконалюється та інтегрується з іншими моделями, передусім з моделями сфери виробництва.

4.2. Традиційна транспортна задача та її розв’язання за допомогою вбудованого шаблону SolvSamp

За допомогою Solvsamp.xls можна розв’язувати транспортні задачі. В даному прикладі за допомогою додаткової таблиці (верхньої) перевіряється участь у розв’язку всіх країн і всіх заводів, тобто обчислюються контрольні суми.


Example 2: Transportation Problem.

Minimize the costs of shipping goods from production plants to warehouses near metropolitan demand centers, while not exceeding the supply available from each plant and meeting the demand from each metropolitan area.

		Number to ship from plant x to warehouse y (at intersection):				
Plants:	*Total*	*San Fran*	*Denver*	*Chicago*	*Dallas*	*New York*
S. Carolina	5	1	1	1	1	1
Tennessee	5	1	1	1	1	1
Arizona	5	1	1	1	1	1
		---	---	---	---	---
Totals:		3	3	3	3	3
Demands by Whse -->		180	80	200	160	220
Plants:	*Supply*	*Shipping costs from plant x to warehouse y (at intersection):*				
S. Carolina	310	10	8	6	5	4
Tennessee	260	6	5	4	3	6
Arizona	280	3	4	5	5	9
Shipping:	**$83**	$19	$17	$15	$13	$19

Color Coding

Target cell

Changing cells

Constraints

The problem presented in this model involves the shipment of goods from three plants to five regional warehouses. Goods can be shipped from any plant to any warehouse, but it obviously costs more to ship goods over long distances than over short distances. The problem is to determine the amounts to ship from each plant to each warehouse at minimum shipping cost in order to meet the regional demand, while not exceeding the plant supplies.

Рис. 2 Стандартна транспортна задача.

4.3. Розв’язування транспортних задач

Задачі транспортного типу можна розв’язувати за допомогою більш простої форми (рис. 3, 4). В першій таблиці вказуються пункти постачання та споживання, тарифи, потреби у вантажах та їх запаси:

A	B	C	D	E	F
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**Запас**
A1	3	2	3	3	**35**
A2	4	3	5	2	**55**
A3	3	2	4	1	**60**
Потреба	**20**	**30**	**40**	**60**	
	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**Запас**
A1					**0**
A2					**0**
A3					**0**
Потреба	**0**	**0**	**0**	**0**	
Вартість перевезень			**0,00**		

Рис. 3. Приклад оформлення транспортної задачі в Excel

D15 =SUMPRODUCT(B2:E4;B10:E12)

	A	B	C	D	E	F
1		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запас**
2	**A1**	3	2	3	3	**35**
3	**A2**	4	3	5	2	**55**
4	**A3**	3	2	4	1	**60**
5	**Потреба**	**20**	**30**	**40**	**60**	
6						
7						
8						
9		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запас**
10	**A1**					**=SUM(B10:E10)**
11	**A2**					**=SUM(B11:E11)**
12	**A3**					**=SUM(B12:E12)**
13	**Потреба**	**=SUM(B10:B12)**	**=SUM(C10:C12)**	**=SUM(D10:D12)**	**=SUM(E10:E12)**	
14						
15	**Вартість перевезе**			**=SUMPRODUCT(B2:E4;B10:E12)**		

Рис. 4. Формули для розв’язання транспортної задачі

Транспортна задача може бути ***закритою – збалансованою*** (кількість вантажу на складах дорівнює кількості потреб) або ***відкритою – незбалансованою***.

Приклад розв’язання, якщо кількість запасу на складах перевищує кількість потреби у вантажі (рис. 5)

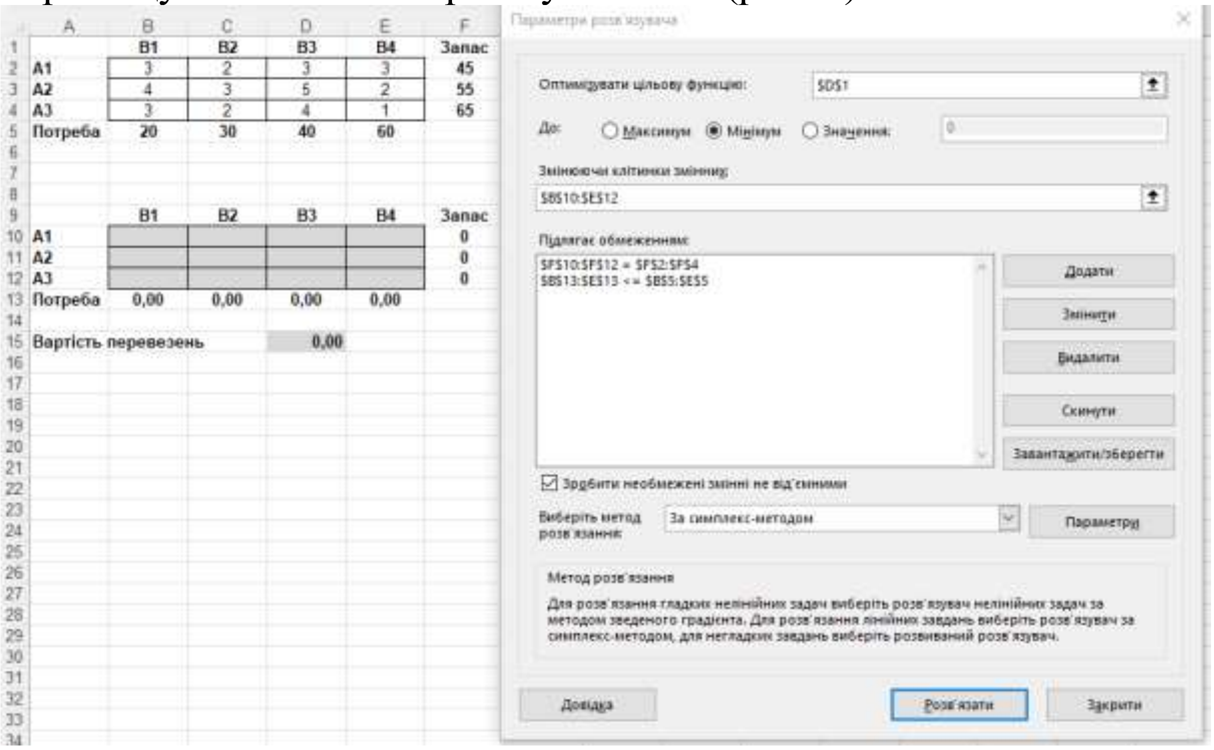


Рис. 5. Приклад розв’язання незбалансованої транспортної задачі

Якщо кількість потреби у вантажі перевищує його наявність на складах (рис.6)

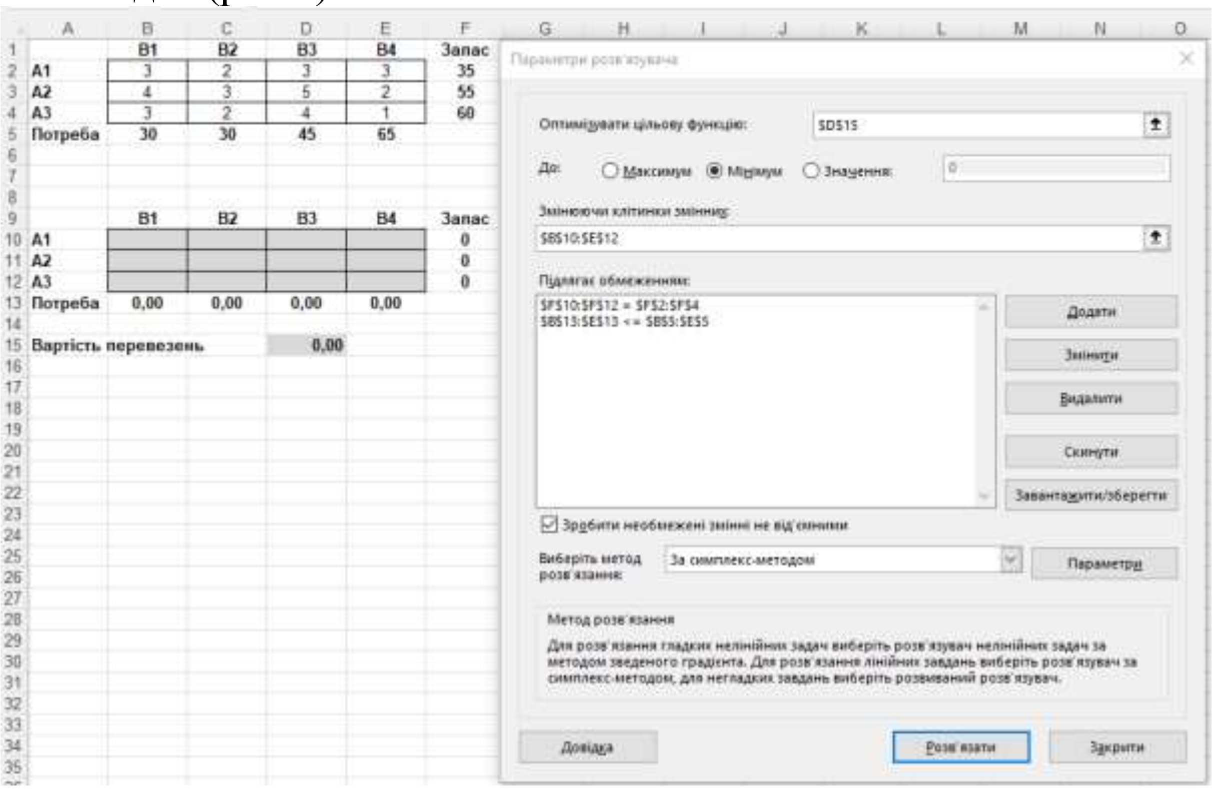


Рис. 6. Приклад розв’язання незбалансованої задачі

4.4. Задача про призначення, її різновиди та розв'язання

Окремим випадком транспортної задачі є задача про призначення.

Постановка задачі

Потрібно виконати n різних робіт і є n механізмів для їх виконання, причому кожний механізм може бути використаний на будь-якій, але одній роботі. Продуктивність кожного механізму при виконанні певного виду робіт відома. Потрібно так розподілити механізми по роботах, щоб сумарна продуктивність була максимальною.

Або інша інтерпретація.

Керівництву підприємства необхідно призначити на n посад працівників, таким чином, щоб забезпечити виконання всіх робіт за мінімальну вартість. При цьому відома ціна, яку бажає отримати працівник за виконання певного виду робіт.

Отже, бачимо, що метою задачі про призначення може бути як мінімізація, так і максимізація якихось показників. Вихідні дані можуть мати лише одне з двох значень – 1 або 0 – тобто призначено чи не призначено робітника.

Приклад задачі також є в Solvsamp.xls

Задача 1

Є 4 будівельні бригади, які можуть виконати 4 види робіт за певну вартість. Необхідно розподіли роботи між бригадами таким чином, щоб вартість виконання всього комплексу була мінімальною.

	Вартість робіт			
Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4
1	100	90	50	40
2	80	100	55	50
3	90	70	45	60
4	90	80	50	45

Побудуємо модель задачі.

Змінні x_{ij} будуть означати призначення i-ї бригади на j-й вид робіт, тобто

$x_{ij}=1$, якщо i-та бригада призначається на j-й вид робіт;

$x_{ij}=0$, якщо i-та бригада не призначається на j-й вид робіт.

Загальна вартість робіт, яка повинна бути мінімальною, становитиме:

$$z = 100x_{11} + 90x_{12} + 50x_{13} + 40x_{14} + 80x_{21} + 100x_{22} + 55x_{23} + 50x_{24} +$$

$$\boldsymbol{+90x_{31} + 70x_{32} + 45x_{33} + 60x_{34} + 90x_{41} + 80x_{42} + 50x_{43} + 45x_{44} \to min}$$

або в загальному вигляді:

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

На кожен вид робіт може бути призначено тільки одну бригаду, тому:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1,$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1,$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1,$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1,$$

або в загальному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

В цьому випадку буде розподілено всі роботи між бригадами, однак однією бригадою можуть бути виконані декілька видів робіт.

Якщо необхідно одночасне виконання всіх робіт, тобто, щоб одна бригада виконувала тільки один вид робіт, потрібно ввести додаткові обмеження:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1,$$

або в загальному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}} \ .$$

Таким чином, математична модель задачі в загальному виді:

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad i, \ j = \overline{1, n}$$

Розв'яжемо поставлену задачу за допомогою Excel (рис. 7, 8):

	A	B	C	D	E	F	G
1		Вартість робіт					
2	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4		
3	1	100	90	50	40		
4	2	80	100	55	50		
5	3	90	70	45	60		
6	4	90	80	50	45		
7							
8							
9		Розподіл робіт					
10	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4	Всього	Необхідно
11	1.	0	0	0	1	1	1
12	2.	1	0	0	0	1	1
13	3.	0	1	0	0	1	1
14	4.	0	0	1	0	1	1
15	Всього	1	1	1	1		
16	Необхідно	1	1	1	1		
17							
18	**Загальна вартість робіт**					**240**	

Рис. 7. Збалансована задача про призначення

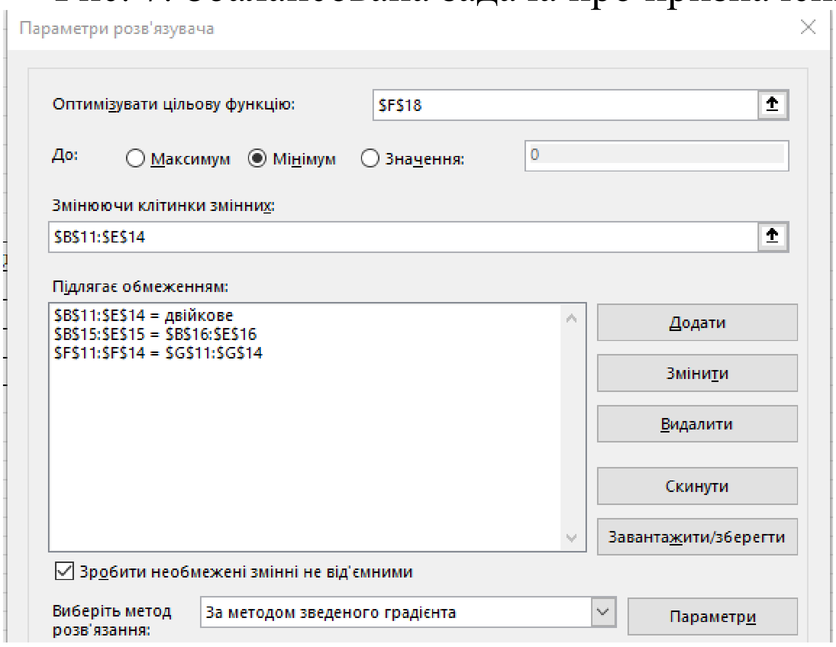


Рис. 8. Розв'язання збалансованої задачі про призначення

Задача про призначення, також як і транспортна задача, може бути *незбалансованою*. Розглянемо варіант задачі з надлишком пропозицій. Є 4 бригади і 3 види робіт:

	Вартість робіт		
Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3
1	100	90	50
2	80	100	55
3	90	70	45
4	90	80	50

В цьому випадку обмеження по призначенню кожної бригади на якусь роботу, змінюється, тобто $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1, n}$ (Рис. 9):

	A	B	C	D	E	F
1	Незбалансована задача про призначення з надлишком пропозиції					
2						
3		Вартість робіт				
4	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3		
5	1	100	90	50		
6	2	80	100	55		
7	3	90	70	45		
8	4	90	80	50		
9						
10						
11		Розподіл робіт				
12	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Всього	Необхідно
13	1.	0	0	1	1	1
14	2.	1	0	0	1	1
15	3.	0	1	0	1	1
16	4.	0	0	0	0	1
17	Всього	1	1	1		
18	Необхідно	1	1	1		
19						
20	Загальна вартість робіт				200,00	

Рис. 9. Незбалансована задача про призначення з надлишком пропозиції

Розглянемо задачу з надлишком попиту:

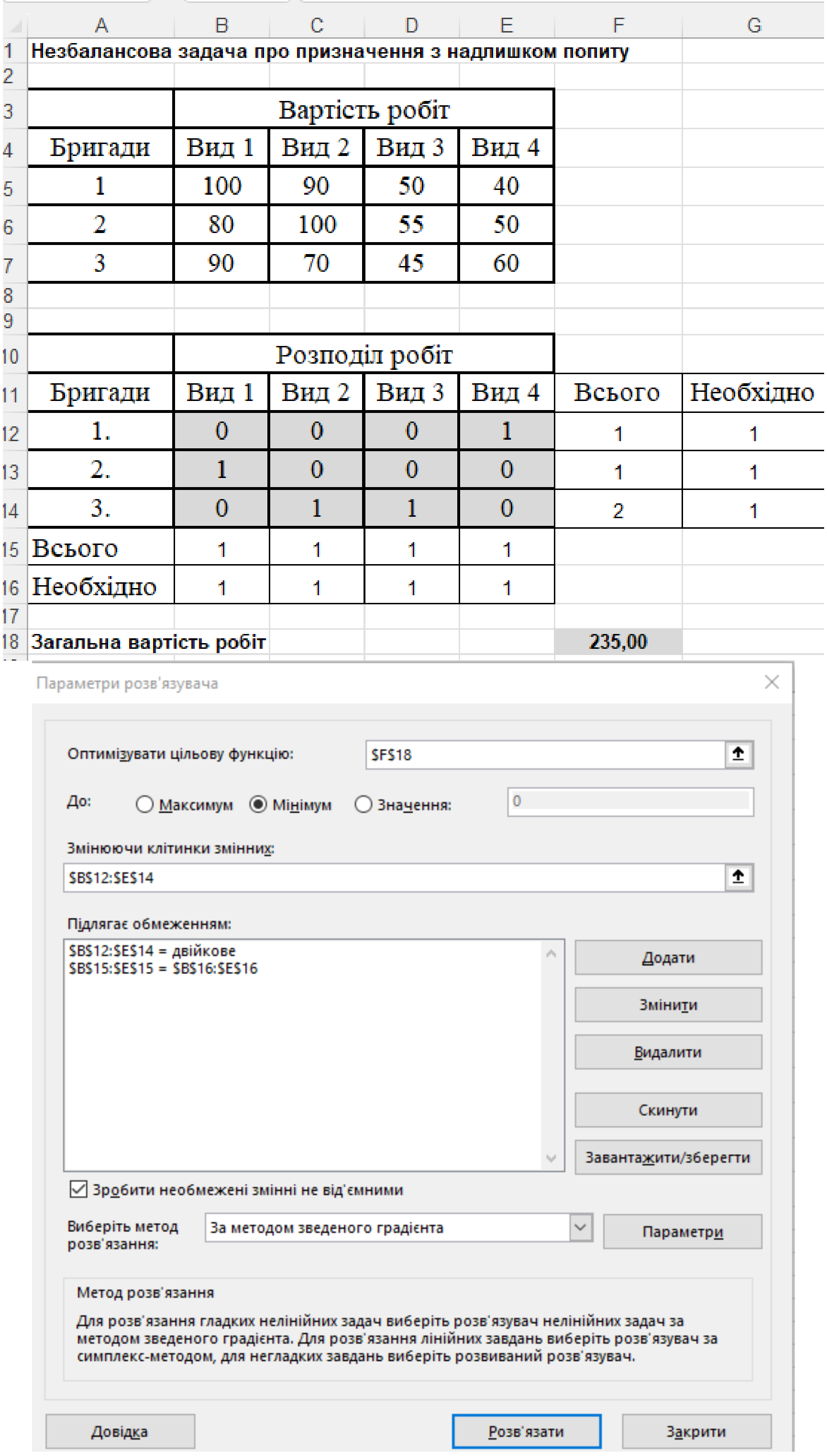
	Вартість робіт			
Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4
1	100	90	50	40
2	80	100	55	50
3	90	70	45	60

При такій постановці задачі можливі випадки:

– необхідно виконати всі види робіт, але при цьому деякі бригади будуть виконувати декілька видів робіт;

– кожна бригада виконує тільки одну роботу, але тоді частина робіт залишиться невиконаною.

В першому випадку просто знімається обмеження, що одна бригада виконує тільки один вид робіт (тобто сума по рядках не обов’язково повинна дорівнювати 1) (Рис. 10):



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Незбалансова задача про призначення з надлишком попиту**						
2							
3		Вартість робіт					
4	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4		
5	1	100	90	50	40		
6	2	80	100	55	50		
7	3	90	70	45	60		
8							
9							
10		Розподіл робіт					
11	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4	Всього	Необхідно
12	1.	0	0	0	1	1	1
13	2.	1	0	0	0	1	1
14	3.	0	1	1	0	2	1
15	Всього	1	1	1	1		
16	Необхідно	1	1	1	1		
17							
18	**Загальна вартість робіт**					235,00	

Рис. 10. Задача про призначення з надлишком попиту

В другому випадку, вводимо обмеження, на виконання робіт, тобто $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ \mathrm{j} = \overline{1,\mathrm{n}}$ (сума по стовпчиках не обов’язково повинна дорівнювати 1) (Рис. 11):

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Незбалансова задача про призначення з надлишком попиту**						
2							
3		Вартість робіт					
4	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4		
5	1	100	90	50	40		
6	2	80	100	55	50		
7	3	90	70	45	60		
8							
9							
10		Розподіл робіт					
11	Бригади	Вид 1	Вид 2	Вид 3	Вид 4	Всього	Необхідно
12	1.	0	0	0	1	1	1
13	2.	1	0	0	0	1	1
14	3.	0	0	1	0	1	1
15	Всього	1	0	1	1		
16	Необхідно	1	1	1	1		
17							
18	**Загальна вартість робіт**					**165,00**	

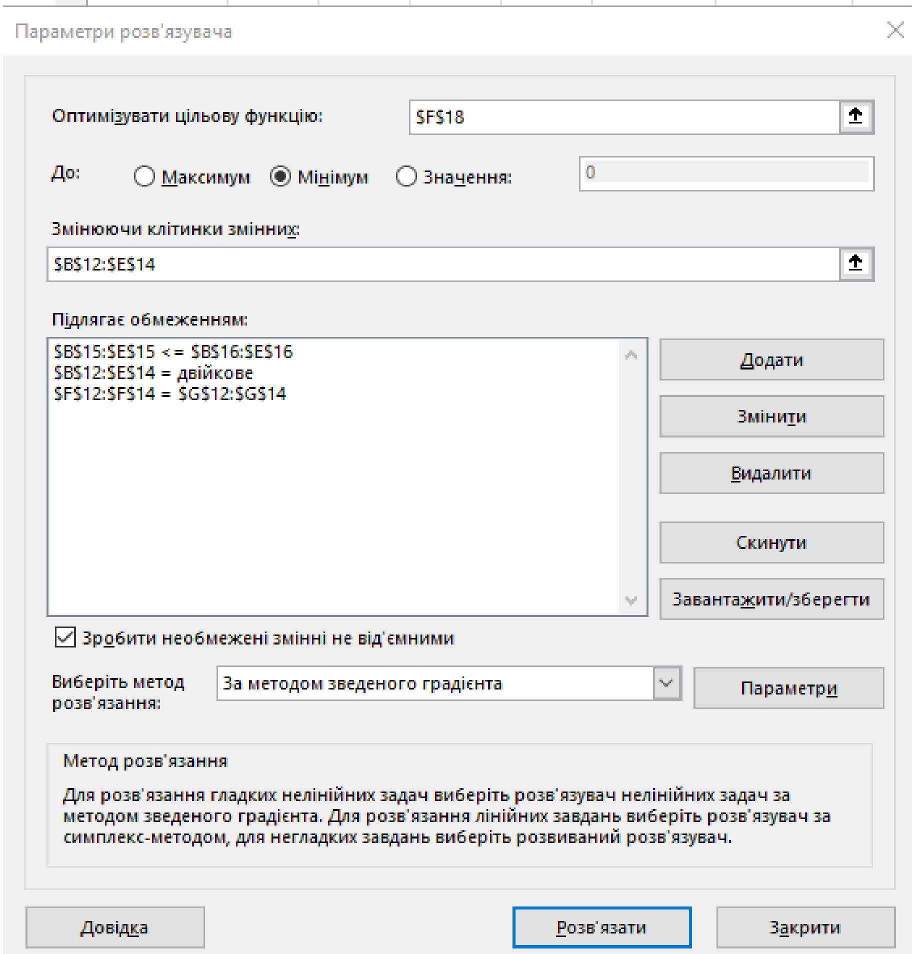


Рис. 11. Задача про призначення з надлишком попиту

Тема 5. Транспортна задача із заборонами

План

5.1. Поняття транспортної задачі із заборонами.

5.2. Розв'язання транспортної задачі із заборонами.

5.3. Двоетапна транспортна задача та методика її розв'язання.

5.4. Алгоритм переходу від задачі з проміжними пунктами до одноетапної транспортної задачі.

5.5. Приклад розв'язання двоетапної транспортної задачі.

5.1. Поняття транспортної задачі із заборонами

Припустимо, що для класичної транспортної задачі потрібно знайти найдешевший для реалізації план перевезень товарів від постачальників до споживачів, але при цьому вимагається, щоб для деяких наперед заданих компонент плану виконувалася умова $\boldsymbol{x_{ij}=0}$ (тобто між деякими постачальниками та споживачами були відсутні комунікації).

Клітини таблиці транспортної задачі, в яких повинні бути перевезення $\boldsymbol{x_{ij}=0}$, називаються ***забороненими***, а сама задача – ***транспортною задачею із заборонами.*** Транспортні задачі із заборонами можна розглядати як закриті, так і відкриті.

У заборонених клітинках вартість перевезення товару позначається $\boldsymbol{M}$ – дуже велике додатне число. Якщо компоненти оптимального плану такої задачі, які відповідають забороненим клітинам, дорівнюють нулю, то отриманий план є оптимальним для задачі із заборонами, в іншому випадку транспортна задача із заборонами розв'язку немає.

5.2. Розв'язання транспортної задачі із заборонами

Задача 1

Знайти розв'язок ТЗ із заборонами:

	В1	В2	В3	В4	Запас
А1	6	5	4	M	35
А2	7	6	5	4	45
А3	3	M	5	6	55
А4	4	5	6	7	50
Потреба	45	55	50	35	

Розв’яжемо задачу за допомогою Excel. Є деякі відмінності розв’язання даної задачі по відношенню до традиційної (рис.1):

	A	B	C	D	E	F
1	Вартість транспортування					
2		B1	B2	B3	B4	
3	A1	6	5	4	M	35
4	A2	7	6	5	4	45
5	A3	3	M	5	6	55
6	A4	4	5	6	7	50
7		45	55	50	35	
8						
9	Коефіцієнти цільової функції					
10		B1	B2	B3	B4	
11	A1	1	1	1	M	
12	A2	1	1	1	1	
13	A3	1	M	1	1	
14	A4	1	1	1	1	
15						
16	Значення шуканих змінних					
17		B1	B2	B3	B4	
18	A1					0
19	A2					0
20	A3					0
21	A4					0
22		0	0	0	0	
23						
24	Цільова функція					0,00

Рис. 1. Загальний вигляд форми для розв’язання транспортної задачі із заборонами

На відміну від звичайної транспортної задачі, при розв’язанні задачі із заборонами, утворюється додаткова таблиця із коефіцієнтами цільової функції, в якій вказуються заборонені клітинки (коефіцієнт M).

	A	B	C	D	E	F
1	Вартість транспортування					
2		B1	B2	B3	B4	
3	A1	6	5	4	M	35
4	A2	7	6	5	4	45
5	A3	3	M	5	6	55
6	A4	4	5	6	7	50
7		45	55	50	35	
8						
9	Коефіцієнти цільової функції					
10		B1	B2	B3	B4	
11	A1	1	1	1	M	
12	A2	1	1	1	1	
13	A3	1	M	1	1	
14	A4	1	1	1	1	
15						
16	Значення шуканих змінних					
17		B1	B2	B3	B4	
18	A1				M	=SUMPRODUCT(B11:E11;B18:E18)
19	A2					=SUMPRODUCT(B12:E12;B19:E19)
20	A3		M			=SUMPRODUCT(B13:E13;B20:E20)
21	A4					=SUMPRODUCT(B14:E14;B21:E21)
22		=SUMPRODUCT(B11:B14;B18:B21)	=SUMPRODUCT(C11:C14;C18:C21)	=SUMPRODUCT(D11:D14;D18:D21)	=SUMPRODUCT(E11:E14;E18:E21)	
23						
24	Цільова функція					=SUMPRODUCT(B3:E6;B18:E21)

Рис. 2. Формули для розв’язання транспортної задачі із заборонами

При цьому по кожному рядку чи стовпчику у матриці *Значення шуканих змінних* обчислюється не просто сума (для контролю виконання замовлення), а сума добутків невідомих на коефіцієнти цільової функції. У тому випадку, коли випадає множення на М, операція не виконується і таким чином дане значення не потрапляє до загальної суми.

	A	B	C	D	E	F
1	Вартість транспортування					
2		B1	B2	B3	B4	
3	A1	6	5	4	M	35
4	A2	7	6	5	4	45
5	A3	3	M	5	6	55
6	A4	4	5	6	7	50
7		45	55	50	35	
8						
9	Коефіцієнти цільової функції					
10		B1	B2	B3	B4	
11	A1	1	1	1	M	
12	A2	1	1	1	1	
13	A3	1	M	1	1	
14	A4	1	1	1	1	
15						
16	Значення шуканих змінних					
17		B1	B2	B3	B4	
18	A1	0	5	30	0	35
19	A2	0	0	10	35	45
20	A3	45	0	10	0	55
21	A4	0	50	0	0	50
22		45	55	50	35	
23						
24	Цільова функція					770,00

Рис. 3. Рішення транспортної задачі із заборонами

5.3. Розв'язання двоетапної транспортної задачі

Якщо перевезення продукції виконується не безпосередньо від постачальника до споживача, а через деякі проміжні пункти, застосовується ***двохетапна транспортна задача***.

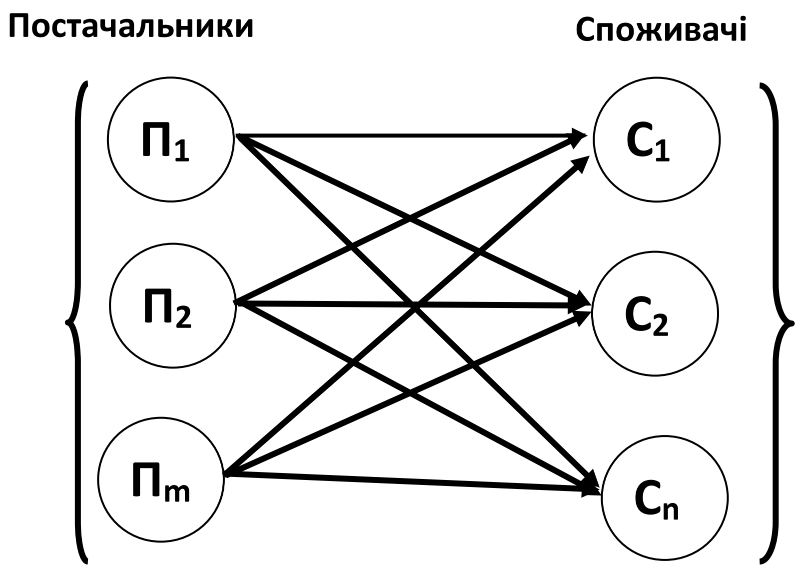


Рис. 4. Система «постачальники-споживачі»

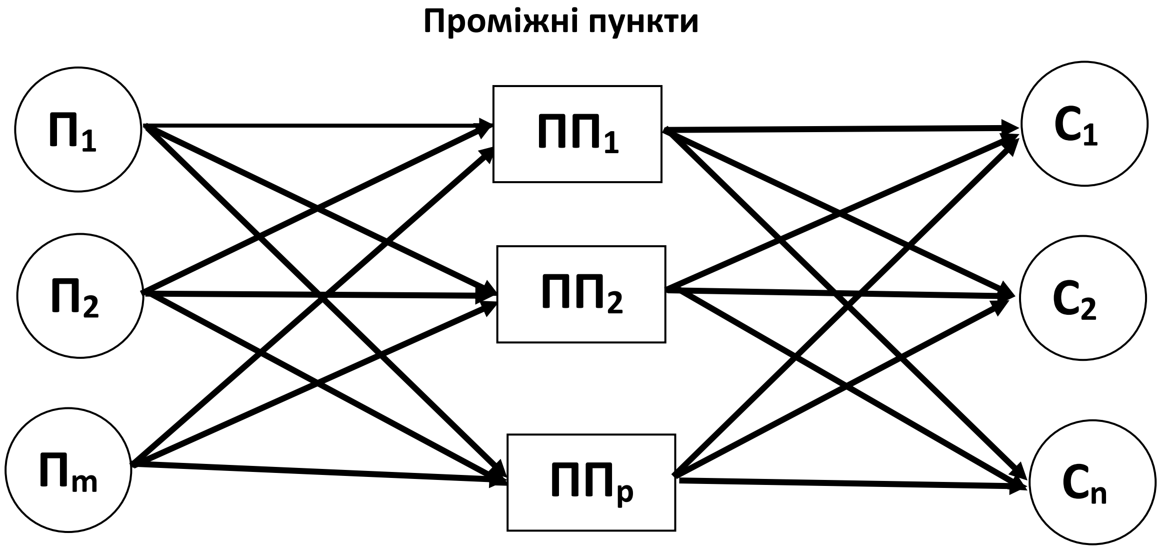


Рис. 5. Система «постачальники – проміжні пункти – споживачі»

Складемо математичну модель такої задачі.

Позначимо $x_{ik}^{(1)}$ – обсяг перевезень продукції від ***i***-го постачальника до ***k***-го проміжного пункту; $x_{kj}^{(2)}$ – обсяг перевезень продукції від k-го проміжного пункту до j-го споживача.

Таким чином обмеженнями задачі будуть:

а) обсяг товару, перевезеного від постачальників до проміжних пунктів повинен дорівнювати загальному наявному обсягу запасів:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik}^{(1)} = a_i; \quad \left(\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}\right);$$

б) обсяг вантажу, перевезеного від проміжних пунктів до споживачів повинен дорівнювати загальній потребі споживачів:

$$\sum_{k=1}^{p} x_{kj}^{(2)} = b_j; \quad \left(\mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{m}}\right);$$

в) відповідно обсяг наявного вантажу повинен дорівнювати попиту на нього (задача збалансована)

$$\sum_{k=1}^{p} x_{ik}^{(1)} = \sum_{k=1}^{p} x_{kj}^{(2)};$$

Цільова функція – мінімум сумарних затрат, тобто

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}c_{ik}^{(1)}x_{ik}^{(1)}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}^{(2)}x_{kj}^{(2)}\to\min .$$

5.4. Алгоритм переходу від задачі з проміжними пунктами до одноетапної транспортної задачі

$i \backslash j$	**1**	**2**	**…**	**n**	**n+1**	**n+2**	**…**	**n+p**
1					c^1_{11}	c^1_{12}	…	c^1_{1p}
2					c^1_{21}	c^1_{22}	…	c^1_{2p}
…					…	…	…	…
m					c^1_{m1}	c^1_{m2}	…	c^1_{mp}
m+1	c^2_{11}	c^2_{12}	…	c^2_{1p}	**0**			
m+2	c^2_{21}	c^2_{22}	…	c^2_{2p}		**0**		
…	…	…	…	…			**…**	
m+p	c^2_{p1}	c^2_{p2}	…	c^2_{pnp}				**0**

Рис. 6. Розширена транспортна таблиця

1. Замість ***m*** початкових постачальників розглядається ***(m+p)*** постачальників, обсяг наявної продукції в кожного з ***p*** нових постачальників дорівнює загальному потоку продукції:

$$a_{m+k}=\sum_{j=1}^{n}b_j .$$

2. Замість ***n*** кінцевих споживачів розглядають ***(n+p)*** споживачів за умови, що потреби кожного з ***p*** нових споживачів також дорівнюють загальному потоку продукції:

$$b_{n+k}=\sum_{i=1}^{m}a_i .$$

3. Забороняється перевезення продукції від кожного з ***m*** перших постачальників до кожного з ***n*** перших споживачів, а

також від кожного з ***p*** нових споживачів, крім «діагональних перевезень» від ***(m+k)***-го постачальника до ***(n+k)***-го споживача. Питомі транспортні витрати за згаданими «діагональними» маршрутами вважатимемо такими, що дорівнюють нулю.

5.5. Приклад розв'язання двоетапної транспортної задачі

Задача 2

Три постачальники, що мають відповідно 50, 70, 100 одиниць вантажу, транспортують його двом споживачам в обсязі відповідно 140 та 80 одиниць. Транспортування продукції здійснюється через два проміжні пункти, проте перший постачальник має змогу надсилати продукцію й безпосередньо першому споживачеві, не вдаючись до поставок через проміжні пункти. Водночас перший постачальник не може надсилати свою продукцію через другий проміжний пункт – цей маршрут для нього заборонений. Вся продукція від другого й третього постачальників може надсилатись споживачам лише через проміжні пункти. Відомі питомі вартості перевезень за кожним з можливих маршрутів (рис. 7):

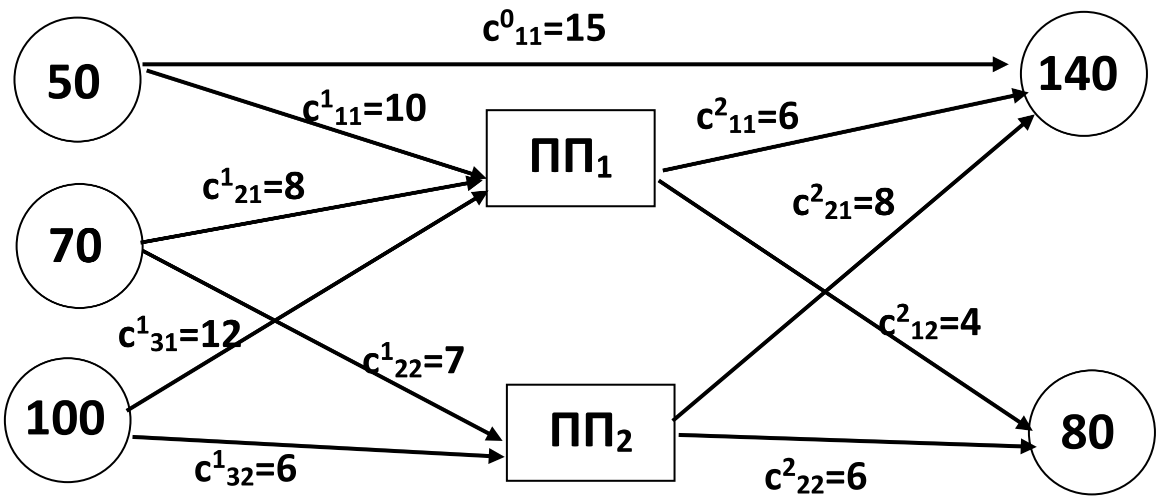


Рис. 7. Вихідні дані транспортної задачі з проміжними пунктами

Знайти оптимальний план перевезень.

Згідно алгоритму, перейдемо до одноетапної ТЗ:

		В1	**В2**	**ПП1**	**ПП2**
		140	**80**	**220**	**220**
А1	**50**	**15**		**10**	
А2	**70**			**8**	**7**
А3	**100**			**12**	**6**
ПП1	**220**	**6**	**4**	**0**	
ПП2	**220**	**8**	**6**		**0**

Розв'яжемо задачу за допомогою Excel.

F26 =SUMPRODUCT(B3:E7;B20:E24)

	A	B	C	D	E	F
1	Витрати на перевезення					
2		В1	В2	ПП1	ПП2	
3	А1	15		10		50
4	А2			8	7	70
5	А3			12	6	100
6	ПП1	6	4	0		220
7	ПП2	8	6		0	220
8		140	80	220	220	
9						
10	Коефіцієнти цільової функції					
11		В1	В2	ПП1	ПП2	
12	А1	1	M	1	M	
13	А2	M	M	1	1	
14	А3	M	M	1	1	
15	ПП1	1	1	1	M	
16	ПП2	1	1	M	1	
17						
18	Шукані змінні					
19		В1	В2	ПП1	ПП2	
20	А1	50	0	0	0	50
21	А2	0	0	70	0	70
22	А3	0	0	0	100	100
23	ПП1	30	40	150	0	220
24	ПП2	60	40	0	120	220
25		140	80	220	220	
26	**ЦФ**					**2970**

Рис.8. Розв'язання задачі в Excel

Тема 6. Виробничі функції

План

6.1. Поняття виробничої функції.
6.2. Виробничі функції однієї змінної.
6.3. Багатофакторні виробничі функції.
6.4. Загальні властивості виробничих функцій.
6.5. Визначення параметрів виробничих функцій.
6.6. Граничні та середні значення виробничих функцій.
6.7. Врахування часу при розбудові виробничих функцій.

6.1. Поняття виробничої функції

Аналіз виробничо-економічної діяльності дозволяє розробити теорії розбудови спеціальних економіко-виробничих математичних моделей дослідження виробничих процесів – так званих *виробничих функцій* (ВФ).

Мета розбудови виробничих функцій – проаналізувати і визначити аналітичну залежність у кількісних вимірах між використовуваними ресурсами та обсягами продукції. Вони застосовуються для *аналізу, планування та прогнозування* на різних рівнях управління.

Як факторні ознаки використовуються: вартість основних виробничих фондів, дози внесення органічних і мінеральних добрив, забезпеченість трудовими ресурсами тощо.

Результати виробництва відображаються в показниках валової та товарної продукції, прибутку, продуктивності праці тощо.

6.2. Виробничі функції однієї змінної

З точки зору економічного використання, ВФ є функцією, незалежна змінна якої набуває значення обсягів використовуваного ресурсу (фактора виробництва), а залежна змінна, тобто функція, – значення обсягів виробництва продукції або інших показників цілеспрямованої діяльності.

Запис $y = f(x)$ означає: якщо ресурс буде використаний в обсязі x певних одиниць виміру, то продукції буде одержано в обсязі $y = f(x)$ одиниць відповідного виміру.

Етапи побудови ВФ:

- ***специфікація* – вибір виду формули шуканої ВФ (таких формул може бути декілька);**
- ***параметризація*** – визначення параметрів ВФ за статистичними експериментальними даними;
- ***верифікація*** – вибір міри точності узгодження ВФ з експериментальними даними;
- на множині вибраних формул за критерієм узгодження вибирається певна конкретна формула.

Найбільш поширений метод узгодження – ***метод найменших квадратів (МНК).***

6.3. Багатофакторні виробничі функції

Якщо необхідно визначити вплив кількох факторів на обсяги випуску продукції за певні проміжки часу, то ВФ розбудовують як функцію кількох незалежних змінних і називають її багатофакторною:

$$Y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_m\right).$$

У *мікроекономіці* багатофакторні ВФ характеризують обсяг виробництва в натуральному або вартісному вимірі, обумовлений затратами робочого часу, виробничої сировини, комплектуючих, енергії, основного капіталу і т. ін. ВФ такого змісту характеризують з економічної точки зору *технологію* виробництва.

На *макроекономічному* рівні (дослідження стосовно регіону або країни) обсяг випуску продукції *У* характеризують у *стабільних* цінах (або з врахуванням інфляції). За ресурси (фактори впливу) приймають *основний капітал К* (обсяг *використаного* капіталу на контрольованому проміжку) та *живий продукт L* (обсяг живої праці, затраченої на контрольованому проміжку), представлений його вартістю. Такі змінні використовуються для розбудови двофакторної ВФ.

Якщо необхідно врахувати інші аспекти виробничої діяльності, то використовується три- або чотирифакторна ВФ.

6.4. Загальні властивості виробничих функцій

Для зручності запису назвемо властивості лише для випадку двофакторних функцій.

1. $f(0,0) = 0$. **1a**. $f(0,x_2) = f(x_1,0) = 0$.

Ці властивості свідчать про те, що без ресурсів не може бути виробництва.

2. Якщо збільшується величина хоча б одного з факторів, то значення ВФ теж збільшуються, що означає умову: коли $x_1^* > x_1^0$ або $x_2^* > x_2^0$, то виконується відношення $f\left(x_1^*, x_2^*\right) > f\left(x_1^0, x_2^0\right)$.

Тобто $\frac{\partial f}{\partial x_1} > 0$ і $\frac{\partial f}{\partial x_2} > 0$ в області визначення ВФ.

Ця властивість означає, що при збільшенні величини будь-якого фактора обсяг виробництва теж збільшується. Наприклад, внесення добрив сприяє збільшенню врожайності.

3. Завжди $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \le 0$ і $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \le 0$.

Збільшення величини певного ресурсу за умови фіксованості величини решти ресурсів хоча і викликає збільшення обсягу виробництва, але характер завжди такий, що збільшення величини ресурсу на кожну додаткову одиницю обумовлює *спад приросту* обсягу виробництва *(закон спадаючої ефективності).*

4. Виробнича функція має бути однорідною функцією певного порядку ***p*** своїх аргументів, тобто $f\left(\lambda x_1, \lambda x_2\right) = \lambda^p f\left(x_1, x_2\right)$.

Це означає, що зміна масштабів (мірила) одиниць вимірів виробничих факторів обумовлює зміну масштабу виміру одиниць обсягів виробництва.

Якщо $p > 1$ і $\lambda > 1$, то маємо підвищення ефективності виробництва.

Якщо ***p<1*** (**λ *>1***), маємо спад ефективності виробництва.

При ***p = 1*** маємо сталу ефективність виробництва.

6.5. Визначення параметрів виробничих функцій

Конкретне представлення розв'язувальних рівнянь, які називаються ***системою нормальних рівнянь*** (розв’язувальних рівнянь), залежить від аналітичної форми представлення ВФ.

Лінійна парна регресія

Лінійна парна регресія має вигляд: $\hat{\mathbf{y}} = a_0 + a_1\mathbf{x}$.

Параметри регресії обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \\ a_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}. \end{cases}$$

Двофакторна ВФ в лінійній трипараметричній формі.

У формулі $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ вплив величин виробничих факторів на обсяг виробництва обумовлений лише останніми двома доданками; величина $\boldsymbol{a_0}$ визначає лише початок відліку обсягу виробництва. Наприклад, при дослідженні ефективності збільшення врожайності в залежності від обсягів використовуваних добрив, величина $\boldsymbol{a_0}$ визначатиме урожайність без використання добрив, тобто фактичний ефект визначатиметься лише доданками $\boldsymbol{a_1x_1+ a_2x_2}$.

Для функції $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ система розв'язувальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum x_{1,i} + a_2\sum x_{2,i} = \sum y_i; \\ a_0\sum x_{1,i} + a_1\sum \left(x_{1,i}\right)^2 + a_2\sum x_{1,i}\cdot x_{2,i} = \sum y_i \cdot x_{1,i}; \\ a_0\sum x_{2,i} + a_1\sum x_{1,i}\cdot x_{2,i} + a_2\sum \left(x_{2,i}\right)^2 = \sum y_i \cdot x_{2,i}. \end{cases}$$

Нелінійні функції

Нелінійна парна регресія

Практика математичного моделювання соціально-економічних явищ і процесів свідчить, що не завжди можна користуватися лінійними моделями, оскільки можуть виникати необґрунтовано значні похибки моделювання. У таких випадках використовують рівняння регресії, нелінійне по незалежній змінній. Якщо рівняння регресії має вигляд $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, то параметри знаходять за МНК із системи нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i; \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum y_i \cdot x_i; \\ a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum y_i \cdot x_i^2. \end{cases}$$

Нелінійні багатофакторні функції

Якщо ВФ *нелінійна* стосовно параметрів $\boldsymbol{a_1, a_2, ..., a_m}$, то система розв'язувальних рівнянь також буде нелінійною. Розв'язання таких систем виконується методами, побудованими з використанням поняття градієнта.

На практиці широко використовуються такі форми аналітичної залежності, які після відповідних перетворень можна привести в нових координатах відліку до лінійної.

Для дослідження економічного процесу в межах регіону або країни в цілому широко використовують ВФ у формі $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$. Така ВФ називається ***ВФ Кобба-Дугласа*** (ВФКД).

У літературі використовуються специфіковані позначення змінних цієї функції: $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$, де ***К*** – обсяг використаного основного капіталу (основні фонди); ***L*** – обсяг затраченої живої праці.

Для знаходження параметрів цієї функції, скористаємося методом лінеаризації.

Зведемо функцію $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ до лінійного виду:

$$\ln y = \ln(a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2});$$

$$\ln y = \ln a_0 + \ln x_1^{a_1} + \ln x_2^{a_2};$$

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2.$$

Вводимо нові змінні:

$$z = \ln y; \quad b_0 = \ln a_0; \qquad u_1 = \ln x_1; \qquad u_2 = \ln x_2.$$

Отримаємо лінійну функцію: $z = b_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2$, параметри якої знаходимо за вже відомими формулами.

6.6. Граничні та середні значення виробничих функцій

Якщо $y = f(x_1, x_2)$ є певною ВФ, побудованою для дослідження заданого економічного процесу, то дріб $\frac{f(x_1, x_2)}{x_i}$ (***i=1,2***) називається ***середньою продуктивністю і-го ресурсу*** (фактора виробництва), або ***середнім випуском за і-им ресурсом*** (фактором виробництва).

Для двофакторної ВФ Кобба-Дугласа $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$ стосовно середніх продуктивностей основного капіталу та праці були запроваджені терміни *«капіталовіддача»* – $\frac{Y}{K}$ та *«продуктивність_праці»* – $\frac{Y}{L}$.

Величини перших частинних похідних $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ та $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ називаються ***граничними продуктивностями*** відповідного ресурсу (фактора виробництва).

Для функції Кобба-Дугласа відповідно гранична фондовіддача та гранична продуктивність праці.

За означенням першої частинної похідної маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x_i, x_k) - f(x_i, x_k)}{\Delta x_i} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\Delta_i f}{\Delta x_i}.$$

Тобто відношення частинного приросту ВФ до приросту відповідного аргументу показує, *на скільки збільшиться обсяг виробництва* за умови, що *обсяг витрат і-го ресурсу збільшиться на одиницю*, а обсяг витрат іншого ресурсу залишиться незмінним.

Відношення граничної продуктивності *і*-го ресурсу (фактора виробництва) до його середньої продуктивності називається ***частинною еластичністю і-го ресурсу*** (фактора виробництва):

$$E_i = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{f(x_1; x_2)}{x_i}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} x_i}{y}.$$

E_i показує *зміну відносного обсягу випуску* продукції при *зміні відносних витрат і-го ресурсу.*

Якщо заміри виконувати у відсотках, то дане відношення показує, на *скільки відсотків зміниться обсяг випуску*, якщо *відносні витрати і -го ресурсу зміняться на один відсоток* за умови, що витрати іншого ресурсу залишаться незмінними.

Сума ***$E = E_1 + E_2$*** називається ***еластичністю виробництва***.

В економічних дослідженнях досить часто виникає питання про можливість заміни одного ресурсу іншим за умови збереження обсягу виробництва.

Граничною нормою заміни (заміщення) *і*-го ресурсу (фактора виробництва) *j*-им за певних їх величин називається відношення ***R_{ij}***: $R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}$ (***i, j =1,2***) за умови сталого значення ***y*** – величини ВФ, де ***i*** - номер того ресурсу, <u>який замінюють</u>; ***j***- номер ресурсу, <u>яким замінюють</u>; нескінченно малі прирости ***dx_i*** та ***dx_j*** – незалежні.

Для двофакторної функції гранична норма заміни ресурсів ***$R_{1,2}$*** наближено визначає, у скільки разів необхідно збільшити витрати другого ресурсу при зменшенні витрат першого ресурсу на одиницю, щоб забезпечити сталість виробництва.

Виконується співвідношення: $R_{1,2} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$.

Тобто гранична норма заміни першого ресурсу другим дорівнює відношенню еластичності випуску продукції по першому і другому ресурсах, помноженому на відношення обсягу другого до обсягу першого ресурсу. Якщо названа умова не буде виконана, то, заміняючи обсяги ресурсів, не можна забезпечити сталість обсягів виробництва.

Для ВФ Кобба-Дугласа, якщо ***x_1=К, x_2=L,*** відношення $\frac{x_1}{x_2} = \frac{K}{L}$ називається ***капіталозабезпеченістю праці***.

У цьому випадку гранична норма заміни основного капіталу працею дорівнює відношенню еластичності випуску за основним капіталом і працею, поділеному на капіталозабезпеченість праці.

6.7. Врахування часу при розбудові виробничих функцій

Виробнича функція називається ***динамічною,*** якщо:

1) час ***t*** враховується як самостійна змінна, від якої залежить обсяг виробництва;

2) параметри ВФ залежать від часу ***t.***

Динамічні ВФ використовуються в основному для дослідження зміни контрольованого показника з часом і для розбудови прогнозів його значень у майбутньому.

Якщо параметри ВФ визначалися за даними часових рядів (обсяги використовуваних ресурсів і продукції) на базовому проміжку в *N* періодів (місяців, кварталів, років), то горизонт прогнозу за таких умов з використанням відповідної ВФ недоцільно брати більш ніж на *N/3* періодів.

При розбудові ВФ науково-технічний прогрес (НТП) іноді враховують шляхом використання співмножника НТП, вибраного як $e^{\rho t}$, де параметр ρ характеризує ***темп приросту обсягів виробництва*** за рахунок НТП:

$$y(t) = e^{\rho t} f\,(x_1(t), x_2(t))\,.$$

Така структура ВФ є найпростішим зразком динамічної ВФ, коли вплив НТП оцінюється безпосередньо, а не опосередковано через виробничі фактори. У більш складних ситуаціях НТП впливає безпосередньо на виробничі фактори, в тому числі на продуктивність праці та віддачу капіталовкладень.

Наприклад, на підставі даних про розвиток економіки у 1960-1985 рр. (динаміка національного прибутку, чисельність зайнятих у матеріальному виробництві, обсяги основних фондів) ВФКД без урахування НТП була представлена так:

$$Y = 1{,}022\,K^{0{,}5382}L^{0{,}4618}.$$

При підстановці фактичних даних *K* і L за 1986 р. похибка прогнозу була 3%.

З урахуванням НТП ВФКД стосовно того ж проміжку часу має вигляд

$$Y = 1.038e^{-0{,}0294t}K^{0{,}9749}L^{0{,}2399}.$$

Тема 7. Динамічне програмування

План

7.1. Поняття динамічного програмування.

7.2. Методика розв’язання динамічних задач.

7.3. Задача оптимального розподілу капіталовкладень.

7.4. Задача оптимальної заміни обладнання.

7.1. Поняття динамічного програмування

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, регіони чи окремі підприємства повинні розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші визначаються за допомогою динамічних моделей, розв’язки яких знаходять методами динамічного програмування.

Динамічне програмування (динамічне планування) є особливим математичним методом розв’язання задач певної структури – задач пошуку оптимального розв’язку за умов, що досліджуваний процес істотно залежить від часу і його перебіг може бути поетапно контрольований.

Динамічне програмування ефективно використовується при математичному моделюванні наступних задач:

– розподіл капіталовкладень між можливими напрямами їх використання;

– управління запасами;

– календарне планування виробництва при коливанні попиту на продукцію;

– закупівля запасних частин для забезпечення неперервної експлуатації обладнання;

– планування профілактичного ремонту обладнання економічно значимих підприємств (ТЕЦ, АЕС та ін.);

– вибір методів проведення реклами;

– планування вилучення основних фондів з експлуатації.

Динамічне програмування виникло у 1950-1953рр. на базі робіт Р.Белмана та його співробітників, але перші роботи з використанням основних ідей динамічного програмування з’явилися раніше: Массе (Франція, 1946), Вальд (США, 1947), Ероу і Блекуел (США, 1949).

7.2. Методика розв’язання динамічних задач

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожен крок оптимізується окремо, а рішення (розв’язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі.

Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

З огляду на сказане, оптимізація починається з кінця: насамперед виконується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають ***умовно оптимальним***.

Усі класи задач динамічного програмування розв’язують, керуючись основним принципом: яким би не був стан системи перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибирати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Розв’язок динамічних задач відбувається у наступному порядку:

1. Визначається умовний оптимальний ефект на останньому n-му кроці.

2. Виконується умовна оптимізація (***n-1***)-го, (***n-2***)-го і т.д. кроків, за рекурентними залежностями:

$$Z_j^*(s) = \max\left(f_j(s, x_j) + Z_{j-1}^*(s, x_j)\right) \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{j}$ – номер кроку; $\boldsymbol{f_j(s,x_j)}$ – значення функції на цьому кроці; $\boldsymbol{Z_{j-1}(s,x_j)}$ – вже відомий ефект попередніх кроків.

3. Здійснюється безумовна оптимізація управління у «зворотному» напрямі – від початкового стану до кінцевого для відшукання оптимального плану.

7.3. Задача оптимального розподілу капіталовкладень

Між чотирма об'єктами необхідно розподілити ***100*** у.о. Обсяги зисків ***f(x)*** від величини асигнувань ***x*** кожного об'єкта наведені в таблиці 1 (для зручності обсяги асигнувань беремо кратні 20).

Таблиця 1

Обсяги асигнувань	Приріст прибутку на підприємствах (***f***)			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Розв'язання

Необхідно починати розподіл коштів для одного об'єкта, потім для двох і т. д., за умови, що для решти об'єктів кошти уже розподілені. За схемою розв'язання задач ДП умовна оптимізація розпочинається з пошуку оптимізації процесу на останньому кроці. Для нашої задачі це означає асигнування одного об'єкта (умовно названого як перший). Для одного об'єкта використовуючи дані таблиці 1, обчислюємо значення $Z_1^*(x)$, наведені в табл. 2. Для першого об'єкту $Z_1^*(x)=f_1(C)$, тобто визначаємо приріст зиску, якщо кошти в певному обсязі будуть направлені лише першому підприємству.

Таблиця 2

Обсяги асигнувань	$f_1(C)$
20	10
40	31
60	42
80	62
100	76

Побудуємо тепер умовно оптимальний пошук для двох об'єктів, враховуючи оптимізацію на першому кроці (для першого об'єкта). За умовою задачі це означає, що кошти направлені на два об'єкти. Відповідне рівняння одержуємо з (1):

$$Z_2^*(y_2) = \max_{0 \le x \le y_2} \left\{ f_2(x) + Z_1^*(y_2 - x) \right\} \qquad (2)$$

На цьому кроці необхідно знайти $Z_2^*(y_2)$ для всіх можливих комбінацій $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y_2} < \boldsymbol{C}$. Розрахунки цього кроку наведені в табл. 3.

$\boldsymbol{y_2}$ – сума, виділена на <u>два</u> об'єкти, $\boldsymbol{x}$ – сума, виділена на другий об'єкт.

Для кожного можливого обсягу асигнування $\boldsymbol{y_2}$ двох об'єктів виділено рядок, а для кожного можливого обсягу асигнування другого об'єкта – стовпчик.

Тобто якщо маємо рядок $\boldsymbol{y_2 = 40}$, то це означає, що на два об'єкти виділено ***40у.о***.; якщо маємо стовпчик $\boldsymbol{x = 20}$, то це означає, що на другий об'єкт виділено ***20у.о.***, а решту ***20*** на перший об'єкт; за такого розподілу коштів очікуваний зиск буде ***22*** (***12*** за рахунок другого об'єкта та ***10*** за рахунок першого об'єкта).

Деякі клітини табл. 3 залишаються пустими, тому що загальна сума коштів не може бути більшою за виділений обсяг асигнувань.

У кожну клітину табл. 3 записуємо суму $\boldsymbol{f_2(x)}$ та $Z_1^*(y_2 - x)$; перший доданок береться з табл. 1, другий – з табл. 2.

Таблиця 3

x / y_2	**0**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	$Z_2^*(y_2)$	x_2^*
20	0+10	12+0					12	20
40	0+31	12+10	26+0				31	0
60	0+42	12+31	26+10	36+0			43	20
80	0+62	12+42	26+31	36+10	54+0		62	0
100	0+76	12+62	26+42	36+31	54+10	78+0	78	100

Наприклад, при розподілі коштів $\boldsymbol{y_2 = 80}$ один із можливих варіантів такий: для другого об'єкта виділяють ***60 у. о***., тобто $\boldsymbol{x = 60}$, а для першого – решту коштів, тобто ***80 -60 = 20 у.о***. За такого розподілу на другому об'єкті очікуваний зиск буде ***36 у. о.*** (табл. 1), а на першому ***10 у. о.*** (табл. 2); загальний зиск з цих двох об'єктів визначається як (***36 + 10***) у. о., що і записано у відповідній клітині табл. 3.

У двох правих стовпчиках табл. 3 записані величина найбільшого зиску $Z_2^*(y_2)$ при можливому значенні $\boldsymbol{y_2}$ та відповідна величина коштів, виділених для другого об'єкта $\boldsymbol{x_2^*}$.

Наприклад, якщо сума коштів, виділених для двох об'єктів, дорівнює ***60 у. о***., то за такої умови найбільша величина зиску складе ***43*** у. о. (***12 + 31***), і цю величину буде досягнуто, якщо для другого об'єкта буде виділено ***20*** у. о., а для першого ***60 - 20 = 40*** у. о.

Розрахунок значень $\boldsymbol{Z_3^*(y_3)}$ для третього кроку пошуку умовних оптимальних розв'язків наведений у табл. 4.

Розрахунки виконано за формулою:

$$Z_3^*(y_3) = \max_{0 \le x \le y_3} \left\{ f_3(x) + Z_2^*(y_3 - x) \right\} \quad (3)$$

Таблиця 4

y_3 \ x	**0**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	$\boldsymbol{Z_3^*(y_3)}$	$\boldsymbol{x_3^*}$
20	0+12	11+0					12	0
40	0+31	11+12	36+0				36	40
60	0+43	11+31	36+12	45+0			48	40
80	0+62	11+43	36+31	45+12	60+0		67	40
100	0+78	11+62	36+43	45+31	60+12	77+0	79	40

При побудові табл. 4 перші доданки вибрані згідно з табл. 1, другі – з табл. 3.

Аналогічно виконуються розрахунки пошуку $Z_4^*(y_4)$.

Таблиця 5

y_4 \ x	**0**	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	$\boldsymbol{Z_4^*(y_4)}$	$\boldsymbol{x_4^*}$
20	0+12	16+0					16	20
40	0+36	16+12	37+0				37	40
60	0+48	16+36	37+12	46+0			52	20
80	0+67	16+48	37+36	46+12	63+0		73	40
100	0+79	16+67	37+48	46+36	63+12	80+0	85	40

Використовуючи отримані дані (табл. 2-5) запишемо зведену таблицю.

Таблиця 6

C	$x_1^*(C)$	$Z_1^*(C)$	$x_2^*(C)$	$Z_2^*(C)$	$x_3^*(C)$	$Z_3^*(C)$	$x_4^*(C)$	$Z_4^*(C)$
20	20	10	***20***	***12***	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	***40***	***48***	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
10	100	76	100	78	40	79	***40***	***85***

Проаналізуємо одержані результати.

Нижній рядок двох останніх стовпчиків табл. 6 свідчить, що найбільший зиск – **85** у. о. від чотирьох об’єктів одержуємо за умови, що заплановану суму коштів **100** у. о. розподілено так: для четвертого об’єкта виділено **40** у. о. (***x_4*(100) = 40***), а для перших трьох ***100 - 40 = 60*** у. о.

Оптимальний розподіл цих коштів (***y_3 = 60***) між трьома об’єктами гарантує зиск в обсязі ***48*** у. о. (***Z_3*(60) = 48***) за умови, що для третього об’єкта буде виділено ***40*** у. о. (***x_3* (60) = 40***), а для перших двох ***60 - 40 = 20*** у. о.

Ці кошти при оптимальному розподілі й дають зиск в обсязі ***12*** у. о. (***Z_2*(20)=12***) за умови, що для другого об’єкта буде виділено ***20*** у. о. (**x*$_2$ (20)= 20**).

Висновок. За економічними даними ефективності реконструкції та модернізації чотирьох об’єктів, представлених у табл. 1, максимальний очікуваний зиск буде ***85*** у. о. за умови розподілу між об’єктами коштів в обсязі ***100*** у. о. за такою схемою:

для першого об’єкта кошти не виділяти;

для другого об’єкта виділити ***20*** у. о.;

для третього та четвертого - по ***40*** у. о.

Це основний результат розв’язку сформульованої задачі.

У табл. 6 наведені також розв’язки поставленої задачі з оптимальним розподілом коштів для різних обсягів від ***20*** до ***100*** у. о. між двома, трьома та чотирма об’єктами за умови ефективності асигнування відповідно до даних табл. 1.

Наприклад, кошти ***100*** у. о. необхідно оптимально розподілити між трьома об’єктами. Скориставшись даними табл. 6, знаходимо, що максимальний зиск ***Z_3*(100)*** становить ***79*** у. о. Такий зиск можна одержати, якщо виділити для третього об’єкта ***40*** у. о., бо ***x_3* (100) = 40***, для останніх двох залишається ***100 - 40 = 60*** у. о. Такі кошти за умови оптимального розподілу між двома об’єктами забезпечать зиск в обсязі ***Z_2* (60) = 43*** у. о., але цього можна досягти, якщо **x_2* (60) = 20** у. о., тобто виділити для другого об’єкта ***20*** у. о., а решту коштів ***60 - 20 = 40*** у. о. виділити для першого об’єкта.

7.4. Задача оптимальної заміни обладнання

При експлуатації виникає потреба заміни обладнання через фізичне та моральне старіння, зростаючі експлуатаційні витрати та витрати на ремонт, внаслідок чого відбувається зменшення прибутків.

При відкритті підприємства встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його використання, а також залежність затрат на його утримання та ремонт при різному часі його використання наведено в таблиці 7.

Відомо, що затрати на придбання та встановлення нового обладнання складають 40 млн. грн., старе обладнання списується. Скласти такий план заміни обладнання протягом п’яти років, при якому загальний прибуток за даний період часу буде максимальним.

Таблиця 7

Показники	Вік обладнання					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції ***R(t)***, млн.грн.	80	75	65	60	60	55
Щорічні затрати ***Z(t)*** на утримання та ремонт обладнання, млн. грн.	20	25	30	35	45	55

Розв’язання. Позначимо через ***u_1*** рішення про збереження обладнання, через ***u_2*** – про заміну обладнання. Це рішення залежить від віку обладнання ***t***.

Тобто необхідно визначити таку стратегію управління, що визначається рішеннями, які приймаються на початок кожного року таким чином, щоб загальний прибуток підприємства за п’ять років був максимальним.

Складемо рекурентне співвідношення Белмана.

В залежності від того, буде замінене обладнання чи ні на початок ***k***-го року, прибуток підприємства за відповідний рік складе:

$$F_k\left(t^{(k)}, u_k\right)_k = \begin{cases} R\left(t^{(k)}\right) - Z\left(t^{(k)}\right), & \text{при } u_1 \\ R\left(t^{(k)} = 0\right) - Z\left(t^{(k)} = 0\right) - C_n, & \text{при } u_2 \end{cases}. \quad (4)$$

Тобто, якщо буде прийняте рішення про збереження обладнання, то прибуток обчислюється як різниця між виручкою за продукцію та витратами на утримання обладнання.

Якщо ж прийняте рішення про заміну обладнання, то прибуток становитиме випуск продукції на новому обладнанні мінус затрати на утримання нового обладнання (***t=0***) та мінус витрати на придбання нового обладнання $\boldsymbol{C_n}$

Отже, рівняння Беллмана матиме вигляд:

$$F_k\left(t^{(k)}\right) = \max\begin{cases} R\left(t^{(k)}\right) - Z\left(t^{(k)}\right) + F_{k+1}\left(t^{(k+1)}\right) \\ R\left(t^{(k)} = 0\right) - Z\left(t^{(k)} = 0\right) - C_n + F_{k+1}\left(t^{(k)} = 1\right) \end{cases}. \quad (5)$$

Розв'язок починаємо із визначення умовно оптимального рішення для останнього, п'ятого, року. Так як на початок роботи підприємства було встановлено нове обладнання, то до початку п'ятого року вік обладнання може становити 1, 2, 3 або 4 роки. (можливо, до цього в якомусь році відбулася заміна обладнання).

Враховуючи співвідношення (5) запишемо:

$$F_5\left(t^{(5)}\right) = \max\begin{cases} R\left(t^{(5)}\right) - Z\left(t^{(5)}\right) \\ R\left(t^{(5)} = 0\right) - Z\left(t^{(5)} = 0\right) - C_n \end{cases}.$$

Оскільки це останній рік досліджуваного періоду, то $\boldsymbol{F_6(t)=0}$.

Проведемо обчислення для всіх можливих значень $\boldsymbol{t = \overline{1,4}}$.

$$F_5\left(t^{(5)}\right) = \max\begin{cases} R\left(t^{(5)} = 1\right) - Z\left(t^{(5)} = 1\right) \\ R\left(t^{(5)} = 0\right) - Z\left(t^{(5)} = 0\right) - C_n \end{cases} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 50 \\ 20 \end{Bmatrix} = 50, \quad u^0 = u_1.$$

Отже, умовно оптимальне рішення в даному випадку є $\boldsymbol{u_1}$, тобто необхідно залишити обладнання.

Проведемо аналогічні обчислення для інших варіантів. Обчислення зведемо в таблицю 8.

Таблиця 8

Рік	u_1	u_2	$\max F_5(t^{(5)})$	Вибір
1	***75-25=50***	***80-20-40=20***	***50***	u_1
2	***65-30=35***	***80-20-40=20***	***35***	u_1
3	***60-35=25***	***80-20-40=20***	***25***	u_1
4	***60-45=15***	***80-20-40=20***	***20***	u_2

Розглянемо можливі стани обладнання на початок 4-го року. Допустимими значеннями є ***t=1,2,3***.

Для ***t=1*** рекурентні співвідношення матимуть вигляд:

$$F_4\left(t_1^{(4)}\right)=\max\begin{cases}R\left(t^{(4)}=1\right)-Z\left(t^{(4)}=1\right)+F_5\left(t^{(5)}=2\right)\\R\left(t^{(4)}=0\right)-Z\left(t^{(4)}=0\right)-C_n+F_5\left(t^{(5)}=1\right)\end{cases}.$$

Обчислення зводимо в таблицю 9.

Таблиця 9

Рік	u_1	u_2	$\max F_4(t^{(4)})$	Вибір
1	***75-25+35=85***	***80-20-40+50=70***	***85***	u_1
2	***65-30+25=60***	***80-20-40+50=70***	***70***	u_2
3	***60-35+20=45***	***80-20-40+50=70***	***70***	u_2

Визначимо умовно оптимальні розв'язки для кожного з допустимих станів обладнання на початок 3-го року. Відповідно, ***t=1,2***.

Рекурентні співвідношення:

$$F_3\left(t_1^{(3)}\right)=\max\begin{cases}R\left(t^{(3)}=1\right)-Z\left(t^{(3)}=1\right)+F_4\left(t^{(4)}=2\right)\\R\left(t^{(3)}=0\right)-Z\left(t^{(3)}=0\right)-C_n+F_4\left(t^{(4)}=1\right)\end{cases};$$

$$F_3\left(t_2^{(3)}\right)=\max\begin{cases}R\left(t^{(3)}=2\right)-Z\left(t^{(3)}=2\right)+F_4\left(t^{(4)}=3\right)\\R\left(t^{(3)}=0\right)-Z\left(t^{(3)}=0\right)-C_n+F_4\left(t^{(4)}=1\right)\end{cases}.$$

Обчислення зводимо в таблицю 10.

Таблиця 10

Рік	u_1	u_2	$\max F_3(t^{(3)})$	Вибір
1	***75-25+70=120***	***80-20-40+85=105***	***120***	u_1
2	***65-30+70=105***	***80-20-40+85=105***	***105***	u_2

Бачимо, що якщо на початок 3-го року вік обладнання становить 2 роки, то незалежно від того, яке буде прийняте рішення: про заміну обладнання чи збереження, прибуток буде той самий. Тому можемо в якості оптимального взяти будь-яке рішення, наприклад, про заміну обладнання.

На початок 2-го року: ***t=1***.

Таблиця 11

Рік	u_1	u_2	$\max F_2(t^{(2)})$	Вибір
1	***75-25+105=155***	***80-20-40+120=140***	***155***	u_1

За умовою задачі, на початок першого року встановлено нове обладнання, тому питання про заміну не стоїть взагалі.

Отже, умовно оптимальним буде рішення:

$$F_1\left(t_1^{(1)}\right) = R\left(t^{(1)} = 0\right) - Z\left(t^{(1)} = 0\right) + F_2\left(t^{(1)} = 1\right) = 80 - 20 + 155 = 215$$

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може становити 215 млн. грн.

Проведемо зворотний шлях, тобто визначимо, коли потрібно замінити обладнання (чи потрібно взагалі?).

Для першого року рішення єдине – зберегти обладнання. Отже, на початок 2-го року вік обладнання становитиме 1 рік. Тоді, у відповідності з даними таблиці 5, оптимальним рішенням для 2-го року є збереження обладнання. Таким чином, на початок 3-го року вік обладнання становитиме 2 роки. І тоді обладнання на 3-му році (табл. 9) необхідно замінити.

Після заміни обладнання на початок 4-го року вік обладнання становитиме 1 рік, і у відповідності до табл. 3, його необхідно зберегти. Таким чином, на початок 5-го року вік обладнання становитиме 2 роки і за табл. 2 його необхідно зберегти.

Оптимальний план заміни обладнання:

Таблиця 12

Роки				
1	2	3	4	5
Зберегти обладнання	Зберегти обладнання	Провести заміну обладнання	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання

Тема 8. Моделі управління та оптимізаційні задачі управління запасами

План

8.1. Постановка задачі управління запасами.
8.2. Класифікація витрат.
8.3. Модель оптимального розміру замовлення Уілсона.
8.4. Задача визначення оптимального розміру замовлення.
8.5. Передумови створення запасів.
8.6. Розробка стратегії управління запасами.

8.1. Постановка задачі управління запасами

Загальні інвестиції різних компаній у товарно-матеріальних запасах по усьому світі складають мільярди доларів. Очевидно, що це досить солідні інвестиції, що вимагають до себе уважного ставлення. Останні десятиліття ефективність керування товарно-матеріальними запасами значно підвищилася через усвідомлення менеджерами усієї важливості грамотного контролю запасів і використання новітніх методів, що дозволяють компаніям швидко аналізувати їхній рівень, місцезнаходження, якість і т.д.

Запаси підрозділяються на категорії: сировина, незавершене виробництво, запаси в шляху, і готова продукція. Сировина і матеріали – це запаси, що купує компанія для забезпечення поточного виробничого процесу. З одного боку було б дуже неефективним закуповувати надмірно великі обсяги сировини і матеріалів тільки тому, що компанія має великі замовлення від клієнтів і вона ризикує залишитися без сировини до того, як його наступна партія буде доставлена. З іншого боку, ймовірність дефіциту сировинних матеріалів у майбутньому несе в собі загрозу збою виробничого процесу і виникнення нових витрат. Тому будь-яка компанія зацікавлена в тому, щоб мати про запас деяку оптимальну кількість сировини і матеріалів, вигоди від якого не перевищували б економічні витрати на його утримання.

Звичайно, якщо виробництво продукції складається з декількох етапів чи стадій обробки, рідко буває що усі ці стадії працюють ідеально злагоджено. Іноді буває, що на якійсь стадії виробництво проміжного продукту закінчується раніш, перш ніж може початися його обробка на наступній стадії. А іноді виробничі потужності для обробки продукту на одній зі стадій можуть простоювати через те, що попередня стадія обробки ще не довершена. Для того, щоб не відбувалося затримок при переході від однієї стадії до іншої, компанії необхідно мати визначений резерв – «подушку» для забезпечення безупинного і гнучкого виробничого графіка. Цей запас, називається запасом «у дорозі». Без запасів «у дорозі» кожна стадія виробничого процесу знаходилася б у залежності від швидкості завершення попередніх стадій, тому «запаси в дорозі» дозволяють домогтися більшої ефективності у виробництві. Чим більший за часом виробничий процес і чим більше стадій обробки проходить продукт, тим вище повинний бути рівень запасів «у дорозі». Запаси готової продукції служать «подушкою безпеки» між процесами виробництва і реалізації товарів. Наявність готової продукції на складі забезпечує гнучкість маркетингових заходів — великі запаси дозволяють швидше реагувати на ріст купівельного попиту.

Компанії, для яких характерні сезонність обсягів реалізації і/чи тривалий виробничий процес, звичайно підтримують великі рівні запасів, у той час як компанії, що користаються стабільним попитом на свою продукцію і/чи обробки, що мають короткий процес, сировини можуть підтримувати менші обсяги запасів. Очевидно, що не у всіх компаній маються всі категорії запасів. Наприклад, у фірм, що займаються роздрібною торгівлею, запаси являють собою готову продукцію.

Виробники простих товарів, для виробництва яких досить однієї стадії, можуть підтримувати тільки запаси сировини і готової продукції. У великих промислових компаній звичайно наявні всі перераховані вище категорії запасів. Крім забезпечення гнучкості процесів виробництва і реалізації запаси захищають компанію і від інших ризиків. Наприклад, запаси сировини можуть захистити компанію у випадку затримок у постачаннях чергових партій. Ці затримки можуть бути викликані самими різними причинами — від страйку робітників до поганої погоди, що робить транспортування сировини неможливим.

Несподіваний вихід з ладу устаткування, або інші технічні неполадки також можуть викликати затримки, і в цих випадках добре було б мати запаси «у дорозі», чи готову продукцію.

Загалом, невизначеність є однією з головних причин, тому компанії завжди намагаються мати під рукою резервні запаси.

8.2. Класифікація витрат

Витрати, пов'язані зі збереженням запасів:

фінансові витрати: упущений прибуток у зв'язку з тим, що частина капіталу, пов'язана із запасами і не може бути інвестована за необхідною ставкою прибутковості;

операційні витрати: витрати на збереження, страховку й облік запасів (включаючи запаси «у шляху»), а також ризик їх старіння).

Ці витрати в основному носять змінний характер (вони збільшуються прямо пропорційно середньому розміру запасів), а величина середніх запасів за період залежить від частоти і розміру замовлень. Визначаються як відсоток від вартості середніх запасів на період.

Витрати, пов'язані з розміщенням і прийомом замовлень: *канцелярські витрати, міжнародні телефонні переговори, витрати на приймання і перевірку якості товару*.

В більшій мірі витрати є постійними, як правило, не залежать від розміру замовлення. Річні витрати, пов'язані з замовленнями, визначаються як добуток постійних витрат на одне замовлення і кількості партій у рік.

Загальні витрати дорівнюють сумі всіх перерахованих вище витрат. Величини витрат впливають на вибір оптимального рівня запасів компанії. Тобто запаси необхідно нарощувати доти, поки усі витрати, пов'язані з їх замовленнями і збереженням, не зрівняються з вигодами від підтримки великого рівня запасів.

8.3. Модель оптимального розміру замовлення

Введемо позначення: Q – обсяг замовлення, шт.; EOQ – економічний розмір замовлення (Economic Order Quantity); n – число замовлень за рік; D – річна потреба, шт.; S – витрати на замовлення; C – вартість одиниці товару; h – витрати на зберігання за рік, % від вартості; H – витрати зберігання за одиницю на рік, г.о.; L – час виконання замовлення; ROP – точка повторного заказу (reorder point); SS – страховий запас, безпечний резерв (safety stock).

Модель оптимального розміру замовлення модель Уілсона (***Economic Ordering Quantity*** – ***EOQ***) спирається на наступні допущення:

1. Інтенсивність споживання запасу відома і постійна протягом всього періоду.
2. Витрати на одне замовлення є постійною величиною, незалежно від розміру замовлення.
3. Замовлення на заповнення запасів виконуються без затримки і, тому, немає необхідності підтримувати резервний запас.
4. Закупівельна ціна одиниці запасу постійна (рис. 1).

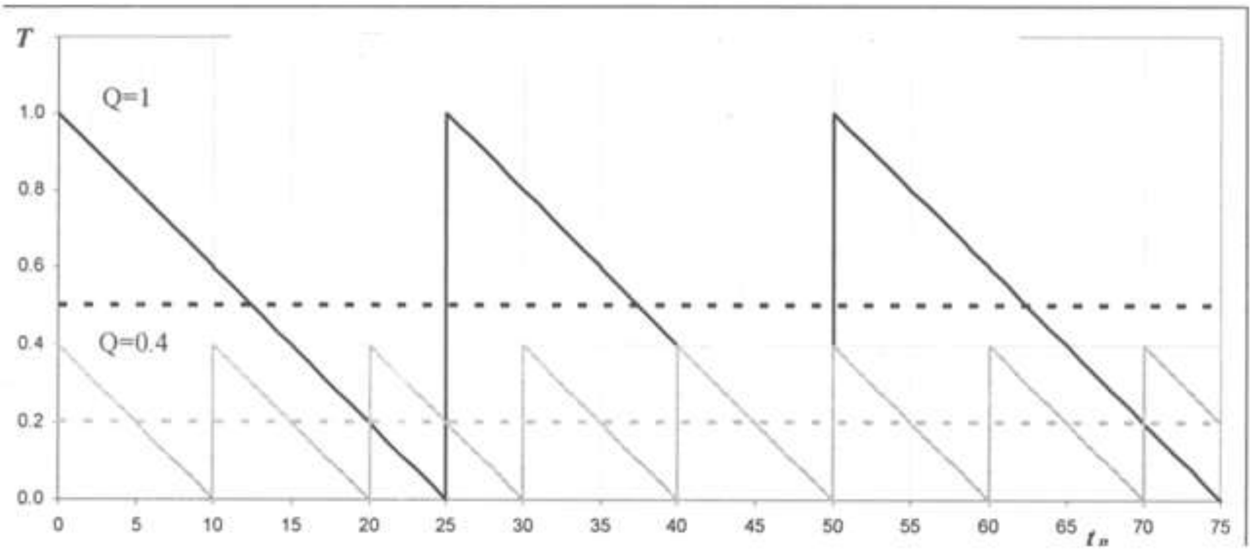


Рис. 1. Зміна товарного запасу з часом.

Незалежність річного попиту від розміру партії.

Загальні витрати складаються з постійних та змінних витрат.

Постійні витрати – річні витрати на зберігання, які дорівнюють: $TH = \frac{HQ}{2}$. Чим менше партія товару, що замовляється, тим менші річні витрати на зберігання, однак, чим менші розміри партії, тим частіше необхідно робити замовлення, і, відповідно, тим більші витрати, пов'язані із його оформленням.

Змінні річні витрати на оформлення замовлень становитимуть: $TS = \frac{DS}{Q}$.

Відповідно загальні складські витрати становитимуть: $TS = \frac{HQ}{2} + \frac{DS}{Q}$.

Графік залежності витрат від величини замовлення, показано на рис. 2. Функція загальних витрат має мінімум, якому відповідає оптимальна величина замовлення, яку позначають EOQ:

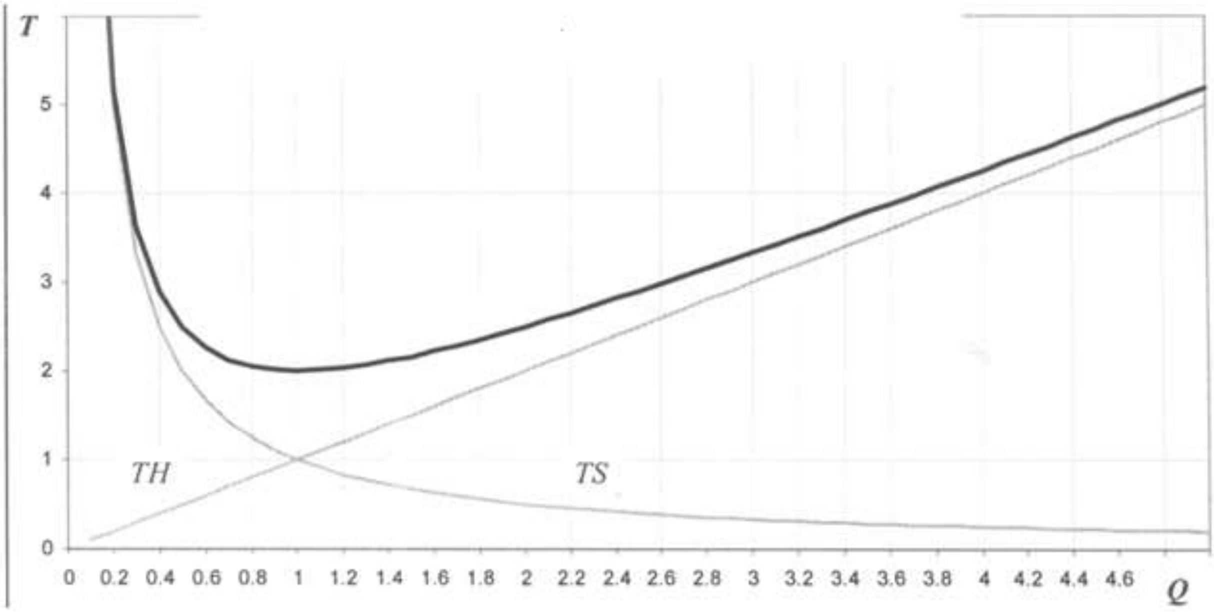


Рис. 2. Залежність постійних, змінних та загальних витрат від розміру партії замовлення

8.4. Задача визначення оптимального розміру замовлення

Існує декілька варіантів придбання товару. Відомі ціна, річна потреба, вартість оформлення замовлення, вартість зберігання. Визначити оптимальний розмір партії замовлення для кожного варіанту.

Розв'язання

Внесемо відповідні дані та формули в Excel (рис. 3) та проведемо розрахунки (рис. 4):

A	B	C	D	E
Задача 1.				
Розрахунок оптимального розміру замовлення				
	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
Ціна одиниці товару, грн	550	500	450	400
Річна потреба, шт (D)	1500	1500	1500	1500
Вартість оформлення замовлення, грн (S)	200	200	200	200
Вартість зберігання одиниці товару, % від ціни (h)	5	5	5	5
Оптимальний розмір замовлення	=SQRT((2*B6*B7/(B8*B5/100)))	=SQRT((2*C6*C7/(C8*C5/100)))	=SQRT((2*D6*D7/(D8*D5/100)))	=SQRT((2*E6*E7/(E8*E5/100)))

Рис. 3. Формули для обчислення оптимального розміру замовлень

	A	B	C	D	E
1	Задача 1.				
2	Розрахунок оптимального розміру замовлення				
3					
4		Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
5	Ціна одиниці товару, грн	550	500	450	400
6	Річна потреба, шт (D)	1500	1500	1500	1500
7	Вартість оформлення замовлення, грн (S)	200	200	200	200
8	Варість зберігання одиниці товару, % від ціни (h)	5	5	5	5
9	**Оптимальний розмір замовлення**	**147,7098**	**154,9193**	**163,2993**	**173,2051**
10	Прийнятний розмір замовлення	148	155	164	174

Рис. 4. Розрахунки оптимального розміру замовлення

8.5. Передумови створення запасів

Розбалансування потреб в матеріальних ресурсах з їх наявністю веде до порушення ритмічності роботи виробництва. Для запобігання цим небажаним явищам створюються виробничі запаси (сировини, матеріалів, тощо).

Причини необхідності створення запасів:

– розбіжність ритмів постачання (виробництва) матеріальних запасів з ритмами їх споживання;

– випадкові коливання попиту за період між поставками, обсягів поставок, інтервалів між поставками;

– територіальна віддаленість постачальників від споживачів, що затрудняє доставку саме в той час і в тому обсязі, коли виникатиме потреба в них;

– сезонність видобутку або виготовлення певних видів сировини, матеріалів або продукції та неперервність попиту на них, а також неперервність виготовлення інших продуктів, що утворюють запас, при сезонному попиту на ці продукти;

– ризик несприятливої зміни ринкових цін на сировину, матеріали або кінцеву продукцію.

Із зростанням розмірів запасів витрати на їх утримання збільшуються. З іншого боку, через нестачу запасів підприємство матиме збитки у вигляді недоотриманого доходу від продажу, втрат внаслідок простоїв або понаднормативних витрат в результаті заміни потрібних ресурсів дорожчими, штрафних санкцій за несвоєчасну поставку продукції замовникам, збільшення витрат на доставку продукції, тощо.

Передумови, що сприяють зменшенню запасів:

– плата за зберігання;

– втрачений економічний виграш внаслідок зв'язування обігових коштів в запасах;

– втрати у якості та кількості матеріалів, що знаходяться в запасах;

– старіння (моральний знос), що приводить до зниження попиту.

Запаси можуть поповнюватись безперервно або окремими партіями через певні проміжки часу. У випадку безперервного поповнення запасів інтенсивність їх надходження вища, ніж інтенсивність їх споживання. Тому виробництво потрібно час від часу призупиняти або переналагоджувати на випуск інших продуктів, а потім відновлювати.

Коли запаси поповнюються окремими партіями, через певні проміжки часу, щоразу виникають витрати на оформлення замовлення, супроводження відповідної партії, тощо. Ці витрати, як правило, не залежать від розміру партії поставки.

Із зміною розмірів запасів витрати змінюються по-різному. Тому виникає проблема визначення оптимального розміру запасів, за якого загальні витрати в системі управління запасами мінімізуються.

Задача управління запасами полягає у визначенні моментів часу і обсягів замовлень на поповнення запасів і розподілі надісланих замовлень по ієрархії ланок системи постачання.

Сукупність правил, за якими приймаються такі рішення, називається ***стратегією управління запасами***.

Оптимальною називається стратегія, при якій мінімізуються витрати.

Система постачання – сукупність складів, між якими здійснюється переміщення матеріалів, що зберігаються в запасі.

Системи постачання класифікують за конкретними ознаками:

– за кількістю номенклатури зберігання: на одно продуктові та багато продуктові;

– за кількістю періодів, на які здійснюється постачання: на статичні (один період) і динамічні (багатоперіодні);

– за попитом на предмети постачання: на стаціонарні і нестаціонарні; детерміновані і стохастичні; неперервні і дискретні; залежні від попиту на інші номенклатурні групи або незалежні.

8.6. Розробка стратегії управління запасами

Підприємство розробляє стратегію поповнення запасів деякої продукції для заданого періоду часу, який складається з чотирьох етапів. Для кожного з них відомий розмір попиту, причому він не є однаковим для всіх етапів. Щоб задовольнити попит, підприємство може придбати необхідну кількість продукції, замовивши її у виробника, або виготовити самостійно. Передбачається, що запаси поповнюються миттєво, запізнення поставки та дефіцит неприпустимі. Залежно від ринкової кон'юнктури підприємству може бути вигідно створювати запаси продукції для задоволення попиту в майбутні періоди часу, що пов'язане, проте, з додатковими витратами на зберігання запасів.

Розробити програму управління запасами підприємства, тобто визначити обсяги замовлення й період його розміщення, щоб загальні витрати на постачання та зберігання продукції були мінімальними, а попит задовольнявся повністю й своєчасно.

Відомо, що на початок планового періоду запас становить 2 тис. од., а під час купівлі продукції діє система оптових знижок. Витрати на придбання 1 тис. од. продукції становлять 15 тис. грн., а коли розмір замовлення перевищує 3 тис. од., витрати становлять 12 тис. грн. (за кожну 1 тис. од.).

Вихідні дані надано в таблиці:

Таблиця 1

Етап	Попит, од	Витрати на розміщення замовлення, грн.	Витрати на зберігання, грн.
1	***4***	***7***	***2***
2	***5***	***8***	***3***
3	***3***	***6***	***1***
4	***2***	***9***	***0***

Розв'язання

Введемо позначення: x_i – запас продукції на початок i-го етапу; y_i – обсяг замовленої продукції (розмір замовлення); h_i – витрати на зберігання 1 тис. од. продукції запасу; k_i – витрати на розміщення замовлення; β_i – попит на продукцію; $C_i y_i$ – витрати, що пов’язані з купівлею продукції; $f(x_i, y_i)$ – функція витрат.

Рекурентні залежності, що відповідають схемі зворотного прогону:

$$f_i^*(x_i) = \min f_i\ (x_i; y_i) = \min\left(k_i + C_i y_i + h_i x_i + f_{i+1}^*(x_i + y_i - \beta_i)\right).$$

За умов $\beta_i \le x_i + y_i \le \beta_i + ... + \beta_N,\quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{N}},\quad \mathrm{y_i} \ge 0.$

Тобто значення функції утворюється як мінімальне значення витрат на розміщення, купівлю та зберігання плюс мінімальні витрати попереднього періоду за умов, що власні запаси та придбані покривають поточні потреби та не перевищують сумарних поточних та майбутніх потреб.

Розглянемо покроковий розрахунок.

Етап 4

На цей період попит складає $\beta_4 = 2$

$f_4^*(x_4) = \min\left(k_4 + C_4 y_4\right)$ за умов $x_4 + y_4 = 2$.

Можливі варіанти розв’язків:

Таблиця 2

x_4	$f(x_4)$			Оптимальний розв’язок	
	$y_4=0$	$y_4=1$	$y_4=2$	$f_4^*(x_4)$	y_4^*
0			***9+2·15=39***	39	2
1		***9+1·15=24***		24	1
2	***0+0·15=0***			0	0

Розрахунки виконуємо так (табл. 2).

Таблиця 3

Результати розрахунків:

x_3	$f(x_3)$						Оптимальний розв'язок	
	$y_3=0$	$y_3=1$	$y_3=2$	$y_3=3$	$y_3=4$	$y_3=5$	$f_3^*(x_3)$	y_3^*
0				$6+3\cdot15+39=90$	$6+4\cdot12+24=78$	$6+5\cdot12+0=66$	66	5
1			$6+2\cdot15+1\cdot1+39=76$	$6+3\cdot15+1\cdot1+24=76$	$6+4\cdot12+1\cdot1+0=55$		55	4
2		$6+1\cdot15+2\cdot1+39=62$	$6+2\cdot15+2\cdot1+24=62$	$6+3\cdot15+2\cdot1+0=53$			53	3
3	$3\cdot1+39=42$	$6+1\cdot15+3\cdot1+24=48$	$6+2\cdot15+3\cdot1+0=39$				39	2
4	$4\cdot1+24=48$	$6+1\cdot15+4\cdot1+0=25$					25	1
5	$5\cdot1+0=5$						5	0

Наприклад обчислимо при $x_4=0$ та $y_4=2$ ($x_4+y_4=2$), тобто власних запасів немає і замовляємо 2 тис. од. Витрати на розміщення замовлення 9 тис. грн., 2 тис. од. купуємо по 15 тис. грн., отже загальні витрати складуть ***9+2·15=39*** тис. грн.

Обчислимо при $x_4=1$ та $y_4=1$ ($x_4+y_4=2$), тобто власних запасів 1 тис. од. і замовляємо 1 тис. од. Витрати на розміщення замовлення 9 тис. грн., 1 тис. од. купуємо по 15 тис. грн., витрати на зберігання становлять 0 тис. грн., отже загальні витрати складуть ***9+1·15=24*** тис. грн.

Етап 3

На цей період попит складає $\beta_3=3$

$$f_3^*(x_3)=\min\left(k_3+C_3y_3+h_3x_3+f_4^*(x_3+y_3-\beta_3)\right)$$

за умов

$$3\le x_3+y_3\le 3+2=5$$

Проведемо розрахунки (табл. 3):

При $x_3=0$ та $y_3=3$ ($x_3+y_3=3$), тобто власних запасів немає і замовляємо 3 тис. од. Витрати на розміщення замовлення в цей період 6 тис. грн., 3 тис. од. купуємо по 15 тис. 70рн., плюс витрати за попередній період

$$f_4^*(x_3+y_3-\beta_3)=f_4^*(0+3-3)=f_4^*(0)=39.$$

Отже, загальні витрати складуть ***6+3·15+39=90*** тис. грн.

При $x_3=0$ та $y_3=4$ ($x_3+y_3=4$), тобто власних запасів немає і замовляємо 4 тис. од. Витрати на розміщення замовлення в цей період 6 тис. грн., 4 тис. од. купуємо по 12 тис. 70рн., (знижка на кількість), плюс витрати за попередній період

$$f_4^*(x_3+y_3-\beta_3)=f_4^*(0+4-3)=f_4^*(1)=24.$$

Отже, загальні витрати складуть ***6+4·12+24=78*** тис. грн.

При $x_3=2$ та $y_3=2$ ($x_3+y_3=4$), тобто власних запасів 2 тис. од. і замовляємо 2 тис. од. Витрати на розміщення замовлення в цей період 6 тис. грн., 2 тис. од. купуємо по 15 тис. грн., витрати на зберігання кожної тисячі од. становлять 1 тис. грн., плюс

$$f_4^*(x_3+y_3-\beta_3)=f_4^*(2+2-3)=f_4^*(1)=24$$

Отже, загальні витрати складуть ***6+2·15+2·1+24=62*** тис. грн.

Етап 2

Маємо, що на цей період попит складає ***β₂=5***

$$f_2^*(x_2) = \min\left(k_2 + C_2 y_2 + h_2 x_2 + f_3^*(x_2 + y_2 - \beta_2)\right)$$

за умов

$$5 \le x_2 + y_2 \le 5 + 3 + 2 = 10$$

Результати розрахунків вносимо в таблицю (табл. 4).

<u>Етап 1.</u> Маємо, що на цей період попит складає $\boldsymbol{\beta_1=4}$

$$f_1^*(x_1) = \min\left(k_1 + C_1 y_1 + h_1 x_1 + f_2^*(x_1 + y_1 - \beta_1)\right)$$

за умов

$$4 \le x_1 + y_1 \le 4 + 5 + 3 + 2 = 14$$

Враховуючи, що на початок планового періоду, запас становить 2 тис. од., для першого етапу розрахунки ведемо тільки для $\boldsymbol{x_1=2}$ (табл. 5).

Таблиця 4

x_2	$f(x_2)$											Оптимальний розв'язок	
	$y_2=0$	$y_2=1$	$y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4$	$y_2=5$	$y_2=6$	$y_2=7$	$y_2=8$	$y_2=9$	$y_2=10$	$f_2^*(x_2)$	y_2^*
0						134	135	145	143	141	133	133	10
1					125	126	136	134	132	124		124	9
2				125	117	127	125	123	115			115	8
3			113	117	118	116	114	106				106	7
4		101	105	118	107	105	97					97	6
5	81	93	106	107	96	88						81	0
6	73	94	95	96	79							73	0
7	74	83	74	79								74	0 або 2
8	63	72	67									63	0
9	52	55										52	0
10	35											35	0

Таблиця 5

x_1	$f(x_1)$											Оптимальний план	
	$y_1=2$	$y_1=3$	$y_1=4$	$y_1=5$	$y_1=6$	$y_1=7$	$y_1=8$	$y_1=9$	$y_1=10$	$y_1=11$	$y_1=12$	$f^*(x_1)$	y_1
2	174	180	174	177	180	176	180	193	194	195	190	174	2 або 4

Таким чином, отримали два оптимальні плани при $x_1=2$ і $y_1=2$ та $x_1=2$ і $y_1=4$. Розглянемо обидва плани, використовуючи всі попередні таблиці.

Перший:

Таблиця 6

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1=2$	$y^*_1=2$	$\beta_1=4$	$x_2=2+2-4=0$	$7+2\cdot15+2\cdot2=41$
2	$x_2=0$	$y^*_2=10$	$\beta_2=5$	$x_3=0+10-5=5$	$8+10\cdot15+0=128$
3	$x_3=5$	$y^*_3=0$	$\beta_3=3$	$x_4=5+0-3=2$	$5\cdot1=5$
4	$x_4=2$	$y^*_4=0$	$\beta_4=2$	$x_5=2+0-2=0$	$2\cdot0=0$
Разом					*174*

Другий:

Таблиця 7

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1=2$	$y^*_1=4$	$\beta_1=4$	$x_2=2+4-4=2$	$7+4\cdot15+2\cdot2=59$
2	$x_2=2$	$y^*_2=8$	$\beta_2=5$	$x_3=2+8-5=5$	$8+8\cdot12+2\cdot3=110$
3	$x_3=5$	$y^*_3=5$	$\beta_3=3$	$x_4=5+0-3=2$	$5\cdot1=5$
4	$x_4=2$	$y^*_4=0$	$\beta_4=2$	$x_5=2+0-2=0$	$2\cdot0=0$
Разом					*174*

Порівнюючи ці два плани, бачимо, що відрізняються вони першими двома етапами і дають можливість маневрувати фінансовими ресурсами підприємства, що водночас вирішує ще низку проблем.

Тема 9. Мережне планування та управління мережами

План

9.1. Задача про Кенігсберзькі мости.

9.2. Основи теорії графів.

9.3. Задача про найкоротший шлях. Алгоритм закреслення дуг.

9.1. Задача про Кенігсберзькі мости

Для вирішення багатьох практичних задач не тільки математики, а й багатьох інших галузей діяльності людини, в тому числі, сфери економіки досить зручно і ефективно використовувати схеми, що називаються графами.

Всім відомо, що слово «граф» означає дворянський титул. Однак, математичне поняття «граф» дещо інше.

Засновником математичної теорії графів вважається математик, швейцарець за походженням, академік Берлінської академій наук, великий Леонард Ейлер. Леонард Ейлер був універсальним мислителем, відрізнявся надзвичайною працьовитістю. Лише в математиці йому належить майже 900 досліджень найважчих питань.

Перебуваючи у місті Кенігсберг, Ейлер прийняв участь у конкурсі, оголошеного мером міста Кенігсберг. Історія не донесла до нас причини виникнення задачі, яка згодом, завдяки Ейлеру стала дуже відомою. У місті Кенігсберзі на річці Преголь розташовані два острови, що в часи Леонарда Ейлера були з'єднані сімома мостами (на сьогодні залишилися лише два). На островах був розташований міський парк. Ставилася задача: чи можна пройти по всіх мостах так, щоб вийшовши з якої-небудь точки суші (берега чи острова), пройти по кожному мосту рівно один раз і повернутися у вихідну точку.

Події розвивалися у 1738 році. Ейлер вирішив взяти участь у конкурсі, коли до його закінчення залишалося три дні. На відміну від всіх інших дослідників, що взяли участь у конкурсі і розв'язували задачі традиційними для того часу методами, Ейлер зрозумів, що існуючих математичних методів не досить. Тому його розв'язання вилилося в розробку нової теорії, пізніше названою теорією графів. Відкинувши деталі, Ейлер намалював схему, яку тепер називають графом, позначивши кожну частину суші точками (вершинами, вузлами), а кожен міст – лініями (ребрами), що зв’язують вершини.

Системи об’єктів дослідження разом зі зв’язками між ними називаються ***сіткою*** або ***мережею***.

Графічне зображення множини досліджуваних об’єктів і зв’язків між ними називається ***графом***.

Об’єкти зображуються пронумерованими точками або кружками, які називаються ***вершинами.***

Графічне зображення неорієнтованих попарних зв’язків між об’єктами називаються ***ребрами*** (об’єкт А може бути пов’язаний з об’єктом В і навпаки).

Якщо зв’язок між двома об’єктами А та В однобічний (від А до В є зв’язок, а зворотний зв’язок відсутній), то це зображується орієнтованим відрізком, стрілка якого відповідає напрямку зв’язку. Такий однобічний орієнтований відрізок називається ***дугою.***

Граф, вершини якого мають лише однобічний зв’язки, називається ***орієнтованим***, або ***орграфом.***

Так от, Ейлер довів, що для того, щоб обійти всі ребра графу по одному разу та повернутися в початкову вершину, необхідно і достатньо виконання умов:

Умови Ейлера:

1) З будь-якої вершини графа повинен існувати шлях по його ребрах в будь-яку іншу вершину, такий граф називається ***зв’язаним.***

2) З кожної вершини повинна виходити парна кількість ребер.

З тих пір замкнений шлях, що проходить по одному разу по всіх ребрах графа з тих пір називають ***ейлеревим циклом (ейлеревим контуром)***

Розв’язав задачу про кенігсберзькі мости кайзер Вільгельм II. Якось на світському балу його підколов один розумний, а чи зможе Ваша Імператорська Величність розв’язати задачу про мости? На що Вільгельм відповів, що розв’яже задачу за одну хвилину, якщо йому дадуть перо і папір. Отримавши, що просить, імператор написав: *«Наказую побудувати ще один міст»*.

Так було побудовано восьмий, Імператорський міст.

Розвинув теорію Ейлера ірландський математик Уїльям Гамільтон. У 1859 році Гамільтон випустив у продаж головоломку «Навколосвітня подорож». Це був дерев'яний додекаедр (дванадцятигранник), у вершинах якого було вбито гвіздочки. Кожна з 20-ти вершин була помічена назвою одного із великих міст світу: Делі, Брюссель і т.д. Необхідно знайти замкнений шлях, що проходить по ребрах додекаедра та дозволяє потрапити в кожну вершину по одному разу. Шлях необхідно відмічати за допомогою шнура, зачіпляючи його за гвіздки.

Незважаючи на зовнішню подібність, ця задача, названа проблемою пошуку гамільтонового контуру, незрівнянно складніша за задачу пошуку ейлеревого контуру, бо для неї й дотепер взагалі не існує точного методу.

Зате розв'язок цієї проблеми має високу практичну цінність – до неї зводиться класична «задача комівояжера» (який повинен об'їхати всі міста по найкоротшому маршруту, побувавши в кожному по одному разу), задача про переналагодження верстатів тощо. Завдяки появі комп'ютерів задачі такого типу розв'язують суто переборними методами шляхом скороченого перегляду – методом «віток і меж».

Тому саме задача про комівояжера служить класичним тестом для оцінки нових машинних алгоритмів розв'язання задач цього класу.

Останній на сьогодні рекордний результат (2001 рік) – оптимальний обхід 15112 міст Німеччини знайдений за допомогою мережі із 50 суперкомп'ютерів, у перерахунку на 1 сучасний ПК тривалість розрахунків складає близько 25 років безупинної роботи.

9.2. Основи теорії графів

Приклади використання мереж і графів:

Діапазон реального існування мереж дуже широкий: мережі електропостачання; радіо- та телекомунікацій; транспортні (залізничні, автомобільні); плани виконання робіт з реалізації певних проектів; організація поточного виробництва, реконструкція існуючого виробництва, де також необхідно узгоджувати та оцінювати зв'язки між окремими елементами.

Граф вважається ***завантаженим***, якщо він визначений разом з певною функцією на множині його ребер або дуг. Така функція може визначати віддаль між вершинами (карта доріг), час або вартість перевезень між населеними пунктами, пропускну спроможність лінії електропередач або каналу системи зрошення.

Маршрутом називається така послідовність ребер, коли кожна пара сусідніх ребер має одну загальну вершину.

Простим ланцюгом називається маршрут, в якому вершини не повторюються. Ланцюг визначається послідовністю вершин, через які він проходить.

Цикл – це ланцюг, початкова вершина якого співпадає з кінцевою.

Шляхом називається орієнтований ланцюг. Отже, поняття "шлях" стосується лише орієнтованих графів.

9.3. Задача про найкоротший шлях

Рис. 1. Орієнтовний граф Київ-Миколаїв

Визначити найкоротший шлях від Києва до Миколаєва.

Для розв’язання задачі використаємо навантажений орієнтований граф (рис.1). Дану задачу розв’яжемо методами динамічного програмування.

Для розв'язання багатьох практичних задач зручно виконати так звану правильну нумерацію вершин. За такої нумерації будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами.

Алгоритм закреслення дуг

1. Умовно виділимо всі дуги, які виходять з початкової вершини, назвемо її вершиною нульового рангу та дамо їй номер «00» (V_{00}). Закреслюємо дуги, що виходять із цієї вершини.

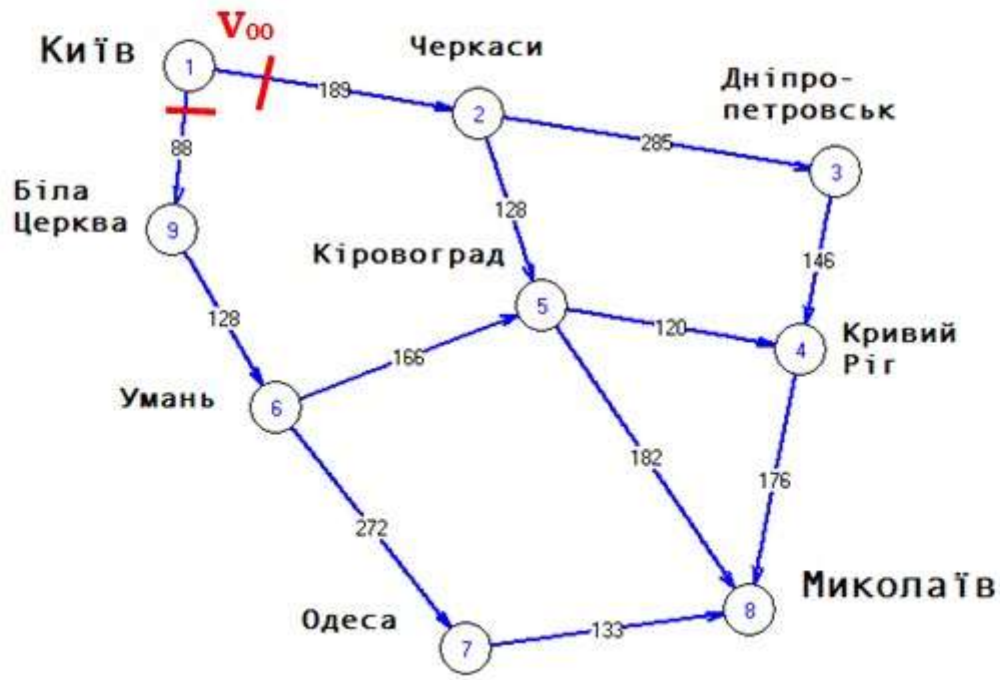


Рис. 2. Вершина нульового рангу

Розглянемо вершини, в які не заходять інші дуги, окрім закреслених. Такі вершини назвемо вершинами 1-го рангу та пронумеруємо їх у довільному порядку, дотримуючись неперервності в нумерації. За цих умов кожній вершині будемо надавати два індекси: перший – ранг вершини, другий – її порядковий номер серед множини вершин однакового рангу. Таких вершин дві: V_{11} та V_{12} (рис.3).

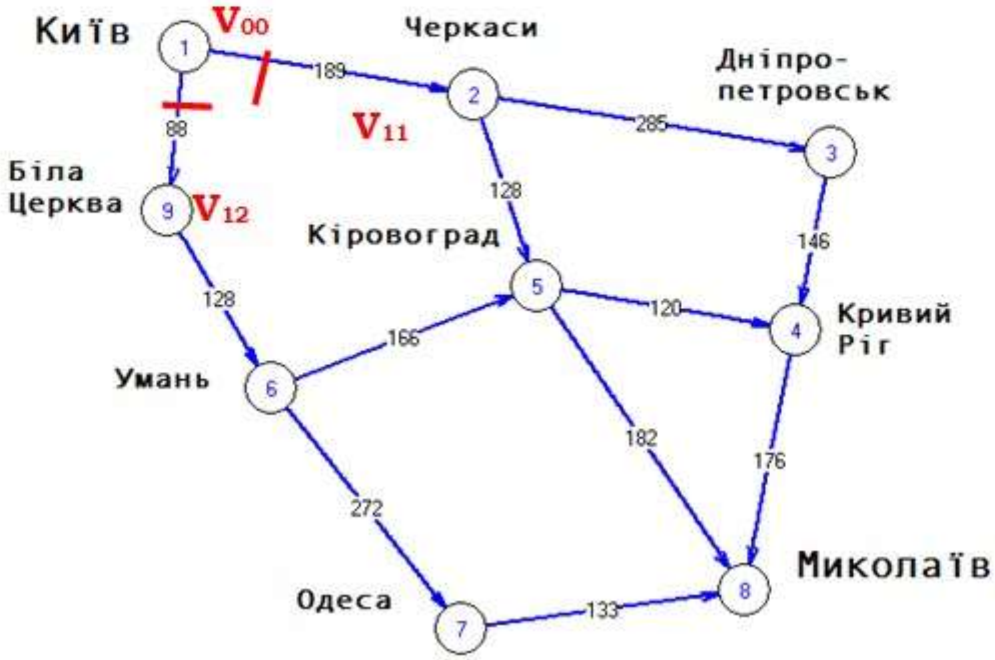


Рис. 3. Вершини першого рангу

2. Умовно закреслимо всі дуги, які виходять з вершин 1-го рангу. Вершини, в які не заходять інші дуги, окрім уже позначених, назвемо вершинами 2-го рангу та пронумеруємо їх у довільній послідовності, зберігаючи неперервність в нумерації стосовно раніше використаних чисел натурального ряду: V_{23} та V_{24} (рис.4). І так далі.

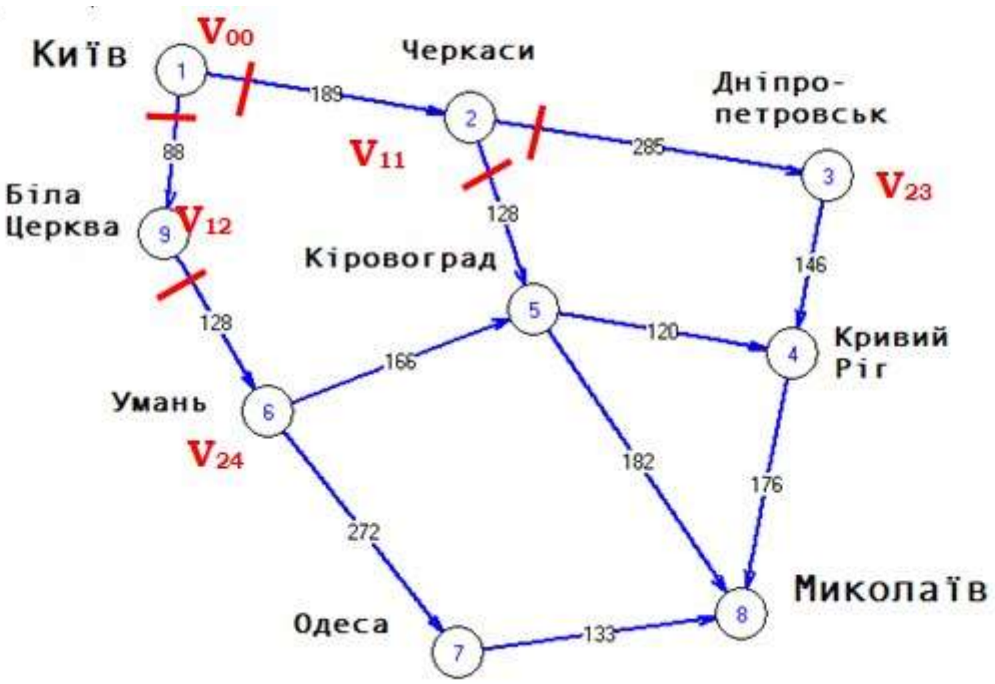


Рис. 4. Вершини другого рангу

Алгоритм завершується по досягненні кінцевої вершини. Для нашого прикладу (рис. 5) це вершина «58» (V_{58}), Де індекс 5 означає ранг кінцевої вершини, а індекс 8– її порядковий номер.

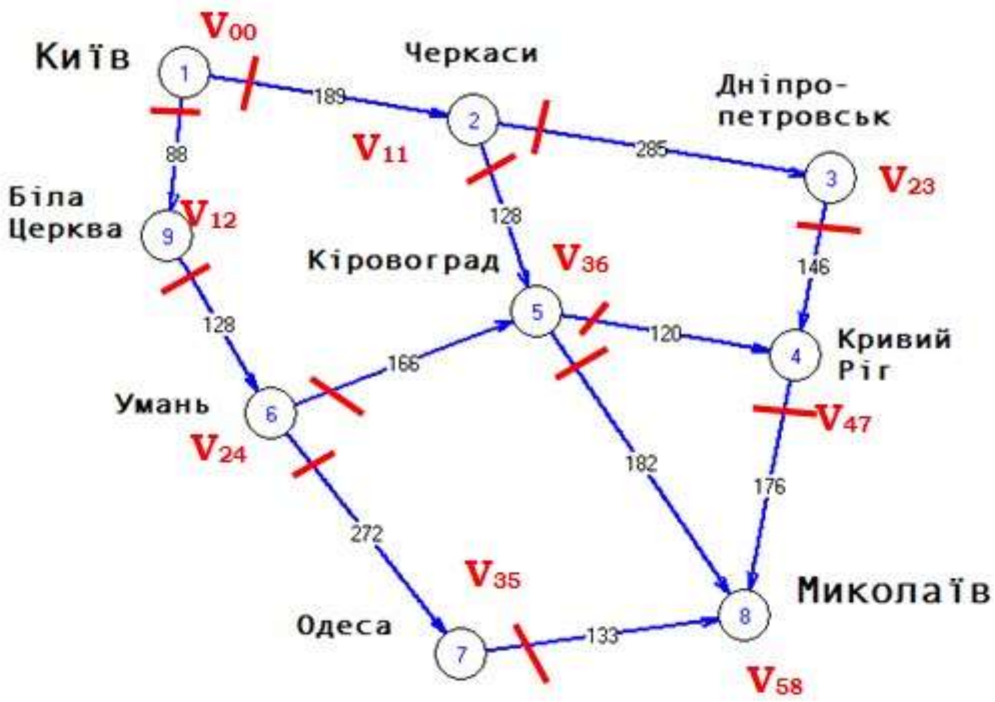


Рис. 5. Правильна нумерація вершин

Знайдемо найкоротший шлях від Києва до Миколаєва.

Будемо рухатися під кінцевої вершини V_{58} до початкової V_{00}. У кружках, які зображають вершини графу, будемо записувати найкоротшу відстань від (n-i)-ї вершини до кінцевої. Одночасно найкоротший шлях від кожної вершини до кінцевої будемо відмічати фіолетовою стрілкою.

Таким чином потрапляючи у деяку вершину, з якої вже відомий найкоротший шлях в кінцеву, немає потреби розглядати весь подальший шлях в кінцеву вершину.

1. У кружку останньої кінцевої вершини V_{58} (Миколаїв) записуємо "0", бо звідси виконуємо відлік відстані (рис. 6).

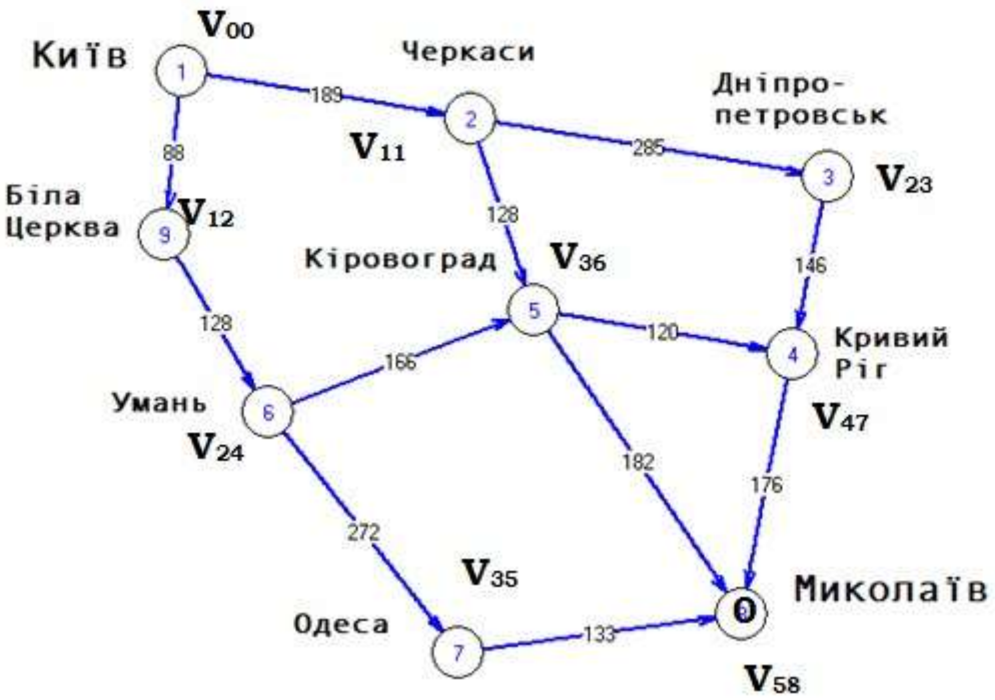


Рис. 6. Початок визначення найкоротшого шляху

2. Переходимо до вершини V_{47}. Від цієї вершини в кінцеву маємо лише один шлях: (V_{47}, V_{58}), його довжина дорівнює 176 км, її і запишемо у вершині V_{47}, а відповідну дугу позначимо на графі червоною стрілкою (рис. 7).

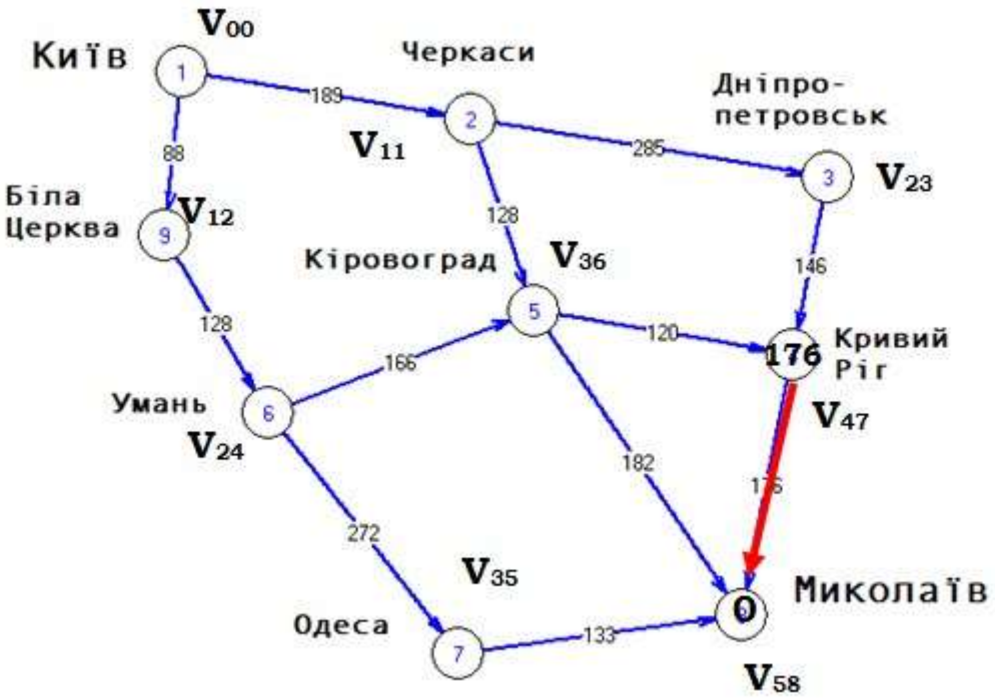


Рис. 7. Найкоротший шлях від Кривого Рогу до Миколаєва

3. Переходимо до вершини V_{35}. Довжина шляху 133, позначаємо число і шлях (рис. 8).

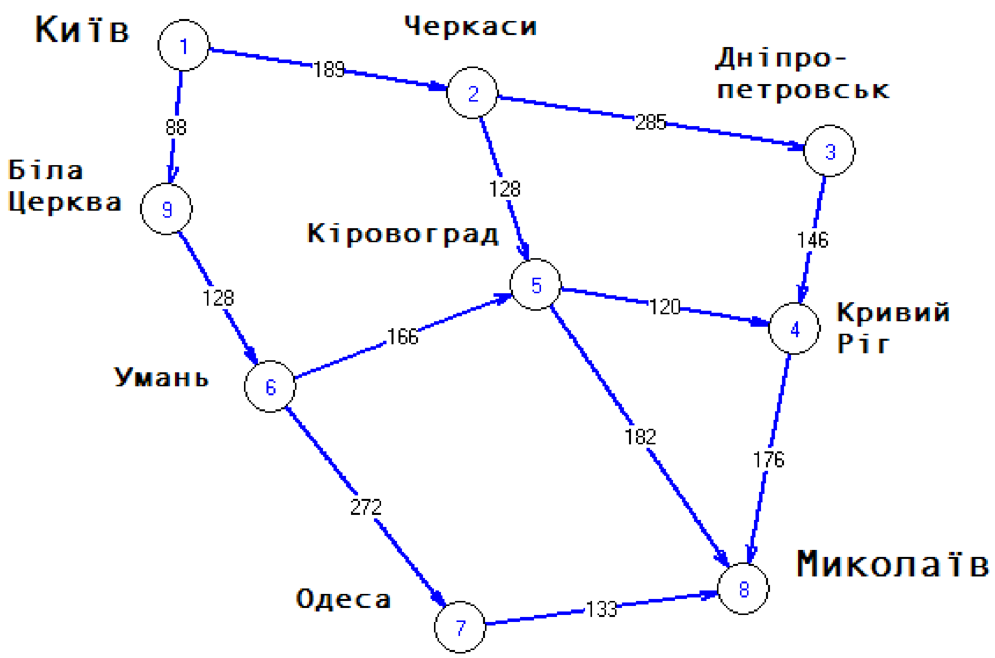


Рис. 8. Найкоротший шлях від Одеси до Миколаєва

4. З вершини V_{36} в кінцеву ведуть два шляхи: (V_{36}, V_{47}, V_{58}) та (V_{36}, V_{58}). Довжина першого 296 (120+176), другого – 182. Отже, найкоротшим є останній. Відмічаємо довжину та позначаємо шлях (рис. 9).

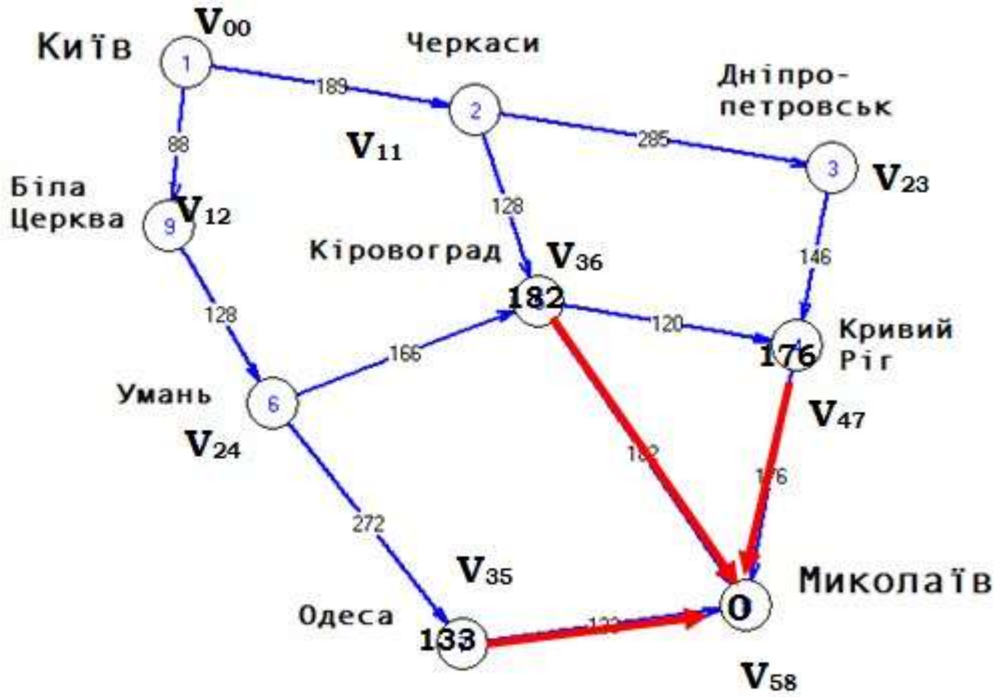


Рис. 9. Найкоротший шлях від Кіровограда до Миколаєва

5. Із вершини V_{23} в кінцеву веде лише один шлях (V_{23}, V_{47}, V_{58}). Відстань від вершини V_{47} в кінцеву відома – 176, отже відстань від V_{23} до кінцевої – 322 (146+176=322).

6. З вершини V_{24} в кінцеву ведуть два шляхи: (V_{24}, V_{36}, V_{58}) та (V_{24}, V_{35}, V_{58}). Довжина першого: 166+182=348; другого: 272+133=405. Отже, коротший перший.

7. З вершини V_{11} в кінцеву ведуть також два шляхи: (V_{11}, V_{23}, V_{47}, V_{58}) та (V_{11}, V_{36}, V_{58}). Довжина першого: 285+322=607; другого: 128+182=310. Отже, обираємо другий.

8. Із вершини V_{12} в кінцеву можна потрапити лише через V_{24}. А через із V_{24} найкоротший шлях відомий – 348.

Отже, загальний шлях становитиме: 348+128=476.

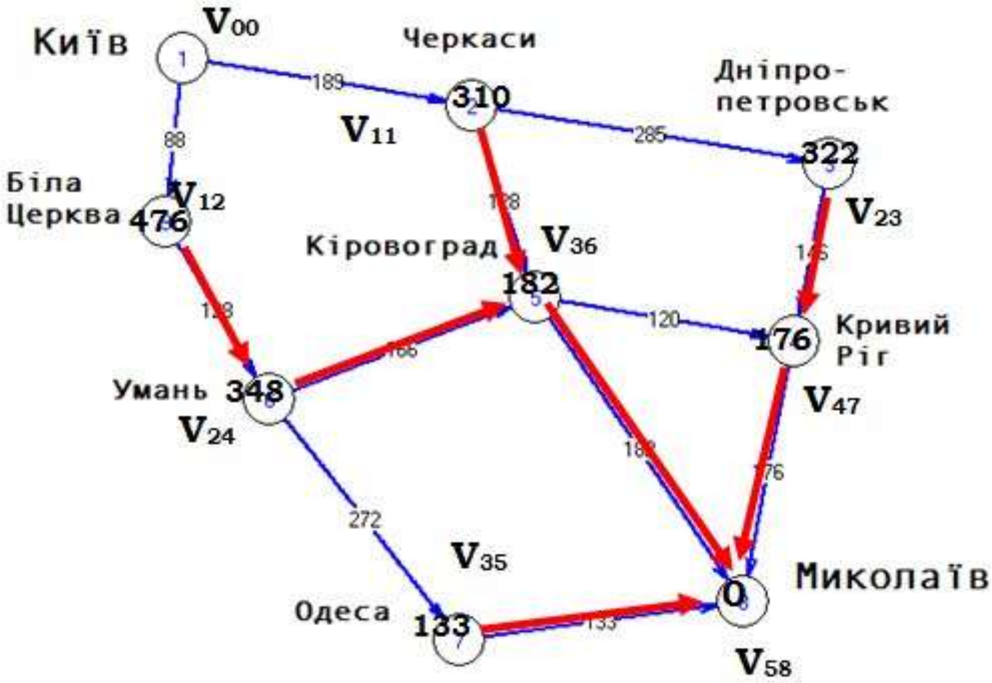


Рис. 10. Найкоротший шлях від Умані, Черкас,
Білої Церкви та Дніпропетровська до Миколаєва

9. З вершини V_{00} можна вирушити двома шляхами – через V_{12} та через V_{11}. Довжина першого шляху становитиме 88+476=564, другого: 189+310=499. Другий коротший, отже обираємо його.

10. Таким чином,ми знайшли найкоротший шлях від першої вершини до останньої, тобто необхідно їхати наступним чином:

Київ-Черкаси-Кіровоград-Миколаїв (рис. 11).

Отже, загальний шлях становитиме: 348+128=476.

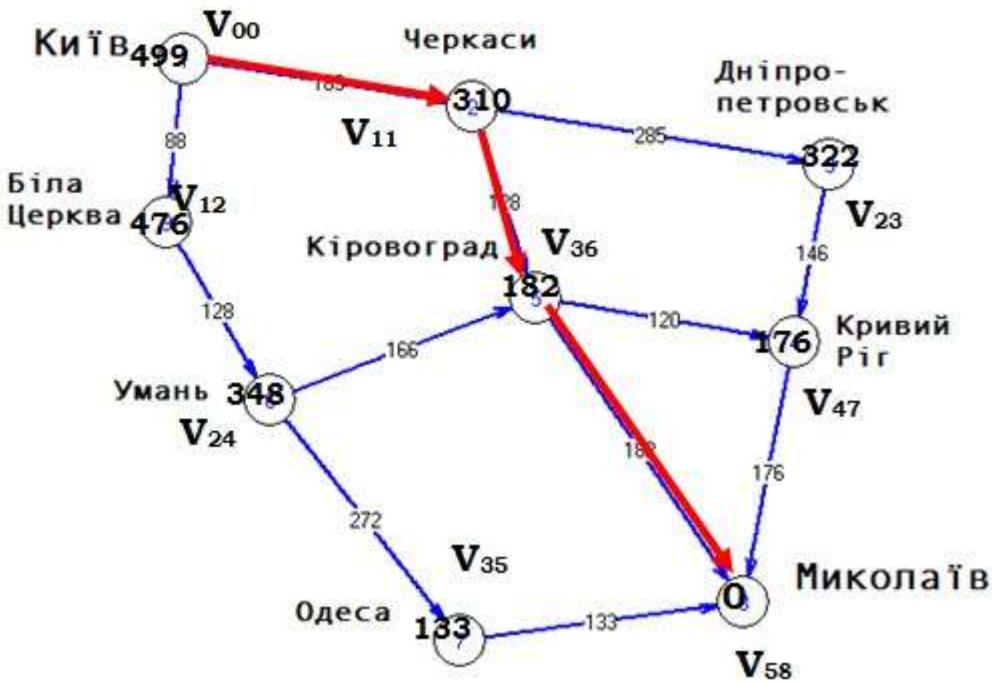


Рис. 11. Найкоротший шлях від Києва до Миколаєва

Разом з тим, нами було визначено найкоротший шлях до Миколаєва від кожного міста, що розглядалося.

Тема 10. Моделі мережного планування

План

10.1. Сфери застосування мережного планування.
10.2. Впорядкування структурної таблиці.
10.3. Побудова мережного графіку І типу.
10.4. Визначення критичного шляху.
10.5 Алгоритм задачі мережного планування.
10.6. Оптимізація плану комплексу робіт та перерозподіл ресурсів.

10.1. Сфери застосування мережного планування

При дослідженні операцій на практиці часто доводиться зустрічатися з задачею раціонального планування складних, комплексних робіт. Прикладами таких робіт можуть бути: будівництво великого промислового об'єкту; переозброєння арії; виконання комплексної науково-дослідної теми за участі ряду організацій; виконання комплексу сільськогосподарських робіт.

Характерним для кожного такого комплексу робіт є те, що він складається з ряду окремих, елементарних робіт або «ланок», які не просто виконуються незалежно одна від іншої, а взаємно обумовлюють одна одну. Тобто виконання деяких робіт не може бути початим раніше, ніж завершені інші.

Планування будь-якого комплексу робіт має проводитися з урахуванням наступних істотних елементів:

– часу, що потрібен на виконання всього комплексу робіт та його окремих ланок;
– вартості всього комплексу робіт та окремих ланок;
– сировинних, енергетичних та людських ресурсів.

Раціональне планування комплексу робіт вимагає відповіді на наступні питання:

– як розподілити наявні матеріальні засоби і трудові ресурси між ланками комплексу?
– в які моменти починати і коли закінчувати окремі ланки?
– які можуть виникнути перешкоди своєчасному завершенню комплексу робіт і як їх усувати? І т.д.

Основним матеріалом для мережевого планування є список робіт (ланок) комплексу, в якому вказані не тільки роботи, а і їх взаємна обумовленість. Такий список називається ***структурною таблицею комплексу робіт***. Структурна таблиця комплексу робіт, що доповнена інформацією про час виконання окремих робіт, називається ***структурно-часовою***.

10.2. Впорядкування структурної таблиці

1. Впорядкувати структурну таблицю:

Таблиця 1

№	Робота	Базується на роботах	Час t_i
1	b_1	-	**10**
2	b_2	b_5, b_8	**8**
3	b_3	-	**5**
4	b_4	-	**15**
5	b_5	b_6	**18**
6	b_6	b_1, b_3	**18**
7	b_7	b_2	**30**
8	b_8	b_3, b_4	**19**
9	b_9	b_5, b_8	**25**
10	b_{10}	b_9	**8**

Проведемо впорядкування.

Таблиця 2

№	Робота	Базується на роботах	Час t_i	Ранг	Позначення робіт після впорядкування	Базується на роботах
1	b_1	-	**10**	**1**	a_1	-
2	b_2	b_5, b_8	**8**	**4**	a_7	a_5, a_6
3	b_3	-	**5**	**1**	a_2	-
4	b_4	-	**15**	**1**	a_3	-
5	b_5	b_6	**18**	**3**	a_6	a_4
6	b_6	b_1, b_3	**18**	**2**	a_4	a_1, a_2
7	b_7	b_2	**30**	**5**	a_9	a_7
8	b_8	b_3, b_4	**19**	**2**	a_5	a_2, a_3
9	b_9	b_5, b_8	**25**	**4**	a_8	a_5, a_6
10	b_{10}	b_9	**8**	**5**	a_{10}	a_8

Перша операція, яка проводиться із структурною таблицею, називається впорядкуванням. При впорядкуванні роботам надається нова, більш зручна нумерація.

Робота називається ***роботою першого рангу***, якщо для її початку не потрібне виконання ніяких інших робіт.

Робота називається ***роботою другого рангу***, якщо вона базується на одній чи кількох роботах першого рангу і т.д.

Представимо впорядковану структурну таблицю у вигляді структурно-часової таблиці 3:

Таблиця 3

№	Робота	Базується на роботах	Час t_i
1	a_1	-	**10**
3	a_2	-	**5**
4	a_3	-	**15**
6	a_4	a_1, a_2	**18**
8	a_5	a_2, a_3	**19**
5	a_6	a_4	**18**
2	a_7	a_5, a_6	**8**
9	a_8	a_5, a_6	**25**
7	a_9	a_7	**30**
10	a_{10}	a_8	**8**

10.3. Побудова мережного графіку І типу

Зв’язки між роботами можна зобразити графічно у вигляді мережного графіка (або графа) двох типів:

І тип: роботи позначаються стрілками, а події, що полягають у виконанні якихось робіт і можливості початку нових – кружками, або «вузлами». Сумісне виконання робіт зображуються додатковим вузлом, в який входять пунктирні стрілки, що не зображають ніяких робіт. Перевагою цього способу є те, що він може бути доволі прости пристосований до обліку часу виконання робіт.

ІІ тип: вузлами позначаються роботи, а стрілками – логічні зв'язки між ними. Перевагою цього типу є те, що в нього легко вносити нові, раніше не вказані зв'язки, які виявляються в ході виконання робіт.

Побудуємо мережний графік типу І для структурно-часової таблиці та часовий мережний графік. Будуватимемо одночасно і мережевий графік і часовий (рис. 1).

Побудова починається з вузла A_0, що розміщується на початку координат, з нього виходять три початкові роботи, які не базуються на будь-яких інших роботах. З вузла A_0 виходить стрілка a_1, проекція якої на вісь t, дорівнює часу виконання даної роботи $t_1=10$. Робота закінчується вузлом A_1. Відповідно проекція для роботи a_2 дорівнює $t_2=5$, проекція роботи a_3 дорівнює $t_3=15$.

Робота a_4 базується на виконанні робіт a_1 та a_2. Оскільки між a_1 та a_2 немає зв'язку, показуємо фіктивний (але логічний) зв'язок пунктирною лінією. Робота a_2 закінчується в момент $t_2=5$, а робота a_1 – в момент $t_1=10$. Отже, робота a_4 може розпочатися не раніше, ніж момент часу $t_1=10$, коли закінчено роботу a_1. Проекція стрілки a_4 дорівнює: $T_4=t_1+t_4=10+18=28$.

Робота a_5 базується на виконанні робіт a_2 та a_3. Оскільки між a_2 та a_3 немає зв'язку, показуємо фіктивний (але логічний) зв'язок пунктирною лінією. Стрілка a_5, що визначає відповідну роботу, має починатися у вузлі A_3, який має абсцису, що є більшою з $t_2=5$ та $t_3=15$. Вузол a_5 має абсцису $T_5=t_3+t_5=15+19=34$

Робота a_6 базується на роботі a_4. Стрілка починається у вузлі A_4 і закінчується у вузлі A_6, з абсцисою $T_6=t_4+t_6=28+18=46$.

Роботи a_7 та a_8 базуються на роботах a_5 та a_6. Але між роботами a_5 та a_6 немає прямого зв'язку, будуємо фіктивний (пунктирною лінією). Стрілка a_7, починається у вузлі A_6, що має порівняно із вузлом A_5 більшу абсцису і закінчується у вузлі A_7 з абсцисою $T_7=t_6+t_7=46+8=54$.

Стрілка a_8 також починається у вузлі A_6 з абсцисою $T_6=46$ і закінчується у вузлі A_8 з абсцисою $T_8=t_6+t_8=46+25=71$.

Стрілка a_9 з проекцією $t_9=30$ починається у вузлі A_7 (базується на a_7) і закінчується у вузлі A_9 з абсцисою $T_9=t_7+t_9=54+30=84$.

Стрілка a_{10}, що опирається на a_8 (базується на a_8), починається у вузлі A_8 і закінчується у вузлі A_{10} з абсцисою $T_{10}=t_8+t_{10}=71+8=79$.

Оскільки робота a_9 закінчується останньою, то з вузлом A_9 з'єднується пунктирною стрілкою вузол A_{10} – завершення попередньої роботи a_{10} (рис. 1)

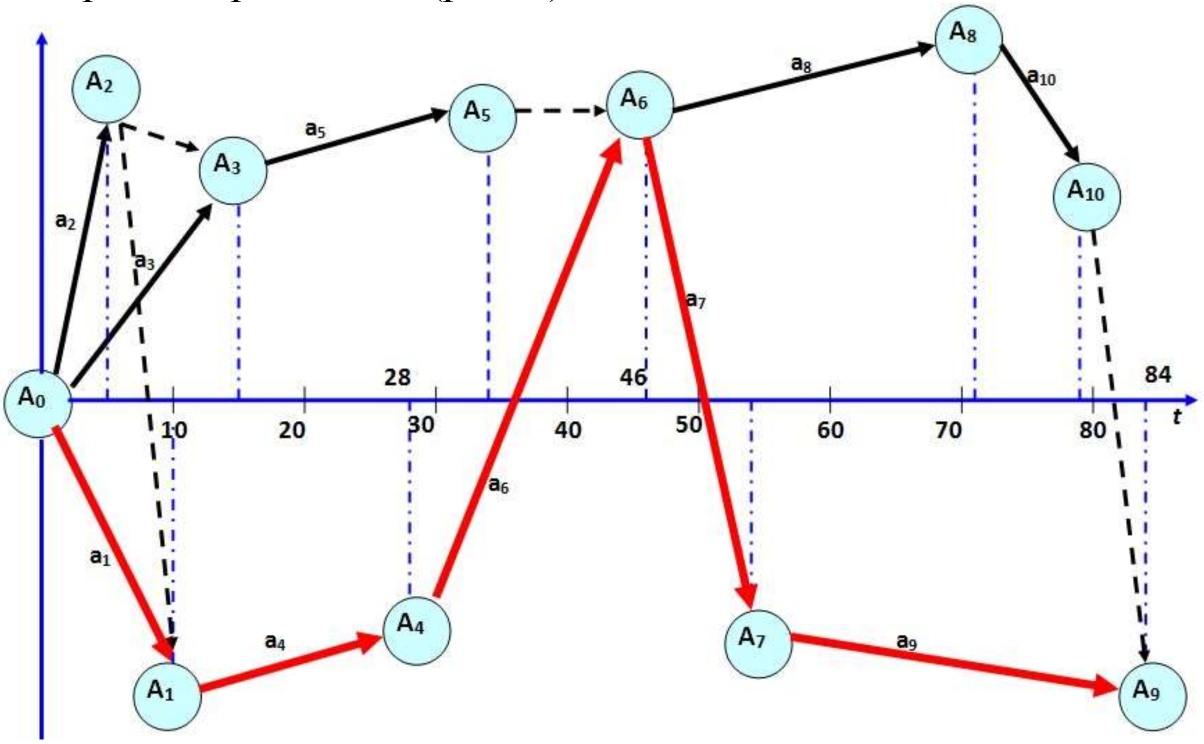


Рис. 1

10.4. Визначення критичного шляху

Час $T=84$ від початкового вузла A_0 до завершального A_9 є мінімальним часом, за який може бути завершений комплекс робіт. Очевидно, що час T є сумою часів виконання не всіх робіт, а лише деяких з них: $T=t_1+t_4+t_6+t_7+t_9=10+18+18+8+30=84$.

Роботи a_1, a_4, a_6, a_7, a_9, з тривалості яких складено час T, називаються ***критичними роботами***, а ланцюжок відповідних їм стрілок на мережевому графіку – ***критичним шляхом***. На рис. критичний шлях позначено червоними стрілками. (рис. 1).

Особливість критичних робіт полягає в наступному: для того, щоб комплекс робіт було виконано за мінімальний час, кожна з робіт повинна починатися точно в момент, коли закінчена остання з робіт, на яких вона базується, і продовжуватися не більше того часу, який їй відведено за планом. Найменше запізнення у виконанні принаймні однієї з критичних робіт приводить до відповідної затримки виконання плану в цілому. Таким чином, критичний шлях – сукупність найуразливіших, «слабких місць» плану.

Стосовно решти, «некритичних робіт» (в нашому випадку це роботи a_2, a_3, a_5, a_8, a_{10}), слід відмітити, що кожна з цих робіт має певні часові резерви і може бути завершена з деяким запізненням. При цьому це не відобразиться на періоді виконання всього комплексу робіт.

Резерви, що відповідають некритичним роботам, можуть бути легко визначені з часового мережевого графіка. Маємо чотири некритичні дуги:

$$A_0 - a_2 - A_2 - A_1;$$
$$A_0 - a_3 - A_3 - a_5 - A_5 - A_6;$$
$$A_0 - a_2 - A_2 - A_3 - a_5 - A_5 - A_6;$$
$$A_6 - a_8 - A_8 - a_{10} - A_{10} - A_9.$$

Кожній некритичні дузі відповідає певний часовий резерв, який дорівнює *різниці між сумою часів критичних робіт, що лежать на критичному шляху, які замикають дугу, і некритичних, що лежать на самій дузі.*

Наприклад, на дузі $A_0 - a_2 - A_2 - A_1$ лежить тільки одна некритична робота a_2 ; на замикаючому її відрізку критичного шляху – одна критична робота a_1.

Резерв часу, що визначається роботою a_2, дорівнює: $R_2=t_1-t_2=10-5=5$. Отже, виконання роботи a_2 може без збитку для загального терміну бути затриманим на 5 одиниць часу.

Знання критичного шляху корисне з двох міркувань:

по-перше, воно дозволяє виділити з усього комплексу робіт сукупність найбільш «загрозливих», забезпечити в разі необхідності їх форсування;

по-друге, дає можливість прискорити виконання комплексу робіт за рахунок залучення резервів, що приховані в некритичних роботах.

10.5. Алгоритм задачі мережного планування

Запишемо у вигляді математичних формул систему зв'язків, що відображена в структурно-часовій таблиці комплексу робіт.

Позначимо через τ_i – мінімальний можливий час початку роботи a_i (час відраховується від початку процесу), t_i – час виконання роботи a_i, T_i – мінімально можливий час її закінчення.

Очевидно, що $T_i = \tau_i + t_i$.

Користуючись цими позначеннями, можна записати формулами всі логічні зв'язки між роботами.

Наприклад, якщо робота $\boldsymbol{a_i}$ базується на роботах $\boldsymbol{a_j}$, $\boldsymbol{a_k}$, $\boldsymbol{a_l}$, то вона не може початися раніше, ніж та з базових робіт, що закінчується пізніше всіх $\tau_i = \max\left(T_j, T_k, T_l\right)$.

Застосовуючи такі формули до всіх робіт по черзі, знайдемо всі моменти закінчення робіт $\boldsymbol{T_i}$ і, нарешті, мінімальний час закінчення всього комплексу робіт.

Таблиця 4

№	Робота	Базується на роботах	Час $\boldsymbol{t_i}$
1	$\boldsymbol{a_1}$	-	***10***
3	$\boldsymbol{a_2}$	-	***5***
4	$\boldsymbol{a_3}$	-	***15***
6	$\boldsymbol{a_4}$	$\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$	***18***
8	$\boldsymbol{a_5}$	$\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$	***19***
5	$\boldsymbol{a_6}$	$\boldsymbol{a_4}$	***18***
2	$\boldsymbol{a_7}$	$\boldsymbol{a_5}$, $\boldsymbol{a_6}$	***8***
9	$\boldsymbol{a_8}$	$\boldsymbol{a_5}$, $\boldsymbol{a_6}$	***25***
7	$\boldsymbol{a_9}$	$\boldsymbol{a_7}$	***30***
10	$\boldsymbol{a_{10}}$	$\boldsymbol{a_8}$	***8***

Для робіт першого рангу $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$, маємо:

$$\tau_1 = 0;\quad \mathrm{T}_1 = t_1 = 10;$$

$$\tau_2 = 0;\quad \mathrm{T}_2 = t_2 = 5;$$

$$\tau_3 = 0;\quad \mathrm{T}_3 = t_3 = 15.$$

Робота $\boldsymbol{a_4}$ базується на роботах $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$. Вона може початися в момент $\boldsymbol{\tau_4}$, коли закінчиться та, що найбільш пізно закінчується з робіт $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$.

$$\tau_4 = \max\left(T_1, T_2\right) = \max\left(10{,}5\right) = 10$$

Момент закінчення роботи $\boldsymbol{a_4}$: $T_4 = \tau_4 + t_4 = 10 + 18 = 28$

Аналогічно для інших робіт:

$$\tau_5 = \max\left(T_2, T_3\right) = \max\left(5{,}15\right) = 15\,;\; T_5 = \tau_5 + t_5 = 15 + 19 = 34;$$

$$\tau_6 = \max(T_4) = \max(28) = 28\,;\; T_6 = \tau_6 + t_6 = 28 + 18 = 46;$$

$$\tau_7 = \max(T_5, T_6) = \max(34,46) = 46\,;$$

$$T_7 = \tau_7 + t_7 = 46 + 8 = 54;$$

$$\tau_8 = \max(T_5, T_6) = \max(34,46) = 46\,;$$

$$T_8 = \tau_8 + t_8 = 46 + 25 = 71;$$

$$\tau_9 = \max(T_7) = \max(54) = 54\,;\; T_9 = \tau_9 + t_9 = 54 + 30 = 84;$$

$$\tau_{10} = \max(T_8) = \max(71) = 71\,;\; T_{10} = \tau_{10} + t_{10} = 71 + 8 = 79.$$

Час закінчення всього комплексу робіт:

$$T = \max(T_1, T_2, \ldots, T_{10}) = \max(10,5,15,28,34,46,54,71,84,79) = 84.$$

Для того, щоб знайти критичні роботи (критичний шлях), потрібно:

– знайти роботу $\boldsymbol{a_i}$, для якої час закінчення максимальний. Ця робота, звичайно, буде критичною.

– серед обчислювальних формул знайти ту, якою визначається момент початку цієї роботи $\boldsymbol{\tau_i}$. Величина $\boldsymbol{\tau_i}$ визначається як $\tau_i = \max(T_j, T_k, T_l)$ максимум якихось моментів;

– серед них знайти максимальний. Робота $\boldsymbol{a_m}$, при якій цей максимум досягається, буде другою з кінця роботою на критичному шляху. І т.д.

Знайдемо критичний шлях для нашого прикладу.

Оскільки максимум досягається для $\boldsymbol{T_9}$, то робота $\boldsymbol{a_9}$, є критичною. Вона базується на роботі $\boldsymbol{a_7}$, яка, очевидно, також є критичною. Робота $\boldsymbol{a_7}$ базується на роботах $\boldsymbol{a_5}$, $\boldsymbol{a_6}$. Максимальним є значення $\boldsymbol{T_6}$, отже, робота $\boldsymbol{a_6}$ є критичною. Робота $\boldsymbol{a_6}$ базується на роботі $\boldsymbol{a_4}$, яка, очевидно, також є критичною. Робота $\boldsymbol{a_4}$ базується на роботах $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$. Максимальним є значення $\boldsymbol{T_1}$, отже, робота $\boldsymbol{a_1}$ є критичною. Отримали критичний шлях $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_4}$, $\boldsymbol{a_6}$, $\boldsymbol{a_7}$, $\boldsymbol{a_9}$, тривалістю 84 одиниці часу.

10.6. Оптимізація плану комплексу робіт та перерозподіл ресурсів

Раніше визначалося, що мережний графік може бути використаний для **оптимізації плану**. Таке поліпшення може проводитися з різною метою. Наприклад, може виявитися, що нас не влаштовує загальний час виконання комплексу робіт $\boldsymbol{T}$; виникає питання про те, як потрібно форсувати роботи, для того, щоб загальний час не перевищував заданого часу $\boldsymbol{T_0}$. Очевидно, що для цього є сенс форсувати саме критичні роботи, зменшення часу виконання яких безпосередньо позначиться на часі $\boldsymbol{T}$. Природно припустити, що форсування робіт вимагає вкладення певних засобів. Виникає типова задача дослідження операцій: які додаткові засоби і в які роботи слід вкласти, щоб загальний термін виконання комплексу робіт був не більшим заданої величини $\boldsymbol{T_0}$, а витрата додаткових засобів була мінімальною?

Основні характеристики комплексу робіт визначені в структурно-часовій таблиці 1.

Таблиця 1

№	Робота	Базується на роботах	Час t_i
1	a_1	-	**20**
2	a_2	-	**10**
3	a_3	-	**8**
4	a_4	a_1, a_2	**20**
5	a_5	a_1, a_2, a_3	**10**
6	a_6	a_1, a_2, a_3	**5**
7	a_7	a_6	**5**
8	a_8	a_4, a_5, a_7	**10**

Необхідно зменшити час виконання всього комплексу робіт.

Побудуємо часовий мережний графік (рис. 1). Завершенням комплексу є вузол А8. Критичний шлях складається з робіт a1, a4, a8. Час закінчення комплексу робіт T=t1+t4+t8=20+20+10=50. Цей час необхідно зменшити до $\boldsymbol{T_0=40}$; для цього слід форсувати деякі критичні роботи. Відомо, що в роботу $\boldsymbol{a_i}$ можна вкласти $x_i \le c_i$ засобів. При цьому час виконання роботи зменшується відповідно лінійної залежності $t_i^{'} = t_i\left(1 - b_i x\right)$.

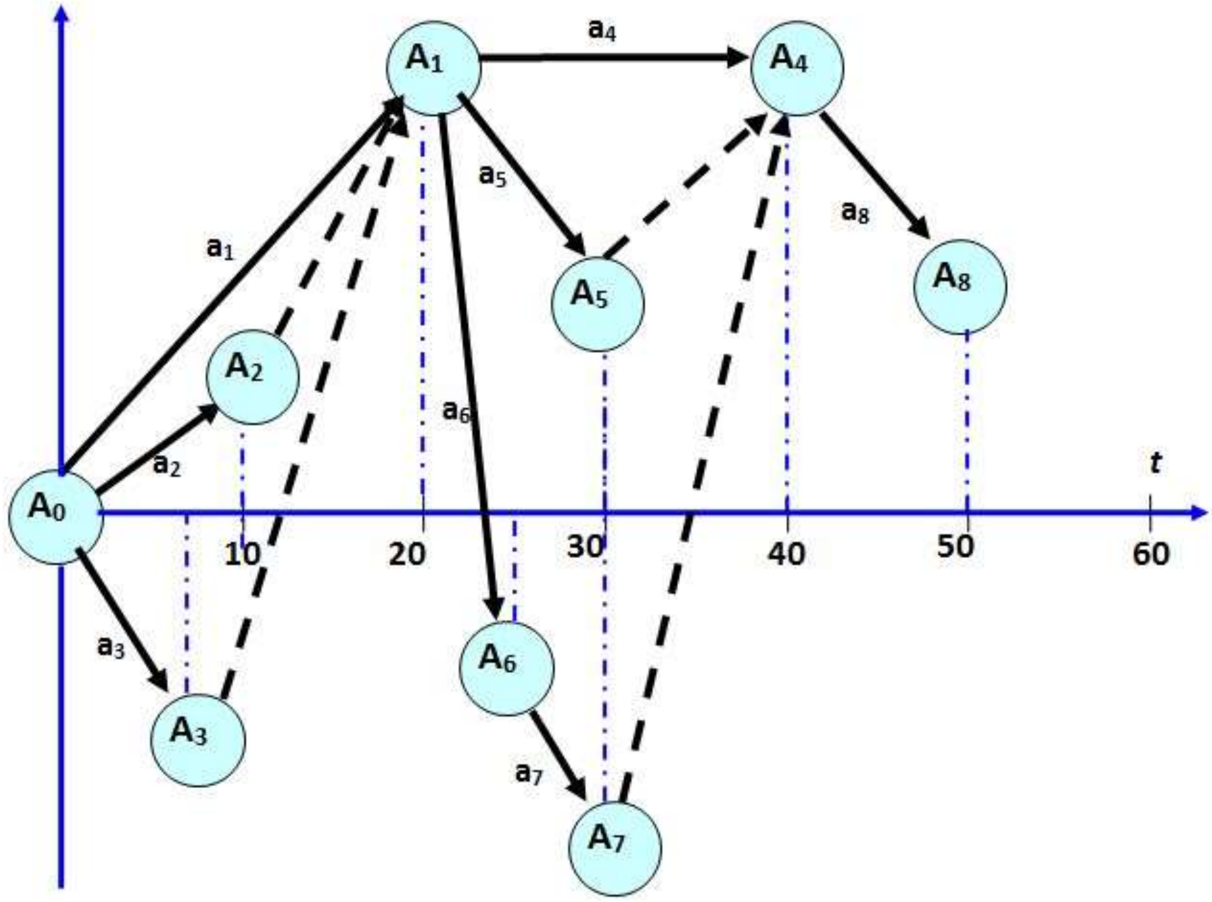


Рис. 1. Структурно-часовий мережний графік

Для критичних робіт a_1, a_4, a_8 параметри b_i, c_i рівні:

b_1=0,2, c_1=2; b_4=0,3, c_4=2; b_8=0,1, c_8=5.

Необхідно знайти величини x_1, x_4, x_8, які забезпечують $T \le T_0 = 40$ і при яких досягається $x_1 + x_4 + x_8 \to min$.

Розв'язання

Враховуючи, що $x_i \le c_i$, маємо: $2-x_1 \ge 0$; $2-x_4 \ge 0$; $5-x_8 \ge 0$.

Новий час виконання робіт, за умови, що критичний шлях не зміниться, дорівнює:

$$T' = t_1^{'} + t_4^{'} + t_8^{'} = t_1(1-0{,}2x_1) + t_4(1-0{,}3x_4) + t_8(1-0{,}1x_8) =$$

$$= 20(1-0{,}2x_1) + 20(1-0{,}3x_4) + 10(1-0{,}1x_8) = 50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8$$

Ця величина не повинна перевищувати 40, тому

$50 - 4x_1 - 6x_4 - x_8 \le 40$, звідки $4x_1 + 6x_4 + x_8 \ge 10$

Отже, початкова задача звелася до ЗЛП:

$$L = x_1 + x_4 + x_8 \to \min$$

за умов:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0, \\ 2 - x_4 \geq 0, \\ 5 - x_8 \geq 0, \\ 4x_1 + 6x_4 + x_8 \geq 10, \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

В результаті застосування симплексного методу, отримаємо: $\boldsymbol{x_1=x_8=0, x_4=5/3}$. При цьому $\boldsymbol{L=L_{min}=5/3}$.

Отже, оптимальним вкладенням засобів буде вкладення $\boldsymbol{x_4=5/3}$ в роботу $\boldsymbol{a_4}$ і не вкладання ніяких засобів у роботи $\boldsymbol{a_1}$ та $\boldsymbol{a_8}$.

При цьому час виконання робіт буде рівним

$$T' = t_1 + t_4^{'} + t_8 = 20 + 20\left(1 - 0{,}3 \cdot {}^{5}\!/_{3}\right) + 10 = 20 + 10 + 10 = 40 = T_0$$

Перерозподіл ресурсів

Комплекс робіт $\boldsymbol{a_1, a_2, a_3}$ задано структурно-часовою табл. 2.

Необхідно встановити, як потрібно перерозподілити наявні рухомі засоби між роботами для того, щоб час виконання комплексу був мінімальним?

Таблиця 2

№	Робота	Базується на роботах	Час $\boldsymbol{t_i}$
1	$\boldsymbol{a_1}$	-	***20***
2	$\boldsymbol{a_2}$	-	***10***
3	$\boldsymbol{a_3}$	$\boldsymbol{a_1, a_2}$	***10***

Критичними є роботи $\boldsymbol{a_1, a_3}$, час виконання комплексу робіт $\boldsymbol{T=30}$. Некритичною є робота $\boldsymbol{a_2}$. Вона має запас рухомих засобів $\boldsymbol{b_2=1}$. Інші роботи запасів рухомих засобів не мають.

Перерозподіл засобів $\boldsymbol{x}$**з** *роботи* $\boldsymbol{a_2}$ збільшує час її виконання до $t_2^{''} = \dfrac{10}{1 - 0{,}1x}$. Перерозподіл засобів $\boldsymbol{x}$ *на роботу* $\boldsymbol{a_1}$ зменшує час її виконання до $t_1^{'} = \dfrac{20}{1 + x}$. Перерозподіл засобів $\boldsymbol{x}$ на *роботу* $\boldsymbol{a_3}$ зменшує час її виконання до $t_3^{'} = \dfrac{10}{1 + 4x}$.

Потрібно встановити, яким чином можна перерозподілити засоби з роботи a_2 на роботи a_1 та a_3, щоб час виконання комплексу робіт став мінімальним.

Розв'язання

Позначимо кількість засобів, що перерозподіляються з роботи a_2 на роботи a_1 та a_3, відповідно x_1 та x_3. Необхідно знайти такі невід'ємні значення x_1 та x_3, щоб виконувалась умова $x_1 + x_3 \le 1.$ (1). При цьому $\left(t_1^{'}\right)_{кр} + \left(t_2^{''}\right)_{кр} + \left(t_3^{'}\right)_{кр} \to \min$. (2)

Індекс ***кр*** означає, що відповідний член входить в суму лише у випадку, якщо він лежить на критичному шляху.

Проаналізуємо, за яких умов робота a_2 увійде в критичний шлях. Це станеться, якщо час її виконання стане більшим, ніж час виконання роботи a_1, тобто $t_2^{''} > t_1^{'}$

Знайдемо за яких умов буде виконуватися умова: $t_2^{''} = t_1^{'}$

$\frac{10}{1-0,1} = \frac{20}{1+x_1}$. тобто за умови, що з роботи a_2 будуть зняті всі засоби. Остання рівність має місце, якщо $x_1=0,8$.

Отже, при $x_1 < 0,8$ робота a_2 критичною не стане, критичними залишаться роботи a_1 та a_3. Тоді, враховуючи (2)

$$T' = t_1^{'} + t_8^{'} = \frac{20}{1+x_1} + \frac{10}{1+4x_3}.$$

Враховуючи (1), маємо:

$$T' = \frac{20}{1+x_1} + \frac{10}{5-4x_1} \to \min .$$

Дослідивши математичними методами цю функцію на екстремум, отримаємо, що її мінімум досягається при $x_1 \approx 0,66$. Відповідно, $x_3 \approx 1-0,66 \approx 0,34$.

Отже, необхідно розподілити $x_1 \approx 0,66$ засобів на роботу a_1 і $x_3 \approx 0,34$ засобів на роботу a_3. При цьому час виконання комплексу робіт буде мінімальним і становитиме ***T'=16,29.***

Відповідно час виконання робіт a_1, a_2, a_3 становитиме $t_1^{'} = 12,05; t_2^{''} = 11,11; t_3^{'} = 4,24$

Тема 11. Моделі сіткового планування і управління

План

11.1. Основні поняття сіткового планування.
11.2. Правила побудови графів.
11.3. Основні часові параметри сіткової моделі.
11.4. Оптимізація сіткової моделі. Коефіцієнт конкордації.
11.5. Сіткове планування в умовах невизначеності.

11.1. Основні поняття сіткового планування

Основою сіткового планування та управління є сіткова модель (СМ), в якій моделюється сукупність взаємозв'язаних робіт і подій, що відображають процес досягнення певної мети. Вона може бути представлена у вигляді графіка або таблиці.

Основними поняттями СМ є подія, робота і шлях. На рис.1 графічно представлена СМ, що складається з 11 подій і 16 робіт, тривалість виконання яких вказана над роботами.

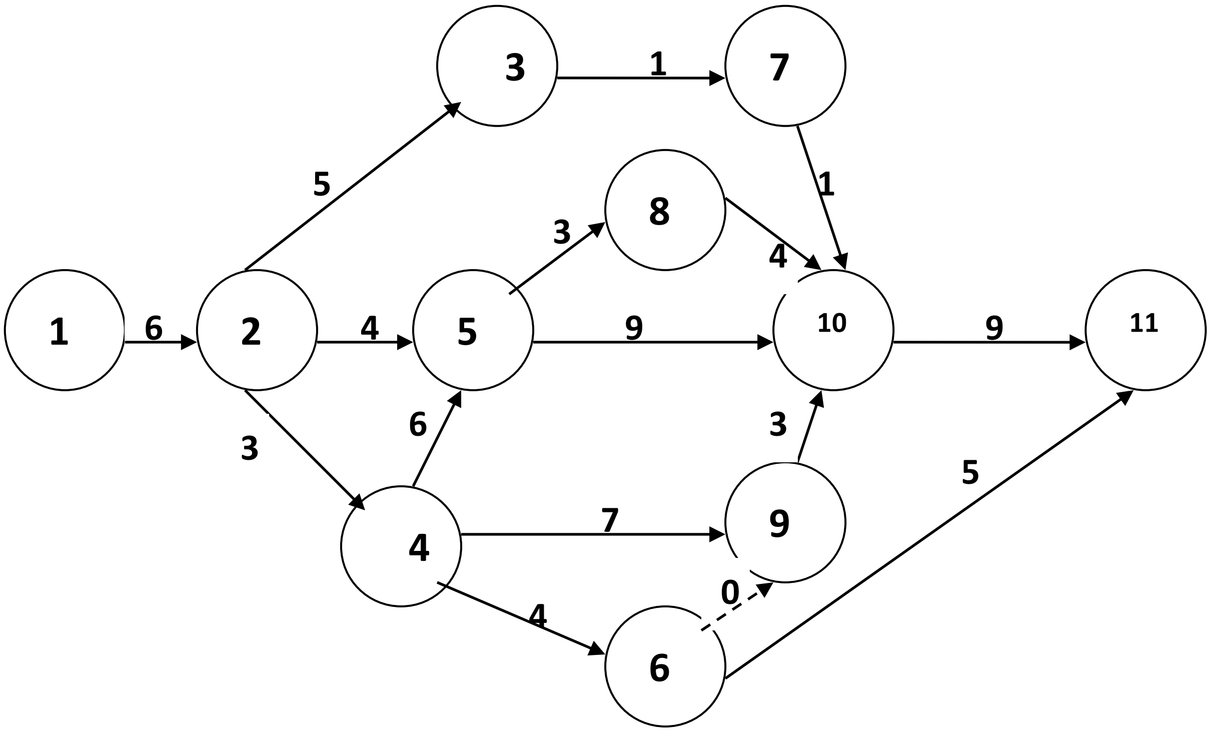


Рис. 1. Сіткова модель

Робота характеризує матеріальну дію, що вимагає використання ресурсів, або логічну дію, яка вимагає лише взаємозв'язку подій**.** При графічному представленні робота зображується стрілкою, яка сполучає дві події. Вона позначається парою чисел $(i;j)$, $i-$номер події, з якої робота виходить, а $j-$

номер події, в яку вона входить. Робота не може початися раніше, ніж відбудеться подія**,** з якої вона виходить. Кожна робота має певну тривалість $t(i;j)$. Наприклад, запис $t(2;5)=4$ означає, що робота $(2;5)$ має тривалість ***4*** одиниці. До робіт відносяться також такі процеси, які не вимагають ні ресурсів, ні часу виконання. Вони полягають у встановленні логічного взаємозв'язку робіт і показують, що одна з безпосередньо залежить від іншої; такі роботи називаються ***фіктивними*** і на графіку зображуються пунктирними стрілками (робота $(6;9)$).

Подіями називаються результати виконання однієї або декількох робіт. Вони не мають тривалості в часі. Подія здійснюється в той момент, коли закінчується остання з робіт, що входить до нього. Події позначаються одним числом і при графічному представленні СМ зображаються колом (або іншою геометричною фігурою), усередині якого проставляється його порядковий номер $(i=1,2,3\ldots,N)$. В СМ є початкова подія (з номером ***1***), з якої роботи тільки виходять, і кінцева подія (з номером ***N*)**, в яку роботи лише входять.

Шлях **–** це послідовність робіт, які слідують одна за одною і сполучають початкову і кінцеву події. Будь-який графік СМ має декілька шляхів, наприклад, в наведеній вище моделі шляхами є $L_1=(1,2,3,7,10,11)$, $L_2(1,2,4,6,11)$ та ін. Тривалість шляху визначається сумарною тривалістю робіт, які його складають. Шлях, що має максимальну довжину, називається ***критичним*** і позначають L_{kp}**,** а його тривалість – t_{kp}**.** Роботи, що належать критичному шляху, називаються ***критичними.*** їх невчасне виконання веде до зриву термінів всього комплексу робіт.

СМ мають низку характеристик, які дозволяють визначити ступінь напруженості виконання окремих робіт, а також всього їх комплексу і ухвалити рішення про перерозподіл ресурсів. Проте, перед розрахунком показників СМ необхідно перевірити графік СМ на його відповідність деяким обов'язковим вимогам.

11.2. Правила побудови графів

1. Події правильно пронумеровані, тобто для кожної роботи ***(i;j) i<j*** (на рис. 2 неправильно побудовані роботи ***(4;3)*** і ***(3;2)***).

При невиконанні цієї вимоги необхідно використовувати алгоритм правильної нумерації подій.

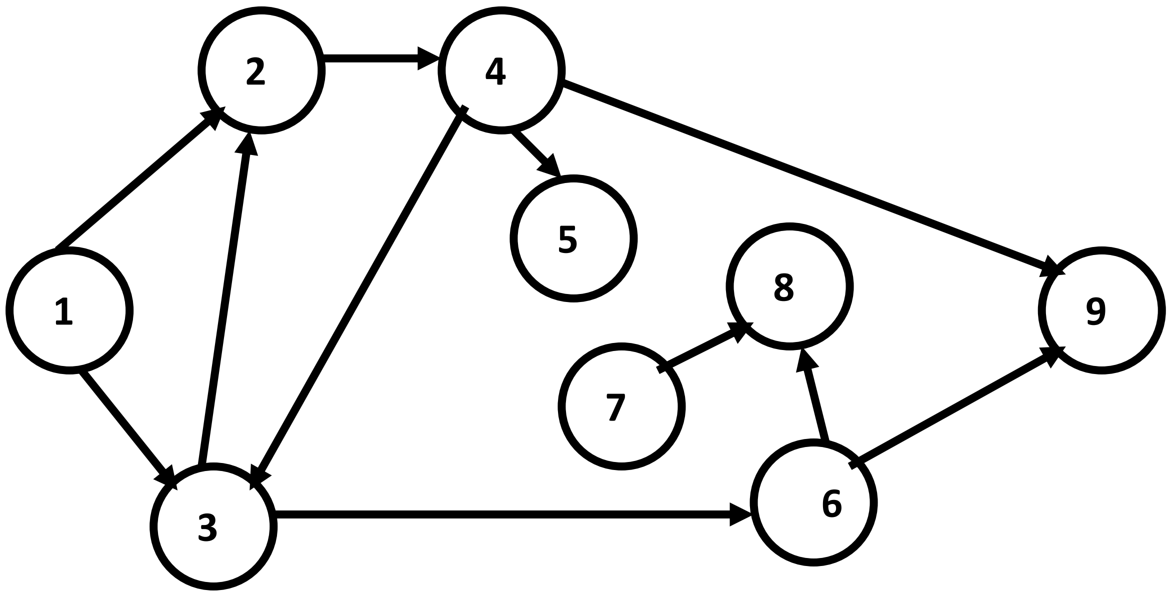


Рис. 2. Приклади помилок при побудові графіка СМ

2. Відсутні події (окрім завершальної), за якими не слідує хоча б одна робота (подія ***5***).

3. Відсутні події (за винятком початкової), яким не передує хоча б одна робота (подія ***7***).

4. Відсутні цикли, тобто замкнуті шляхи, що сполучають подію з нею ж самою (шлях ***(2,4,3,2)***).

При невиконанні вказаних вимог немає сенсу обчислювати характеристики (параметри) подій, робіт і шляху (табл. 1).

11.3. Основні часові параметри сіткової моделі

Таблиця 1

Основні часові параметри СМ

Елементи СМ	Найменування параметра	Умовне позначення параметра
Подія i	***Ранній термін*** *настання події*	$t_p(i)$
	Пізній термін *настання події*	$t_n(i)$
	Резерв часу *події*	$R(i)$
	Тривалість роботи	$t(i; j)$
	Ранній термін *початку роботи*	$t_{pn}(i; j)$
	Ранній термін *закінчення роботи*	$t_{pз}(i; j)$

Робота $(i;\,j)$	***Пізній термін*** *початку роботи*	$t_{пп}(i;\,j)$
	Пізній термін *закінчення роботи*	$t_{пз}(i;\,j)$
	Повний резерв часу роботи	$R_п(i;\,j)$
	Незалежний резерв часу роботи	$R_н(i;\,j)$
Шлях L	***Тривалість*** шляху	$t(L)$
	Тривалість критичного шляху	$t_{кр}$
	Резерв часу шляху	$R(L)$

Для подій розраховують три характеристики: ранній і пізній термін настання події, а також її резерв.

Ранній термін настання події ***j*** – це термін, необхідний для виконання всіх робіт, що передують даній події. Цей час розраховується шляхом вибору максимального значення із тривалості всіх шляхів, що ведуть від початкової до даної події, причому $t_p(1)=0$, а $t_p(N)=t_{кр}(L)$:

$$t_p(j)=\max_i\{t_p(i)+t(i;\,j)\},\ j=\overline{2,N}$$

Пізнім терміном настання події ***i*** називається такий максимальний термін, який не порушує пізніх припустимих термінів настання наступних за нею подій. При визначенні пізніх термінів настання подій розрахунок ведуть від ***завершальної*** події до початкової. Цей шлях визначається шляхом вибору мінімального значення із тривалості шляхів, наступних за даними подіями, що ведуть до ***кінцевої*** події.

Визначення пізніх термінів виконання подій ґрунтується на *регресивному рахунку*, тобто рахунку від зворотного. Спочатку визначається пізній термін виконання наступної ***j***-ої події, а потім попередньої ***i***-ої за формулою: $t_n(j)=\min_j\{t_n(i)-t(i;\,j)\},\ j=\overline{2,N-1}$

При цьому враховують співвідношення $t_n(N)=t_p(N)$.

Всі події, за винятком подій, що належать критичному шляху, мають резерв $R(i)$: $R(i)=t_n(i)-t_p(i)$.

Резерв часу події показує, на який гранично допустимий термін можна затримати настання цієї події, не викликаючи при цьому збільшення терміну виконання всього комплексу робіт.

Для всіх робіт $(i; j)$ на основі ранніх і пізніх термінів настання подій можна визначити показники:

Ранній термін початку $-t_{рп}(i; j) = t_р(i)$.

Ранній термін закінчення $-t_{рз}(i; j) = t_р(i) + t(i; j)$.

Пізній термін закінчення $-t_{пз}(i; j) = t_п(i)$

Пізній термін початку $-t_{пп}(i; j) = t_п(j) - t(i; j)$

Повний резерв часу $-R_п(i; j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i; j)$

Незалежний резерв– $R_н(i; j) = \max\{0; t_р(j) - t_п(i) - t(i; j)\}$

$$R_н(i; j) = \max\{0; R_п(i; j) - R(i) - R(j)\}$$

Повний резерв часу роботи $(i; j)$ показує, на скільки можна збільшити час виконання конкретної роботи за умови, що термін виконання всього комплексу робіт не зміниться.

Незалежний резерв часу роботи $(i; j)-$ частина повного резерву часу, яка одержана у випадку, коли всі попередні роботи закінчуються в пізні терміни, а всі подальші – починаються в ранні терміни. Використання цього резерву не впливає на величину резервів часу інших робіт.

Шлях характеризується двома показниками – тривалістю і резервом. ***Резерв*** визначається як різниця між довжиною критичного шляху і шляху, який розглядається: $R(L) = t_{кр} - t(L)$.

З цього визначення випливає, що роботи, які лежать на критичному шляху, і сам критичний шлях мають нульовий резерв часу. Резерв часу шляху показує, на скільки може збільшитися тривалість робіт, що становлять даний шлях, без зміни тривалості загального терміну виконання всіх робіт.

11.4. Оптимізація сіткової моделі. *Коефіцієнт напруженості*

Для оптимізації СМ, що виражається в перерозподілі ресурсів з ненапружених робіт на критичні для прискорення їх виконання, необхідно якомога більш точно оцінити ступінь складності своєчасного виконання всіх робіт, а також «ланцюжків» шляху.

Більш точним інструментом розв’язання цієї задачі у порівнянні з повним резервом є ***коефіцієнт напруженості,*** який може бути обчислений за формулою:

$$K_н(i;j)=\frac{t(L_{\max})-t_{кр}}{t_{кр}-t'_{кр}}=1-\frac{R_п(i;j)}{t_{кр}-t'_{кр}}$$

де $t(L)-$ тривалість максимального шляху, що проходить через роботу $(i;j)$; $t'_{кр}-$ тривалість відрізка даного шляху, який співпадає з критичним шляхом.

Коефіцієнт напруженості змінюється від 0 до 1, причому чим він є ближчим до 1, тим складніше виконати дану роботу у встановлений термін. Найбільш напруженими є роботи критичного шляху, для яких він дорівнює 1. На основі цього коефіцієнта всі роботи СМ можуть бути розподілені на три групи:

Напружені	Підкритичні	Резервні
$K_н(i;j)>0{,}8$	$0\le K_н(i;j)\le 0{,}8$	$K_н(i;j)<0{,}6$

В результаті перерозподілу ресурсів (фінансових, матеріальних, інтелектуальних) аналітики (ОПР) прагнуть максимально зменшити загальну тривалість робіт, що можливо при переведенні всіх робіт у першу групу. При розрахунку часових параметрів моделі доцільно користуватися графіком СМ.

11.5. Сіткове планування в умовах невизначеності

Тривалість виконання робіт досить важко задати точно, і тому в практичній роботі замість одного числа (детермінована оцінка) задаються дві оцінки – мінімальна і максимальна. ***Мінімальна (оптимістична) оцінка*** $t_{\min}(i;j)$ характеризує тривалість виконання роботи за найсприятливіших обставин, а ***максимальна (песимістична)*** $t_{\max}(i;j)-$ за найнесприятливіших.

Тривалість роботи в цьому випадку розглядається як випадкова величина, яка в результаті реалізації може прийняти будь-яке значення в заданому інтервалі. Такі оцінки називаються ймовірнісними (випадковими). їх очікуване значення $t_{оч}$ оцінюється за формулою: $t_{оч}(i;j)=\dfrac{3t_{\min}(i;j)+2t_{\max}(i;j)}{5}$.

Для характеристики ступеня розсіювання можливих значень навколо очікуваного рівня використовується показник дисперсії $\sigma^2: \ \sigma^2(i;j) = \frac{(t_{\max}(i;j) - t_{\min}(i;j))^2}{25}$. На основі цих оцінок можна розрахувати всі характеристики СМ, проте, вони матимуть іншу природу, виступатимуть як середні характеристики. При достатньо великій кількості робіт можна стверджувати (а при малій – лише припускати), що загальна тривалість будь-якого, у тому числі і критичного, шляхів має нормальний закон розподілу з середнім значенням, що дорівнює сумі середніх значень тривалості робіт, які його складають, і дисперсією, що дорівнює сумі дисперсій цих же робіт.

Окрім обчислення типових характеристик СМ, при імовірнісному задані тривалості робіт можна розв'язати ***дві додаткові задачі:***

1) визначити ймовірність того, що тривалість критичного шляху $t_{кр}$ перевищить заданого директивного рівня T *;*

2) визначити максимальний термін виконання всього комплексу робіт T при заданому рівні ймовірності $\boldsymbol{p}$.

Перша задача розв'язується на основі інтеграла ймовірності Лапласа $\Phi(z)$ використанням формули: $P(t_{кр} < T) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z)$,

де $z-$ нормоване відхилення випадкової величини, $z = \frac{T - t_{кр}}{\sigma_{кр}}$, $\sigma_{кр} -$ середнє квадратичне відхилення. При достатньо великій одержаній величині ймовірності (більше ***0,8***) можна з високим ступенем упевненості припускати своєчасність виконання всього комплексу робіт. Для розв'язання другої задачі використовується формула: $T = t_{оч}(L_{кр}) + z\sigma_{кр}$.

Окрім описаного вище спрощеного способу розрахунку СМ з детермінованою структурою й оцінками ймовірності тривалості виконання робіт, використовується метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло). Відповідно до нього на ЕОМ багато разів моделюються тривалості виконання всіх робіт і розраховуються основні характеристики СМ. Великий обсяг експериментів дозволяє більш точно виявити закономірності мережі, що моделюється.

Тема 12. Задачі масового обслуговування

План

12.1. Поняття про системи та задачі масового обслуговування.

12.2. Характеристика вхідного потоку запитів. Тривалість часу обслуговування.

12.3. Одноканальна СМО з очікуванням.

12.4. Визначення характеристик одноканальної СМО.

12.5. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою.

12.6. Визначення характеристик багатоканальної СМО.

12.1. Поняття про системи та задачі масового обслуговування

У практичній діяльності людини часто виникають ситуації, коли з'являється необхідність обслуговування заявки або вимоги, які поступають в систему. Якщо система обслуговування володіє обмеженими можливостями, то створюються черги претендентів на обслуговування. Наприклад, черги літаків, що чекають посадки; черги робітників, які одержують необхідні для роботи інструменти; черги за придбанням квитків, тощо.

Задачами теорії масового обслуговування є аналіз і дослідження явищ, які виникають в системах масового обслуговування (СМО), тобто визначення таких характеристик системи, при яких забезпечується мінімальний час очікування обслуговування або мінімальна довжина черги.

Особливістю всіх задач масового обслуговування є випадковий характер досліджуваних явищ: кількість вимог на обслуговування; часові інтервали між надходженням вимог; тривалість обслуговування і т. ін.

Основні елементи системи: вхідний потік вимог; пристрої (канали) обслуговування; черга вимог; вихідний потік задоволених вимог.

За великої кількості паралельних каналів обслуговування продуктивність СМО буде високою, а черга та час очікування запитів на обслуговування – малими. Водночас витрати через простої вільних від обслуговування каналів будуть досить значними. Навпаки, СМО з недостатньою кількістю каналів обслуговування будуть завантажені краще. Але черга та час перебування запитів у черзі, а також кількість запитів, які залишатимуть систему без обслуговування, будуть великими. Однією з основних задач СМО є визначення таких властивостей системи, які забезпечують необхідні якості функціонування.

Показники ефективності СМО:

– середня кількість запитів, що обслуговуються протягом одиниці часу;

– середня кількість запитів у черзі;

– середній час очікування в черзі;

– середня кількість запитів, які залишають систему без обслуговування, та ін.

Особливістю СМО є недетермінованість (невизначеність). Запити надходять нерегулярно та утворюють випадковий потік вимог. Тривалість обслуговування також випадкова величина. Відповідно канали обслуговування завантажені нерівномірно.

Залежно **від характеру черги** СМО ділять на класи:

1. Системи з відмовами – коли вимоги на обслуговування відхилятимуться, якщо в момент їх надходження всі канали будуть завантажені обслуговуванням інших запитів;

2. Системи з чергами – коли черговий запит у разі завантаженості всіх каналів потрапляє до черги на обслуговування.

Системи з чергами бувають з обмеженою або необмеженою довжиною черги, а також системи з обмеженим або з необмеженим часом очікування на обслуговування у черзі.

Дисципліна обслуговування:

– запити обслуговуються у порядку черги;

– у зворотному порядку (остання – першою);

– за пріоритетом;

– у випадковому порядку, тощо.

За кількістю каналів обслуговування:

– одноканальні;

– багатоканальні.

У випадку багатоканальної СМО порядок підключення вільних каналів може здійснюватися:

– по мірі звільнення;

– за пріоритетом;

– у випадковий спосіб.

12.2. Характеристика вхідного потоку запитів. Тривалість часу обслуговування

Теорія масового обслуговування найчастіше розглядає ***найпростіший (пуасонівський) потік*** запитів. Цей потік розподіляється за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda}$.

Властивості:

1. ***Ординарність*** – в кожен момент часу може надійти не більше одного запиту;

2. ***Відсутність післядії*** - кількість запитів, які надійдуть у майбутньому, не залежить від кількості запитів, які надійшли в минулому;

3. ***Стаціонарність*** – кількість запитів залежить лише від довжини часового проміжку.

Час обслуговування – випадкова величина, що характеризує пропускну спроможність системи.

Інтенсивність обслуговування: $\mu = \dfrac{1}{\theta}$, де θ– математичне очікування часу обслуговування (середня величина)

13.3. Одноканальна СМО з очікуванням

Для характеристики СМО використовують поняття ***навантаження*** на СМО і позначають $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ – показник.

Показники ефективності одноканальної СМО з необмеженою чергою:

1) середня кількість запитів у системі: $M = \dfrac{\rho}{1-\rho}$;

2) середня кількість запитів у черзі (середня довжина черги):

$$M_ч = \frac{\rho^2}{1-\rho};$$

3) середній час перебування запита в системі:

$$\nu = \frac{M}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)};$$

4) середній час очікування в черзі: $\omega = \dfrac{M_ч}{\lambda} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$;

5) середній час обслуговування одного запиту:

$$\bar{v} = v - \omega = \frac{1}{\mu};$$

6) середня завантаженість обслуговуючого пристрою (відсоток часу, коли канал працює): $1 - p_0 = \rho$;

7) ймовірність утворення черги: $P = \rho^2$.

12.4. Визначення характеристик одно канальної СМО

До каси попереднього продажу авіаквитків щогодини у середньому підходить три пасажири: ***λ=3***. Середня тривалість обслуговування касиром одного пасажира – 15 хвилин. $\left(\mu = \frac{60}{15} = 4\right)$.

Навантаження на касу: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Визначити характеристики системи.

1) середня кількість пасажирів, що перебувають у касовому залі: $M = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}75}{1-0{,}75} = 3$;

2) середня кількість пасажирів, що стоять у черзі та очікують на обслуговування: $M_ч = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{(0{,}75)^2}{1-0{,}75} = 2{,}25$;

3) середній час перебування пасажира у касовому залі: $v = \frac{M}{\lambda} = \frac{3}{3} = 1$ (год);

4) середній час очікування в черзі: $\omega = \frac{M_ч}{\lambda} = \frac{2{,}25}{3} = 0{,}75$ (год.) або 45 хв.;

5) середній час обслуговування пасажира касиром – 15 хв. (умова)

6) середня завантаженість каси – $1 - p_0 = \rho = 45$ хв., тобто в середньому 15 хв. на 1 год. касир вільний від обслуговування;

7) ймовірність утворення черги: $P = \rho^2 = (0{,}75)^2 = 0{,}5625$.

Обчислимо ймовірності подій, що у касовому залі одночасно знаходиться ***k*** пасажирів $\boldsymbol{p_k = (1-\rho)\rho^k}$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	0,2500	0,1875	0,0469	0,0352	0,0264	0,0198	0,0148	0,0111	0,0083	0,0063

Отже, ймовірність одночасного перебування у касовому залі великої кількості пасажирів є досить малою (p_k<0,01 при k>=8), водночас ймовірність утворення черги, коли k=8 і наявна лише одна каса, є відчутною – 0,5625.

Саме тому середня тривалість очікування в черзі (45 хв.) та середня тривалість перебування пасажира у касовому залі до закінчення його обслуговування (1 год.) є великими.

12.5. Багатоканальна СМО з необмеженою чергою

Покращити показники ефективності функціонування СМО, тобто зменшити середню кількість запитів у черзі та середню тривалість перебування одного запиту на обслуговуванні у системі, можна шляхом обладнання її декількома каналами обслуговування.

Навантаження на багатоканальну систему:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \cdot n} \qquad (\boldsymbol{n} \text{ – кількість каналів}).$$

Показники ефективності багатоканальної СМО

1) середня кількість каналів, які завантажені обслуговуванням запитів: $N_з = \dfrac{\lambda}{\mu}$;

2) середня довжина черги: $M_ч = \dfrac{n^n \rho^{n+1}}{n!\left(1-\rho^2\right)} p_0$;

3) середня кількість запитів у системі: ***M=Mч+Nз***;

4) середній час перебування запита у системі: $v = \dfrac{M}{\lambda} = \dfrac{M_ч}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$

5) середній час очікування в черзі: $\omega = \dfrac{M_ч}{\lambda}$

12.6. Визначення характеристик багатоканальної СМО

Нехай у касовому залі працює не одна, а дві каси. Все інше те саме:

$$\boldsymbol{\lambda=3} \text{ пас./год.}, \ \boldsymbol{\mu=4} \text{ пас./год.}$$

Середня кількість кас, які завантажені обслуговуванням:

$$N_з = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Навантаження на систему обслуговування:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \cdot n} = \frac{3}{4 \cdot 2} = 0{,}375.$$

Ймовірність, що в касовому залі з двома касами немає жодного пасажира:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1-0{,}375}{1+0{,}375} \approx 0{,}4545.$$

Середня довжина черги:

$$M_ч = \frac{2^2(0{,}375)^3}{2!\left(1-(0{,}375)^2\right)} \cdot 0{,}4545 \approx 0{,}1227,$$

тобто черга практично відсутня.

Середня кількість пасажирів, які одночасно знаходитимуться в касовому залі:

$$M=0{,}1227 + 0{,}75 = 0{,}873.$$

Наведені результати означають, що пасажири, які завітали до касового залу, практично одразу зможуть придбати квиток, оскільки одна з кас майже завжди буде вільною.

Тому середній час перебування пасажира в касовому залі $v = \frac{M}{\lambda} = \frac{0{,}873}{3} = 0{,}291$ (год.) приблизно 16 хв., практично збігається з середнім часом придбання ним квитка в касі, що дорівнює 15 хв.

Наведена методика дозволяє вирішувати питання про визначення доцільності кількості каналів обслуговування, якими слід обладнати СМО. Для цього співставляють витрати, пов’язані із терміном очікування запитів у черзі, та витрати, пов’язані з експлуатацією різної кількості каналів обслуговування.

Тема 13. Теорія ігор і прийняття рішень

План

13.1. Приклади ігрових ситуацій.

13.2. Основні поняття теорії ігор.

13.3. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловою точкою.

13.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

13.1. Приклади ігрових ситуацій

Антагністична гра двох гравців

Шерлок Холмс потрапляє в неприємну ситуацію. Професор Моріарті, якого Холмс підозрює у скоєнні злочину, влаштовує на нього напад. Тому Шерлок Холмс вирішує на деякий час втекти до Європи. Шлях із Лондона на континент лежить через порт Дувр. Між Лондоном і Дувром є проміжна залізнична станція Кентербері. Холмс сідає на лондонському вокзалі на потяг до Дувра. Однак, помічає через вікно Моріарті. І тепер він упевнений, що професор буде його наздоганяти, сівши на наступний потяг до Дувра. Таким чином, перед ним постає питання: де краще зійти з потяга, в Дуврі, чи Кентербері, щоб не зустрітися з Моріарті. Однак таке ж питання постає і перед професором Моріарті, який їде за Холмсом на наступному потязі.

Таким чином, маємо конфліктну ситуацію, в якій інтереси двох учасників протилежні.

Умовно оцінимо життя Шерлока Холмса в 100 у.о. У кожного учасника конфлікту є два способи дії: зійти з потяга в Дуврі чи в Кентербері. Позначимо їх відповідно через ***К*** та ***Д***.

В ***теорії ігор*** учасників конфліктної ситуації називають ***гравцями***, а їх можливі дії в конфлікті – ***стратегіями***.

Відповідно ***К*** та ***Д*** в даному випадку – стратегії гравців.

Вибираючи свої стратегії незалежно, гравці створюють в грі чотири можливі ***ситуації***: ***КК, КД, ДК, ДД***.

Якщо Шерлока Холмса умовно вважати першим гравцем, а професора Моріарті – другим, то ситуація ***КД*** означає, що Холмс сходить з потяга в Кентербері, а Моріарті – в Дуврі. В цій ситуації можна вважати життя Холмса наполовину збереженим, тобто виграш складає ***50*** у.о.

Виграші в ситуаціях ***КК, ДК, ДД*** відповідно складуть ***-100, 100, -100*** у.о. Від'ємний виграш – це програш.

Представимо виграші Шерлока Холмса у вигляді таблиці. По суті це є формалізований опис конфліктної ситуації.

Таблиця 1

Виграші Шерлока Холмса

		Стратегії Моріарті	
		К	Д
Стратегії Шерлока Холмса	К	-100	50
	Д	100	-100

В таблиці вказані лише виграші першого гравця, виграші другого визначаються автоматично. Він виграє рівно стільки, скільки програє перший гравець. Таким чином, незалежно від ситуації, сума виграшем гравців дорівнює нулю.

Задача складається в знаходженні таких стратегій, при яких виграш першого гравця максимальний і програш другого гравця мінімальний. Така гра називається ***антагоністичною грою двох гравців з нульовою сумою виграшів.***

Біматрична гра (Залік)

Розглянемо іншу ігрову ситуацію, в якій гравці мають різні таблиці виграшів. Мова йде про залік. Гравцями є Студент та Викладач. У студента, який готується до заліку, є дві стратегії: підготуватися добре (***Д***) або погано (***П***). У Викладача, який приймає залік, також дві стратегії: поставити залік (+) або не поставити (-). Залежно від вибору стратегій у грі може бути чотири ситуації, котрі можуть приносити гравцям різне моральне задоволення. Будемо вважати, що отримання морального задоволення – це виграш. Отримаємо таблиці:

Таблиця 2

Виграші студента

		Стратегії Викладача	
		+	-
Стратегії Студента	**Д**	***2*** (оцінили за заслугами)	***-1*** (образливо)
	П	***1*** (вдалося «змахлювати»)	***0*** (отримав за заслугами)

Таблиця 3

Виграші Викладача

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Стратегії Викладача</td></tr>
<tr><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Стратегії Студента</td><td>Д</td><td>0
(все нормально)</td><td>-2
(проявив несправедливість)</td></tr>
<tr><td>П</td><td>-3
(дав себе надурити)</td><td>-1
(студент прийде ще раз)</td></tr>
</table>

Гра, яка задана таблицями 2 і 3 називається ***біматричною***.

Вона складається в знаходженні таких стратегій, які забезпечують гравцям максимальні виграші.

Безкоаліційна гра (Боротьба за ринки)

Дві компанії, що виробляють одну й ту саму продукцію, конкурують на двох ринках збуту. Кожна з них може розподілити свою продукцію між ринками в будь-яких долях.

Вважається, що компанія, яка зуміла створити на ринку дольову перевагу своєї продукції, отримає прибуток, що пропорційний різниці часток своєї та конкурентної продукції.

В протилежному випадку вона несе збиток, який підраховується за тим же правилом. Необхідно визначити, як кожна компанія повинна розподіляти свою продукцію між ринками, щоб отримати найбільший прибуток.

Для побудови математичної моделі ситуації, позначимо через $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$ долі продукції, що направляються компаніями ***1*** та ***2*** відповідно на перший ринок (рис.1)

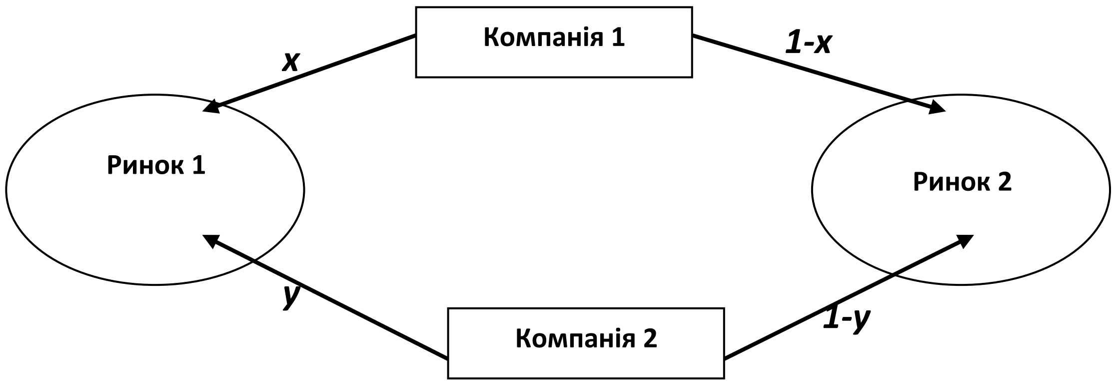


Рис.1. Схема розподілу часток товару між ринками

Тоді дохід $\boldsymbol{H_{11}(x,y)}$ компанії 1 на першому ринку дорівнює

$\boldsymbol{H_{11}(x, y) = k_{11}(x - y)}$, де $\boldsymbol{k_{11}}$ – деякий додатній коефіцієнт.

Такий же дохід $\boldsymbol{H_{12}(x,y)}$ компанії 1 на другому ринку складе:

$\boldsymbol{H_{12}(x, y) = k_{12}\,[(1 - x) - (1 - y)] = k_{12}\,(y - x)}$, $\boldsymbol{k_{12}}$ – інший (відмінний від $\boldsymbol{k_{11}}$) додатній коефіцієнт.

Якщо $\boldsymbol{x \geq y}$, то компанія на першому ринку має прибуток, на іншому – збиток. Якщо $\boldsymbol{x \leq y}$, то картина протилежна.

Загальний прибуток $\boldsymbol{H_1(x,y)}$ компанії на двох ринках буде:

$$\boldsymbol{H_1(x, y) = (k_{11} - k_{12})\,(x - y).}$$

Аналогічно для другої компанії:

$$\boldsymbol{H_2(x, y) = (k_{22} - k_{21})\,(x - y),}$$

Необхідно знайти такі значення невідомих $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$, при яких досягаються максимуми функцій

$$\boldsymbol{H_1(x, y) = (k_{11} - k_{12})\,(x - y) \rightarrow max,} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{H_2(x, y) = (k_{22} - k_{21})\,(x - y) \rightarrow max} \qquad (2)$$

при умовах, $\boldsymbol{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1}$. (3)

Нерівності (3) відображають фізичний зміст невідомих.

В даній грі кожен гравець має свою функцію виграшу та діє незалежно від іншого. Ця гра є частинним випадком ***безкоаліційної*** гри ***n*** учасників.

13.2. Основні поняття теорії ігор. Класифікація ігор

Теорія ігор – це теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту або невизначеності.

При цьому конфлікт не обов'язково повинен бути антагоністичним. Теорія ігор належить до наймолодших математичних дисциплін, її виникнення датується 1944 р., коли вийшла у світ монографія Неймана і Моргенштерна «Теорія ігор і економічної поведінки». В подальшому теорія ігор перетворилася в самостійний математичний напрямок, що має практичне застосування. Теорія ігор надає особі, що приймає рішення, тобто (наприклад, фінансовому аналітику) математичний апарат для вибору стратегії в конфліктних ситуаціях, дозволяє краще зрозуміти конкурентну обстановку і звести до мінімуму ступінь ризику. Крім того, аналіз ризикової ситуації за допомогою прийомів теорії ігор спонукає особу, що приймає рішення (ОПР) розглядати всі можливі альтернативи як своїх дій, так і стратегії партнерів та конкурентів.

В умовах ринкової економіки дедалі частіше виникають конфліктні ситуації, коли два або більше колективи мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дій кожної зі сторін залежить від дій супротивника.

Зіткнення протилежних інтересів призводить до виникнення ***конфліктних ситуацій.*** Необхідність аналізувати такі ситуації, в свою чергу, сприяла виникненню теорії ігор, завданням якої є вироблення рекомендацій з раціонального способу дії учасників конфлікту. Щоб виключити труднощі, які виникають при аналізі конфліктних практичних ситуацій у результаті наявності багатьох несуттєвих факторів, будується спрощена модель ситуації. Така модель називається ***грою.*** Конфліктна ситуація в ігровій моделі розвивається за визначеними правилами. Природною базою для аналізу конфліктних ситуацій служать широко розповсюджені ігри – шахи, шашки, карткові ігри. Тому теорії ігор властива така термінологія: ***гравці*** – сторони, що беруть участь у конфлікті, ***виграш*** – результат конфлікту.

Як було зазначено вище, невизначеність носить різний характер. Це приводить до виникнення різних економіко-математичних моделей, серед яких розрізняють:

1) ***стратегічні ігри, що передбачають*** наявність конфліктної ситуації (двох і більше свідомих конфліктуючих сторін), та відсутність інформації про дії супротивника, про його стратегію. Найпростіший вид стратегічної гри – гра двох осіб з нульовою сумою (сума виграшів сторін дорівнює нулю). Тут мета одного гравця – максимізувати свій виграш, а другого – мінімізувати свій програш, причому рішення про вибір стратегії кожним гравцем приймається в умовах невизначеності, коли наперед не відомо, як вчинить супротивник.

У грі може відбуватися конфлікт інтересів двох чи більше супротивників. У першому випадку гра називається ***парною,*** **в** іншому – ***множинною.*** Найбільшого практичного значення набули парні ігри. Учасників гри позначимо через **А** і **В**. При цьому під ***грою*** розумють певну послідовність дій (ходів) гра*вців **А*** і В***,*** що здійснюється відповідно до чітко сформульованих правил.

Правила гри визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інф*ормації* кожної сторони про дії іншої, результат гри, до якого приводить відповідна послідовність ходів.

У більшості ігор передбачається, що інтереси учасників піддаються кількісному опису, тобто результат гри (виграш) визначається певним числом.

Ходом у теорії ігор називається вибір однієї з допустимих правилами гри дій та її здійснення. Кожному ходові гравців відповідає певний виграш (програш), який вони одержують (сплачують).

Стратегією гравця називається план, згідно з яким він робить вибір у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій можливій фактичній інформації.

Природно, що гравець приймає рішення по ходу гри. Однак, теоретично можна припустити, що всі ці рішення прийняті гравцем заздалегідь. Тоді сукупність прийнятих рішень становить його стратегію.

Залежно від числа можливих стратегій ігри поділяються на ***кінцеві*** та ***нескінченні.*** Завданням теорії ігор є вироблена рекомендації для гравців, тобто визначення для них оптимальної стратегії.

Завдання кожного гравця — знайти оптимальну стратегію, тобто ***стратегію, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш.***

Ігри з природою, які передбачають наявність конфліктної ситуації (один свідомий гравець і один несвідомий – "природа"), то невизначеність, що викликана відсутністю інформації про умови, в яких здійснюється дія. Ці умови залежать не від свідомих дій іншого гравця, а від об'єктивної реальності, яку прийнято називати ***природою.***

13.3. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловою точкою

Основною метою розв’язування матричних ігор двох осіб з нульовою сумою є розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій дії конфліктуючих сторін із застосуванням методичних підходів теорії ігор.

Маємо два гравці $A\,i\,B$. Кожний гравець обирає одну з можливих стратегій:

гравець A — стратегії $A_i \left(i=\overline{1,m}\right)$,

гравець B – стратегії $B_j \left(j=\overline{1,n}\right)$.

Результати (плата) за всіма можливими варіантами гри задаються, як правило, спеціальними функціями (що залежать від стратегій гравців) у вигляді платіжної матриці.

Нехай $\varphi_1(A_i;B_j)$ – виграш гравця A, $(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n})$;

$\varphi_2(A_i;B_j)$ – виграш гравця B, $(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n})$.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1(A_i;B_j)+\varphi_2(A_i;B_j)\equiv 0$.

Тоді в разі $\varphi_1(A_i;B_j)=\varphi(A_i;B_j)$ маємо $\varphi_2(A_i;B_j)=-\varphi(A_i;B_j)$.

Отже, мета гравця A максимізувати $\varphi(A_i;B_j)$, а гравця B – її мінімізувати. Нехай $\varphi(A_i;B_j)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

рядки якої відповідають стратегіям A_i, а стовпці – стратегіям B_j.

Матриця A називається ***платіжною***, а також ***матрицею гри.*** Елемент цієї матриці a_{ij} – виграш гравця A, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець B – стратегію B_j.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i. Тоді в *найгіршому* випадку він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$. Якщо навіть гравець B знає його стратегію, гравець A має діяти так, щоб *максимізувати* свій *мінімальний* виграш:

$$\alpha=\max_i \min_j a_{ij}.$$

Таку стратегію гравця A називають ***максимінною***, а розмір його гарантованого виграшу — ***нижньою ціною гри.***

Стратегія, яка забезпечує цей виграш, називається ***максимінною*** і позначається A_{i0}.

Гравець B, який програє суми в розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, що *мінімізує* його *максимально* можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегію гравця B називають ***мінімаксною*** і позначають B_{j_0}. Розмір його програшу — ***верхня ціна гри***:

$$\beta=\min_j \max_i a_{ij}.$$

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат.

Якщо

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon,$$

тобто $a = \beta = \upsilon$, (υ - ***ціна гри),*** то гра називається ***грою із сідловою точкою.***

У цій ситуації оптимальним для обох гравців є вибір чистих стратегій – максимінної для гравця A і мінімаксної для B. Адже, якщо один із гравців додержує оптимальної стратегії, то для іншого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $a \neq \beta$ і $a \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними: кожна зі сторін може поліпшити свій результат, обираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи ***змішані стратегії***, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Приклад 1

Таблиця

		Стратегії покупців		***α***
		Купувати	Не купувати	*min max*
Стратегії підприємця	Підвищення ціни	8	7	7
	Зменшення ціни	12	10	10*
β	*max min*	12	10*	

Молода людина вирішила відкрити крамницю для продажу товарів. Постало питання про визначення цін на товари. Досвідчені люди підказали, що якщо ціна на висока, то покупців стає менше і прибуток зменшується; якщо ціна менша, то прибуток може збільшитися за рахунок зростання кількості покупців і відповідної реклами для крамниці. Поради досвідчених людей та власний досвід допомогли створити матрицю (табл.). Як бачимо, задача має сідлову точку, що вказує на доцільність зниження цін.

13.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо матрична гра не має *сідлової* точки, то знаходження її розв'язку, особливо за великої кількості стратегій, — доволі складна задача, яку можна ефективно розв'язати методами лінійного програмування.

Задача розглядається в такому формулюванні: знайти вектори ймовірностей $X=(x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_m)$ і $Y=(y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n)$ з метою визначення оптимального значення ціни гри та оптимальних стратегій.

Зауважимо, що доведено ***основну теорему теорії ігор***: кожна скінчена гра має принаймні один розв'язок, який можливий в області змішаних стратегій.

Отже, нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оскільки оптимальні стратегії гравців $A\, i\, B$ дозволяють отримати виграш $\alpha \le \upsilon \le \beta$, то використання оптимальної змішаної стратегії гравцем A має забезпечувати виграш не менший за ціну гри в разі вибору гравцем B будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ \ge \upsilon \quad \left(j=\overline{1,n}\right). \qquad (*)$$

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем B має за будь-яких стратегій гравця A забезпечувати програш B, що не перевищує ціни гри υ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \upsilon \quad \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Ці два співвідношення застосовують для знаходження розв'язку гри.

Отже, потрібно знайти $x_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$, щоб

$$\max Z = \upsilon$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Зауважимо, що ціна гри υ невідома і має бути визначена під час розв'язування задачі. Фактично необхідно визначити ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії гравцями.

Модель ігрової задачі може бути спрощена.

З (*) маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge \upsilon, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + ... + a_{m2}x_m \ge \upsilon, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge \upsilon. \end{cases}$$

Поділивши всі обмеження на υ, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + ... + a_{m2}t_m \ge 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \ge 1. \end{cases}$$

де $t_i = \dfrac{x_i}{\upsilon}$.

Згідно з умовою $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$, звідки $t_1 + t_2 + ... + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$.

Отже, цільова функція початкової задачі набирає такого вигляду:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{t=1}^{m} t_i .$$

У результаті задача лінійного програмування:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} t_i ,$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases}$$
$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, знайдемо значення $t_i\left(i = \overline{1,m}\right)$, а також $\frac{1}{\upsilon}$ і $x_i = \upsilon t_i$, тобто визначимо змішану оптимальну стратегію для гравця A.

За аналогією запишемо задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця B.

Нехай $u_j = \frac{y_i}{\upsilon} \quad \left(\overline{j,n}\right)$.

Тоді маємо таку лінійну модель:

$$f = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_1 + ... + a_{2n}u_n \leq 1, \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1, \end{cases}$$
$$u_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає оптимальний розв'язок спряженої.

Приклад 2. ***Переслідування Шерлока Холмса***

Матриця виграшів матиме вигляд:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-100} & \boldsymbol{50} \\ \boldsymbol{100} & \boldsymbol{-100} \end{pmatrix}$$

Шерлок Холмс, який обере деяку стратегію, в найгіршому випадку при вдалому виборі повинен розраховувати на максимальний із мінімальних виграшів.

Професор же може розраховувати на мінімальний із максимальних програшів.

Обчислимо їх:

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{\min\{a_{11}, a_{12}\}, \min\{a_{21}, a_{22}\}\} =$$
$$= \max\{-100, -100\} = -100,$$
$$v_2 = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{\max\{a_{11}, a_{21}\}, \max\{a_{12}, a_{22}\}\} = \min\{100, 50\} = 50.$$

Таким чином, найкращі гарантовані виграші не рівні і оптимальних стратегій не існує. Отже, розв'язок задачі необхідно шукати у змішаних стратегіях.

Зведемо задану задачу до задачі лінійного програмування.

Маємо: (для першого гравця)

$$Z = t_1 + t_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -100t_1 + 100t_2 \ge 1, \\ 50t_1 - 100t_2 \ge 1 \end{cases}$$

Мінімуму функція досягає в точці А $\left(-2/50; -3/100\right)$. Її координати визначили, розв'язавши відповідну систему.

t_1=-2/50; t_2=-3/100.

$$\min Z = -\frac{2}{50} - \frac{3}{100} = -\frac{7}{100}$$
$$\max v = \frac{1}{\min Z} = \frac{1}{-\frac{7}{100}} = -\frac{100}{7}$$

Враховуючи, що $x_i = t_i v$, отримаємо:

$$x_1 = -\frac{2}{50} \cdot \left(-\frac{100}{7}\right) = \frac{4}{7}; \quad x_2 = -\frac{3}{100} \cdot \left(-\frac{100}{7}\right) = \frac{3}{7} \ (1)$$

Аналогічно можна визначити оптимальний розв'язок для професора $y_1 = \frac{3}{7}; y_2 = \frac{4}{7}$.

Розв'язок (1) показує, що перший гравець (Шерлок Холмс) повинен з ймовірністю 4/7 вибрати першу чисту стратегію (зійти в Кентербері) і з ймовірністю 3/7 вибрати другу чисту стратегію (зійти в Duврі). Тоді математичне сподівання його виграшу складе -100/7. Другому гравцеві (професору) необхідно вибрати чисті стратегії (зійти в Кентербері і зійти в Duврі) з ймовірностями 3/7 та 4/7 відповідно. В цьому випадку математичне сподівання його програшу також буде -100/7.

Якщо гравці будуть виконувати вказані рекомендації, то Шерлок Холмс в середньому програє приблизно 14% свого життя, а професор відповідно таку ж частину його життя виграє.

Приклад 3. ***Біматрична гра «Залік»***

Запишемо матриці виграшів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Якщо гравці незалежно вибрали свої стратегії ***i, j*** і в грі склалася ситуація ***(i, j)***, то виграшем першого гравця буде елемент $\boldsymbol{a_{ij}}$ матриці ***A***, а виграшем другого – елемент $\boldsymbol{b_{ij}}$ матриці ***B***. Мета кожного гравця – максимізувати власний виграш.

Стратегії, в яких гравці отримують найбільші виграші, називаються ***рівноважними стратегіями***.

Рівноважні виграші одночасно **максимальні** в стовпці матриці А та рядку матриці В відповідно.

В нашому випадку ситуація ***(1,1)*** буде рівноважною, оскільки для в першому стовпці матриці А число ***2*** максимальне, і відповідно для першого рядка матриці В число ***0*** максимальне.

Ситуація ***(2,2)*** також є рівноважною ***0 ≥ - 1*** та ***-1 ≥ -3*** .

Рівноважні виграші гравців (***2*** і ***0***) в першому випадку перевищують аналогічні виграші (***0*** і ***-1***) у другому, тому перша ситуація є переважною для гравців.

Відповідно до умови нашої задачі розв’язок можна трактувати наступним чином: «закон карми» – за добру підготовку до заліку Студент отримує залік, а за погану по справедливості не отримує. Моральне задоволення Студента і Викладача в першій ситуації вище, ніж у другій.

Тема 14. Прийняття рішень в умовах повної невизначеності

План

14.1. Поняття невизначеності

В багатьох задачах фінансово-економічної сфери, зокрема, в задачах маркетингу, менеджменту, банківських операцій, інвестицій у різні проекти, тощо виникає необхідність прийняття рішення. Проблема прийняття рішень ускладнюється тим, що її необхідно вирішувати в умовах ***невизначеності***.

Невизначеність може носити різний характер:

1) невизначеними можуть бути свідомі дії конкуруючої сторони, які спрямовані на зменшення ефективності рішень, що приймає супротивник (конкурент). Наприклад, конкуруючі на одному ринку фірми здійснюють дії, які приводять до реалізації своїх інтересів і протидіють у цьому конкурентам;

2) невизначеність може відноситися до ситуації ризику, в якій сторона, що приймає рішення, може встановити не лише всі можливі результати можливих рішень, а й ймовірності їх появи. Ці ймовірності – це ймовірності можливих умов, в яких вирішується дана задача. Умови, про які йде мова, впливають на прийняття рішень несвідомо, незалежно від дій сторони, яка приймає рішення, і формуються під впливом багатьох факторів (загального стану економіки та фінансової системи, курсу валют, рівня інфляції політичних криз та ін.);

3) повна невизначеність – ситуація, коли відомі всі наслідки можливих рішень, але невідомі їх ймовірності, тобто невідомі ймовірності можливих умов (станів), в яких вирішується задача.

Спроба кількісного аналізу фінансово-економічних ситуацій і прийняття на його основі рішень привела до створення спеціальних економіко-математичних методів обґрунтування вибору рішень в умовах ринкової невизначеності.

Розв’язання фінансово-економічних задач прийняття рішень в умовах невизначеності потребує використання відповідних економіко-математичних моделей і методів, теоретичний аспект яких складає теорію ігор. Таким чином, задачами теорії ігор в економіці (фінансах) є задачі про вибір рішень в умовах економічної невизначеності. Так, теорія ігор застосовується у веденні боротьби фірм за ринки, у плануванні рекламних компаній, при формуванні цін на конкурентних ринках, в обмінних і торгових операціях, у біржовій грі, при аналізі коаліційної поведінки і т. п.

14.2. Ігри з природою

Одним із різновидів ігор є ***ігри з природою***, які передбачають наявність конфліктної ситуації (один свідомий гравець і один несвідомий – «природа»), тобто невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, в яких здійснюється дія. Ці умови залежать не від свідомих дій іншого гравця, а від об'єктивної реальності, яку прийнято називати ***природою***.

Подібні задачі поділяються на два класи. Це, по-перше, задачі ***прийняття рішень в умовах повної невизначеності***, коли немає інформації про ймовірності виникнення кожного з можливих станів природи. По-друге, це ***задачі прийняття рішень в умовах ризику (статистичні ігри),*** коли можна дати певну (об'єктивну або суб'єктивну) оцінку імовірнісному розподілу станів природи, тобто коли ймовірності виникнення кожного з можливих майбутніх станів зовнішнього середовища можна вважати відомими.

Розробником теорії статистичних ігор вважається А. Вальд. Він показав, що в теорії прийняття рішень статистичні ігри є основним підходом, якщо рішення приймається за умов часткової невизначеності. Статистичні ігри суттєво відрізняються від стратегічних ігор. У статистичній грі природа не є розумним гравцем, що прагне обрати для себе оптимальні стратегії. Цей гравець не зацікавлений у виграші. Інша річ – людина, в даному випадку ОПР. Він має на меті виграти гру з уявлюваним супротивником, тобто з природою. Гравець-природа не обирає оптимальної стратегії, але ОПР повинна прагнути до визначення розподілу ймовірностей стану природи для того, щоб обрати найменш ризикове рішення.

Статистична гра – це гра двох осіб – людини *(ОПР)* і природи – з використанням людиною додаткової статистичної інформації про стани природи.

ОПР (гравець *А)* намагається діяти обачно, використовуючи, наприклад, ***мінімаксну стратегію***, що дозволяє одержати найменший програш.

Гравець-природа діє зовсім випадково. Можливість стратегії визначається як її стан, наприклад, умови погоди в даному районі, попит на певну продукцію, загальний стан економіки та фінансової системи, курс валют, рівень інфляції та ін.

Отже, основними відмінностями статистичної гри від стратегічної є:

– відсутність прагнення до виграшу в гравця-природи, тобто відсутність антагоністичного супротивника;

– можливість другого гравця – ОПР провести статистичний експеримент для одержання додаткової інформації про стратегії природи.

14.3. Критерії прийняття рішень

В умовах невизначеності за наявності матриці виграшів (цінності альтернатив), прийняття рішень ґрунтується на наступних критеріях:

1. Максимінний критерій Вальда (песимістичний)

Критерій Вальда – це критерій гарантованого результату. Він базується на принципі найбільшої обережності, оскільки вибирають найкращу із найгірших альтернатив.

Якщо елементи матриці цінності альтернатив u_{ij} характеризують виграш (корисність) ОПР, то для визначення оптимальної стратегії використовується ***максимінний критері:***

$$u^{B} = \max_{i}\left(\min_{j}\left(u_{ij}\right)\right).$$

Для цього у кожному рядку матриці цінності знаходять найменший елемент, потім серед них – найбільший, таким чином обирається і-та альтернатива (рядок ***i***).

Якщо елементи матриці альтернатив характеризують втрати, то для визначення оптимальної стратегії використовується ***мінімаксний критерій:***

$$u^B = \min_i \left(\max_j (u_{ij}) \right).$$

Для цього у кожному рядку матриці втрат знаходять найбільший елемент, а потім обирається альтернатива (рядок i), якій відповідає найменше значення із цих найбільших елементів.

2. Максимаксний критерій (оптимістичний)

Вибирається альтернатива з найбільшою оптимістичною оцінкою (краща з кращих):

$$u^M = \max_i \left(\max_j (u_{ij}) \right)$$

3. Критерій Лапласа

Критерій Лапласа спирається на *принцип недостатнього підґрунтя,* виходячи з якого всі стани природи $П_j$ є рівноймовірними. Відповідно до цього принципу кожному стану $П_j$ відповідає ймовірність $p_i = \frac{1}{n}$.

Для прийняття рішень для кожної альтернативи розраховують середнє арифметичне значення виграшу: $\overline{u_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}$. Серед знайдених значень обирають максимальне, яке буде визначати виграш при виборі даної альтернативи

$$u^Л = \max_i (\overline{u_i}) = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right)$$

Якщо величини $\boldsymbol{u_{ij}}$ характеризують втрати, то критерій набуває вигляду:.

$$u^Л = \min_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right)$$

4. Критерій Гурвіца (зважений критерій)

Критерій Гурвіца ***(критерій узагальненого максиміну)*** охоплює різні підходи до прийняття рішень – від найбільш оптимістичного до найбільш песимістичного (консервативного).

Тобто задається фіксоване значення коефіцієнту оптимізму:

$0 \le \alpha \le 1$. Значення α визначається у залежності від схильності ОПР до песимізму або оптимізму. Якщо відсутня яскраво виражена прихильність, то вважають $\alpha = 0{,}5$. Якщо матриця альтернатив є *матрицею виграшів* (цінності) (прибутку, корисності), то критерій Гурвіца формулюється таким чином:

$$u^{\Gamma} = \max_i \left\{ \alpha \max_j u_{ij} + (1-\alpha) \min_j u_{ij} \right\}.$$

Якщо матриця альтернатив є *матрицею втрат*, то обирають стратегію, якій відповідає значення

$$u^{\Gamma} = \min_i \left\{ \alpha \min_j u_{ij} + (1-\alpha) \max_j u_{ij} \right\}.$$

Якщо $\alpha = 0$, критерій Гурвіца стає консервативним, оскільки його застосування є рівносильним застосуванню критерію Вальда.

Якщо $\alpha = 1$, критерій Гурвіца стає занадто оптимістичним, оскільки його застосування є рівносильним застосуванню *критерію оптимізму* (критерію максимаксу).

Вибір критерію прийняття рішення в умовах повної невизначеності є найскладнішим і найвідповідальнішим етапом процесу розв’язання задачі. При цьому не існує будь-яких загальних порад чи рекомендацій. Вибір критерію ОПР повинна проводити із врахуванням специфіки задачі, що розв’язується, і відповідно до своїх цілей, а також базується на минулому досвіді та власній інтуїції.

Зокрема, якщо навіть мінімальний ризик є неприпустимим, то необхідно застосовувати критерій Вальда. Якщо ж навпаки певний ризик може мати місце і ОПР орієнтується на більший виграш – обирають критерій Севіджа.

5. Критерій Севіджа (мінімального ризику)

Критерій Севіджа пом’якшує надмірну «песимістичність» критерію Вальда шляхом заміни платіжної матриці (виграшів або втрат) матрицею ризиків R_A, елементи якої (r_{ij}) визначаються за формулою:

$$r_{ij}=\begin{cases}\max\limits_k u_{kj}-u_{ij}, & \text{якщо } A-\text{виграш},\\ a_{ij}-\min\limits_k u_{kj}, & \text{якщо } A-\text{втрати},\end{cases}$$

$$\text{де } i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n;\ k=1,\dots,m$$

Незалежно від того, чи матриця альтернатив є матрицею цінностей чи загроз, матриця ризиків R_A завжди визначає величину втрат ОПР. Відповідно, до неї можна застосовувати лише мінімаксний критерій:

$$u^C=\min_i \max_j r_{ij}.$$

Критерій Севіджа рекомендує в умовах повної невизначеності обирати ту альтернативу, для якої величина ризику набуває найменшого значення у найнесприятливішій ситуації (коли ризик максимальний). Застосування дозволяє уникнути великого ризику в процесі вибору стратегії, тобто мінімізувати можливі втрати. критерію Севіджа

Задача 1

Кредитна спілка очікує, що попит на кредитні ресурси у плановому періоді може набути одного з чотирьох значень: 10,15, 20 або 25 тис. у. о. Для кожного рівня попиту нею розроблено відповідні умови (стратегії) видачі кредитів (з точки зору їх собівартості та інших операційних витрат).

Відхилення від цих умов призводить до додаткових витрат або через перевищення розмірів наявних вільних ресурсів над попитом на кредити, або через неповне задоволення попиту на кредити через відсутність необхідних ресурсів.

Відомі розміри витрат, що їх зазнає кредитна спілка, застосовуючи ту чи іншу стратегію кредитування за умов кожного з варіантів попиту на кредитні ресурси.

Необхідно обрати оптимальну стратегію.

Таблиця 1

Платіжна матриця

Варіанти умов кредитування	**Варіанту попиту на кредитні ресурси**			
	10	**15**	**20**	**25**
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Розв'язання

1. Критерій Лапласа

Відповідно до умови задачі є чотири варіанти попиту на кредитні ресурси, що рівнозначно наявності чотирьох станів «природи» $П_1, П_2, П_3, П_4$. Відомі також чотири стратегії розвитку кредитування кредитною спілкою: A_1, A_2, A_3, A_4.

Платіжну матрицю подамо у вигляді:

Таблиця 2

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	6	12	20	24
A_2	9	7	9	28
A_3	23	18	15	19
A_4	27	24	21	15

За принципом Лапласа стани природи $П_1, П_2, П_3, П_4$ – рівноймовірні. Відповідно до нього кожному стану природи відповідає ймовірність

$$p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25, \quad i \in \{1,2,3,4\}.$$

Очікувані витрати для різних стратегій кредитної спілки A_1, A_2, A_3, A_4 згідно формули

$$u^{Л} = \min_i \left(\overline{u_i}\right) = \min_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right),$$

становлять:

$$\overline{u_1} = 0{,}25(6 + 12 + 20 + 24) = 15{,}5;$$
$$\overline{u_2} = 0{,}25(9 + 7 + 9 + 28) = 13{,}25; \rightarrow \min$$
$$\overline{u_3} = 0{,}25(23 + 18 + 15 + 19) = 18{,}75;$$
$$\overline{u_4} = 0{,}25(27 + 24 + 21 + 15) = 21{,}75.$$

Критерій Лапласа схиляє нас до вибору другої альтернативи.

2. Критерій Вальда

Таблиця 3

A_i \ $П_j$	Витрати a_{ij}, тис. у. о.				$\max\limits_j a_{ij}$	$W = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$		
A_1	6	12	20	24	24	–
A_2	9	7	9	28	28	–
A_3	23	18	15	19	23	23
A_4	27	24	21	15	27	–

Таким чином, найкращою стратегією розвитку кредитування відповідно до мінімаксного критерію $u^B = \min\limits_i \max\limits_j u_{ij}$ є третя альтернатива.

3. Критерій Севіджа

Для вихідної платіжної матриці (матриці втрат) (таблиця 1) будуємо матрицю ризиків R_A (таблиця 4), елементи якої r_{ij} визначаємо за формулою:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_k u_{kj} - u_{ij}, & \textit{якщо } A - \textit{виграш}, \\ a_{ij} - \min\limits_k u_{kj}, & \textit{якщо } A - \textit{втрати}, \end{cases}$$

$$\textit{де } i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n; \ k = 1, \ldots, m$$

Отже,

$$R_A = \begin{pmatrix} r_{11} = 6-6 & r_{12} = 12-7 & r_{13} = 20-9 & r_{14} = 24-15 \\ r_{21} = 9-6 & r_{22} = 7-7 & r_{23} = 9-9 & r_{24} = 28-15 \\ r_{31} = 23-6 & r_{32} = 18-7 & r_{33} = 15-9 & r_{34} = 19-15 \\ r_{41} = 27-6 & r_{42} = 24-7 & r_{43} = 21-9 & r_{44} = 15-15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 13 \\ 17 & 11 & 6 & 4 \\ 21 & 17 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблиця 4

Матриця ризиків

Π_j / A_i	Величина ризику r_{ij}, тис. у. о.				$\max\limits_j r_{ij}$	$W = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$
	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4		
A_1	0	5	11	9	11	11
A_2	3	0	0	13	13	-
$\boldsymbol{A_3}$	17	11	6	4	17	-
A_4	21	17	12	0	21	-

Запровадження величини ризику $\boldsymbol{r_{ij}}$, згідно формули $u^C = \min\limits_i \max\limits_j u_{ij}$, привело до вибору першої стратегії $\boldsymbol{A_1}$, яка забезпечує найменші втрати у найнесприятливішій ситуації (коли ризик максимальний).

4. Критерій Гурвіца

Нехай $\alpha = 0{,}5$ (таблиця 5).

Таблиця 5

	$\min\limits_j u_{ij}$	$\max\limits_j u_{ij}$	$\bar{u}_i = \alpha \min\limits_j u_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_j u_{ij}$	$u^\Gamma = \min\limits_i \bar{u}_i$
u_1	6	24	$0{,}5 \cdot 6 + (1-0{,}5)\cdot 24 = 15$	15
u_2	7	28	$0{,}5 \cdot 7 + (1-0{,}5)\cdot 28 = 17{,}5$	–
u_3	15	23	$0{,}5 \cdot 15 + (1-0{,}5)\cdot 23 = 19$	–
u_4	15	27	$0{,}5 \cdot 15 + (1-0{,}5)\cdot 27 = 21$	–

Оптимальне рішення згідно формули $u^\Gamma = \min\limits_i \left\{ \alpha \min\limits_j u_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_j u_{ij} \right\}$ полягає у виборі першої альтернативи.

Висновки. Таким чином, оптимальною стратегією є:

– за критерієм Лапласа – стратегія $\boldsymbol{u_2}$;

– за критерієм Валда – стратегія $\boldsymbol{u_3}$;

– за критерієм Севіджа – стратегія $\boldsymbol{u_1}$;

– за критерієм Гурвіца $\boldsymbol{(\alpha = 0{,}5)}$ – стратегія $\boldsymbol{u_1}$.

15.4. Методи прийняття рішень в умовах ризику

Нехай відома матриця цінності альтернатив. І якимось чином (наприклад, експертним методом) оцінена ймовірність всіх станів зовнішнього середовища. Передбачається, що зовнішнє середовище (природа) є пасивним і не створює протидії ОПР.

В цьому випадку для оцінки альтернативних рішень можуть бути використані:

1. Критерій Байєса-Лапласа

Для кожної можливої альтернативи проводять розрахунок оцінок:

$$\overline{\overline{u_i}} = \sum_{j=1}^{m} p_j u_{ij}, i \in [1, n]$$

Далі обирають альтернативу з найбільшою оцінкою:

$$u^{БЛ} = \max_{i=1}^{n}\left(\overline{\overline{u_i}}\right)$$

2. Критерій Ходжеса-Лемана

Критерій заснований на обчисленні наступних оцінок:

$$\overline{u_i} = (1-\beta)\min u_{ij} + \beta\overline{\overline{u_i}}$$

$0 \le \beta \le 1$ - коефіцієнт довіри до отриманих ймовірностей, тобто до експертів; $\overline{\overline{u_i}}$ - оцінки, розраховані за критерієм Байєса-Лапласа.

Серед знайдених значень $\overline{u_i}$ вибирають альтернативу з найбільшою оцінкою:

$$u^{ХЛ} = \max_{i=1}^{n}\left(\overline{u_i}\right).$$

Задача 2

Підприємство має три альтернативних варіанти своєї ринкової стратегії при трьох можливих станах зовнішнього середовища. Оцінки його прибутку, залежно від стану зовнішнього середовища наведено в матриці цінності альтернатив. За допомогою експертів отримано оцінки вірогідності станів зовнішнього середовища. Необхідно оцінити альтернативні рішення за критеріями Байєса-Лапласа і Ходжеса-Лемана (β=0,6).

Таблиця 6

Альтернативне рішення	Стан зовнішнього середовища		
	Конкуренція не змінилася p_1=0,5	Конкуренція підсилилася p_1=0,35	Конкуренція різко зросла p_1=0,15
Продовжувати роботу в звичному режимі	100	80	50
Підсилити рекламну діяльність	90	90	70
Підсилити рекламну діяльність і знизити ціни	60	70	80

1. Обчислимо критерій Байєса-Лапласа:

$$\overline{\overline{u_1}} = 0{,}5\cdot 100 + 0{,}35\cdot 80 + 0{,}15\cdot 50 = 85{,}5;$$

$$\overline{\overline{u_2}} = 0{,}5\cdot 90 + 0{,}35\cdot 90 + 0{,}15\cdot 70 = 87{,}0$$

$$\overline{\overline{u_3}} = 0{,}5\cdot 60 + 0{,}35\cdot 70 + 0{,}15\cdot 80 = 66{,}5$$

$$u^{БЛ} = \max_{i=1}^{n}\left(\overline{\overline{u_i}}\right) = \max(85{,}5;87{,}0;66{,}5) = 87$$

Тобто пропонується підсилити рекламну діяльність без зниження цін.

2. Обчислимо критерій Ходжеса-Лемана:

$$1-\beta=1-0{,}6=0{,}4$$

$$\overline{u_1} = 0{,}4\cdot 50 + 0{,}6\cdot 85{,}5 = 71{,}3$$

$$\overline{u_2} = 0{,}4\cdot 70 + 0{,}6\cdot 87{,}0 = 80{,}2$$

$$\overline{u_3} = 0{,}4\cdot 60 + 0{,}6\cdot 66{,}5 = 63{,}9$$

$$u^{ХЛ} = \max_{i=1}^{n}\left(\overline{u_i}\right) = \max(71{,}3;80{,}2;63{,}9) = 80{,}2$$

Таким чином, також пропонується підсилити рекламну діяльність без зниження.

Тема 15. Стохастичне програмування

План

15.1. Випадкові фактори.
15.2. Постановка стохастичних задач.
15.3. Перехід від стохастичної задачі до детермінованої.

15.1. Випадкові фактори

Сільське господарство відноситься до найбільш ризикованої галузі економіки. Це пов'язане не тільки із впливом природних сил, а і з непередбачуваністю витрат та результатів виробництва. Крім того, формування ринкових відносин спричиняє економічну невизначеність, яка зумовлюється коливанням цін, попиту та пропозиції, відсоткових ставок за кредит і т. ін. Таким чином, при побудові економіко-математичної моделі виробничих процесів у сільському господарстві ми стикаємося з необхідністю виділення випадкових та детермінованих факторів аграрного виробництва.

Основні групи випадкових факторів:

1. ***Природно-біологічні****:* *погодні* (кількість опадів, температура навколишнього середовища та ґрунту, вологість повітря і т. д.) та *біологічні* (ураження сільгоспкультур та хвороби тварин).

2. ***Організаційно-економічні****:* *економічні* (попит на сільгосппродукцію, ціни реалізації та ціни на виробничі ресурси, умови реалізації продукції та ін.) та *організаційні* (надійність роботи машин та механізмів, розвиток інфраструктури).

3. ***Соціальні****.* Велике значення в аграрному виробництві мають такі процеси як міграція трудових ресурсів (в тому числі і в напружені періоди роботи), кваліфікація робітників та керівництва, а також влив зовнішніх соціальних умов (політика держави).

На практиці впровадження більшості розроблених оптимізаційних моделей аграрного виробництва не відбувається. Це пов'язане з тим, що розроблені лінійні моделі, в яких цільова функція і обмеження носять лінійний характер. Але як відомо, економічні процеси дуже складні і частіше за все нелінійні за характером. Скажімо продуктивність праці, рентабельність виробництва – визначаються нелінійними виразами, залежність між об’ємами виробництва та витратами – нелінійна функція. Іноді (дуже рідко) використовувалися лінійно-динамічні моделі, але їх зручно застосовувати при плановому виробництві, яке було при адміністративному плануванні.

В сучасних умовах, коли переважають випадкові фактори, а підприємства опиняються в умовах невизначеності та недостатності інформації, найбільш сприйнятливими на наш погляд є методи ***стохастичного програмування***, сутність яких полягає в тому, що рішення залежать не тільки від керованих змінних, а й від ряду випадкових некерованих параметрів.

15.2. Постановка стохастичних задач

Задачі стохастичного програмування можна сформулювати в ММ, МП та ПП постановках. Зустрічаються дещо інші назви: одноетапні жорсткі постановки (М-задачі); одноетапні задачі з ймовірнісними обмеженнями (Р-задачі); двоетапні задачі.

В ***М-задачі*** (ММ-постановка) необхідно знайти екстремальне (мінімальне або максимальне) значення математичного сподівання цільової функції:

$$F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i}, \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{v_{ij}} x_j \ge \overline{Q_i}, \\ x_j \ge 0. \end{cases} \qquad (1)$$

При цьому коефіцієнти цільової функції, параметри обмежень та наявні ресурси – математичні сподівання відповідних величин. Перше обмеження описує використання наявних ресурсів господарства, друге – умови виконання замовлень на виробництво заданих обсягів продукції.

Р-задача (МП-постановка, ймовірнісна задача) має вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} P\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i} \right) \ge p_i, \\ P\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{v_{ij}} x_j \ge \overline{Q_i} \right) \ge p_i, \\ x_j \ge 0. \end{cases} \quad , \qquad (2)$$

тобто ймовірності виконання умов повинні бути не менше заданої.

При ***ПП-постановках*** задаються гранично допустимі значення цільової функції і необхідно знайти такі значення $\boldsymbol{x_j}$, при яких ймовірність того, що цільова функція буде не гірше гранично допустимого значення – максимальна.

$$F = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \ge F_{\min} \right) \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} P\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \right) \ge p_i, \\ P\left(\sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_j \ge Q_i \right) \ge p_i, \\ x_{j\min} \le x_j \le x_{j\max}. \end{cases} \qquad (3)$$

В наведених постановках:

x_j – шукані параметри задачі, наприклад, площі посівів певних культур або поголів’я тварин деякого виду;

$\bar{c}_j$ – математичне сподівання прибутку (виручки від реалізації) на одиницю площі сільгоспкультур (або голову тварини);

$\bar{a}_{ij}$ – математичне сподівання витрат ресурсів на одиницю площі або одну голову тварин;

$\bar{b}_i$ – відповідно математичне сподівання очікуваних запасів ресурсів;

$\bar{v}_{ij}$ – вихід продукції з одиниці площі або від однієї голови тварин;

$\bar{Q}_i$ – очікувані мінімальні об’єми випуску продукції;

p_i – ймовірність настання відповідної події.

Використання стохастичного програмування не знімає проблеми адекватного моделювання реальних процесів. Навпаки, цей метод побудови моделей досить складний і вимагає наявності значної інформаційної бази та проведення досить об’ємних попередніх розрахунків. Проте розв’язки оптимізаційних задач при використанні цього методу максимально наближені до реальних економічних процесів.

Таким чином, сільськогосподарське виробництво як галузь економіки має свої характерні відмінності, що значно ускладнюють процес моделювання. Використання найбільш простих лінійних моделей веде до спотворення реальних економічних процесів. Такі негативні тенденції може пом’якшити використання стохастичного програмування, яке, однак, є значно складнішим у підготовці вихідної інформації та створенні моделі.

По суті М-задача стохастичного програмування зводиться до розв’язання звичайної задачі лінійного програмування, де параметри задачі беруться як математичні сподівання відповідних величин.

15.3. Перехід від стохастичної задачі до детермінованої

Для розв’язання задачі в Р-постановці необхідно від задачі з ймовірнісними обмеженнями перейти до детермінованої (визначеної) задачі.

У детермінованому вигляді Р-задача матиме вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j \le \overline{b_i} - t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{a_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{b_i}^2}, \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{v_{ij}} x_j \ge \overline{Q_i} + t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{v_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{Q_i}^2}, \\ x_j \ge 0. \end{cases} \qquad (4)$$

або

$$F = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j} x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} x_j + t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{a_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{b_i}^2} \le \overline{b_i}, \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{v_{ij}} x_j - t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{v_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{Q_i}^2} \ge \overline{Q_i}, \\ x_j \ge 0. \end{cases} \qquad (5)$$

У першому обмеженні вираз $t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{a_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{b_i}^2}$ означає додаткову кількість ресурсу з врахуванням заданої ймовірності.

У другому обмежені вираз $t_{p_i} \sqrt{\sum \sigma_{v_{ij}}^2 x_j^2 + \sigma_{Q_i}^2}$ означає недоотримання продукції з урахуванням заданого рівня ймовірності. Вказані величини називаються ***страховими резервами***, а величина t_{p_i} - квантилем.

Таблиця 1

Значення квантиля залежно від заадної ймовірності

t	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0
p	0,5	0,6	0,7	0,77	0,84	0,89	0,93	0,96	0,98

Задача

На основі техніко-економічних показників по Миколаївській області визначити площі посівів озимої та ярої пшениці, за умови максимізації прибутку. Загальна площа посіву не повинна перевищувати 40000 га.

Таблиця 2

Вихідні дані

Середня врожайність за рік (ц/га)									
Озима пшениця	20,6	17,1	27,5	31,5	12,7	31,2	25,3	19,7	28,2
Яра пшениця	13,3	13,8	18,1	20,5	16,9	19,6	17,7	20,3	15,6
Реалізація зерна, тис. ц									
	563	629	958	1098	639	929	740	555	873
Прибуток, грн/га									
Озима пшениця	70,5	335,97	311,15	106,46	196,8	168,43	13,03	23,15	558,82
Яра пшениця	45,51	271,14	204,79	69,28	261,88	105,81	9,11	23,85	309,13

За даними таблиці 2 розрахуємо:

1) математичні сподівання прибутку з 1 га:

$$\overline{c_1} = 198{,}25; \quad \overline{c_2} = 144{,}5$$

2) середні врожайності (математичні сподівання врожайності):

$$\overline{a_{11}} = 23{,}76; \quad \overline{a_{12}} = 17{,}31$$

3) очікуваний обсяг реалізації пшениці: $\overline{b} = 776000$

4) дисперсії відповідних величин:

$$\sigma^2_{b_1} = 33{,}95 \cdot 10^9; \qquad \sigma^2_{a_{11}} = 38{,}28; \quad \sigma^2_{a_{12}} = 6{,}29$$

Розв'яжемо задачу для ймовірності настання подій ***0,9***, тоді згідно табл. 1, квантиль ***t=1,28***.

Отримаємо задачу:

$$F = 198{,}25x_1 + 144{,}5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 23{,}76x_1 + 17{,}31x_2 + 1{,}28\sqrt{38{,}28x_1^2 + 6{,}29x_2^2 + 33{,}95 \cdot 10^9} \le 776000, \\ x_1 + x_2 \le 40000, \\ x_j \ge 0. \end{cases}$$

Отримали нелінійну задачу математичного програмування, розв'язавши яку за допомогою ***Excel,*** визначимо оптимальний план:

$\boldsymbol{x_1=5211{,}4}$; $\boldsymbol{x_2=23191{,}6}$; $\boldsymbol{F=4384395{,}8}$.

Тема 16. Багатоцільові задачі та методи їх розв'язання

План

16.1. Постановка задачі.
16.2. Методи розв'язання багатоцільових задач.
16.3. Загальна модель задачі.
16.4. Метод «суперцілі».
16.5. Метод послідовних поступок.

16.1. Постановка задачі

Розглядаючи задачі прийняття рішень, припускалася наявність одного показника, з допомогою якого вибирався той чи інший розв'язок. Всі інші показники вважались менш важливими або взагалі несуттєвими. Однак такі міркування часто є мало ефективними. Починаючи з 60-х років минулого століття, велика увага приділяється дослідженню і розробці методів розв'язування та аналізу багатоцільових моделей. Особливістю багатоцільових моделей є несумісність цілей, які враховуються при постановці і формалізації задачі. Дійсно, розв'язок при якому досягається максимум по одному з показників, як правило, не відповідає екстремальним значенням інших показників.

Отже, формулювання «максимізувати ефект при мінімальних втратах» не відповідає дійсності.

Правильніше – сформулювати вимогу до розв'язку багатоцільових моделей у вигляді:

– «досягнення максимального ефекту при втратах, які не перевищують заданої величини»;

– «досягнення ефекту не менше заданого при мінімальних втратах».

В загальному випадку не існує розв'язку, при якому одночасно досягався б максимум або мінімум відразу по декількох показниках, а існують тільки ***компромісні розв'язки.***

Поняття оптимального розв'язку замінюється поняттям ефективного або компромісного розв'язку.

$\overline{x_0}$ є ***ефективним розв'язком*** багатоцільової задачі, якщо не існує іншого розв'язку, який би не поступався $\overline{x_0}$ по всіх показниках і переважав його хоча б одному з них.

Множина ефективних розв'язків $\left\{\overline{x_0}\right\}$ називається ***ефективною множиною***, а область значень показників $F_i\left(\overline{x}\right)$, що відповідають ефективній множині, - ***множиною Парето.***

16.2. Методи розв'язування багатоцільових задач

Перша група – жорстко формалізовані прийоми узгодження цільових функцій на основі введення узагальненої «суперцілі», тобто методи зведення багатоцільової задачі до одно цільової, застосування для неї методів розв'язування одно цільових моделей та аналізу одержаного розв'язку з точки зору цільових функцій початкової задачі.

Друга група – ітеративні прийоми, в яких розв'язок одержується на основі пошуку в множині ефективних планів за участю фахівця, який називається особою по прийняттю рішень (ОПР) і може втручатися в процес формування розв'язку на кожній ітерації.

Використовуються також прийоми змішаного типу, в яких певним чином інтегруються обидва підходи.

16.3. Загальна модель задачі

В області ***G***, що визначається обмеженнями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \le b_j,\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}} \quad (1)$$

знайти

$$x_i \ge 0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}, \quad (2)$$

при яких

$$F_1\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \quad (3)$$

$$F_2\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max \quad (4)$$

$$F_3\left(\overline{x}\right)=\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \to \min \quad (5)$$

16.4. Метод «суперцілі»

При виділенні однієї головної цілі, наприклад $F_1\left(\overline{x}\right)$, на другу і третю накладаються умови типу:

$$F_2\left(\overline{x}\right) \ge F_2^*, \qquad F_3\left(\overline{x}\right) \le F_3^*.$$

Ідею складання суперцілі можна виразити так:

$$u(\overline{x},\overline{\alpha})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i F_i(\overline{x})\rightarrow \max$$, де $\boldsymbol{\alpha_i}$ – вага $\boldsymbol{i}$-ої функції.

Якщо в початковій задачі $F_i(\overline{x})\rightarrow \max$, то $a_i > 0$, $F_i(\overline{x})\rightarrow \min$, то $a_i < 0$. Суперціль можна подати у вигляді

$$u(\overline{x})=\frac{F_1(\overline{x})...F_k(\overline{x})}{F_{k+1}(\overline{x})...F_m(\overline{x})}\rightarrow \max,$$

де $F_i(\overline{x})\rightarrow \max, \quad \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{k}}$, та $F_i(\overline{x})\rightarrow \min, \quad \mathrm{i}=\overline{\mathrm{k}+1,\mathrm{m}}$

16.5. Метод послідовних поступок

Припустимо, що цільові функції проранжировані так, що $F_1(\overline{x})$ важливіша, ніж $F_2(\overline{x})$; $F_2(\overline{x})$ важливіша, ніж $F_3(\overline{x})$ і так далі.

1 крок

Знаходиться оптимальний розв'язок одноцільової задачі:

$$F_1(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i \le b_j,\ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{m}}$$

$$x_i \ge 0,\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}}$$

Нехай $\overline{\boldsymbol{x_1^*}}$ – оптимальний розв'язок цієї задачі, йому відповідає $F_1(\overline{x_1^*})=F_1^*$.

2 крок

З практичних міркувань призначається деяка «поступка» $\Delta F_1^* > 0$ і здійснюється розв'язання задачі при додатковій умові

$$\sum_{i=1}^{n}c_i x_i \ge F_1^* - \Delta F_1^*$$ і цільовій функції $$F_2(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i \rightarrow \max.$$

Тобто знову розв'язується одно цільова задача тільки з додатковою умовою. І так продовжуємо для інших функцій.

Задача

Фабрика виготовляє вироби трьох найменувань, використовуючи для цього відповідні інгредієнти. Технолого-економічні дані наведено в таблиці. Запаси складають: 20т цукру, 24 т рослинної олії, 30 т борошна.

Визначити план виготовлення продукції, при якому максимізується прибуток і мінімізуються витрати на придбання імпортних інгредієнтів: кокоса і ароматизаторів.

Таблиця 1

	Цукор	Рослинна олія	Борошно	Кокос	Ароматизатори	Прибуток (тис.грн.)
Печиво	0,15	0,2	0,6	0,03	0,02	1
Цукерки	0,3	0,4	0,15	0,1	0,05	1,2
Карамель	0,6	0,2	0,1	0,06	0,04	0,8
Ціна	3,2	2,5	2	7	8	-

Складемо модель:

$$F_1(\overline{x}) = x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 \to \max$$

$$F_2(\overline{x}) = 7 \cdot 0{,}03x_1 + 8 \cdot 0{,}02x_1 + 7 \cdot 0{,}1x_2 + 8 \cdot 0{,}05x_2 + \\ + 7 \cdot 0{,}06x_3 + 8 \cdot 0{,}04x_3 \to \min$$

або

$$F_2(\overline{x}) = 0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 \le 20 \\ 0{,}20x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \le 24 \\ 0{,}60x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \le 30 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$$

Застосуємо метод суперцілі. Нехай значимість функцій (цілей) $\boldsymbol{\lambda_1=0,2}$, $\boldsymbol{\lambda_2=-0,3}$. Запишемо відповідну функцію:

$$F_1(\overline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = 0{,}2(x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3) - 0{,}3(0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3) \to \max$$

Остаточно запишемо модель:

$$F_1(\overline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = 0{,}085x_1 - 0{,}09x_2 - 0{,}062x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 \le 20 \\ 0{,}20x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \le 24 \\ 0{,}60x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \le 30 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$$

Розв’язавши задачу симплекс-методом, отримаємо: $\boldsymbol{X^*=(0;\ 0;\ 60)}$, тобто необхідно виготовити 60т карамелі. При цьому прибутку матимемо 60 тис.грн і 22,2 тис. грн. складуть витрати на придбання імпортних інгредієнтів. Якщо ці значення не задовольняють ОПР, тоді необхідно змінити $\boldsymbol{\lambda_1}$ та $\boldsymbol{\lambda_2}$ і шукати новий розв’язок.

СПИСОК ВИКОРИСТАННОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боровик О. В., Боровик Л. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 424 с.

2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. Київ : КНЕУ, 2001. 248 с.

3. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

4. Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з курсу. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.

5. Дослідження операцій в економіці : підруч. / О. І. Черняк та ін. ; ред. О. І. Черняка. Миколаїв : МНАУ, 2020. 398 с.

6. Дослідження операцій : метод рекоменд. для самост. роботи студентів ден. та заоч. форм навчання напряму підготов. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2014. 98 с.

7. Дослідження операцій : курс лекцій / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 248 с.

8. Дослідження операцій в економіці : підруч. / І. К Федоренко. та ін. ; за ред. І. К. Федоренка, О. І. Черняка. Київ : Знання, 2007. Київ : Знання, 2017. 558 с.

9. Дослідження операцій. Практичний курс : навч. посіб. / В. Є. Березовський та ін. Умань : Видавець «Сочінський», 2011. 238 с.

10. Зайченко О. Ю., Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : збірник задач. Київ : Видавничий дім «Слово», 2007. 472 с.

11. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підруч. для вузів. 5-е вид., перероб. та допов. Київ : 2001. 688 с.

12. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / В. В. Вітлінський та ін. ; за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.

13. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ВПЦ «Економічна думка ТНЕУ», 2008. 704 с.

14. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / Т. С. Клебанова та ін. Харків : ВД «Інжек», 2012. 352 с.

15. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с.

16. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. Львів : Магнолія Плюс, 2015. 352 с.

17. Карагодова О. О., Кігель В. Р., Рожок В. Д. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 256 с.

18. Колодінська О. В., Медведєв М. Г. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : Видавництво Європейського університету, 2006. 158 с.

19. Корольов М. Є., Павленко В. І., Савіна О. В., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи оптимізації : навч. посіб. Київ : Університет «Україна», 2007. 177 с.

20. Кунда Н. Т. Дослідження операцій у транспортних системах : навч. посіб. Київ : Видавничий дім «Слово», 2008. 400 с.

21. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : ТОВ "Видавничий дім "Професіонал", 2004. 350 с.

22. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. 215 с.

23. Леснікова І. Ю., Халіпова Н. В. Дослідження операцій у середовищі електронних таблиць Excel : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 186 с.

24. Математичне програмування. Дослідження операцій : навч. посіб. / А. Ф. Барвінський та ін. Львів : «Інтелект-Захід», 2008. 468 с.

25. Математичне програмування : контр. індивід. завд. та метод. реком. для сам. роб. студ. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 80 с.

26. Математичне програмування : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрольних робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 132 с.

27. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 452 с.

28. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрол. робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2017. 107 с.

29. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 135 с.

30. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання практ. занять і самост. роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 87 с.

31. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання тестових завдань і самост. роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 107 с.

32. Охріменко М. Г., Дзюбан І. Ю. Дослідження операцій : навч. посіб. Київ : Центр навчальної літератури, 2006. 184 с.

33. Ржевський С. В., Александрова В. М. Дослідження операцій : підруч. Київ : Академвидав, 2006. 560 с.

34. Толбатов Ю. А., Толбатов Є. Ю. Математичне програмування : підруч. для студентів екон. спец. вищ. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. 432 с.

35. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці : підруч. для студентів вузів. Харків : Гриф, 2002. 580 с.

Навчальне видання

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Конспект лекцій

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 9,19.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.