МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Конспект лекцій
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Комп'ютерні науки» спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2021

УДК 519.85
М34

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 30 серпня 2021 року, протокол № 1.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

Н. С. Ручинська – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петри Могили.

М34 **Математичне програмування** : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. – Миколаїв : МНАУ, 2021. – 131 с.

Конспект лекцій призначений для вивчення теоретичних та інструментальних аспектів математичного програмування. Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «Математичне програмування», що передбачені освітньо-професійною програмою «Комп’ютерні науки» підготовки здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп’ютерні науки», галузі знань 12 «Інформаційні технології». До кожної теми подаються докладні теоретичні відомості, практичні приклади їх застосування, супроводжувані розгорнутими поясненнями та запитання для самоперевірки.

УДК 519.85

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Бурхливий розвиток науки та техніки, широке впровадження автоматизованих засобів управління, збільшення масштабів виробництва, нестабільність економічної ситуації потребує своєчасного прийняття раціональних управлінських рішень. Для цього сучасному фахівцю необхідно володіти методами математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів та явищ. Усе це вивчається в дисциплінах економіко-математичного циклу. Тому, глибоке вивчення цього циклу дисциплін дасть змогу фахівцеві вступити в інформаційне суспільство, допоможе здобувати нові знання та унікальну інформацію.

Математичне програмування є базовою дисципліною економіко-математичного циклу. Курс лекцій призначений для вивчення основ математичного програмування, його моделей та методів, що найчастіше застосовуються в плануванні та економічних розрахунках. В основу курсу покладені питання, вивчення яких необхідне для розуміння принципів математичного моделювання економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Посібник містить побудову оптимізаційних моделей економіки, знаходження оптимального плану задачі лінійного програмування графічним, симплексним методом та методом штучної змінної, теорію двоїстості, транспортні задачі, задачі цілочислового програмування, задачі дробово-лінійного та нелінійного програмування.

Опанування тем дисципліни дозволяє сформувати визначену систему компетентностей та досягти очікуваних результатів навчання.

Посібник складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [2,3,9,13,22,27]. Особливістю укладеного посібника є простота викладення теоретичного матеріалу на основі практичної його реалізації. Для успішного вивчення курсу «Математичне програмування» здобувачам вищої освіти достатньо базових знань з розділів вищої математики, інформатики та комп'ютерної техніки.

Тема 1. Предмет, особливості та сфери застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач

План

1. Історична довідка.
2. Предмет курсу «Математичне програмування».
3. Математична постановка задачі математичного програмування.
4. Найпростіша класифікація задач математичного програмування.

1. Історична довідка

Розвиток математичного програмування розпочався відносно недавно. У 1939 році ленінградський математик академік Л. В. Канторович, досліджуючи задачі економічного змісту, у роботі «Математичні методи організації та планування виробництва» сформулював клас умовно-екстремальних лінійних задач та запропонував методи їх розв'язування, що поклало початок лінійному програмуванню. Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв’язування задач лінійного програмування – симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування. У 1951 р. була опублікована робота Г. М. Куна і А. В. Такера, у якій наведені необхідні і достатні умови оптимальності для розв'язання нелінійних задач.

1954 року – Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв’язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п’ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування –

динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На жаль, у період найбурхливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалося значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, Н. П. Федоренка, С. С. Шаталіна, В. М. Глушкова, В. С. Михалевича, Ю. М. Єрмольєва та ін.

Цей науковий напрямок розвивається досить бурхливо, ряд вчених за розробку методів оптимізації отримали Нобелівські премії, у тому числі академік Л. В. Канторович (1975 р.).

Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для комп'ютерів допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну ***«mathematical programming»,*** що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети.

2. Предмет курсу «Математичне програмування»

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. Керування економічними системами – це, по суті, використання знань про системи, здобуття нової інформації та застосування її з метою відшукання ефективних способів досягнення заданих результатів.

Ці проблеми вивчає наука, яку називають ***теорія дослідження операцій***, яка охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних: від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану.

Термін «Дослідження операцій» виник у роки Другої світової війни. Як говорив Томас Сааті «Дослідження операцій – це мистецтво давати погані відповіді на ті практичні запитання, на які даються ще гірші відповіді за допомогою інших методів».

Математичне програмування – один з головних інструментів теорії дослідження операцій – полягає в розробленні методів розв'язування задач оптимізації та дослідження отриманого розв'язку.

Предметом математичного програмування є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій.

Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) – це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

3. Математична постановка задачі математичного програмування

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 1.1):

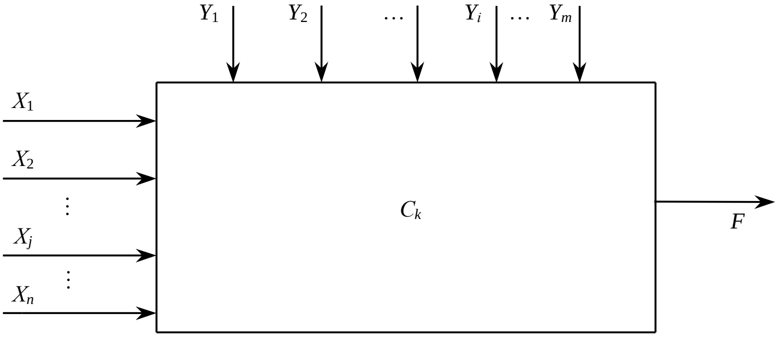


Рис. 1.1. Схема виробничо-економічної системи

Параметри C_k $(k = 1,2,\dots,l)$ є кількісними характеристики системи. Вони можуть бути сталими, наприклад норми висіву насіння с/г культур, норми споживання тваринами кормів і т.д., або їх значення залежить від певних умов, як, скажімо, урожайність с/г культур , собівартість продукції, реалізаційні ціни на продукцію.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, вони бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими чи випадковими.

Незалежні змінні бувають двох видів:

- ***керовані*** X_j $(j = 1,2,\dots,n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі (площа посіву культур);

- ***некеровані*** Y_i $(i = 1,2,\dots,m)$, значення яких не залежить від волі людини і визначається зовнішнім середовищем (погодні умови).

Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки.

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування (наприклад, отримання максимального прибутку). Нехай F – обрана мета. За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною F, якою вимірюється ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами системи:

$$F = f\left(X_1, X_2, \dots, X_n; Y_1, Y_2, \dots, Y_m; C_1, C_2, \dots, C_l\right) \quad (1.1)$$

Функцію F називають ***цільовою функцією (функцією мети).*** Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення F відбиває ступінь досягнення певної мети.

Задача математичного програмування формулюється так: знайти такі значення керованих змінних X_j, щоб цільова функція F набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення, тобто потрібно відшукати значення

$$F^* = \max_{X_j} (\min) f\left(X_1, X_2, ..., X_n, Y_1, Y_2, ..., Y_m, C_1, C_2, ..., C_l\right) \quad (1.2)$$

Можливості вибору значень X_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи які можна описати системою математичних рівнянь та нерівностей виду

$$q_r(X_1, X_2, ..., X_n; Y_1, Y_2, ..., Y_m; C_1, C_2, ..., C_l)\{\le, =, \ge\}0 \quad (1.3)$$

$$(r = 1, 2, ..., S),$$

які будемо називати ***системою обмежень*** задачі.

Наприклад, площа посіву с/г культур обмежена наявністю землі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо.

Для економічної системи значення X_j повинні бути невід'ємні:

$$X_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (1.4)$$

Вирази (1.2)–(1.4) називаються ***економіко-математичною моделлю*** економічної системи.

Правила розробки моделей:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.
2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому.
3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на комп'ютері.
4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів X_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях по змозі слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень.

Допустимим планом (планом) називають будь-який набір змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тобто вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє систему обмежень (1.3) та умову невід'ємності (1.4).

Кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, її програмою дій.*** Саме звідси походить назва терміну «математичне програмування».

Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції F (1.1). Сукупність усіх розв'язків систем обмежень (1.3) і (1.4.), тобто множина всіх допустимих планів, називається ***область існування планів***.

План, за яким цільова функція набуває екстремального значення називається ***оптимальним.*** Оптимальний план є ***розв'язком задачі математичного програмування*** (1.2)–(1.4) і позначається через $\boldsymbol{X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*\right)}$.

4. Найпростіша класифікація задач математичного програмування

1. Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи ***лінійні*** та ***нелінійні***.

Лінійні – якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними функціями, тобто вони містять змінні $\boldsymbol{X_j}$ у першому або нульовому степені. В усіх інших випадках задача буде ***нелінійною***. Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом.***

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Для них не має універсального методу розв'язування, саме тому їх апроксимують (наближають) лінійними.

У нелінійному програмуванні виокремлюють такі класи: ***опукле програмування***, коли область допустимих планів є опуклою множиною, а цільова функція є опуклою функцією; ***квадратичне програмування*** – цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

2. Далі задачі математичного програмування поділяють на ***дискретні*** і ***неперервні.***

Дискретними називають задачі, в яких одна, декілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або декілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

3. Задачі математичного програмування поділяються також на ***детерміновані*** і ***стохастичні***.

Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу. У противному разі адекватна економіко-математична модель має бути ***стохастичною***, тобто містити випадкові функції та величини.

4. Задачі математичного програмування діляться на ***статичні*** (однокрокові) і ***динамічні*** (багатокрокові). ***Однокрокові*** задачі характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ***ітерації*** (кроці) алгоритму. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

5. Як окремі класи розглядають ***дробово-лінійне програмування***, коли обмеження є лінійними, а цільова функція – дробово-лінійна та задачі ***теорії ігор***, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають цілі, що не збігаються, або протилежні цілі.

До типових задач, які розв'язуються за допомогою методів математичного програмування відносяться:

- транспортна задача;
- задача складання кормового раціону;
- задача про дієту;
- задача про складання сумішей;
- задача про оптимальне використання та оцінку ресурсів;
- задача оптимального завантаження устаткування;
- задача про раціональний розкрій матеріалів;
- задача про максимальну рентабельність підприємства;
- задача оптимального розподілу капіталовкладень;
- задача про складання міжгалузевого балансу;
- задача про призначення;
- задача комівояжера.

Тема 2. Загальна задача лінійного програмування та методи її розв'язання

План

1. Загальна математична модель лінійного програмування.
2. Форми запису задач лінійного програмування.
3. Приклад побудови економіко-математичної моделі.

1. Загальна математична модель лінійного програмування

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються методи розв'язання екстремальних задач з лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями, яким повинні задовольняти шукані змінні.

Загальна лінійна математична модель економічних процесів і явищ – так звана ***загальна задача лінійного програмування*** подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$Z = cx_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \tag{2.1}$$

або

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max\,(min)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\}\, b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\}\, b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\}\, b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \tag{2.3}$$

Потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, який задовольняє обмеженням (2.2), (2.3), тоді як цільова функція (2.1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

2. Форми запису задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в загальній, стандартній (симетричній) та канонічній (основній) формі. Більш компактно ***загальну задачу лінійного програмування*** можна записати у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування має вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Канонічною (основною) формою задачі лінійного програмування називається задача (2.1)–(2.3), коли в системі обмежень (2.2) всі значення $b_j \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ невід'ємні**,** а всі обмеження є рівностями, тобто

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для цього якщо якесь значення b_i від'ємне, то помноживши *i*-обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли *i*-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну балансуючу змінну x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geq b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну балансуючу змінну x_{n+2}, тобто

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k.$$

Якщо в задачі деяка змінна x_k довільного знаку, то її заміняють як різницю двох невід'ємних змінних:

$$x_k = x_k' - x_k'', \text{ де } x_k' \geq 0, x_k'' \geq 0.$$

У випадку, коли деяка змінна не додатна $x_p \leq 0$, то її заміняють на протилежну до неї. $x_p' = -x_p$

Якщо задача задана на знаходження максимуму, то її можна розв'язати також і на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = \min(-Z) = \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots c_nx_n)$$

залишивши систему обмежень без зміни.

Канонічну форму задачі лінійного програмування можна записати компактніше у ***векторно-матричному*** вигляді:

$$Z = CX \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{aligned} AX &= A_0, \\ X &\geq 0, \end{aligned}$$

де

$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$ є матриця коефіцієнтів при змінних;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор-рядок коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Канонічну форму задачі лінійного програмування часто записують у ***векторній формі:***

$$\boldsymbol{Z = CX \to max(min)}$$

за умов

$$\boldsymbol{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0},$$
$$\boldsymbol{X \geq 0},$$

де

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} \\ \boldsymbol{a_{21}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A_2} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{22}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{m2}} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \boldsymbol{A_n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних,

Розглянуті форми задачі лінійного програмування (загальна, стандартна та канонічна) еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути приведена до любої з двох інших.

3. Приклад побудови економіко-математичної моделі виробництва

Приклад 2.1

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

Вид ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, кг		Загальна кількість ресурсів, кг
	А	**В**	
1 ресурс	12	4	300
2 ресурс	4	4	120
3 ресурс	3	12	252
Прибуток на одиницю продукції, грн	30	40	
Змінні	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	

На виготовлення двох видів продукції (А і В) витрачаються три види ресурсів P_1, P_2, P_3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці 2.1.

Побудувати економіко-математичну модель виробництва та графічним методом визначити його оптимальний план.

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель виробництва.

Нехай x_1 – кількість виробів виду **А**, x_2 – кількість виробів виду **В**, тоді загальний прибуток від реалізації виробів видів **А** і **В** буде дорівнювати $Z = 30x_1 + 40x_2$. За умовою задачі необхідно отримати максимальний прибуток, тому цільова функція матиме вигляд $Z = 30x_1 + 40x_2 \to max$.

Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів. Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, запишемо сумарні витрати ресурсів 1 виду: $12x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто $300кг$. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$12x_1 + 4x_2 \le 300.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання інших видів ресурсів:

$$4x_1 + 4x_2 \le 120,$$
$$3x_1 + 12x_2 \le 252.$$

Оскільки кількість виготовленої продукції не може бути від'ємною, то $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Тоді, економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120; \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть загальну математичну модель лінійного програмування.
2. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
3. Які є форми запису задач лінійного програмування?

Тема 3. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

План

1. Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування.
2. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування.
3. Приклад визначення оптимального плану задачі лінійного програмування графічним методом та засобами оптимізації *Microsoft Excel.*

1. Основні аналітичні властивості розв'язків задач лінійного програмування.

Вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3) називають ***допустимим планом (розв'язком)*** задачі лінійного програмування.

Сукупність допустимих планів задачі утворює ***область допустимих планів задачі***, яка геометрично є многогранною опуклою множиною і називається ***многогранником планів.***

Опорний план задачі лінійного програмування – це допустимий план, який задовольняє не менш ніж m лінійно незалежних обмежень (2.2) у вигляді строгих рівностей разом з обмеженням (2.3) щодо знака, тобто план $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є ***опорним планом***, якщо система векторів A_j, які входять в розклад $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, при $x_j \geq 0$ $(j-1,2,\ldots,n)$ *є* лінійно незалежна. Геометрично опорний план – це план, утворений координатами вершин многогранника планів задачі.

Опорний план називається ***невиродженим***, якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він ***вироджений***.

Опорний план $X^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при якому цільова функція набуває екстремального значення, ***називається оптимальним.***

Якщо задача лінійного програмування має розв'язок і серед її планів є опорні, то хоча б один із них буде оптимальним.

Встановлено що, якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній з вершин многогранника планів. Якщо цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього многогранника, то вона досягає його і в будь-який точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

2. Графічний метод розв'язання задачі лінійного програмування

Даний метод застосовується для розв'язання двовимірних задач лінійного програмування, тобто з двома змінними, а також деяких тривимірних. Графічним методом можна також розв'язати задачу лінійного програмування, яка має канонічну форму та задовольняє умову $\boldsymbol{n - r \le 2}$, де $\boldsymbol{n}$- число змінних системи, $\boldsymbol{r}$- ранг системи векторів-обмежень (кількість лінійно незалежних рівнянь системи).

Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$\boldsymbol{Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to max(min)} \qquad (3.1)$$

за умов

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \{\le, =, \ge\} b_1} \\ \boldsymbol{a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \{\le, =, \ge\} b_2} \\ \boldsymbol{a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \{\le, =, \ge\} b_3} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \boldsymbol{a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \{\le, =, \ge\} b_m} \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$\boldsymbol{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0}. \qquad (3.3)$$

Припустимо, що система (3.2) за умов (3.3) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Алгоритм графічного методу

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.5) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо многокутник планів задачі лінійного програмування як перетин побудованих півплощин.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = \mathbf{grad}\,Z = (c_1; c_2)$ що задає напрям зростання значень цільової функції задачі. Координатами вектора $\vec{N}$ є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі

5. Будуємо лінію рівня цільової функції Z, якою є пряма, що перпендикулярна до вектора $\vec{N}$.

6. Переміщуючи одержану пряму в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі на *max*), або в протилежному напрямі (для задачі на *min*), знаходимо вершину многокутника планів, де цільова функція досягає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває екстремального значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в одержаній точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язання задач лінійного програмування можливі такі випадки (рис. 3.1-3.7):

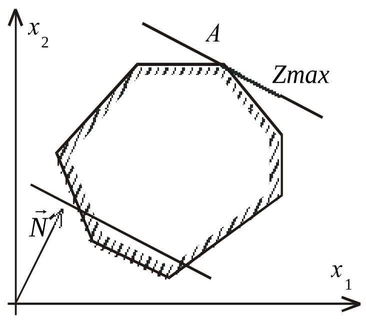


Рис. 3.1

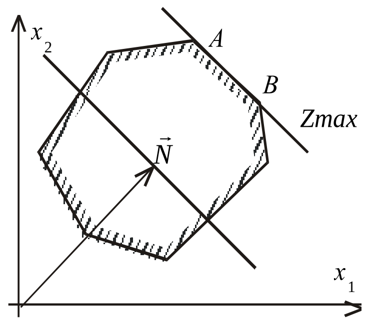


Рис. 3.2

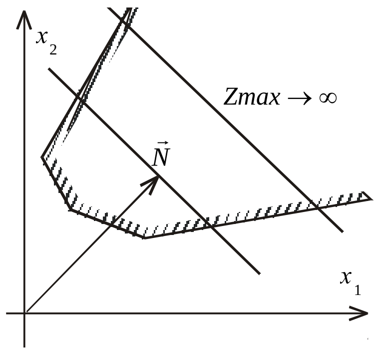


Рис. 3.3

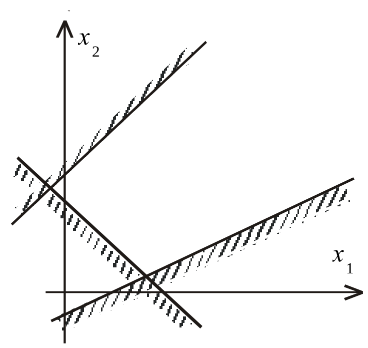


Рис. 3.4

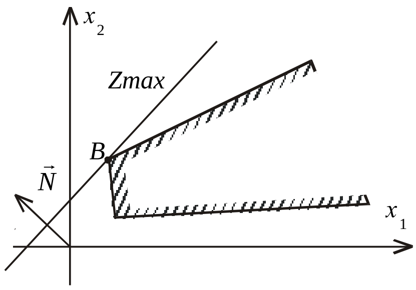


Рис. 3.5

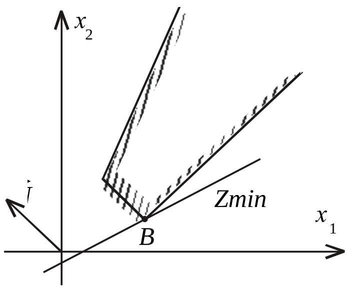


Рис. 3.6

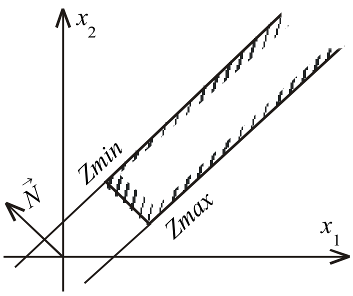


Рис. 3.7

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині А многокутника планів (рис. 3.1).

Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка ***AB*** (рис. 3.2) і задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани:

$$\boldsymbol{X_{опт} = \lambda_1 X'_{опт} + \lambda_2 X''_{опт} \quad, де\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1}$$

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів (рис. 3.3 – цільова функція не обмежена згори; рис. 3.4 – система обмежень задачі несумісна).

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 3.5 і 3.6).

На рис. 3.5 у точці *B* маємо максимум, на рис. 3.6 у точці *B* – мінімум, на рис. 3.7 показано, що в разі необмеженої області допустимих планів цільова функція набуває максимальне і мінімальне значення.

3. Приклад визначення оптимального плану задачі лінійного програмування графічним методом та засобами оптимізації Microsoft Excel.

Приклад 3.1

Визначимо графічним методом оптимальний план задачі лінійного програмування:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300; \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120; \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

1. Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис.1.1). Для цього знаходимо для кожної прямої координати двох точок через які вона проходить.

Для прямої $(l_1): 12x_1 + 4x_2 = 300$ маємо:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, \\ x_1 = 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{300 - 12 \cdot 20}{4}, \\ x_1 = 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 15, \\ x_1 = 20. \end{cases} \Rightarrow A_1(20;15).$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{300}{12}, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 25, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow A_2(25;0).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат і проводимо лінію l_1 .

Аналогічно виконуємо побудову інших ліній відповідно за точками:

$$(l_2): 4x_1 + 4x_2 = 120 \Rightarrow B_1(0;30),\ B_2(30;0);$$

$$(l_3): 3x_1 + 12x_2 = 252 \Rightarrow C_1(0;21),\ C_2(20;16).$$

2. Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з них задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Підставимо в нерівність $12x_1 + 4x_2 \leq 300$ координати довільної точки, наприклад $M_1(10;10)$:

$$12 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \leq 150 \Rightarrow 16 \leq 300 \Rightarrow \textit{вірна нерівність}.$$

Оскільки координати цієї точки задовольняють нерівність, то на рис.1.1 позначаємо штрихуванням півплощину, що включає вибрану точку і відмічаємо її напрям відповідною стрілкою.

Аналогічно знаходимо відповідні півплощини для кожного обмеження:

$M_2(20;0)$,

$(l_2): 4 \cdot 20 + 4 \cdot 0 \le 120 \Rightarrow 8 \le 120 \Rightarrow$ ***вірна нерівність.***

$M_3(20;30)$,

$(l_3): 3 \cdot 20 + 12 \cdot 30 \le 252 \Rightarrow 420 \le 252 \Rightarrow$ ***невірна нерівність.***

Для 1 і 2 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає вибрану точку, а для 3-го обмеження вибираємо ту півплощину, що не включає вибрану точку, оскільки дане обмеження не справджується.

Враховуючи умову невід'ємності змінних $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

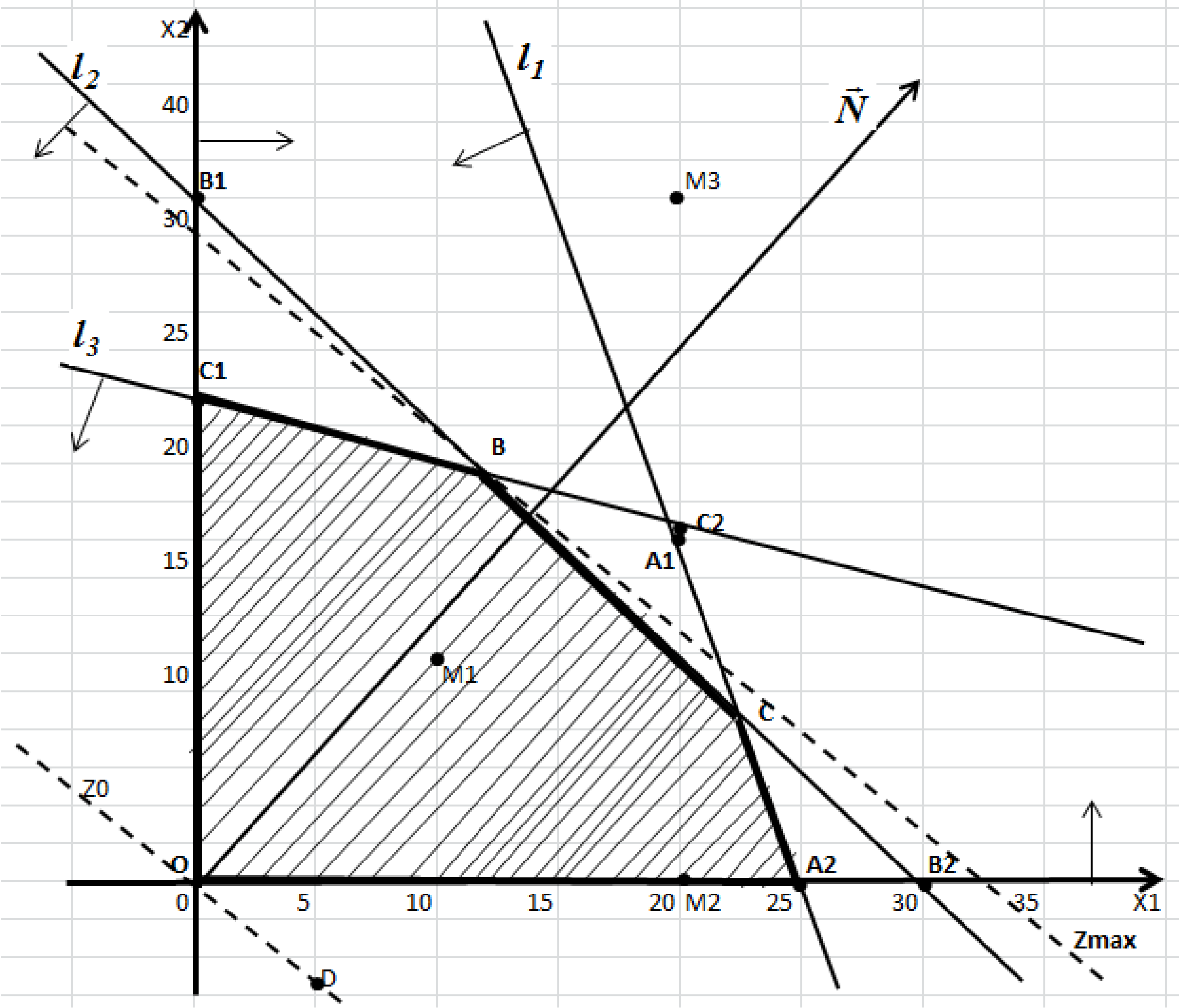


Рисунок 3.8 – Графічний метод розв'язання ЗЛП

3. Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – многокутник OC_1BCA_2. Координати будь-якої його точки, задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Поставлену задачу буде розв'язано,

якщо відшукаємо таку точку многокутника планів OC_1BCA_2 в якій цільова функція Z набуває екстремального значення.

4. Для цього побудуємо вектор-нормалі $\vec{N} = grad\, Z = (c_1; c_2)$ компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(c_1; c_2)$. Вектор $\vec{N} = (30;40)$ задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор протилежний йому, – напрям їх зменшення.

5. Будуємо лінію рівня цільової функції Z, якою є пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, що перпендикулярна до вектора $\vec{N}$. Побудуємо пряму $30x_1 + 40x_2 = 0$ за точками $O(0;0), D(5;-3{,}75)$ і позначимо її на рисунку Z_0. Як бачимо, вона проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{N}$.

6. Переміщуючи лінію рівня в напрямі вектора $\vec{N}$ знаходимо вершину многокутника планів, де цільова функція досягає екстремального значення. Із рис. 1.1 бачимо, що першою спільною точкою (точкою входу) лінії рівня цільової функції $30x_1 + 40x_2 = 0$ та многокутника планів OC_1BCA_2, є точка O, яка і буде точкою мінімуму, а останньою їх спільною точкою (точкою виходу) є точка B, яка і буде точкою максимуму.

7. Оскільки точка $B = l_2 \cap l_3$ є точкою перетин ліній 2 і 3, то розв'язавши систему відповідних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18, \end{cases} \Rightarrow B(12;18),$$

обчислимо максимальне значення цільової функції в точці:

$$Z_{max} = Z(B) = Z(12;18) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080.$$

Отже, оптимальний план *ЗЛП* $X_{max} = (12;18)$, йому відповідає максимальне значення цільової функції $Z_{max} = 1080$.

Відповідь:

Для отримання максимального прибутку 1080 грн підприємству необхідно виготовляти продукції А – 12 одиниць, продукції В – 18 одиниць. При цьому запаси ресурсу 1 використовуються не повністю (216<300), ресурс 2 та ресурс 3 використовуються повністю.

Використовуючи надбудову *«ПОИСК РЕШЕНИЯ»* визначимо оптимальний план заданої задачі.

1. Оскільки цільова функція задачі та система обмежень лінійні, то маємо задачу лінійного програмування. Для її розв'язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету *Microsoft Excel* (рис.3.9). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв'язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю коефіцієнтів системи обмежень (B19:C21), коефіцієнти цільової функції (B23:C23), знаки обмежень (E19:E21), стовпчик вільних членів системи обмежень (F19:F21), формули лівої частини кожного обмеження (D19:D21) та формулу цільової функції (D23) (рис.3.9, рис. 3.10):

D23 =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B23:C23)

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	<=	300
20	2.	4	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	120
21	3.	3	12	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**=СУММПРОИЗВ(B16:C16;B23:C23)**	max	

Рисунок 3.9 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	0	<=	300
20	2.	4	4	0	<=	120
21	3.	3	12	0	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**0**	max	

Рисунок 3.10 – Початкові дані для розв'язання задачі

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения.***

У діалоговому вікні, що з’явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D23), напрям оптимізації (Максимум), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження ($D$19:$D$21<=$F$19:$F$21). За умовою задачі змінні приймають лише невід’ємні значення, тому вказуємо це (☑ Сделать переменные без ограничений неотрицательными) (рис. 3.11):

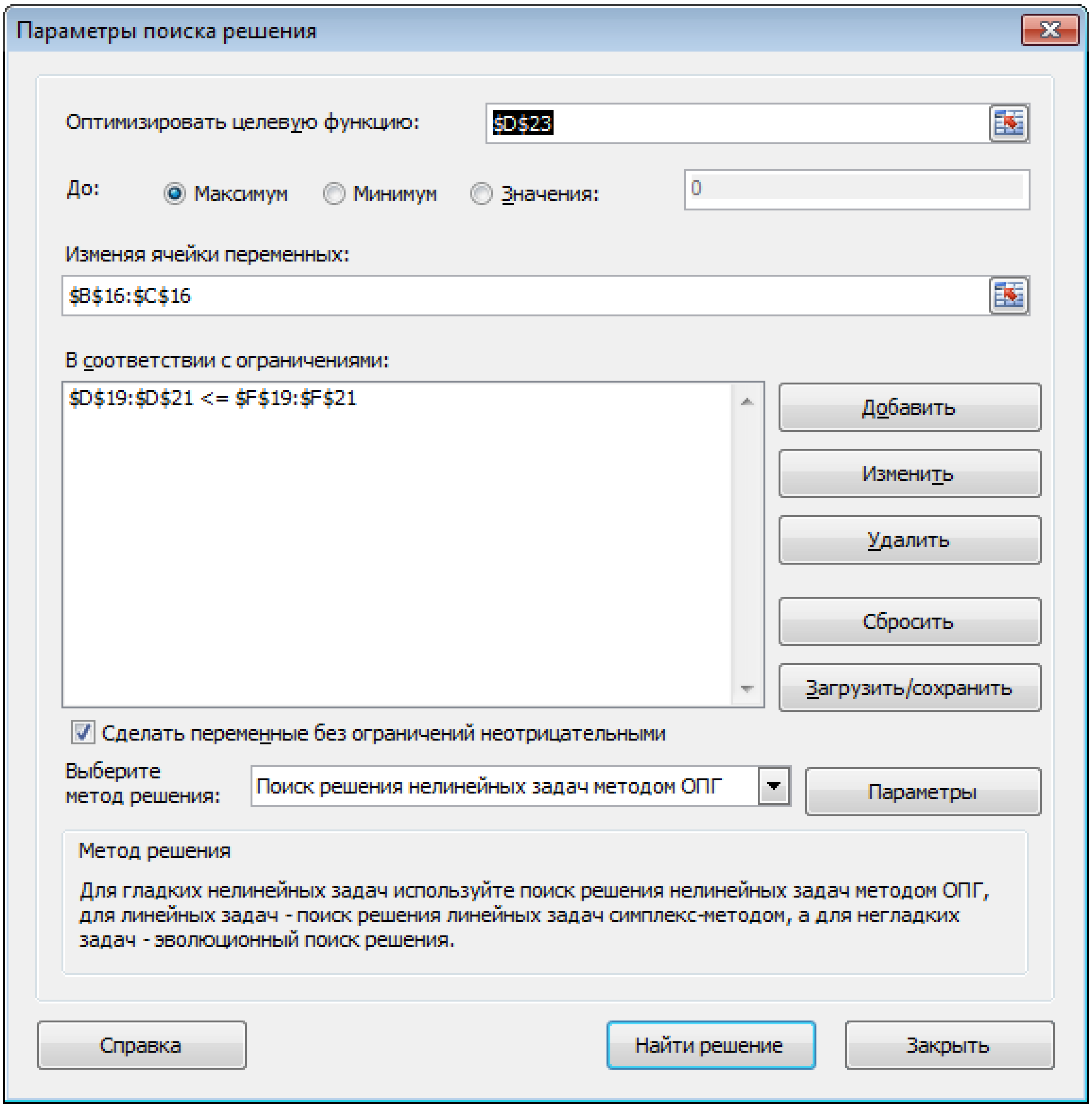


Рисунок 3.11 – Діалогове вікно *«Поиск решения»*

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв'язок знайдено (рис. 3.12). Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв'язку, а в клітинці D23 оптимальне значення цільової функції задачі на максимум (рис. 3.13):

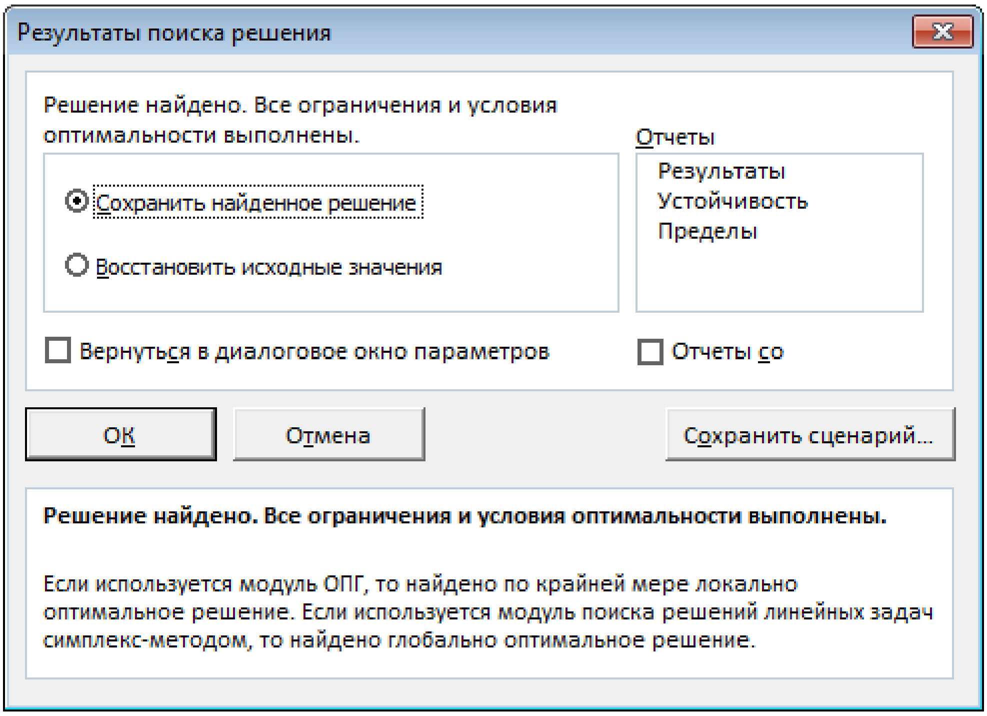


Рисунок 3.12 – Результати роботи надбудови *«Поиск решения»*

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	12	18			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	216	<=	300
20	2.	4	4	120	<=	120
21	3.	3	12	252	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**1080**	max	

Рисунок 3.13 – Оптимальний план задачі

4. Якщо необхідно зберегти звіти, то виділяємо необхідні ***Отчеты*** (***Результаты***, ***Устойчивость*** чи ***Пробелы)*** та нажимаємо ***OK.*** Відповідно отримуємо листи звітів (рис. 3.13):

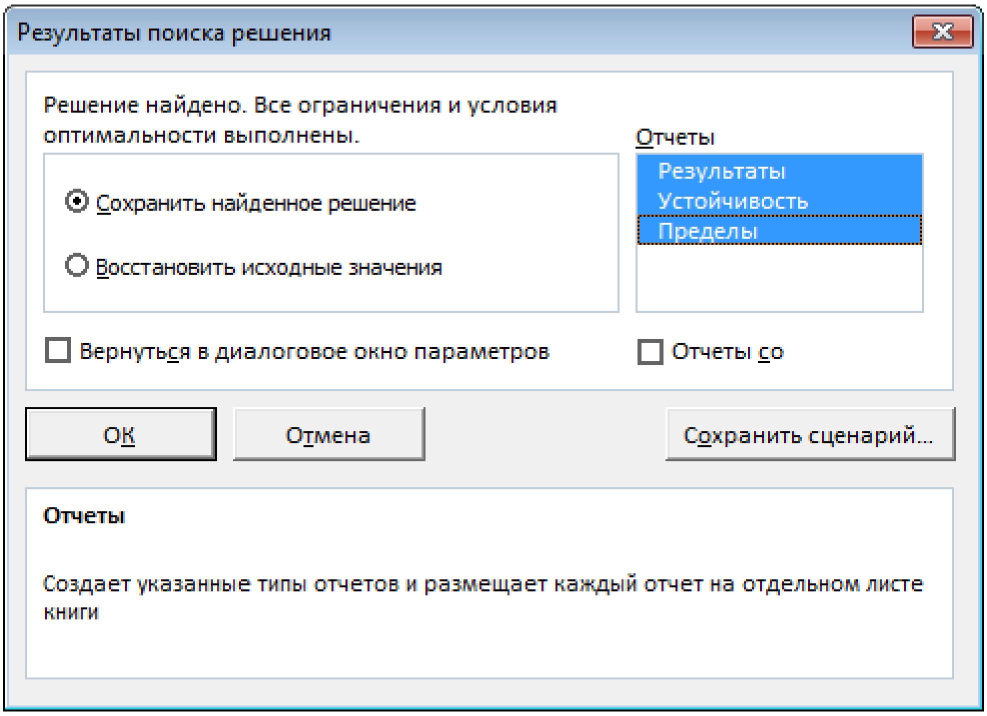


Рисунок 3.13 – Вибір необхідних звітів

Отже, оптимальний план задачі лінійного програмування $\boldsymbol{X_{max} = (12;18)}$, йому відповідає максимальне значення цільової функції $\boldsymbol{Z_{max} = 1080}$, що підтверджує результати отримані графічним методом.

Контрольні запитання

1. Дайте геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
2. Який розв’язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
3. Поясніть, яка область називається областю допустимих планів.
4. Який план називається опорним?
5. Який опорний план називається невиродженим?
6. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв’язків задачі лінійного програмування.
7. Які задачі лінійного програмування можна розв’язувати графічним методом?
8. За яких умов задача лінійного програмування з необмеженою областю допустимих планів має розв’язок?
9. Суть алгоритму графічного методу розв’язання задач лінійного програмування.

Тема 4. Симплексний метод розв’язання задач лінійного програмування

План

1. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування.
2. Алгоритм розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом.
3. Алгоритм розв’язування задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом
4. Приклад визначення оптимального плану задачі лінійного програмування симплексним методом.

1. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування

Загальним методом розв’язання задач лінійного програмування є ***симплекс-метод***, який вперше застосував американський вчений Джордж Данціг в 1949 році. Хоча сам алгоритм методу, за винятком вибору напрямного (розв’язувального) елементу, був відомий ще у 19 ст.

Ідея цього методу полягає в здійсненні спрямованого перебору допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до наступного, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функціонала при переході змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Процес розв’язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі, або з’ясовано, що його не існує.

Отже, ***симплекс-метод*** – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

2. Алгоритм розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $\Delta_j = Z_j - c_j$. Якщо всі оцінки Δ_j задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану задачі або встановлюють, що оптимального плану не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі з метою його покращення виконується визначенням напрямного елементу та розрахунком нової симплексної таблиці за допомогою метода Жордана-Гауса.

5. Повторення дій, починаючи з п. 3.

Розглянемо більш детально кожен з етапів алгоритму:

I етап

Задача лінійного програмування записується в ***канонічній формі***, тобто у вигляді обмежень рівнянь з невід′ємними правими частинами. Для цього в лівій частині обмежень нерівностей вводяться ***додаткові (балансуючі) змінні***, а саме для нерівностей типу «≤» – зі знаком «+», а для нерівностей типу «≥» – зі знаком «–». У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Задачу лінійного програмування записують у ***векторній формі***. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють $\boldsymbol{m}$ одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис $\boldsymbol{m}-$вимірного простору (де $\boldsymbol{m}-$ кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

Можливі випадки:

а) в системі обмежень у векторній формі є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;

б) у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови початкового опорного плану застосовують ***метод штучного базису (М-метод).*** Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень нові змінні з коефіцієнтом +1, які називаються ***штучними***. У цільовій функції задачі лінійного програмування штучні змінні мають коефіцієнт $-\boldsymbol{M}$ (для задачі на max) або $+\boldsymbol{M}$ (для задачі на min), де $\boldsymbol{M}$ – досить велике додатне число. Таким чином отримуємо розширену задача лінійного програмування

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називаються ***базисними*** (їх кількість дорівнює $\boldsymbol{m}$), а решта змінних називається ***вільними*** (їх кількість $\boldsymbol{n-m}$). Вільні змінні прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних.

Таким чином отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування, який геометрично відповідає одній з вершин випуклого многокутника планів і позначається $\boldsymbol{X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, 0, ..., 0)}$. Якщо $\boldsymbol{b_i > 0, i = 1, 2, ..., m}$, то план невироджений, а у випадку, коли серед них є нульові, то план вироджений.

ІІ етап

Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність записують у вигляді симплексної таблиці.

Таблиця 4.1 – Симплекс-таблиця

№	i	Базис	$C_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	θ	Опорний план
					x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n		
0	1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1n}	θ_1	
	2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2n}	θ_2	
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mn}	θ_m	
	m+1	Z, Δ_j		Z_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	Δ_n		
	m+2												

У першому стовпчику таблиці «*№*» – записують номер ітерації, в другому стовпчику «*i*» – номер обмеження, у третьому стовпчику «*Базис*» – записують базисні змінні опорного плану, *причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.* В четвертому стовпчику «$C_{баз}$» – записують коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі; в п'ятому стовпчику «*План*» – записують значення базисних змінних і відшукуванні у процесі розв'язування задачі компоненти оптимального плану. У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування. У наступному стовпчику «θ» – записують значення симплексного відношення $\frac{b_i}{a_{ik}}$. В останньому стовпчику *«Опорний план»* записують знайдені значення опорного плану.

III етап

Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з теоремою.

Теорема (ознака оптимальності опорного плану).

Опорний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх значень $j, (j = 1,2,..,n)$ виконується умова:

$$\Delta_j = Z_j - c_j \geq 0 \text{ (для задачі на max)}$$

або

$$\Delta_j = Z_j - c_j \leq 0 \text{ (для задачі на } min\text{)}$$

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв'язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок Δ_j визначають за формулою:

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$\vec{C}_{баз}$» та «$\vec{X}_j$» мінус відповідний коефіцієнт c_j. Розраховані оцінки Δ_j записують в окремий $(m+1)-$рядок симплексної таблиці, який називається ***оціночним.*** Якщо використовується метод штучного базису, то таблиця доповнюється оціночним $(m+2)-$рядком, який включатиме в собі значення оцінок Δ_j з буквою «M».

При перевірці умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі Δ_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

IV етап

Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі. Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці Δ_j, що не задовольняє умову оптимальності.

Якщо таких оцінок декілька, то серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. А саме: для задачі на ***max*** серед **від'ємних** оцінок Δ_j вибирають найбільшу за абсолютною величною, тобто знаходять $max\left|\Delta_j\right| = \left|\Delta_k\right|, \quad \Delta_j < 0$, а для задачі на ***min*** – знаходять найбільше значення серед **додатних** оцінок Δ_j, тобто знаходять $max\,\Delta_j = \Delta_k, \quad \Delta_j > 0$.

Нехай індекс зазначеної змінної $j=k$. Тоді відповідний $k-$стовпчик симплексної таблиці називається ***напрямним*** і позначається вертикальною стрілкою.

Якщо є декілька однакових за абсолютною величиною оцінок Δ_j, то до базису вводять ту змінну, якій відповідає $max\,c_j$ (для задачі на *max*) і $min\,c_j$ (для задачі на *min*).

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх **додатних** значень a_{ik} напрямного стовпчика ***симплексне відношення*** $\theta = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$, тобто розділивши елементи стовпчика «План» на відповідні додатні елементи напрямного стовпчика. Потім вибирають найменше його значення θ, яке і вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Тоді відповідний $r-$рядок симплексної таблиці називається ***напрямним*** і позначається горизонтальною стрілкою.

Якщо при розрахунку симплексного відношення θ виникає декілька рівних його значень, то потрібно вибрати такий рядок, для якого відношення елементів наступного стовпчика до напрямного є найменшим. Якщо при цьому знову виявляться рівними мінімальні відношення, то складаються відношення елементів наступного стовпчика. Цю операцію продовжують до того часу, поки напрямний рядок не визначиться однозначно. Дана ситуація виникає тоді, коли маємо вироджений план і тоді у процесі виконання ітерацій виникає можливість повернення до раніше вибраного опорного плану, тобто виникає зациклювання у процесі розрахунку.

Перетин напрямного стовпчика та напрямного рядка визначає число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***напрямним елементом.*** За допомогою знайденого елемента a_{rk} і методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

Побудова нової симплексної таблиці

Спочатку заповнюють стовпчики *"№", "і", "Базис" і "$C_{баз}$"*, а решту елементів нової таблиці розраховують за такими правилами:

1. Елементи напрямного рядка ділять на напрямний елемент і здобуті числа записують у відповідний рядок нової симплексної таблиці.
2. Напрямний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість напрямного елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

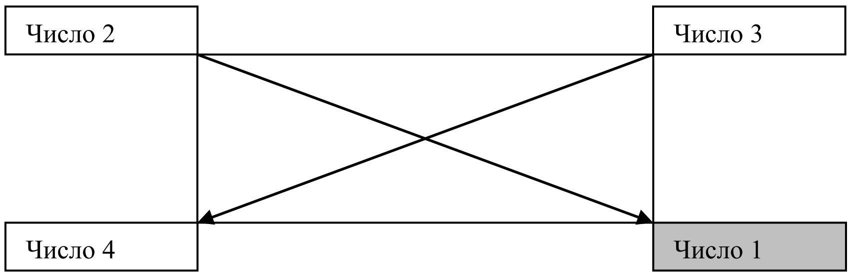
4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову симплексну таблицю без змін.

5. Усі інші елементи нової симплексної таблиці, у тому числі елементи стовпчика *"План"*, розраховуються за спеціальними формулами, або за ***правилом прямокутника***, який умовно складається в попередній симплексній таблиці. Вершини прямокутника утворюють такі числа:

Число 1 – напрямний елемент a_{rk};

Число 2 – число, яке розміщене на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати.

Число 3 і число 4 – елементи, що розміщуються в двох протилежних вершинах умовного прямокутника.



Необхідний елемент нової симплекс таблиці визначають таким чином

$$\boldsymbol{Число2' = \frac{Число2 \cdot Число1 - Число3 \cdot Число4}{Число1}}.$$

Наявність двох способів визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає можливість контролювати правильність обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

При застосуванні симплекс-методу можливі такі випадки:

1. Якщо в $(m+1)$ оціночному рядку останньої симплексної таблиці, яка включає в собі оптимальний план, є хоча б одна нульова оцінка Δ_j, що відповідає вільній змінній, тобто значень $\Delta_j = 0$ більше ніж m, то задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план, який можна отримати,

вибравши напрямний елемент у зазначеному стовпчику і виконавши один крок симплекс-методом. Тоді розв'язок задачі лінійного програмування можна записати у вигляді:

$$X_{опт}=\lambda_1 X'_{опт}+\lambda_2 X''_{опт} \quad ,де\ \lambda_1\ge 0,\lambda_2\ge 0,\lambda_1+\lambda_2=1.$$

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{ik}, тобто усі $a_{ik}\le 0$, $i=\overline{1,m}$, то оптимальних планів не існує і цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою в області допустимих планів (для задачі максимізації $\max Z=\infty$, а для задачі мінімізації $\min Z=-\infty$).

3. Якщо для опорного плану всі оцінки $\Delta_j\ (j=\overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів задачі не існує.

3. Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування двоїстим симплекс-методом

Двоїстий симплекс-метод як і симплекс–метод використовується для розв'язання задач лінійного програмування, які записано в канонічній формі основної задачі, для яких серед векторів X_j є m одиничних векторів. але вільні члени системи рівнянь b_i, будь-які числа, на відміну від симплекс-методу, де $b_i\ge 0$. Розглянемо алгоритм двоїстого симплекс-методу для задачі на мінімум.

Алгоритм двоїстого симплекс-метод:

1. Приведемо систему обмежень задачі до системи нерівностей типу «$\le$», запишемо її канонічну форму, визначимо початковий базис та псевдо–план задачі лінійного програмування:

$$X=\left(b_1;b_2;\ldots;b_m;0;0;\ldots;0\right),\ \text{якщо}\ \Delta_j\ge 0.$$

2. Перевіримо псевдо-план на оптимальність:

a) Якщо всі значення $b_i \geq 0$ при умові $\Delta_j \geq 0$, то план оптимальний;

b) Якщо хоча б одне число $b_i < 0$ таке , що всі $a_{ij} \geq 0$, то плану не існує, оскільки система обмежень несумісна;

c) Якщо є числа $b_i < 0$ такі, що для них існують $a_{ij} < 0$, то в даному випадку виконується перехід до нового опорного плану.

3. Вибір напрямного рядка виконується за найбільшою абсолютною величиною від'ємних чисел стовпчика «План», тобто знаходиться $max|b_i|, b_i < 0$. Вибір напрямного стовпчика виконується на найменшою абсолютною величиною відношення оціночного $(m+1)$–го рядка до відповідних від'ємних елементів напрямного рядка, або згідно з формулою:

$$min\left(-\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right) \quad ; \quad \Delta_j \geq 0 \quad ; \quad a_{ij} < 0 \; ; \qquad (*)$$

Використовуючи напрямний елемент виконується розрахунок нової симплекс-таблиці.

4. Визначається новий псевдо-план і повторюється 2 етап.

Зазначимо, що для розв'язання задачі на максимум за наведеним алгоритмом необхідно перейти до цільової функції $F' = -F$, або дещо змінити сам алгоритм.

Двоїстий симплекс-метод зручно використовувати також і при розв'язанні задач, які мають одиничний базис, але не належать до задач у базисній або двоїстій базисній формі, оскільки є від'ємні елементи, як серед значень b_i, так і серед значень Δ_j одночасно. Розв'язування таких задач виконується наступним чином: спочатку за допомогою двоїстого симплекс-методу виключаються всі значення $b_i < 0$, потім оптимальний план знаходять класичним симплекс-методом; для цього потрібно замінити пункт (*) наступним: серед від'ємних коефіцієнтів a_{ij} напрямного рядка вибирають елемент, для якого знаходять відношення

$$max\frac{b_i}{a_{ij}}; \quad якщо \; b_i < 0, a_{ij} < 0 \quad .$$

4. Приклад визначення оптимального плану задачі лінійного програмування симплексним методом

Приклад 4.1

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування симплексним методом:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120; \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Запишемо задачу лінійного програмування в канонічній формі та визначимо початковий опорний план. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові балансуючі змінні x_3, x_4, x_5, які за економічним змістом означають можливу, але невикористану сировину при додатковому плані виробництва.

$$Z = 30x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + \quad x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + \qquad x_5 = 252. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Запишемо систему обмежень ЗЛП у векторній формі:

$$x_1\overrightarrow{A_1} + x_2\overrightarrow{A_2} + x_3\overrightarrow{A_3} + x_4\overrightarrow{A_4} + x_5\overrightarrow{A_5} = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_0} = \begin{pmatrix} 300 \\ 120 \\ 252 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{A_3}, \overrightarrow{A_4}, \overrightarrow{A_5}$ – одиничні та лінійно-незалежні, то вони утворюють базис трьохвимірного простору;

змінні які їм відповідають x_3, x_4, x_5 – базисні змінні, решта змінних x_1, x_2 – вільні змінні.

Прирівнявши вільні змінні до нуля з системи обмежень, одержимо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 300, x_4 = 120, x_5 = 252.$$

Отже, початковий опорний план

$$X_0 = (0;0;300;120;252),$$

йому відповідає початкове значення цільової функції:

$$Z_0 = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 252 = 0.$$

Подальший розв’язок оформимо у вигляді симплекс-таблиці.

2. Складемо симплексну таблицю (табл. 4.2):

Таблиця 4.2 – Симплексна таблиця

N	i	Ба-зис	$C_{баз}$	План	30	40	0	0	0	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	x_3	0	300	12	4	1	0	0	25	X_0 = (0;0;300;120;252)
	2	x_4	0	120	4	4	0	1	0	30	
	3	x_5	0	252	3	12	0	0	1	21	
	4	Z, Δ_j		0	-30	-40	0	0	0	$\Delta_j \le 0$ – план не оптимальний	
I	1	x_3	0	216	11	0	1	0	-1/3	19,6	X_1= (0;21;216;36;0)
	2	x_4	0	36	3	0	0	1	-1/3	12	
	3	x_2	40	21	1/4	1*	0	0	1/12	84	
	4	Z, Δ_j		840	-20	0	0	0	10/3	$\Delta_j \le 0$ – план не оптимальний	
II	1	x_3	0	84	0	0	1	-11/3	8/9		X_2= (12;18;84;0;0)
	2	x_1	30	12	1*	0	0	1/3	-1/9		
	3	x_2	40	18	0	1	0	-1/12	1/9		
	4	Z, Δ_j		1080	0	0	0	20/3	10/9	$\Delta_j \ge 0$ – план оптимальний	

Визначимо оціночний $(m+1)$ рядок на нульовій ітерації:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 300 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 252 = 0;$$

$$\Delta_1 = (0 \cdot 12 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3) - 30 = -30;$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 12) - 40 = -40;$$

$$\Delta_3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$

3. Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності. Оскільки в ньому – два від'ємні значення $\Delta_1 = -30$, $\Delta_2 = -40$, що суперечить умові оптимальності для задачі на max, то початковий опорний план $X_0 = (0;0;300;120;252)$ – неоптимальний.

4. Для переходу до нової ітерації симплексної таблиці визначимо напрямний елемент. Спочатку визначимо напрямний стовпчик. Оскільки серед від'ємних оцінок Δ_1, Δ_2 найбільша за абсолютною величиною $\Delta_2 = -40$, то другий стовпчик буде напрямним, позначимо його вертикальною стрілкою. З економічної точки зору, число -40 означає, що при включенні у план виробництва одної одиниці продукції В забезпечує збільшення прибутку на 40 тис. грн.

Для визначення напрямного рядка визначимо симплексне відношення:

$$\theta = \frac{b_i}{a_{ik}} : \ \theta_1 = \frac{300}{4} = 75; \theta_2 = \frac{120}{4} = 30; \theta_3 = \frac{252}{12} = 21$$

і виберемо серед знайдених значень найменше $\theta_3 = 21$, яке відповідає третьому рядку – напрямному, позначимо його горизонтальною стрілкою. На перетині напрямного стовпчика та напрямного рядка отримаємо напрямний елемент $a_{32} = 12.$

Отже, з базису виключаємо змінну x_5 і замість неї вводимо змінну x_2 з відповідним значенням $C_{баз} = 40$.

Будуємо нову ітерацію згідно методу Жордана-Гаусса.

У першій ітерації другий стовпчик записуємо як одиничний з 1^* замість напрямного елементу a_{32}, третій рядок утворимо з елементів третього рядка попередньої ітерації поділених на число $a_{32} = 12$. Інші елементи таблиці розраховуємо за правилом прямокутника:

$$\frac{300 \cdot 12 - 4 \cdot 252}{12} = 216; \quad \frac{12 \cdot 12 - 4 \cdot 3}{12} = 11; \quad \frac{0 \cdot 12 - 4 \cdot 1}{12} = -\frac{1}{3};$$

$$\frac{120 \cdot 12 - 4 \cdot 252}{12} = 36; \quad \frac{4 \cdot 12 - 4 \cdot 3}{12} = 3; \quad \frac{0 \cdot 12 - 4 \cdot 1}{12} = -\frac{1}{3};$$

$$\frac{0 \cdot 12 - (-40) \cdot 252}{12} = 840; \quad \frac{(-30) \cdot 12 + 40 \cdot 3}{12} = -20; \quad \frac{0 \cdot 12 + 40 \cdot 1}{12} = \frac{10}{3}$$

Враховуючи, що в напрямному рядку є нульові елементи, то стовпчики x_3 і x_4 переписуємо в наступну ітерацію без змін.

5. Одержаний опорний план знову перевіряємо на оптимальність. Оскільки на першій ітерації $\Delta_1 = -20 < 0$, то визначений опорний план $X_1 = (0;21;216;36;0)$ – також неоптимальний. Оцінка *-20* в оціночному рядку показує, що якщо буде запланований випуск однієї одиниці продукції А, то це забезпечить збільшення прибутку на 20 тис. грн.

Для напрямного стовпчика x_1 визначаємо симплексні відношення. Так як, $\min\theta = \min\left\{\frac{216}{11}; \frac{36}{3}; \frac{21}{1/4}\right\} = 12$, що відповідає другому рядку, то до базису вводимо вільну змінну x_1 замість x_4. Далі вибираємо як напрямний елемент $a_{21} = 3$ і будуємо наступну другу ітерацію симплекс-таблиці. Оскільки усі значення оціночного рядка другої ітерації $\Delta_j > 0 \; (j = \overline{1,5})$, то визначений опорний план $X_2 = (12;18;84;0;0)$– оптимальний.

Отже,

$$X_{max} = (12;18;84;0;0)$$

і йому відповідає оптимальне значення цільової функції

$$Z_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 + 0 \cdot 84 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1080,$$

що співпадає з результатами отриманими графічним методом.

Приклад 4.2

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$$

Розв'язання

1. Запишемо задачу лінійного програмування в канонічній формі та визначимо початковий опорний план. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові балансуючі змінні x_5, x_6, x_7:

$$Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,7}.$$

Запишемо систему обмежень задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$x_1\overrightarrow{A_1} + x_2\overrightarrow{A_2} + x_3\overrightarrow{A_3} + x_4\overrightarrow{A_4} + x_5\overrightarrow{A_5} + x_6\overrightarrow{A_6} + x_7\overrightarrow{A_7} = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{A_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_7} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_0} = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Система містить лише два одиничні вектори – $\overrightarrow{A_5}$ та $\overrightarrow{A_6}$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом $+1$ штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\overrightarrow{A_8}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Отримаємо розширену задачу лінійного програмування:

$$Z=8x_1+10x_2-5x_4+0x_5+0x_6+0x_7-Mx_8\to max;$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+2x_4+x_5=450;\\3x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_6=380;\\x_3-x_7+x_8=9;\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де $M-$ досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Прирівнявши вільні змінні до нуля з системи обмежень, одержимо значення базисних змінних:

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_7=0\Rightarrow x_5=450, x_6=380, x_8=9.$$

Отже, початковий опорний план

$$X_0=(0;0;0;;0;450;380;0;9),$$

йому відповідає початкове значення цільової функції:

$$Z=8\cdot 0+10\cdot 0+0\cdot 0-5\cdot 0+0\cdot 450+0\cdot 380+0\cdot 0-M\cdot 9=-9M.$$

Подальший розв’язок оформимо у вигляді симплекс-таблиці.

2. Складемо симплекс-таблицю (табл. 4.3):

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо:

$$Z_0=-9M, \Delta_1=-8, \Delta_2=-10, \Delta_3=-M, \Delta_4=5,$$
$$\Delta_5=0, \Delta_6=0, \Delta_7=M, \Delta_8=0.$$

Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оціночний рядок на два. У перший оціночний рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий - числа з коефіцієнтом M.

Таблиця 4.3 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	-5	0	0	0	– M	θ
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	1	x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
	2	x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
	3	x_7	-M	9	0	0	**1**	0	0	0	-1	1	9
	4	Z, Δ_j		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
	5			-9M	0	0	-M	0	0	0	M	0	
I	1	x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	138
	2	x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185,5
	3	x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
	4	Z, Δ_j		0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	
	5			0	0	0	0	0	0	0	0	M	
II	1	x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
	2	x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
	3	x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
	4	Z, Δ_j		1380	-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	
	5			0	0	0	0	0	0	0	0	Ь	
III	1	x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	
	2	x_1	8	57	1^*	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
	3	x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
	4	Z, Δ_j		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	
	5			0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі. Після нульової ітерації з базису виведена штучна змінна x_7.

Дальше розв’язування продовжуємо за алгоритмом симплексного методу.

Оптимальним планом задачі є вектор:

$$X_{max} = (57;100;9;0;0;0;0)$$

і йому відповідає оптимальне значення цільової функції

$$Z_{max} = 8 \cdot 57 + 10 \cdot 100 + 0 \cdot 9 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - M \cdot 0 = 1456.$$

Контрольні запитання

1. Для розв’язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
2. Суть алгоритму симплексного методу.
3. Сформулюйте умови оптимальності розв’язку задачі симплексним методом.
4. Як вибрати напрямний вектор-стовпець?
5. Як вибрати розв’язувальний елемент?
6. Суть методу Жордана–Гаусса.
7. Суть методу штучного базису.

Тема 5. Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв’язків лінійних оптимізаційних моделей

План

1. Історична довідка.
2. Поняття двоїстості. Правила побудови двоїстих задач.
3. Теореми двоїстості.
4. Економічна інтерпретація двоїстих задач.
5. Приклад побудови двоїстої задачі, визначення її оптимального плану та її економічний аналіз.

1. Історична довідка

Поняття двоїстості задач лінійного програмування має велике значення не лише в теоретичному плані, але й широко застосовується для обґрунтування та прийняття практичних рішень. Двоїстість у лінійному програмуванні була розроблена академіком Л. В. Канторовичем ще в 1939 році. У 1975 році Канторович і американський математик Т. Купманс за відкриття двоїстості та її застосування в економічних дослідженнях одержали Нобелівську премію. Значні теоретичні дослідження в цій галузі мали В. В. Новожилов, В. С. Нємчинов, А. Л. Лур’є, В. С. Михалевич, Ю. М. Ермолєв та інші вчені.

Двоїсті задачі мають чітку геометричну та економічну інтерпретацію. Теореми двоїстості широко використовуються в економічних дослідженнях. У 70-х роках у Радянському Союзі велась дискусія з приводу використання двоїстих оцінок в економіці. Економісти того часу недооцінювали цю важливу економічну категорію. Проблема полягала ще й у тому, що ціни в Радянському Союзі не були обґрунтованими, не враховувались реальні витрати живої та уречевленої праці, попит і пропозиція на продукцію. Радянські економісти не розуміли, що недефіцитні ресурси мають нульову оцінку.

2. Поняття двоїстості. Правила побудови двоїстих задач

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста***, що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду, а саме для задачі на максимум всі нерівності її системи обмежень привести до виду «$\le$», а для задачі на мінімум – до виду «$\ge$».

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge o,\ j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими **правилами**.

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

7. Якщо змінна x_j прямої задачі може приймати тільки додатні значення, то $j-$те обмеження в системі двоїстої задачі є нерівність виду «$\geq$». Якщо змінна x_j може приймати як додатні, так і від'ємне значення, та $j-$те обмеження в системі двоїстої задачі є рівняння.

Якщо $i-$те обмеження в системі прямої задачі є нерівність, то $i-$змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В противному випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач

Пряма задача	Двоїста задача
Симетричні	
$Z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j \to max;$ $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_i \to min;$ $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \ge c_j;$ $y_i \ge 0.$
$Z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j \to min;$ $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \ge b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum\limits_{i=1}^{m}b_iy_i \to max;$ $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \le c_j;$ $y_i \ge 0.$

Несиметричні

$Z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j \to max;$ $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum\limits_{j=1}^{m}b_iy_i \to min;$ $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \ge c_j;$ $y_i \in [-\infty; \infty].$
$Z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j \to min;$ $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = b_i;$ $x_j \ge 0.$	$F=\sum\limits_{j=1}^{m}b_iy_i \to max;$ $\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}y_i \le c_j;$ $y_i \in \left]-\infty; \infty\right[.$

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

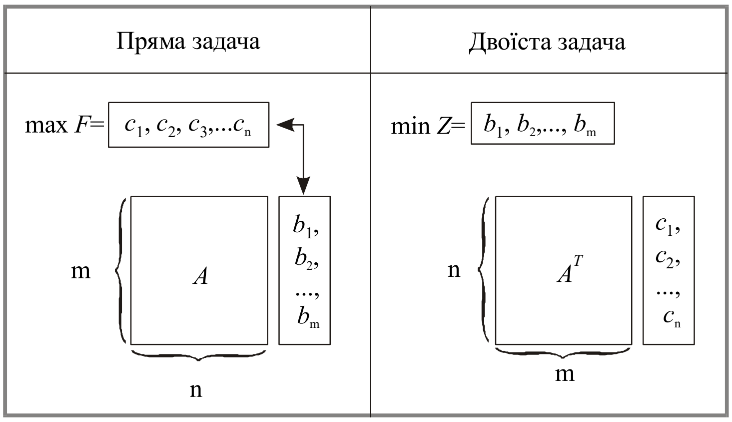


Рисунок 5.1 – Схема побудови двоїстої задачі до прямої

3. Теореми двоїстості

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості

Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\boldsymbol{max\,Z = min\,F}$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв'язків. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план $\boldsymbol{X^*}$, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі $\boldsymbol{Y^*}$ визначається зі співвідношення

$$\boldsymbol{Y^* = \vec{c}_{\text{баз}} D^{-1}},$$

де $\vec{\boldsymbol{c}}_{\text{баз}}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; $\boldsymbol{D^{-1}}$—матриця, обернена до матриці $\boldsymbol{D}$, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця $\boldsymbol{D^{-1}}$ завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв’язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості

Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі $i-$те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний $i-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо $i-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне $i-$те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості

Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Розв’язавши пряму задачу лінійного програмування симплекс-методом, можна побачити, що оптимальне значення $i-$двоїстої змінної дорівнює сумі оптимальної оцінки вектора, який входить в початковий базис і взятого з цільової функції прямої задачі коефіцієнтів біля невідомих з тим же індексом, що і у вектора.

Наприклад, якщо змінні x_3 i x_5 входять в початковий базис, то

$$y_1^{opt} = \Delta_3^{opt} + c_3^{opt}, y_2^{opt} = \Delta_5^{opt} + c_5^{opt},$$

тобто компоненти оптимального плану двоїстої задачі співпадають з елементами оціночного рядка стовпців одиничних векторів, якщо даний коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елементу цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$.

4. Економічна інтерпретація двоїстих задач

Економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач і проведення післяоптимізаційного аналізу розглянемо на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Для виробництва $\boldsymbol{n}$ видів продукції використовується $\boldsymbol{m}$ видів ресурсів, запаси яких обмежені значеннями $\boldsymbol{b_i}\left(\boldsymbol{i=\overline{1,\ m}}\right)$. Норма витрат кожного ресурсу на одиницю продукції становить $\boldsymbol{a_{ij}}\left(\boldsymbol{j=\overline{1,\ n};\ i=\overline{1,\ m}}\right)$. Ціна одиниці продукції $\boldsymbol{j}-$го виду дорівнює $\boldsymbol{c_j}\left(\boldsymbol{j=\overline{1,\ n}}\right)$.

Математична модель задачі має такий вигляд:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\rightarrow max;;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\quad\left(i=\overline{1,\ m}\right);$$

$$x_j\ge 0\quad\left(j=\overline{1,\ n}\right).$$

Пряма задача полягає у визначенні такого оптимального плану виробництва продукції $\boldsymbol{X^*=\left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right)}$, який дає найбільший дохід.

Двоїста задача до поставленої прямої буде така:

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\rightarrow min;$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j\quad\left(j=\overline{1,\ n}\right);$$

$$y_i\ge 0\quad\left(i=\overline{1,\ m}\right).$$

Економічний зміст двоїстої задачі полягає в наступному.

Визначити таку оптимальну систему двоїстих оцінок ресурсів $\boldsymbol{y_i}$, використовуваних для виробництва продукції, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Оскільки змінні двоїстої задачі означають цінність одиниці $\boldsymbol{i}-$го ресурсу, їх інколи ще називають ***тіньовою ціною відповідного ресурсу***.

Англійський термін *«shadow prices»* у літературі перекладають як *«оцінка»* або *«тіньова, неявна ціна».* Академік Л. В. Канторович назвав їх об'єктивно обумовленими оцінками відповідного ресурсу. За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно поділити на ***дефіцитні*** та ***недефіцитні*** залежно від того, повне чи часткове їх використання передбачене оптимальним планом прямої задачі. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний $i-$й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***. Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то $i-$й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***. У цьому разі величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться значення цільової функції Z, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю всіх ресурсів, які використовують для виробництва одиниці $j-$продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції (c_j), виготовляти продукцію не вигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна $x_j = 0$. Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Економічна інтерпретація двоїстих задач та аналіз економіко-математичних моделей на чутливість за допомогою теорії двоїстості дають змогу модифікувати оптимальний план задачі лінійного програмування відповідно до змін умов прямої задачі й дістати при цьому такі результати.

1. Зміна різних коефіцієнтів у прямій математичній моделі може вплинути на оптимальність і допустимість отриманого плану та привести до однієї з таких ситуацій:

– склад змінних та їх значення в оптимальному плані не змінюються;

– склад змінних залишається попереднім, але їх оптимальні значення змінюються;

– змінюються склад змінних та їх значення в оптимальному плані задачі.

2. Уведення додаткового обмеження в математичну модель задачі впливає на допустимість розв’язку і не може вплинути на поліпшення значення цільової функції.

3. Уведення нової змінної в математичну модель задачі впливає на оптимальність попереднього плану і не погіршує значення цільової функції.

5. Приклад побудови двоїстої задачі, визначення її оптимального плану та її економічний аналіз

Приклад 5.1

Розглянемо задачу лінійного програмування (Приклад 2.1, Приклад 4.1).

Розв’язання

1. Побудова двоїстої задачі лінійного програмування

Пряма задача

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max.$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, & |y_1 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, & |y_2 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. & |y_3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

де x_j – обсяг виробництва продукції j – го виду.

Пряма задача лінійного програмування задана в стандартному вигляді, тому використовуючи правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування, побудуємо відповідну двоїсту задачу.

Двоїста задача

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + \ 3y_3 \geq 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \geq 40. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

де y_i – оцінка одиниці i – го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$.

2. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування за 1 теоремою двоїстості

Використовуючи симплекс-таблицю (табл. 4.2), визначимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування за 1 теоремою двоїстості:

$$Y^* = Y_{min} = \vec{C}_{баз} D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(0 \cdot 1 + 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 \quad 0 \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) + 30 \cdot \frac{1}{3} + 40 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \quad 0 \cdot \frac{8}{9} + 30 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + 40 \cdot \frac{1}{9} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$F_{min} = 300 \cdot 0 + 120 \cdot \frac{20}{3} + 252 \cdot \frac{10}{9} = 1080.$$

3. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування за 2 теоремою двоїстості

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + \ 3y_3 \geq 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \geq 40. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

Визначимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування за 2 теоремою двоїстості.

Підставимо компоненти оптимального плану прямої задачі лінійного програмування $X_{max} = (12;18;84;0;0)$ в систему її обмежень:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

Отримаємо,

$$\begin{cases} 12 \cdot 12 + 4 \cdot 18 \le 300, \\ 4 \cdot 12 + 4 \cdot 18 \le 120, \\ 3 \cdot 12 + 12 \cdot 18 \le 252. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216 < 300 \quad \Rightarrow y_1 = 0, \\ 120 = 120, \\ 252 = 252. \end{cases}$$

Оскільки,

$$x_1 = 12 > 0 \Rightarrow 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 30,$$
$$x_2 = 18 > 0 \Rightarrow 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 = 40.$$

Розв’язавши відповідну систему рівнянь, одержимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 = 40, \\ y_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y_2 + 3y_3 = 30, \\ 4y_2 + 12y_3 = 40, \\ y_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = \dfrac{10}{9}, \\ y_2 = \dfrac{20}{3}, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$

Звідси, $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{20}{3} & \dfrac{10}{9} \end{pmatrix}$, зі значення цільової функції:

$$F_{min} = 300 \cdot 0 + 120 \cdot \frac{20}{3} + 252 \cdot \frac{10}{9} = 1080.$$

4. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \ge 40. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,3}.$$

1. Приведемо систему обмежень до системи нерівностей типу $"\le"$, помноживши всі обмеження системи на (-1):

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} -12y_1 - 4y_2 - \ 3y_3 \le -30, \\ -4y_1 - 4y_2 - 12y_3 \le -40. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,3}.$$

2. Для побудови початкового опорного плану приведемо одержану задачу до канонічного виду, ввівши до лівої частини додаткові балансуючі змінні y_4, y_5:

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 + 0y_4 + 0y_5 \to min$$

$$\begin{cases} -12y_1 - 4y_2 - \ 3y_3 + y_4 = -30, \\ -4y_1 - 4y_2 - 12y_3 + y_5 = -40. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,5}.$$

Запишемо систему обмежень ЗЛП у векторній формі:

$$y_1\vec{A}_1 + y_2\vec{A}_2 + y_3\vec{A}_3 + y_4\overline{A}_4 + y_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$,

$\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \end{pmatrix}$

Оскільки вектори $\overleftarrow{A}_4, \vec{A}_5 -$одиничні та лінійно-незалежні, то вони утворюють базис двохвимірного простору; змінні які їм відповідають $y_4, y_5 -$базисні змінні, решта змінних $y_1, y_2, y_3 -$вільні. Прирівнявши вільні змінні до нуля, одержимо значення базисних змінних:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow y_4 = -30, y_5 = -40$$

Отже, початковий опорний план $Y_0 = (0;0;0;-30;-40)$,
йому відповідає початкове значення цільової функції:

$$F_0 = 300 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 252 \cdot 0 + 0 \cdot (-30) + 0 \cdot (-40) = 0.$$

3. Подальший розв'язок оформимо у вигляді симплекс-таблиці (табл. 3.2):

Таблиця 3.2 – Таблиця двоїстого симплекс-методу

N	i	Базис	$C_{баз}$	План, P_0	300	120	252	0	0	Базисний опорний план
					y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
0	1	y_4	0	-30	-12	-4	-3	1	0	$Y_0=(0;0;0;-30;-40)$
	2	y_5	0	-40	-4	-4	$\boxed{-12}$	0	1	
	3	Z,Δ_j		0	-300	-120	-252	0	0	$\Delta_j \le 0$
		θ		$b_i<0$	$\frac{-300}{-4}=75$	$\frac{-120}{-4}=30$	$\frac{-252}{-12}=21$	–	–	План не оптимальний
I	1	y_4	0	-20	-11	$\boxed{-3}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$Y_1=\left(0;0;\frac{10}{3};-20;0\right)$
	2	y_3	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1^*	0	$-\frac{1}{12}$	
	3	Z,Δ_j		840	--216	-36	0	0	-21	$\Delta_j \le 0$
		θ		$b_i<0$	$\frac{-216}{-11}=19\frac{7}{11}$	$\frac{-36}{-3}=12$	–	–	$-21:\left(-\frac{1}{4}\right)=84$	План не оптимальний
II	1	y_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{11}{3}$	1^*	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$Y_2=\left(0;\frac{20}{3};\frac{10}{9};0;0\right)$
	2	y_3	30	$\frac{10}{9}$	$-\frac{8}{9}$	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	
	3	Z,Δ_j		1080	-84	0	0	-12	-18	$\Delta_j \le 0$
				$b_i \ge 0$						План оптимальний

Оскільки в оціночному $\boldsymbol{(m+1)}$ рядку нульової ітерації: $\boldsymbol{-300;-120;-252;0;0}$ всі $\boldsymbol{\Delta_j \le 0}$ для задачі на $\boldsymbol{min}$ ($\boldsymbol{\Delta_j \ge 0}$ для задачі на $\boldsymbol{max}$), то $\boldsymbol{Y_0 = (0;0;0;-30;-40)}$ є ***псевдоплан***. Серед його компонент є від'ємні, тому $\boldsymbol{Y_0}$ – не є розв'язком задачі.

Переходимо до нового псевдоплану. Вибираємо найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення стовпця «План», що вказує на напрямний рядок: $\boldsymbol{max\{|b_i|\} = max\{|-30|;|-40|\} = 40}$.

Звідси, напрямним буде другий рядок і з базису виведемо змінну $\boldsymbol{y_5}$. Для визначення змінної, яку необхідно ввести у базис, визначимо найменше симплексне відношення, що вказує на напрямний стовпчик:

$$\boldsymbol{\min_{a_{ij}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right) = \min\left(\frac{-300}{-4};\frac{-120}{-4};\frac{-252}{-12}\right) = \min(75;30;21) = 21}.$$

Звідси, напрямним буде третій стовпчик і змінну $\boldsymbol{y_3}$ введемо у базис. Використовуючи напрямний елемент $\boldsymbol{a_{23} = -12}$, за алгоритмом перетворень Жордана-Гаусса, побудуємо наступну ітерацію.

Новий псевдоплан $\boldsymbol{Y_1 = \left(0;0;\frac{10}{3};-20;0\right)}$ не є оптимальним, оскільки містить від'ємне число $\boldsymbol{b_1 = -20}$. Серед елементів першого рядка є від'ємні числа, тому, перейдемо до нового псевдоплану в якому виключимо змінну $\boldsymbol{y_4}$.

Визначимо найменше симплексне відношення:

$$\boldsymbol{\min_{a_{ij}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right) = \min\left(\frac{-216}{-11};\frac{-36}{-3};-21:\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \min\left(19\frac{7}{11};12;84\right) = 12}$$

і введемо змінну $\boldsymbol{y_2}$ до базису.

Використовуючи напрямний елемент $\boldsymbol{a_{12} = -3}$, за алгоритмом перетворень Жордана-Гаусса, побудуємо наступну ітерацію.

З таблиці 3.2 одержимо план $Y_2 = \left(0; \frac{20}{3}; \frac{10}{9}; 0; 0\right)$, у якому немає від'ємних компонентів, тому він – ***оптимальний***.

Отже,

$$Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix},$$

йому відповідає значення цільової функції%

$$F_{min} = 300 \cdot 0 + 120 \cdot \frac{20}{3} + 252 \cdot \frac{10}{9} = 1080.$$

5. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

Перевіримо розрахунки засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel* (рис. 5.2):

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y3			
16	Значення змінних	0	6 2/3	1 1/9			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	3	30	>=	30
20	2.	4	4	12	40	>=	40
21						Напрям	
22	**Цільова функція**	**300**	**120**	**252**	**1080**	min	

Рисунок 5.2 – Оптимальний план двоїстої задачі

Відповідь:

$$Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}, \; F_{min} = 1080.$$

6. Економічний аналіз на основі оптимального плану прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Виконаємо економічний аналіз заданої задачі (Приклад 2.1, Приклад 4.1). Для цього проаналізуємо отримані оптимальні плани прямої та двоїстої задач та симплекс-таблицю (табл. 4.2).

6.1. Економічний аналіз на основі оптимального плану двоїстої задачі

План двоїстої задачі $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$ дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Оскільки, $y_2 = \frac{20}{3}$ та $y_3 = \frac{10}{9}$ відмінні від нуля, то ресурси ***2*** та ***3*** використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_1 = 0$, тому відповідний ***1*** вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $F_{min} = 1080$ ум. од.

6.2. Статус ресурсів прямої задачі

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами.

Перший — підстановкою оптимального плану прямої задачі $X_{max} = (12;18;84;0;0)$ у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний:

$$\begin{cases} 12\cdot 12 + 4\cdot 18 \le 300, \\ 4\cdot 12 + 4\cdot 18 \le 120, \\ 3\cdot 12 + 12\cdot 18 \le 252. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216 < 300, \\ 120 = 120, \\ 252 = 252. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ресурс1 - недефіцитний, \\ ресурс2 - дефіцитний, \\ ресурс3 - дефіцитний. \end{cases}$$

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний:

$$\begin{cases} x_3 = 84, \\ x_4 = 0, \Rightarrow \\ x_5 = 0. \end{cases} \begin{cases} ресурс1 - недефіцитний, \\ ресурс2 - дефіцитний, \\ ресурс3 - дефіцитний. \end{cases}$$

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів $i-$го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним**.** Якщо $y_i = 0$, то $i-$й ресурс недефіцитний:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \dfrac{20}{3}, \Rightarrow \\ y_3 = \dfrac{10}{9}. \end{cases} \begin{cases} ресурс1 - недефіцитний, \\ ресурс2 - дефіцитний, \\ ресурс3 - дефіцитний. \end{cases}$$

6.3. Інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів

З симплекс-таблиці (табл. 2.2 ЛР № 2) бачимо, що якщо запас другого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю $\left(b_2 = 120 + 1 = 121\right)$, то цільова функція Z_{max} збільшиться за інших однакових умов на $y_2 = \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}$ ум. од. і становитиме $Z_{max} = 1080 + 6\dfrac{2}{3} = 1086\dfrac{2}{3}$ ум. од.

Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика $"x_4"$ останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці $y_2 = \dfrac{20}{3}$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_3^* зменшиться на $\dfrac{11}{3}$, змінної x_1^* — збільшиться на $\dfrac{1}{3}$, а x_2^* – зменшиться на $\dfrac{1}{12}$.

При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = \left(12\frac{1}{3};17\frac{11}{12};80\frac{1}{3};0;0\right).$$

Отже, збільшення запасу другого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції A та падіння виробництва продукції B, а обсяг використання першого ресурсу зменшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде

$$Z_{max} = 30\cdot 12\frac{1}{3} + 40\cdot 17\frac{11}{12} = 30\cdot\frac{37}{3} + 40\cdot\frac{215}{12} = \frac{13040}{12} = 1086\frac{2}{3},$$

тобто зросте на $y_2 = 6\frac{2}{3}$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного третього ресурсу за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю $(b_3 = 252+1 = 253)$. Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика $"x_5"$ останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$, можна записати новий оптимальний план.

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_3^* збільшиться на $\frac{8}{9}$, змінної x_1^* — зменшиться на $\frac{1}{9}$, а x_2^* – збільшиться на $\frac{1}{9}$. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = \left(11\frac{8}{9};18\frac{1}{9};84\frac{8}{9};0;0\right).$$

$$Z_{max} = 30\cdot 11\frac{8}{9} + 40\cdot 18\frac{1}{9} = 30\cdot\frac{107}{9} + 40\cdot\frac{163}{9} = \frac{9730}{9} = 1081\frac{1}{9}.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на $y_3 = 1\frac{1}{9}$ у.о. за рахунок зменшення випуску продукції A, але збільшення виробництва продукції B. При цьому обсяг використання першого ресурсу збільшується.

6.4. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві

Оцінка рентабельності продукції виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо оптимальний план двоїстої задачі $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$ у систему обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \geq 40. \end{cases}$$

Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) нерівності перевищує ціну цієї продукції (права частина нерівності), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

Отримаємо, що

$$\begin{cases} 12 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20}{3} + 3 \cdot \frac{10}{9} \geq 30, \\ 4 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20}{3} + 12 \cdot \frac{10}{9} \geq 40. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{270}{9} = 30, \\ \frac{360}{9} = 40. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} прод.\ A - рентабельна \\ прод.\ B - рентабельна \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю $y_i = 0$, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Для заданої задачі додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оціночному рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках $"x_1" - "x_2"$. Їх оптимальні значення $y_3 = 0;\ y_4 = 0$, тому продукція $A\ i\ B$ –рентабельна.

Приклад 5.2

До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту:

$$Z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \to min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \le 8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Розв'язання

Пряму задачу зведемо до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція Z задана на мінімум і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «$\ge$». Тому друге обмеження задачі помножити на (–1), при цьому знак нерівності змінимо на протилежний.

Отримаємо:

$$Z = x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 5x_5 \to min;$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 = 20; \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 \ge -8; \\ 8x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 \ge -16, \end{cases} \left|\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array}\right.$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = 20y_1 - 8y_2 - 16y_3 \to max;$$

$$\begin{cases} 5y_1 - 1y_2 + 8y_3 \le 1; \\ -4y_1 + 1y_2 + 7y_3 \le 6; \\ 13y_1 - 5y_2 - 1y_3 \le -7; \\ -2y_1 + 1y_2 + 2y_3 \le 1 \\ 1y_1 - 1y_2 - 9y_3 \le 5, \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty;\infty\right[,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Оскільки перше обмеження вихідної задачі є рівнянням, то відповідна йому змінна двоїстої задачі y_1 може набувати як додатного, так і від'ємного значення.

Приклад 5.3

До даної задачі лінійного програмування записати двоїсту:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція Z задана на максимум і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «≤». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1) та знак нерівності змінимо на протилежний.

Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1; & \bigg| y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, & \bigg| y_2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Двоїста задача:

$$F = -1y_1 + 5y_2 \to min;$$

$$\begin{cases} -1y_1 + 2y_2 \geq -5; \\ -1y_1 + 3y_2 \geq 5, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Контрольні запитання

1. У чому сутність теорії двоїстості у лінійному програмуванні?

2. Розробіть просту економіко-математичну модель. Запишіть до неї двоїсту. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.

3. Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які – несиметричними? Чим вони відрізняються?

4. Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?

5. Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

6. Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

7. Сформулюйте третю теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.

8. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

9. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?

10. Запишіть всі можливі види прямих і двоїстих задач.

11. Дайте економічну інтерпретацію прямої та двоїстої задач.

12. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?

13. Як визначити, що продукція є рентабельна (нерентабельна)?

14. Як впливає на оптимальний план введення додаткового обмеження?

15. Як впливає на оптимальний план введення нової змінної?

16. Як визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів?

17. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?

18. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовляється на підприємстві?

19. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?

20. Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції?

Тема 6. Транспортна задача. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

План

1. Історична довідка.
2. Постановка транспортної задачі.
3. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі.
4. Приклад побудови оптимального плану транспортної задачі.

1. Історична довідка

Транспортна задача належить до розподільчих задач лінійного програмування, тому модель транспортної задачі можна використати для розв'язування задач, які не мають нічого спільного з транспортуванням вантажів. Наприклад, задачі розміщення сільськогосподарських культур за ділянками землі різної якості, оптимальне закріплення за верстатами операцій з обробки деталей, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо.

У класичній транспортній задачі, як правило, критерієм оптимальності є мінімізація транспортних витрат, тобто розв'язується задача на мінімум. Проте на практиці можливі випадки, коли необхідно знайти максимум цільової функції. Наприклад, необхідно розподілити робітників (верстати) між окремими видами робіт, щоб отримати максимальну сумарну продуктивність праці. Подібна ситуація зустрічається під час оптимізації розміщення сільськогосподарських культур за ділянками землі різної якості. У цьому разі критерієм оптимальності є максимізація вартості вирощеної продукції.

У класичній транспортній задачі припускається, що витрати на транспортування лінійно залежать від обсягів перевезень. Але практично ця умова порушується, тобто такі зв'язки є нелінійними, стохастичними тощо. Особливої уваги заслуговує така транспортна задача, в якій необхідно мінімізувати час виконання заданих обсягів робіт. Наприклад, перевезення сировини та продукції, яка швидко псується. Цей критерій часто використовується під час оптимізації військових операцій, виконання сільськогосподарських робіт (збір урожаю) тощо.

2. Постановка транспортної задачі

Транспортна задача – це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників ($A_1, A_2, ..., A_m$) до споживачів ($B_1, B_2, ..., B_n$) (або мінімальна вартість перевезення всього товару, або ж мінімальний час його перевезення). Відомі вартості перевезень одиниці продукції від кожного $i-$го постачальника до кожного $j-$го споживача, що подані як елементи матриці (c_{ij}).

Вихідні дані транспортної задачі заносять в спеціальну таблицю, яку називають ***транспортною таблицею*** (табл. 6.1), в якій постачальники продукції записуються в рядках, а споживачі – в стовпчиках.

Таблиця 6.1 – Транспортна таблиця

Постачальники A_i та запаси продукції	**Споживачі B_j та попит на продукцію**			
	$B_1 = b_1$	$B_2 = b_2$	…	$B_n = b_n$
$A_1 = a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
$A_2 = a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
$A_3 = a_3$	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	…	c_{3n} x_{3n}
…	…	…	…	…
$A_m = a_m$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву ***транспортної задачі за критерієм вартості перевезень.***

Мають виконуватися умови:

- сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \ldots\ldots + \\ + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to min. \end{aligned}$$

- сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного $i-$го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1; \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m; \end{cases}$$

- сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному $j-$му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1; \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n; \end{cases}$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$.

Отже, ***математична модель транспортної задачі*** має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min; \qquad (6.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (6.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (6.3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right), \tag{6.4}$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i – го постачальника до j – го споживача;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i – го постачальника до j – го споживача (тариф перевезення);

a_i – запаси продукції i – го постачальника; b_j – попит на продукцію j – го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{6.5}$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (6.2)–(6.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $X = \left(x_{ij}\right) \left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}_{ij}^{\,*}\right) \left(i = \overline{1,m};\; j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (6.1) набуває найменшого значення.

Теорема *(умова існування розв'язку транспортної задачі)*.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

3. Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування більш ефективний метод – ***метод потенціалів***, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму.

Алгоритм методу потенціалів

1. Визначення типу транспортної задачі (збалансована чи незбалансована).

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (6.5) виявилося, що транспортна задача є незбалансованою, то її необхідно збалансувати. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до збалансованого виду задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує декілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля.

Метод північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці x_{11}, в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1, не враховуючи при цьому їх вартості перевезень. Далі переходять до наступної клітинки в цьому ж рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розташовані по діагоналі таблиці.

Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Процес відшукання оптимального плану після початкового опорного, визначеного методом північно-західного кута, пов’язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, тому його реалізують на ЕОМ.

Метод мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції c_{ij}. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Якщо розмірність задачі досить велика, то перебір за методом мінімальної вартості ускладнюється. В такому разі спростити пошук клітин з найменшими вартостями можна, застосовуючи метод подвійної переваги.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць декілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Даний метод побудови опорного плану враховує не лише маршрути з мінімальними витратами перевезень продукції, але й співвідношення витрат у рядку чи стовпчику, тобто розраховується наскільки, може збільшитися вартість постачання на наступних кроках процедури, якщо не здійснити на поточному кроці постачання в клітину з мінімальною вартістю.

Метод апроксимації Фогеля дає змогу особливо для задач великих розмірностей скласти найкращий опорний план.

В транспортній задачі з $\boldsymbol{m}-$постачальниками і $\boldsymbol{n}-$споживачами кількість невідомих $\boldsymbol{x_{ij} = m \cdot n}$, а кількість рівнянь в (6.2)–(6.4) повинна дорівнювати $\boldsymbol{m+n}$.

Опорним планом транспортної задачі називається такий допустимий її план, що містить не більш ніж $\boldsymbol{m+n-1}$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю.

Якщо їх кількість дорівнює $\boldsymbol{m+n-1}$, то такий опорний план – невироджений, якщо менша ніж $\boldsymbol{m+n-1}$ –вироджений.

Якщо умови транспортної задачі і її опорний план записані у вигляді табл. 6.1, то клітинки, в яких $\boldsymbol{x_{ij} > 0}$ (ненульові значення поставок), називаються заповненими, всі інші – пустими. Заповнені клітини відповідають базисним змінним і для невиродженого плану їх кількість дорівнює $\boldsymbol{m+n-1}$.

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці. Якщо ламана лінія, що утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не є вершинами циклу.

Ознакою опорності плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $\boldsymbol{m+n-1}$ клітинок, тобто він повинен бути ***невиродженим опорним планом***. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $\boldsymbol{m+n-1}$, то початковий план побудовано неправильно і він є ***неопорним.*** Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $\boldsymbol{m+n-1}$, то він – ***вироджений***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану, тобто щоб не утворилося циклу.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (*умова оптимальності опорного плану транспортної задачі*). Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконується умови

$$1)\ u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0,$$

$$2)\ u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці, кількість яких дорівнює $m + n - 1$, а кількість невідомих – $m + n$. Кількість рівнянь на одне менша, ніж невідомих, тому система є невизначеною, і одному з потенціалів надають нульове значення. Після цього всі інші потенціали розраховують однозначно. Правильність обчислення потенціалів перевіряється згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = z.$$

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j \ge c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $max\left\{\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}\right\}$, яке записують в лівому нижньому куточку відповідної клітинки. Якщо декілька однакових порушень Δ_{ij} , то вибираємо ту клітинку, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Для вибраної порожньої клітинки, яку називають ***потенціальною клітинкою*** будують ***цикл перерахування*** та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+», і віднімають від чисел у клітинках зі знаком «–».

Отже, потенціальна клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Якщо знайдений опорний план є оптимальним, але в останній транспортній таблиці серед значень Δ_{ij} крім від'ємних є також нульові, то існують альтернативні опорні плани, які можна знайти взявши відповідні клітинки в яких $\Delta_{ij} = 0$ як потенціальні і виконати цикл перерахування.

4. Приклад побудови оптимального плану транспортної задачі

Приклад 6.1

Для будівництва 4 доріг використовується гравій із 3 кар'єрів із запасами 120, 280 та 160 ум. од. Для будівництва кожної з доріг необхідно 130, 220, 60 та 70 ум.од. гравію. Тарифи перевезення 1 ум. од гравію із кожного кар'єру до кожної з доріг, що будується задані матрицею перевезення $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Скласти такий план перевезення гравію, при якому попит в ньому був би задоволений при найменшій загальній вартості перевезення.

Розв'язання

1. Побудова математичної моделі транспортної задачі

Побудуємо математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij} – кількість продукції (гравію), що перевозиться від $i-$го постачальника (кар'єра) до $j-$го споживача (дороги) $(i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4})$; c_{ij} – вартість (тарифи) перевезення одиниці продукції від $i-$го постачальника до $j-$го споживача задані у матриці C; a_i –- запаси продукції $i-$го постачальника; b_j – попит на продукцію $j-$го споживача.

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = 120+280+160=560,$

а

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 130+220+60+70=480,$$

то транспортна задача є незбалансованою.

Щоб отримати збалансовану модель, введемо додаткового споживача B_5 з попитом $b_5 = 560-480 = 80$ ум. од. Вартість перевезення 1 ум. од. продукції до споживача B_5 беремо нуль.

Побудуємо транспортну таблицю:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				
	$B_1=130$	$B_2=220$	$B_3=60$	$B_4=70$	$B_5=80$
$A_1=120$	1 x_{11}	7 x_{12}	9 x_{13}	5 x_{14}	0 x_{15}
$A_2=280$	4 x_{21}	2 x_{22}	6 x_{23}	8 x_{24}	0 x_{25}
$A_3=160$	3 x_{31}	8 x_{32}	1 x_{33}	2 x_{34}	0 x_{35}

Тоді, математична модель транспортної задачі запишеться таким чином:

$$Z = 1x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 0x_{15} +$$
$$+ 4x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + 0x_{25} +$$
$$+ 3x_{31} + 8x_{32} + 1x_{33} + 2x_{34} + 0x_{35} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 280, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 80. \end{cases}$$
$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1,3}, \; j = \overline{1,5}.$$

Економічний зміст перших трьох обмежень полягає в тому, що вся продукція від кожного постачальника має вивозитися до споживачів повністю, а **економічний зміст інших п'яти обмежень** полягає в тому, що вся продукція, що надходить до кожного споживача, має повністю задовольняти його попит.

2. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом «північно-західного» кута

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**

За допомогою методу північно-західного кута побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі. Послідовність заповнення клітинок:

120 – 10 – 220 –50 – 10 –70 –80.

Відповідне значення цільової функції для нього:

$$Z = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 6 \cdot 50 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 80 = 1050.$$

3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом мінімальної вартості

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40**	7	9	5	0 **80**
$A_2 = 280$	4 **60**	2 **220**	6	8	0
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60**	2 **70**	0

За допомогою методу мінімальної вартості побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі. Послідовність заповнення клітинок:

80 – 40 – 60 –220 – 70 – 30 –60

Відповідне значення цільової функції для нього:

$$Z = 1 \cdot 40 + 4 \cdot 60 + 3 \cdot 30 + 2 \cdot 220 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 80 = 1010.$$

4. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом подвійної вартості

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40** V	7	9	5	0 **80** VV
$A_2 = 280$	4 **60**	2 **220** V	6	8	0 VV
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60** V	2 **70** V	0 VV

За допомогою методу подвійної вартості побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі. Послідовність заповнення клітинок:

80 – 40 – 220 –60 – 70 – 30 –60

Відповідне значення цільової функції для нього:

$$Z = 1\cdot 40 + 4\cdot 60 + 3\cdot 30 + 2\cdot 220 + 1\cdot 60 + 2\cdot 70 + 0\cdot 80 = 1010.$$

5. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля

<table>
<tr><td rowspan="2">Постачальники, A_i</td><td colspan="5">Споживачі, B_j</td><td rowspan="2">Різниці для рядків</td></tr>
<tr><td>$B_1 = 130$</td><td>$B_2 = 220$</td><td>$B_3 = 60$</td><td>$B_4 = 70$</td><td>$B_5 = 80$</td></tr>
<tr><td>$A_1 = 120$</td><td>1
120</td><td>7</td><td>9</td><td>5</td><td>0</td><td>1,1,1,1,1,1,1</td></tr>
<tr><td>$A_2 = 280$</td><td>4</td><td>2
220</td><td>6</td><td>8</td><td>0
60</td><td>2,2,**4,–,–,–,–**</td></tr>
<tr><td>$A_3 = 160$</td><td>3
10</td><td>8</td><td>1
60</td><td>2
70</td><td>0
20</td><td>1, 2,2,2,**3,5,–**</td></tr>
<tr><td>Різниці для стовпців</td><td>2
2
2
2
2
2</td><td>5
5
–
–
–
–</td><td>**5**
–
–
–
–
–</td><td>3
3
3
3
–
–</td><td>0
0
0
0
0
–</td><td></td></tr>
</table>

За допомогою методу Фогеля побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі. Послідовність заповнення клітинок:

60 – 220 – 60 –70 – 20 – 10 –120

Відповідне значення цільової функції для нього:

$$Z = 1\cdot 120 + 3\cdot 10 + 2\cdot 220 + 1\cdot 60 + 2\cdot 70 + 0\cdot 60 + 0\cdot 20 = 790.$$

6. Метод потенціалів визначення оптимального плану транспортної задачі

Розглянемо початковий опорний план транспортної задачі, наприклад, що був одержаний методом «північно-західного» кута:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_1 = 1050$

Визначимо початкове значення цільової функції

$$Z_1 = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 6 \cdot 50 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 80 = 1050.$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок 7, то перший опорний план невироджений.

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j. Згідно 1 умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = 3 \\ u_3 = -2 \\ v_4 = 4 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

Одержана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо візьмемо довільне число, наприклад, $u_1 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються. Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0\cdot 120+3\cdot 280+(-2)\cdot 160+1\cdot 130+(-1)\cdot 220+3\cdot 60+4\cdot 70+2\cdot 80=1050$$

Перевіримо виконання 2 умови оптимальності $u_i+v_j \le c_{ij},\ x_{ij}=0$ для незаповнених клітинок:

$$A_iB_j: u_i+v_j \qquad c_{ij}, \qquad \Delta_{ij}=(u_i+v_j)-c_{ij}$$

$$A_1B_2: u_1+v_2=0+(-1) = -1<7, \quad \Delta_{12}=-1-7=-8$$

$$A_1B_3: u_1+v_3=0+3 = 3<9, \quad \Delta_{13}=3-9=-6$$

$$A_1B_4: u_1+v_4=0+4 = 4<5, \quad \Delta_{14}=4-5=-1$$

$$A_1B_5: u_1+v_5=0+2 = 2>0, \quad \Delta_{15}=2-0=2 \quad >0$$

$$A_2B_4: u_2+v_4=3+4 = 7<8, \quad \Delta_{24}=7-8=-1$$

$$A_2B_5: u_2+v_5=3+2 = 5>0, \quad \Delta_{25}=5-0=5 \quad >0$$

$$A_3B_1: u_3+v_1=-2+1 = -1<3, \quad \Delta_{31}=-1-3=-4$$

$$A_3B_2: u_3+v_2=-2+(-1)=-3<8, \quad \Delta_{32}=-3-8=-11$$

Перший опорний план неоптимальний, оскільки існують значення $\Delta_{ij}>0$. Визначимо найбільше порушення $max\{\Delta_{ij}=(u_i+v_j)-c_{ij}\}$, яке записуємо в лівому нижньому куточку відповідної потенціальної клітинки:

$$max\{\Delta_{15}=2;\Delta_{25}=5\}=\Delta_{25}.$$

Для вибраної порожньої клітинки A_2B_5, яку називають потенціальною клітинкою будуємо цикл перерахування та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j					Потенціали, u_i
	$B_1=130$	$B_2=220$	$B_3=60$	$B_4=70$	$B_5=80$	
$A_1=120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1=0$
$A_2=280$	4 **10**	2 **220**	− 6 **50**	8	+ 0 $\boxed{5}$	$u_2=3$
$A_3=160$	3	8	+ 1 **10**	2 **70**	− 0 **80**	$u_3=-2$
Потенціали, v_j	$v_1=1$	$v_2=-1$	$v_3=3$	$v_4=4$	$v_5=1$	$Z_1=1050$

В результаті отримаємо новий опорний план:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6	8	0 **50**	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1 **60**	2 **70**	0 **30**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_2 = 800$

$$Z_2 = 1\cdot 120 + 4\cdot 10 + 2\cdot 220 + 0\cdot 50 + 1\cdot 60 + 2\cdot 70 + 0\cdot 30 = 800.$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок 7, то другий опорний план невироджений.

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j. Згідно 1 умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_5 = -3 \\ u_3 = 3 \\ v_4 = -1 \\ v_3 = -2 \end{cases}$$

Перевіримо правильність обчислення потенціалів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0 \cdot 120 + 3 \cdot 280 + 3 \cdot 160 + 1 \cdot 130 + (-1) \cdot 220 + (-2) \cdot 60 + (-1) \cdot 70 + (-3) \cdot 80 = 800$$

Перевіримо виконання 2 умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}, x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$$A_i B_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \quad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$$

$$A_1 B_2 : u_1 + v_2 = 0 + (-1) \; = -1 < 7, \quad \Delta_{12} = -1 - 7 = -8$$

$$A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-2) \; = -2 < 9, \quad \Delta_{13} = -2 - 9 = -11$$

$$A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + (-1) \; = -1 < 5, \quad \Delta_{14} = -1 - 5 = -6$$

$$A_1 B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-3) \; = -3 < 0, \quad \Delta_{15} = -3 - 0 = -3$$

$$A_2 B_3 : u_2 + v_3 = 3 + (-2) \; = 1 < 6, \quad \Delta_{23} = 1 - 6 = -5$$

$$A_2 B_4 : u_2 + v_4 = 3 + (-1) \; = 2 < 8, \quad \Delta_{25} = 2 - 8 = -6$$

$$A_3 B_1 : u_3 + v_1 = 3 + 1 \; = 4 > 3, \quad \Delta_{31} = 4 - 3 = 1 \; > \; 0$$

$$A_3 B_2 : u_3 + v_2 = 3 + (-1) \; = 2 < 8, \quad \Delta_{32} = 2 - 8 = -6$$

Другий опорний план неоптимальний, оскільки $\Delta_{31} = 1 > 0$.

Для вибраної потенціальної порожньої клітинки $A_3 B_1$ будуємо цикл перерахування та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу:

Постачальники, A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1 = 0$
$A_2 = 280$	− 4 **10**	2 **220**	6	8	+ 0 **50**	$u_2 = 3$
$A_3 = 160$	+ 3 1	8	1 **60**	2 **70**	− 0 **30**	$u_3 = -2$
Потенціали, v_i	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$Z_2 = 800$

В результаті отримаємо новий опорний план:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j					Потенціали, u_i
	$B_1=130$	$B_2=220$	$B_3=60$	$B_4=70$	$B_5=80$	
$A_1=120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2=280$	4	2 **220**	6	8	0 **60**	u_2
$A_3=160$	3 **10**	8	1 **60**	2 **70**	0 **20**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_3=790$

$$Z_3=1\cdot 120+2\cdot 220+0\cdot 60+3\cdot 10+1\cdot 60+2\cdot 70+0\cdot 20=790.$$

Оскільки $m=3, n=5,\ m+n-1=3+5-1=7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок 7, то новий опорний план невироджений.

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j. Згідно 1 умови оптимальності $u_i+v_j=c_{ij},\ x_{ij}>0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i+v_j=c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці:

$$\begin{cases} u_1+v_1=1 \\ u_2+v_2=2 \\ u_2+v_5=0 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_3=1 \\ u_3+v_4=2 \\ u_3+v_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=0 \\ v_1=1 \\ u_3=2 \\ v_3=-1 \\ v_4=0 \\ v_5=-2 \\ u_2=2 \\ v_2=0 \end{cases}$$

Перевіримо правильність обчислення потенціалів:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i+\sum_{j=1}^{n} b_j v_j=Z$$

$$0\cdot 120+2\cdot 280+2\cdot 160+1\cdot 130+0\cdot 220+(-1)\cdot 60+0\cdot 70+(-2)\cdot 80=790$$

Перевіримо виконання 2 умови оптимальності $u_i+v_j\le c_{ij},\ x_{ij}=0$ для незаповнених клітинок:

$$A_iB_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \quad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$$

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 0 \qquad = 0 < 7, \quad \Delta_{12} = 0 - 7 = -7$$

$$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-1) \quad = -1 < 9, \; \Delta_{13} = -1 - 9 = -10$$

$$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 0 \qquad = 0 < 5, \quad \Delta_{14} = 0 - 5 = -5$$

$$A_1B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-2) \quad = -2 < 0, \; \Delta_{15} = -2 - 0 = -2$$

$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 2 + 1 \qquad = 3 < 4, \quad \Delta_{23} = \; 3 - 4 = -1$$

$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = 2 + (-1) \quad = 1 < 6, \quad \Delta_{25} = \; 1 - 6 = -5$$

$$A_2B_4 : u_2 + v_4 = 2 + 0 \qquad = 2 < 8, \quad \Delta_{31} = \; 2 - 8 = -5$$

$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 0 \qquad = 2 < 8, \quad \Delta_{32} = \; 2 - 8 = -6$$

Третій опорний план оптимальний, оскільки всі умови оптимальності виконуються ($\Delta_{ij} < 0$).

Отже, оптимальний план має вигляд:

$$X^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 & 60 \\ 10 & 0 & 60 & 70 & 20 \end{pmatrix},$$

йому відповідає оптимальне (мінімальне) значення цільової функції $Z_{min} = 790$. При цьому залишаються не використанні 60 ум. од. у 2 постачальника і 20 ум. од у 3 постачальника.

Для зменшення кількості розрахунків рекомендується після знаходження початкового опорного плану транспортної задачі різними методами залишити план з найменшим значенням цільової функції і до нього застосувати метод потенціалів.

7. Визначення оптимального плану транспортної задачі засобами оптимізації Microsoft Excel

1. Використовуючи надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЙ» визначимо оптимальний план транспортної задачі.

Для її розв’язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel. Вводимо вихідні дані задачі: матрицю тарифів (C21:G23), матрицю-стовпчик запасів (J27:J29), матрицю-рядок попиту (C33:G50), формули для перевірки збалансованості задачі

(J32, I33). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв’язок задачі (C27:G29), формули для обчислення запасів постачальників (H27:H29), формули для обчислення попиту споживачів (C31:G31), формулу цільової функції (H23) (рис. 6.1):

H23 fx =СУММПРОИЗВ(C21:G23;C27:G29)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5			
21		X1j	1	7	9	5	0			
22		X2j	4	2	6	8	0	ЦФ	Напрям	
23		X3j	3	8	1	2	0	=СУММПРОИЗВ(C21:G23;C27:G29)	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						=СУММ(C27:G27)	=	120
28		X2j						=СУММ(C28:G28)	=	280
29		X3j						=СУММ(C29:G29)	=	160
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	=СУММ(C27:C29)	=СУММ(D27:D29)	=СУММ(E27:E29)	=СУММ(F27:F29)	=СУММ(G27:G29)			
32		Знак	=	=	=		=			=СУММ(J27:J29)
33	Попит	Права частина	130	220	60	70	80		=СУММ(C33:G33)	Баланс

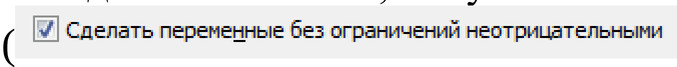
Рисунок 6.1 – Введення вихідних даних та розрахункових формул

2. В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання транспортної задачі (рис. 6.2):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5			
21		X1j	1	7	9	5	0			
22		X2j	4	2	6	8	0	ЦФ	Напрям	
23		X3j	3	8	1	2	0	0	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						0	=	120
28		X2j						0	=	280
29		X3j						0	=	160
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	0	0	0	0	0			
32		Знак	=	=	=		=			560
33	Попит	Права частина	130	220	60	70	80		560	Баланс

Рисунок 6.2 – Початкові дані для розв’язання транспортної задачі

3. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з’явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (H33), напрям оптимізації (***Минимум***), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (C27:F29) та обмеження ($C$27:$G$29=целое, $C$31:$G$31=$C$33:$G$33, $H$27:$H$29=$J$27:$J$29). За умовою задачі змінні приймають лише невід’ємні значення, тому обов’язково вказуємо це

(

) (рис. 6.3):

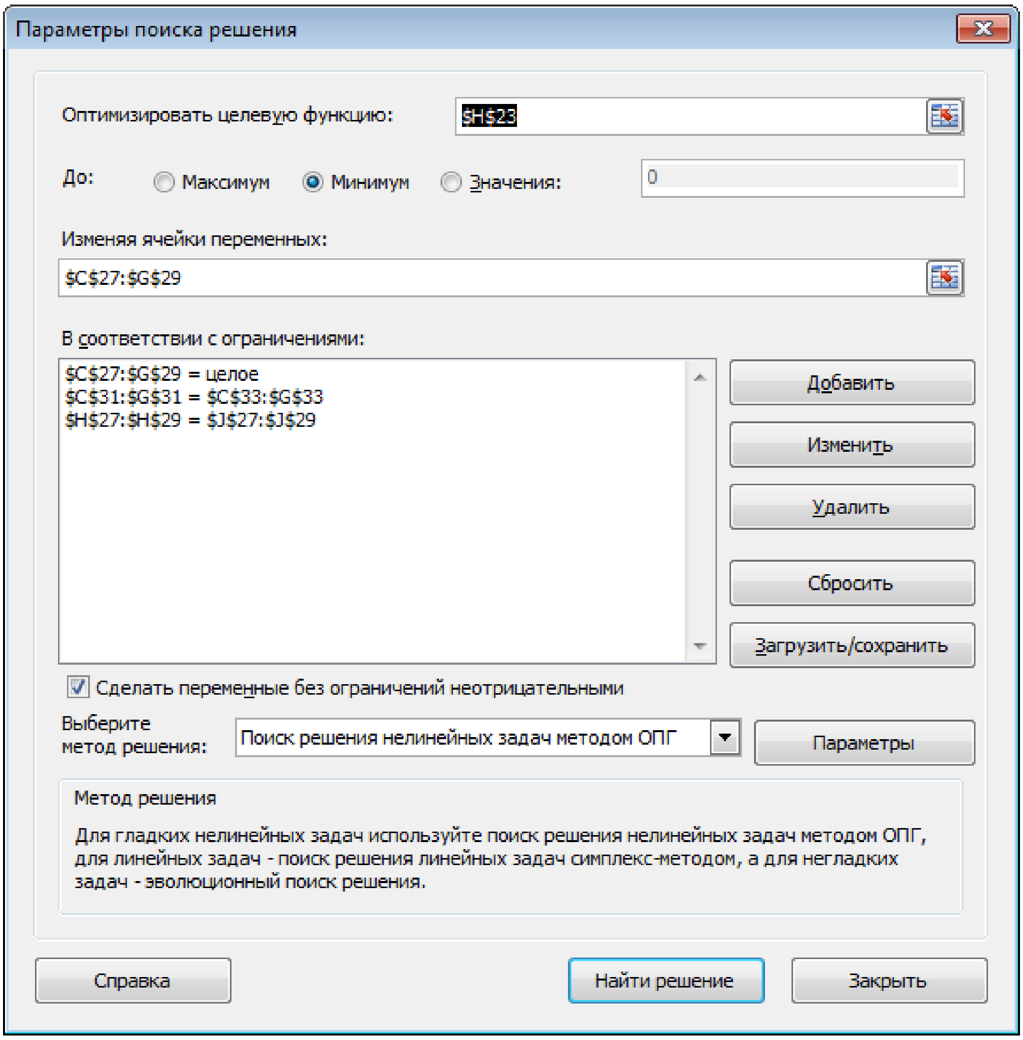


Рисунок 6.3 – Діалогове вікно *«Поиск решения»*

4. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв’язок знайдено. Відповідно в клітинках C27:G29 знаходиться значення оптимального розв’язку, а в клітинці H23 оптимальне значення цільової функції задачі (рис. 6.4). Як бачимо, одержаний результат підтверджує попередні розрахунки.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5			
21		X1j	1	7	9	5	0			
22		X2j	4	2	6	8	0	ЦФ	Напрям	
23		X3j	3	8	1	2	0	790	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j	120	0	0	0	0	120	=	120
28		X2j	0	220	0	0	60	280	=	280
29		X3j	10	0	60	70	20	160	=	160
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	130	220	60	70	80			
32		Знак	=	=	=		=			560
33	Попит	Права частина	130	220	60	70	80		560	Баланс

Рисунок 6.4 – Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Контрольні запитання

1. Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?
3. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв'язку транспортної задачі.
4. Властивості опорних планів транспортної задачі.
5. Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?
6. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?
7. Які ви знаєте методи побудови опорного плану?
8. Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?
9. Назвіть етапи розв'язування методом потенціалів.
10. Як обчислюють потенціали?
11. Умова оптимальності транспортної задачі.
12. Дайте економічну і математичну постановку двохетапної транспортної задачі.
13. Назвіть особливості розв'язування транспортних задач з обмеженнями виду.

Тема 7. Цілочислове програмування

План

1. Постановка задачі цілочислового програмування.
2. Метод Гоморі.
3. Метод «віток і меж»
4. Приклад побудови оптимального плану задачі цілочислового програмування.

1. Постановка задачі цілочислового програмування

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задачі цілочислового програмування є частковим випадком загальнішого типу задач – дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі властиві багатьом практичним типам задач, що забезпечує дуже широке коло застосування дискретного програмування в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею ***цілочислового програмування.*** У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається ***частково цілочисловою.*** До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень – 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

Загальна задача цілочислового програмування має вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min), \qquad (7.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (7.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.3)$$

$$x_j \text{ — цілі} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (7.4)$$

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів: методи відтинання та комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими ***послабленими обмеженнями***, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі є ***метод «віток і меж».*** Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

2. Метод Гоморі

Розглянемо задачу цілочислового програмування (7.1)–(7.4) ітеративним методом Гоморі.

1. Симплексним методом знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних (7.1)–(7.3). Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (7.1)–(7.4). Якщо задача (7.1)–(7.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (7.1)–(7.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове ***обмеження Гоморі*** $\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \ge \{b_j\}$, де символ $\{\ \}$ позначає дробову частину числа.

Для визначення ***дробової частини*** будь-якого числа від цього числа віднімають ***цілу його частину*** – найбільше ціле число, що не перевищує даного.

Цілу частину числа позначають символом $[\ ]$. Наприклад,

$$[1,8] = 1; \quad \{1,8\} = 1,8 - 1 = 0,8;$$
$$[-1,8] = -2; \quad \{-1,8\} = -1,8 - (-2) = -1,8 + 2 = 0,2.$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

3. Метод «віток і меж»

Ефективнішим методом розв'язування задач цілочислового програмування є метод ***«віток і меж».*** Розглянемо його алгоритм:

1. Розв'язується послаблена без умови цілочисловості задача (7.1)–(7.3) за допомогою симплекс-методу.

2. Нехай x_j – шукана цілочислова змінна, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\left\lfloor x_j^* \right\rfloor, \ \left\lfloor x_j^* \right\rfloor + 1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^* = 3{,}2,$ то в інтервалі $(3;4)$ цілих значень x_j не існує, а якщо $x_j^* = -3{,}2$, то в інтервал $(-4;3)$ також не існує цілих значень x_j.

Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей:

$$x_j \le \left\lfloor x_j^* \right\rfloor \quad \text{або} \quad x_j \ge \left\lfloor x_j^* \right\rfloor + 1 .$$

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.5)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.6)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.7)$$

$$x_j \text{ — цілі,} \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.8)$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right]; \quad (7.9)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.10)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i, \ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.11)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.12)$$

$$x_j \text{ — цілі,} \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.13)$$

$$x_j \ge \left[x_j^*\right] + 1, \quad (7.14),$$

де x_j^* — компонент розв'язку задачі (7.1)—(7.4).

3. Далі симплекс-методом розв’язуємо послаблені задачі (7.5)–(7.9) і (7.10)–(7.14), тобто з відкиданням обмежень (7.8) і (7.13). Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв’язками задачі (7.1)–(7.4).

Інакше пошук розв’язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки – з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв’язку. Отриманий план – оптимальний.

Розв’язування цілочислових задач методом «віток і меж» можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (7.9) і (7.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (7.1)–(7.4), а відповідних задач.

4. Приклад побудови оптимального плану задачі цілочислового програмування

Приклад 5.1

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1, x_2 - цілі$$

Розв’язання

1. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом Гоморі

1. Запишемо задачу в канонічній формі:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1;4}$$

$$x_j - цілі$$

2. Знаходимо розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних. Симплексна таблиця матиме наступний вигляд (табл. 7.1):

Таблиця 7.1 – Симплексна таблиця

N	i	Ба-зис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4		
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4/3)
	2	x_4	0	4	1	$\boxed{3}$	0	1	4/3	
	3	Z, Δ_j		**0**	**-1**	**-4**	**0**	**0**	$\Delta_j \le 0$ – план неоптимальний	
I	1	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	19,6	$X_1 =$ (0;4/3;5;0)
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	12	
	3	Z, Δ_j		**16/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4/3**	$\Delta_j \ge 0$ – план оптимальний, але не цілочисловий	

3. Оскільки в умовно-оптимальному плані $X_1 = \left(0; \frac{4}{3}\right)$ значення другої змінної $x_2 = \frac{4}{3}$ – дробове число, що не задовольняє початкові умови цілочисловості задачі, то побудуємо для другого рядка симплексної таблиці (табл. 7.1) додаткове обмеження Гоморі виду:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_j\},$$

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} x_1 + \{1\} x_2 + \{0\} x_3 + \left\{\frac{1}{3}\right\} x_4 \ge \left\{\frac{4}{3}\right\},$$

$$\frac{1}{3} x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \frac{1}{3} x_4 \ge \frac{1}{3},$$

$$x_1 + x_4 \ge 1.$$

Приведемо його до канонічної форми за допомогою додаткової балансуючої зміни x_5 та введемо штучну змінну x_6:

$$x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 1.$$

Отримаємо розширену задачу лінійного програмування:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;6}$$

$$x_j - цілі$$

Розв’язання одержаної задачі можна значно спростити, приєднавши здобуте обмеження Гоморі до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом (табл. 7.2):

Таблиця 7.2 – Симплексна таблиця

N	i	Ба-зис	$C_{баз}$	План	1 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	-M x_6	θ	Базисний опорний план
0	1	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0	0	3	$X_0 =$ (0;4/3; 5;0;0)
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	4	
	3	x_6	-M	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-1	1	1	
	4	Z, Δ_j		**16/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4/3**	**0**	**0**	$\Delta_j \leq 0$	
	5			**-M**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	**M**	**0**	**Опорний план не оптимальний**	
1	1	x_3	0	10/3	0	0	1	-2	5/3	-5/3	19,6	$X_1 =$ (1;1; 10/3;0;0)
	2	x_2	4	1	0	1	0	0	1/3	-1/3	12	
	3	x_1	1	1	1	0	0	1	-1	1		
	4	Z, Δ_j		**5**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/3**	$\Delta_j \geq 0$	
	5			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	**Опорний план оптимальний та цілочисловий**	

Оскільки виконується як умова оптимальності так і умова цілочисловості змінних початкових змінних, то знайдений опорний план є оптимальний цілочисловим планом початкової задачі: $X_{max} = (1;1)$, $Z_{max} = 5$.

2. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом «віток та меж»

1. Знаходимо розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних (табл. 7.1):

$$X_1 = \left(0; \frac{4}{3}\right), \text{ тобто } x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

2. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[1\frac{1}{3}\right] = 1$ або $x_2 \ge \left[1\frac{1}{3}\right] + 1 = 2$.

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі:

1 задача

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ \qquad x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

2 задача

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ \qquad x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

3. Розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі лінійного програмування.

Задача 1

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ \qquad x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$$

Розв'язання

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ x_j - цілі;\ j = \overline{1;5} \end{cases}$$

Розв'язання першої задачі наведено у відповідній симплекс-таблиці (табл. 7.3):

Таблиця 7.3 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	θ	Базисний опорний план
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4;1)
	2	x_4	0	4	1	3	0	1	0	4/3	
	3	x_5	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1	
	4	Z, Δ_j		0	-1	-4	0	0	0	$\Delta_j \leq 0$ – план не оптимальний	
1	1	x_3	0	16/3	2	0	1	0	-1	8/3	$X_1 =$ (1;1;10/3;0;0)
	2	x_4	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-3	1	
	3	x_2	4	1	0	1	0	0	1	-	
	4	Z, Δ_j		4	-1	0	0	0	4	$\Delta_j \leq 0$ – план не оптимальний	
2	**1**	x_3	**0**	**10/3**	**0**	**0**	**1**	**-2**	**5**		$X_2 =$ **(1;1;10/3;0;0)**
	2	x_1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-3**		
	3	x_2	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**		
	4	Z, Δ_j		**5**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	$\Delta_j \geq 0$ – **план оптимальний та цілочисловий**	

Оскільки виконується як умова оптимальності так і умова цілочисловості початкових змінних, то знайдений опорний план є оптимальним цілочисловим планом початкової задачі:

$$X_{max} = (1;1),\ Z_{max} = 5.$$

Задача 2

$$Z = x_1 + 4x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ \qquad x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

Розв'язання

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j - цілі;\ j = \overline{1;6}$$

Розв'язання другої задачі наведено у відповідній симплекс-таблиці (табл. 7.4):

Таблиця 7.4 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	0	-M	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	0	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4;0;0)
	2	x_4	0	4	1	$\boxed{3}$	0	1	0	0	4/3	
	3	x_6	-M	2	0	1	0	0	-1	1	2	
	4	Z, Δ_j		**0**	**-1**	**-4**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j \le 0$ **– план не оптимальний**	
	5			**-2M**	**0**	**-M**	**0**	**0**	**M**	**0**		
I	**1**	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0	0	19,6	
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	12	
	3	x_6	-M	2/3	-1/3	0	0	-1/3	-1	1		
	4	Z, Δ_j		**16/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4/3**	**0**	**0**	$\Delta_j \ge 0$ **– план не оптимальний**	
	5			**-2M/3**	**M/3**	**0**	**0**	**M/3**	**M**	**0**		

Оптимального плану не існує, оскільки серед базисних змінних міститься штучна змінна x_6, що не виключається.

Висновок

Для першої задачі (з обмеженням $x_2 \le 1$) оптимальним буде розв'язок $x_1^1 = 1$, $x_2^1 = 1$, $Z_{max}^1 = 5$, а для другої (з обмеженням $x_2 \ge 2$) – не маємо розв'язку, оскільки серед базисних змінних міститься штучна змінна, що не виключається.

Таким чином, маємо оптимальний план заданої задачі цілочислового програмування $X_{max} = (1;1)$, $Z_{max} = 5$, що співпадає з розв'язком, здобутим за методом Гоморі.

3. Визначення оптимального плану ЗЦЧП засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

Побудова оптимального плану засобами оптимізації редактора *Microsoft Excel* виконується аналогічно як у прикладі 3.1, але добавляється умова цілочисловості (рис. 7.1, 7.2):

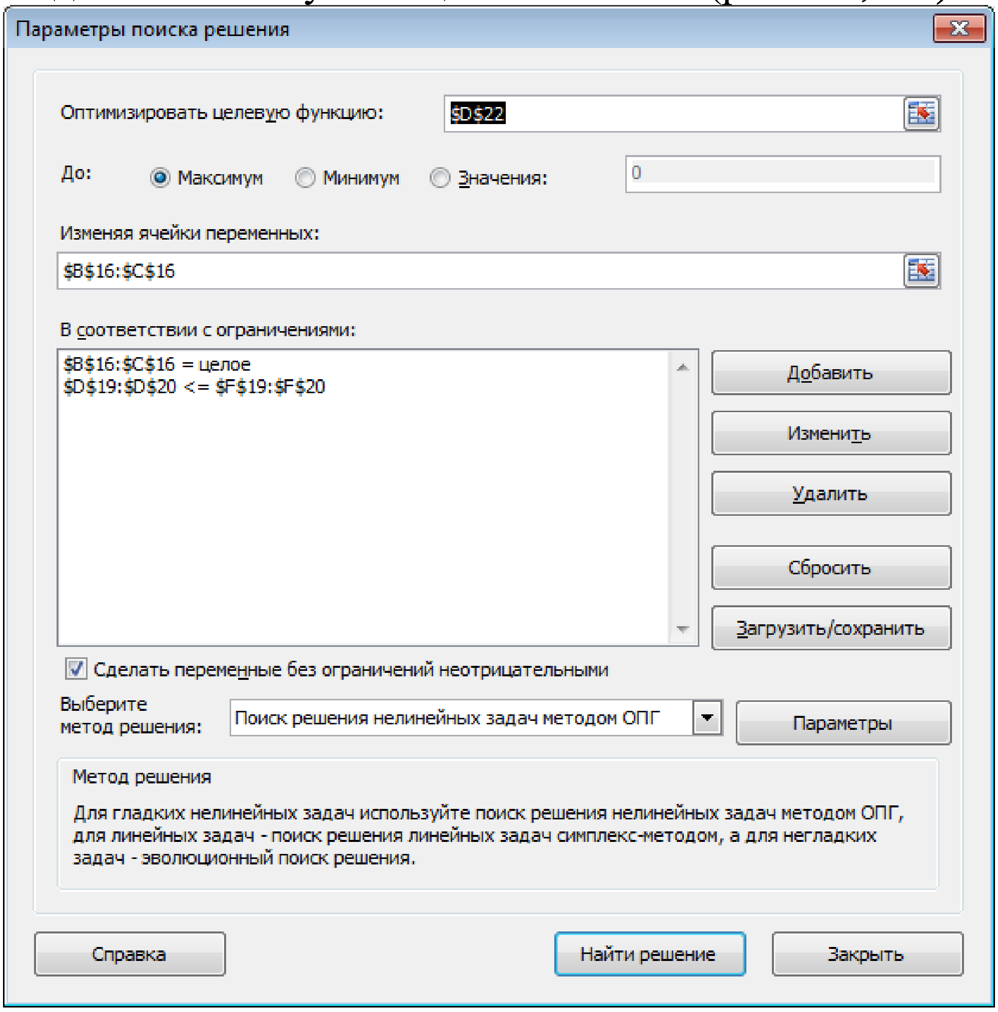


Рисунок 7.1 –Діалогове вікно *«Поиск решения»*

	A	B	C	D	E	F
16	Значення змінних	1	1			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	2	1	3	<=	6,333333
20	2.	1	3	4	<=	4
21					Напрям	
22	**Цільова функція**	**1**	**4**	**5**	max	

Рисунок 7.2 – Оптимальний план задачі

Відповідь: $X_{max} = (1;1)$, $Z_{max} = 5$.

Контрольні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади економічних задач, що належать до цілочислових.
3. Охарактеризуйте головні групи методів розв’язування задач цілочислового програмування.
4. Зміст поняття «правильне відтинання».
5. Опишіть алгоритм методу Гоморі.
6. Опишіть алгоритм методу «віток та меж».

Тема 8. Дробово-лінійне програмування

План

1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування.

2. Алгоритм розв’язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом.

3. Алгоритм розв’язування задачі дробово-лінійного програмування графічним методом.

4. Приклад побудови оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування.

1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування

Розв’язуючи економічні задачі, часто за критерій оптимальності беруть показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично подаються дробово-лінійними функціями.

Загальна економіко-математична модель матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_o}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o} \rightarrow max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$x_j \geq 0 \; \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Припускають, що знаменник цільової функції в області допустимих розв’язків системи обмежень не дорівнює нулю.

2. Алгоритм розв’язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом

Алгоритм розв’язування задачі дробово-лінійного програмування передбачає зведення її до задачі лінійного програмування. Для цього позначимо знаменник

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0},$$

зробимо заміну змінних

$$y_j = y_0 x_j \Rightarrow x_j = \frac{y_j}{y_0}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

і виконаємо відповідні перетворення:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{y_j}{y_0} + c_0}{\frac{1}{y_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{1} = \sum_{j=1}^{n} c_l y_j + c_0 y_0 \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i y_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j-1}^{n} d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$$

$$y_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad y_0 > 0.$$

В результаті отримаємо задачу лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \to max(min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{il} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1 \end{cases}$$

$$y_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$y_0 > 0$$

Нехай її оптимальний план

$$y_j^* = \left\{y_1^*, \quad y_2^*, \quad ..., \quad y_n^*, \quad y_0^*\right\}.$$

Тоді значення оптимального плану заданої задачі дробово-лінійного програмування визначається як $x_j^* = \frac{y_j^*}{y_0^*} \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$.

3. Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування графічним методом

У разі, коли задача дробово-лінійного програмування містить лише дві змінні, для її розв'язування зручно скористатися графічним методом.

Нехай маємо таку задачу:

$$Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to max$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad \left(j = \overline{1,2}\right).$$

Спочатку, як і для звичайної задачі лінійного програмування будуємо геометричне місце точок системи нерівностей, що визначає деякий багатокутник допустимих розв'язків.

Допустимо, що знаменник $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$, і цільова функція набуває деякого значення:

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = Z.$$

Після елементарних перетворень дістанемо:

$$(c_1 - Zd_1)x_1 + (c_2 - Zd_2)x_2 = 0$$

або

$$x_2 = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2} x_1.$$

Останнє рівняння описує пряму, що обертається навколо початку системи координат залежно від зміни значень x_1 та x_2.

Розглянемо кутовий коефіцієнт нахилу одержаної прямої, що виражає цільову функцію:

$$k(Z) = -\frac{c_1 - Zd_1}{c_2 - Zd_2}.$$

Отже, кутовий коефіцієнт являє собою функцію від Z.

Для визначення умов зростання (спадання) функції $k(Z)$ дослідимо зміну знака її похідної:

$$k'(Z) = -\frac{(c_1 - Zd_1)'(c_2 - Zd_2) - (c_2 - Zd_2)'(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} =$$

$$= -\frac{-d_1(c_2 - Zd_2) + d_2(c_1 - Zd_1)}{(c_2 - Zd_2)^2} = -\frac{-d_1c_2 + Zd_1d_2 + d_2c_1 - Zd_1d_2}{(c_2 - Zd_2)^2} =$$

$$= \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2}.$$

Використовуючи формулу для $k'(Z)$, можна встановити правила пошуку максимального (мінімального) значення цільової функції:

а) якщо $k'(Z) = \dfrac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} > 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) > 0$, то функція $k(Z)$ є зростаючою, і за збільшення значення цільової функції Z кутовий коефіцієнт нахилу прямої також збільшується. Тобто у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) > 0$, для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку проти годинникової стрілки;

б) якщо $k'(Z) = \dfrac{d_1c_2 - d_2c_1}{(c_2 - Zd_2)^2} < 0 \Rightarrow (d_1c_2 - d_2c_1) < 0$, то функція $k(Z)$ є спадною і за збільшення значення цільової функції Z кутовий коефіцієнт нахилу прямої $k(Z)$ буде зменшуватись. Тому у разі, якщо $(d_1c_2 - d_2c_1) < 0$, для відшукання точки максимуму необхідно повертати пряму, що описує цільову функцію, навколо початку системи координат у напрямку за годинниковою стрілкою.

При розв'язуванні задачі дробово-лінійного програмування графічним методом можливі такі випадки:

– багатокутник розв'язків задачі обмежений і максимальне та мінімальне значення досягаються у його кутових точках;

– багатокутник розв'язків задачі необмежений, однак існують кутові точки, в яких досягаються максимальне та мінімальне значення цільової функції;

– багатокутник розв’язків задачі необмежений і досягається лише один із екстремумів;

– багатокутник розв’язків задачі необмежений, точки екстремумів визначити неможливо.

4. Приклад побудови оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування

Приклад 8.1

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 12; \\ 2x_1 - x_2 \le 9; \\ -x_1 + 4x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв’язання

1. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування графічним методам

1. Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 8.1). Для цього знаходимо для кожної прямої координати двох точок через які вона проходить:

$$(l_1):\ x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow A_1(0;4), A_2(6;2);$$

$$(l_2): 2x_1 - x_2 = 9 \Rightarrow B_1(4{,}5;0),\ B_2(7;5);$$

$$(l_3): -x_1 + 4x_2 = 8 \Rightarrow C_1(0;2),\ C_2(4;3).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат і проводимо відповідні прямі. Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Наприклад, для точки $\boldsymbol{O(0;0)}$ маємо:

$$(l_1): 0+3\cdot 0 \geq 12 \Rightarrow 0 \geq 12 \Rightarrow \textit{\textbf{невірна нерівність;}}$$

$$(l_2): 2\cdot 0-0 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9 \Rightarrow \textit{\textbf{вірна нерівність;}}$$

$$(l_3): -0+4\cdot 0 \leq 8 \Rightarrow 0 \leq 8 \Rightarrow \textit{\textbf{вірна нерівність.}}$$

Для 1-го обмеження вибираємо ту півплощину, що не включає точку $\boldsymbol{O(0;0)}$, оскільки дане обмеження не справджується, а для 2 і 3 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає точку $\boldsymbol{O(0;0)}$. Вибрані півплощини на рисунку позначаємо штрихуванням і відмічаємо їх напрям стрілкою.

Враховуючи умову невід'ємності змінних $\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0}$, будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – трикутник ***ABC*** (рис. 8.1):

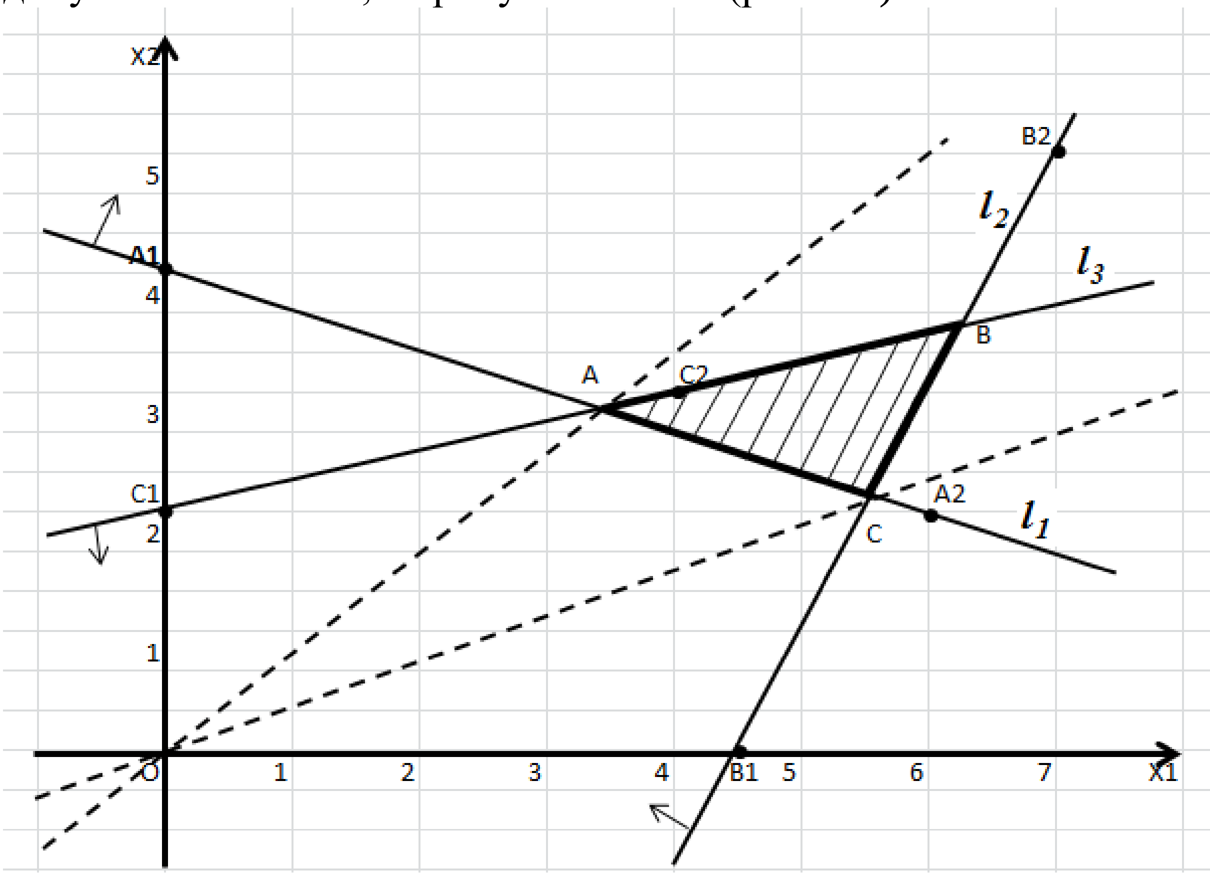


Рисунок 8.1 – Область допустимих планів

2. Побудуємо цільову функцію задачі. Цільова функція являє собою пряму $x_2 = kx_1$ (на рис. 8.1 показана пунктиром), яка обертатиметься навколо початку системи координат залежно від змінюваних параметрів x_1, x_2 так, що точки $A i C$ будуть точками мінімуму і максимуму функції.

Виразимо x_2 із цільової функції:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2},$$

$$Zx_1 + Zx_2 = 3x_1 + 2x_2,$$

$$Zx_2 - 2x_2 = 3x_1 - Zx_1,$$

$$x_2(Z-2) = x_1(3-Z)$$

$$x_2 = \frac{3-Z}{Z-2}x_1.$$

Звідси, кутовий коефіцієнт цільової функції $k(Z) = \frac{3-Z}{Z-2}$.

3. Дослідимо поведінку кутового коефіцієнта $k(Z)$ залежно від значень Z. Розглянемо похідну:

$$k' = \frac{dk}{dZ} = \left(\frac{3-Z}{Z-2}\right)' = \frac{(3-z)'(Z-2) - (Z-2)'(3-Z)}{(Z-2)^2} =$$

$$= \frac{-1(Z-2) - 1(3-Z)}{(Z-2)^2} = -\frac{1}{(Z-2)^2}.$$

Знаменник похідної завжди додатній, а чисельник від Z не залежить. Звідси похідна має постійний знак і при збільшенні значення Z кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або тільки спадати, а пряма $x_2 = kx_1$ буде обертатися в одну сторону. Якщо $k' > 0$, то пряма $x_2 = kx_1$ обертається проти годинникової стрілки, а якщо $k' < 0$ – за годинниковою стрілкою.

Для нашої задачі $k' < 0$, тому функція $k(Z)$ є спадною, її графік обертатиметься навколо початку координат за годинниковою стрілкою. Тому перша точка області допустимих планів A – точка мінімуму, а остання точка C – точка максимуму.

4. Обчислимо координати цих точок та значення цільової функції у них. Оскільки вони є точками перетину відповідних прямих: $A = l_1 \cap l_3$, $C = l_1 \cap l_2$, то розв'язавши відповідні системи рівнянь, наприклад, за формулами Крамера, отримаємо:

Для точки A: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-3) = 7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 24 = 24;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - (-12) = 20.$$

Звідси, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{24}{7}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{20}{7}$.

Отже, координати $A\left(\dfrac{24}{7}; \dfrac{20}{7}\right)$.

Для точки C: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 9 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 27 = -39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 24 = -15.$$

Звідси, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{39}{7}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{15}{7}$.

Отже, координати точки $C\left(\dfrac{39}{7}; \dfrac{15}{7}\right)$.

Знайдемо значення цільової функції в цих точках:

$$Z_A = \frac{3 \cdot \frac{24}{7} + 2 \cdot \frac{20}{7}}{\frac{24}{7} + \frac{20}{7}} = \frac{112}{44} \approx 2{,}545,$$

$$Z_C = \frac{3 \cdot \frac{39}{7} + 2 \cdot \frac{15}{7}}{\frac{39}{7} + \frac{15}{7}} = \frac{147}{54} \approx 2{,}722;$$

Результати $(Z_C > Z_A)$ підтверджують, що екстремальні значення знайдено правильно: максимум досягається в точці C, а мінімум – у точці A.

2. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування симплексним методам

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ 2x_1 - x_2 \leq 9; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 8; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

1. Зведемо початкову задачу до задачі лінійного програмування. Позначимо $\frac{1}{y_0} = x_1 + x_2$, де $y_0 > 0$. Введемо нові змінні: $y_1 = y_0 x_1$, $y_2 = y_0 x_2$, тоді $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $x_2 = \frac{y_2}{y_0}$.

Виконаємо відповідні підстановки та домножимо систему обмежень задачі на y_0. Отримаємо задачу лінійного програмування:

$$Z = \frac{3\frac{y_1}{y_0} + 2\frac{y_1}{y_0}}{\frac{1}{y_0}} = 3y_1 + 2y_2 \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 12y_0 \geq 0; \\ 2y_1 - y_2 - 9y_0 \leq 0; \\ -y_1 + 4y_2 - 8y_0 \leq 0 \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_0 \geq 0.$$

5. Розв'яжемо отриману задачу лінійного програмування симплекс-методом, або засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

Для задачі на мінімум отримаємо (рис. 8.2, рис. 8.3):

E24 fx =СУММПРОИЗВ(B16:D16;B24:D24)

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних						
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B19:D19)	>=	0
20	2	2	-1	-9	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B20:D20)	<=	0
21	3	-1	4	-8	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B21:D21)	<=	0
22	4	1	1	0	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B22:D22)	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	**3**	**2**	**0**	**=СУММПРОИЗВ(B16:D16;B24:D24)**	min	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	=E24
27		=B16/$D$16	=C16/$D$16				

Рисунок 8.2 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних	6/11	5/11	7/44			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	0	>=	0
20	2	2	-1	-9	-1	<=	0
21	3	-1	4	-8	0	<=	0
22	4	1	1	0	1	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	**3**	**2**	**0**	**2,545457**	min	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	2,545457
27		3 3/7	2 6/7				

Рисунок 8.3 – Оптимальний план задачі на мінімум

Звідси, отримаємо оптимальний план перетвореної задачі:

$$y_1 = \frac{6}{11},\ y_2 = \frac{5}{11},\ y_0 = \frac{7}{44}.$$

Враховуючи, що $x_j = \frac{y_j}{y_0}$, визначимо оптимальний план початкової задачі на мінімум:

$$x_1 = \frac{\frac{6}{11}}{\frac{7}{44}} = \frac{24}{7}, \; x_2 = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{7}{44}} = \frac{20}{7},$$

тобто

$$X_{min} = \left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right), \; Z_{min} = 2{,}545.$$

Для задачі на максимум маємо (рис. 8.4):

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних	13/18	5/18	7/54			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	0	>=	0
20	2	2	-1	-9	0	<=	0
21	3	-1	4	-8	-1	<=	0
22	4	1	1	0	1	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	3	2		2,722225	max	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	2,722225
27		5 4/7	2 1/7				

Рисунок 8.4 – Оптимальний план задачі на максимум

Звідси отримаємо оптимальний план перетвореної задачі:

$$y_1 = \frac{13}{18}, \; y_2 = \frac{5}{18}, \; y_0 = \frac{7}{54}.$$

Тоді, оптимальний план початкової задачі на максимум:

$$x_1 = \frac{\frac{13}{18}}{\frac{7}{54}} = \frac{39}{7}, \; x_2 = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{7}{54}} = \frac{15}{7},$$

тобто

$$X_{max} = \left(\frac{39}{7}; \frac{15}{7}\right), \; Z_{max} = 2{,}722.$$

3. Визначення оптимального плану вихідної задачі дробово-лінійного програмування засобами оптимізації табличного редактора Microsoft Excel

Використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначимо оптимальний план вихідної задачі.

1. Оскільки цільова функція задачі дробова, а система обмежень лінійна, то маємо задачу дробово-лінійного програмування.

Для її розв'язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel (рис. 8.5). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв'язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю коефіцієнтів системи обмежень (B19:C21), знаки обмежень (E19:E21), стовпчик вільних членів системи обмежень (F19:F21), формули лівої частини кожного обмеження (D19:D21) та формулу цільової функції (D23). За умовою цільова функція задачі дробово-лінійна, тому для уникнення ділення на нуль в якості початкових значень x_1, x_2 розглянемо довільні ненульові їх значення, наприклад 1 (рис.8.5):

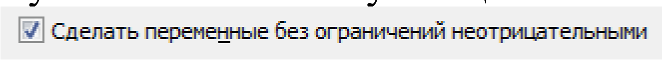
D23   fx   =(3*B16+2*C16)/(B16+C16)

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	1	1			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	>=	12
20	2.	2	-1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	9
21	2.	-1	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			=(3*B16+2*C16)/(B16+C16)	max	

Рисунок 8.5 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з'явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D3), напрям оптимізації (***Максимум***), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження

($D$19>=$F$19, $D$20:$D$21<=$F$20:$F$21).

За умовою задачі змінні приймають лише невід'ємні значення, тому обов'язково вказуємо це (

) (рис. 8.6):

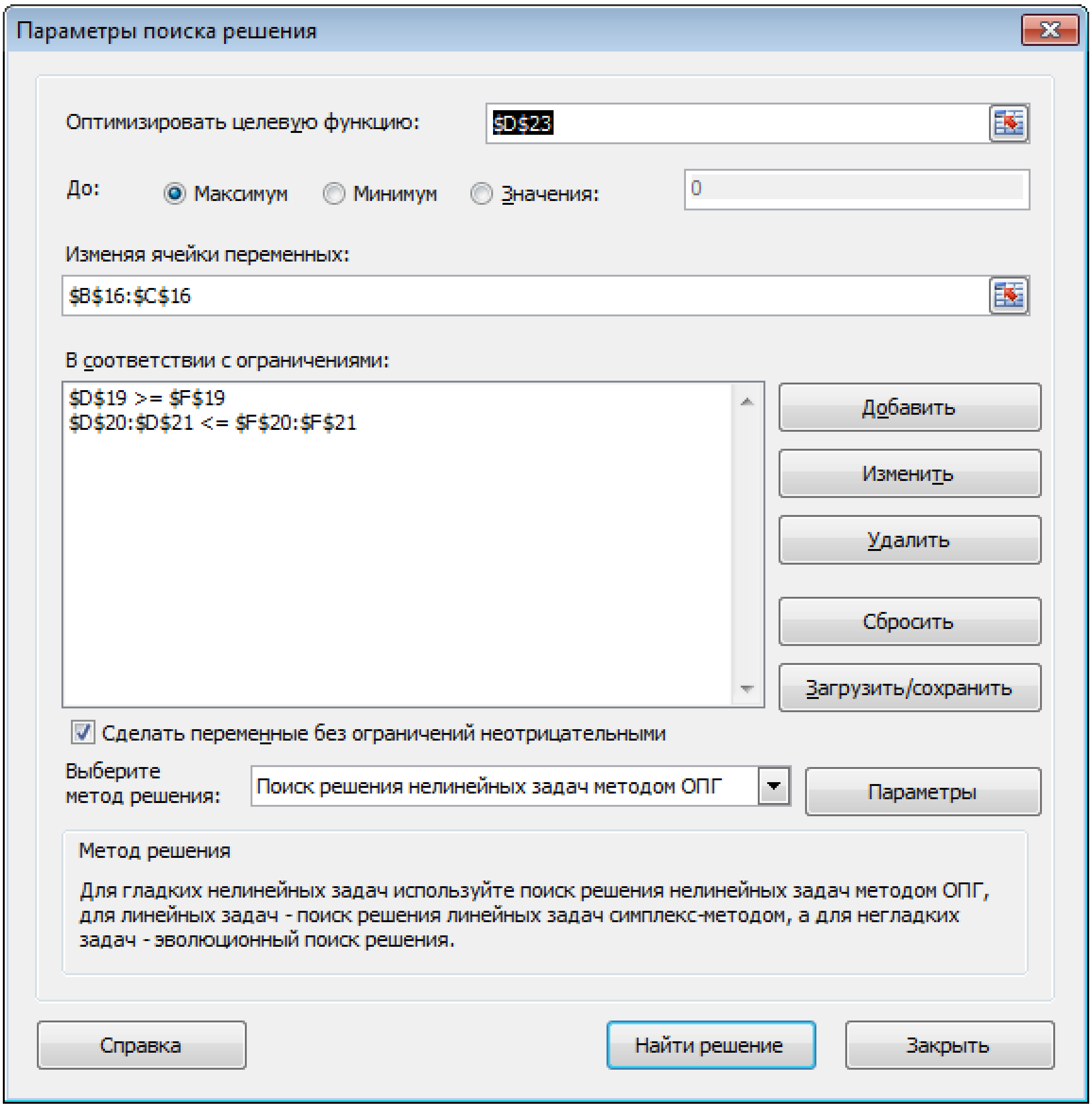


Рисунок 8.6 – Діалогове вікно ***«Поиск решения»***

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв'язок знайдено. Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв'язку, а в клітинці D23 оптимальне значення цільової функції задачі на максимум (рис. 8.7):

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	5 4/7	2 1/7			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	12	>=	12
20	2.	2	-1	9	<=	9
21	2.	-1	4	3	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			2,722222	max	

Рисунок 8.7 – Оптимальний план задачі дробово-лінійного програмування на максимум

4. Аналогічно визначаємо оптимальний план вихідної задачі на мінімум (рис. 8.8):

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	3 3/7	2 6/7			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	12	>=	12
20	2.	2	-1	4	<=	9
21	2.	-1	4	8	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			2,545455	min	

Рисунок 8.8 – Оптимальний план задачі дробово-лінійного програмування на мінімум

Як бачимо, визначені оптимальні плани співпадають з раніше отриманими.

Контрольні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається дробово-лінійною?
2. Як можна дослідити цільову функцію дробово-лінійної задачі, щоб знайти графічно її екстремальні значення?
3. Як можна розв'язувати дробово-лінійну задачу, коли вона має тільки дві змінні?
4. Як розв'язується дробово-лінійна задача, коли вона має три і більше невідомих?

Тема 9. Нелінійне програмування

План

1. Постановка задачі нелінійного програмування.
2. Методи розв'язування задач нелінійного програмування.
3. Метод Лагранжа розв'язування задач нелінійного програмування
4. Приклад побудови оптимального плану задачі нелінійного програмування.

1. Постановка задачі нелінійного програмування

У попередніх темах було розглянуто методи розв'язування задач лінійного програмування та деякі типи задач, що певними нескладними перетвореннями зводяться до лінійних. Ці методи найкраще розроблені, легко реалізуються на комп'ютерах, а тому набули широкого застосування в багатьох галузях науки, техніки та економіки. Проте лінійні моделі відображають лише певну й вельми обмежену сукупність властивостей навколишнього світу. Адже, скажімо, соціально-економічні процеси переважно не є лінійними. Галузі, об'єднання та окремі підприємства народного господарства функціонують і розвиваються за умов невизначеності, а тому адекватно їх можна описати нелінійними, стохастичними, динамічними моделями.

Отже, для ефективного управління народним господарством в цілому, його галузями і окремими об'єктами господарювання потрібне застосування нелінійних економіко-математичних моделей та методів. Зауважимо, що сучасний рівень розвитку комп'ютерної техніки і методів математичного моделювання створює передумови для застосування нелінійних методів, а це може суттєво підвищити якість розроблюваних планів, надійність та ефективність рішень, які приймаються.

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між економічними показниками. Задачі нелінійного програмування часто виникають як в теорії управління, так і в інших науках, і їх систематичне дослідження, що почалося в кінці 40-х років, привело до виникнення самостійної наукової дисципліни – нелінійного програмування.

У загальному вигляді ***нелінійна економіко-математична модель*** має вигляд:

$$Z = f\left(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n\right) \rightarrow max(min) \tag{9.1}$$

за умов

$$q_i\left(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n\right)\{\leq, =, \geq\}b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{9.2}$$

де

$f\left(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n\right)$ і $q_i\left(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n\right)$ — нелінійні функції (9.3)

Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

1. Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, при цьому можливі значні похибки. Взагалі лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для задач нелінійного програмування **не існує універсального методу** розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача. Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних комп'ютерів відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній (або кількох одночасно) з вершин багатогранника допустимих розв'язків задачі. Однак у задачах нелінійного програмування існують кілька локальних оптимумів, що потребує пошуку серед них глобального.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає оптимальний план, може бути як граничною, так і знаходитися всередині допустимої області розв'язків (планів).

4. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою. У разі, коли система обмежень задачі є нелінійною, вона може визначати множину допустимих розв'язків як неопуклу, або навіть складатися з довільних, не зв'язаних між собою частин

2. Методи розв’язування задач нелінійного програмування

Для розв’язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають ***прямі*** та ***непрямі.*** Прямими методами оптимальні розв’язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є ***градієнтні***.

Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи ***квадратичного*** та ***сепарабельного*** програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються додаткові обмеження, належать до задач відшукання ***безумовного екстремуму*** функції. Вони розв’язуються методами класичної математики згідно необхідних та достатніх умов існування екстремуму функції.

Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку ***умовного екстремуму*** функції. Термін «умовний» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами ***зведеного градієнта***, наприклад ***методом Якобі***, та ***множників Лагранжа***.

У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму ***Куна–Таккера***.

3. Метод Лагранжа розв’язування задач нелінійного програмування

Розглянемо метод ***множників Лагранжа*** на прикладі такої задачі нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1,\ x_2,\ \ ...,x_n) \rightarrow max(min) \qquad (9.4)$$

за умов

$$q_i(x_1\ \ x_2,\ \ \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1.m}), \tag{9.5}$$

де функції

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \text{ і } q_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \text{ диференційовані.} \tag{9.6}$$

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму складнішої функції, але без обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку ***умовного екстремуму*** переходимо до задачі відшукання ***безумовного*** екстремального значення іншої функції методами класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і подається у вигляді:

$$L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) =$$

$$= f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)), \tag{9.7}$$

де λ_i – деякі невідомі величини, що називаються ***множниками Лагранжа.***

Знайшовши частинні похідні функції L за всіма змінними і прирівнявши їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{9.8}$$

запишемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\ b_i - q_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{9.9}$$

що забезпечує виконання умов (9.5) початкової задачі нелінійного програмування і, яка, як правило, нелінійна.

Розв'язавши цю систему, знайдемо $X^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*)$ – ***стаціонарні точки***.

Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум задачі (9.4)–(9.6), або можуть бути точками перегину (***сідловими точками***).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (9.7) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n)\times(m+n)$:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P^T & Q \end{array} \right),$$

де $O-$ матриця розмірністю $(m\times m)$, що складається з нульових елементів, $P-$ матриця розмірністю $(m\times n)$, елементи якої визначаються так:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ ...... & ... & ...... \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & ... & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

$P^T -$ транспонована матриця до P розмірністю $(n\times m)$,

$Q-$ матриця розмірністю $(n\times n)$ виду:

$$Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \text{ де } i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв’язку системи (9.9). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, наступні $(n-m)$ головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку $(m+1)$, знак наступних $(n-m)$ головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

4. Приклад побудови оптимального плану задачі нелінійного програмування

Приклад 9.1

Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури – озиму пшеницю та цукрові буряки. Техніко-економічні показники вирощування цих культур надано в таблиці:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, x_1	під цукровий буряк, x_2
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Розв'язання

Нехай: x_1 — площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га; x_2 — площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$f = 4\left(800 - 12{,}5\,x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 100 +$$
$$+ 35\left(300 - 12{,}5\,x_2^2 + 150\,x_2 - 650\right)x_2 100 =$$
$$= 400\left(-12{,}5\,x_1^3 + 200\,x_1^2 - 400x_1\right) + 3500\left(-12{,}5\,x_2^3 + 150\,x_2^2 - 350\,x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = 400\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) +$$
$$+ 3500\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) + \lambda_1\left(12 - x_1 - x_2\right).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350\right),$$
$$4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 35\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350\right)$$

або

$$-150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10500x_2 - 12250.$$

Із останнього рівняння системи маємо:

$$x_1 = 12 - x_2.$$

Підставивши значення x_1, дістанемо:

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2)^2 - 1600 = -1312{,}5_2^2 + 10500x_2 - 12250,$$

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 =$$
$$= -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250;$$

$$21\,600 + 3600x_2 - 150x_2^2 + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 +$$
$$+ 1312{,}5x_2^2 - 10\,500x_2 + 12\,250 = 0$$

або

$$1162x_2^2 - 8500x_2 + 11450 = 0.$$

Розв’язавши це квадратне рівняння, дістаємо

$$D = 72\,250\,000 - 53\,219\,600 = 19\,030\,400$$

$$\sqrt{D} \approx 4362.$$

$$x_2^{(1)} = \frac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53 \quad (553\,га).$$

$$x_2^{(2)} = \frac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78 \quad (178\,га)$$

Відповідно дістаємо:

$$x_1^{(1)} \approx 6{,}47 \quad (647\,га)$$
$$x_1^{(2)} \approx 10{,}22 \quad (1022\,га),$$

Тобто ***сідловими точками*** є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47; \\ x_2^{(1)} = 5{,}53. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22; \\ x_2^{(2)} = 1{,}78. \end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$.

Визначимо другі частинні похідні функції Лагранжа та їх значення в точці $X_1^*(6{,}47;5{,}53)$:

$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, тоді $\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\left(X_1^*\right) = 0$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 400(-37{,}5 \cdot 2x_1 + 400),$$

тоді

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}\left(X_1^*\right) = 400(-37{,}5 \cdot 2 \cdot 6{,}47 + 400) = -34100.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 3500(-37{,}5 \cdot 2x_2 + 300),$$

тоді

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\left(X_1^{\&}\right) = 3500(-37{,}5 \cdot 2 \cdot 5{,}53 + 300) = -401625.$$

Оскільки $\frac{\partial q}{\partial x_1} = 1, \frac{\partial q}{\partial x_2} = 1$, то $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Матриця Гессе $H = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P^T & Q \end{array}\right)$ матиме такий вигляд:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{array}\right).$$

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m+1=1+1=2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)}; x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції у цій точці:

$$f\left(x_1 = 6{,}47;\ x_2 = 5{,}53\right) = 4\left(800 - 523{,}26 + 1294 - 1200\right)\cdot 647 +$$
$$+ 35\,(300 - -382{,}26 + 829{,}5 - 650)\cdot 553 = 4\ 625\ 863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_2^*(x_1^{(2)} = 10{,}22;\ x_2^{(2)} = 1{,}78)$ показують, що вона не є екстремальною:

$$f\left(x_1 = 10{,}22;\ x_2 = 1{,}78\right) = 4\left(800 - 1305{,}61 + 2044 - 1200\right)\cdot 1022 +$$
$$+ 35\,(300 - -39{,}615 + 267 - 650)\cdot 178 = -236\,247.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі $647\ га$, а цукровий буряк – на площі $553\ га$.

Приклад 9.2

$$f=(x_1-2)^2+(x_2-5)^2 \text{ при обмеженнях } \quad x_1+x_2=8.$$

Розв'язання

1. Визначення оптимального плану задачі нелінійної програмування методом множників Лагранжа

1. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=(x_1-2)^2+(x_2-5)^2+\lambda_1(8-x_1-x_2).$$

2. Візьмемо частинні похідні від функції Лагранжа і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-2)-\lambda_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-5)-\lambda_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=8-x_1-x_2=0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(8-x_2-2)-\lambda_1=0\\ 2(x_2-5)-\lambda_1=0\\ x_1=8-x_2\end{cases}$$

3. Розв'яжемо систему рівнянь та знайдемо точки, в яких цільова функція може мати екстремум:

$$\begin{cases}-2x_2+12-\lambda_1=0\\ 2x_2-10-\lambda_1=0\\ x_1=8-x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x_2-22=0\\ x_1=8-x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=\dfrac{11}{2}\\ x_1=\dfrac{5}{2}\\ \lambda=1\end{cases}$$

Отже, точка $A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right)$ є критичною точкою.

4. Дослідимо точку A на тип екстремуму. Обчислимо значення частинних похідних другого порядку та запишемо матрицю Гессе:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2,\ H=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$, то точка $A\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ є точкою мінімуму і

$$F_{min} = f(A) = f\left(\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування за допомогою достатніх умов екстремуму функції однієї незалежної змінної

1. Розглянемо задану функцію

$$f(x_1; x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$$

при обмеженнях $x_1 + x_2 = 8$ як функцію однієї незалежної змінної. Для цього виразимо з рівняння зв'язку x_2 через x_1 і підставимо у цільову функцію $f(x_1; x_2)$:

$$x_2 = 8 - x_1,$$

$$f(x_1) = (x_1 - 2)^2 + (8 - x_1 - 5)^2 = (x_1 - 2)^2 + (3 - x_1)^2 .$$

2. Дослідимо функцію $f(x_1)$ на безумовний екстремум. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x_1) = 2(x_1 - 2) + 2(3 - x_1) \cdot (-1) = 2x_1 - 4 - 6 + 2x_1 = 4x_1 - 10,$$

$$f'(x_1) = 0 \Rightarrow 4x_1 - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Визначимо значення другої похідної в точці x_1:

$$f''(x_1) = (4x_1 - 10)' = 4 > 0.$$

Згідно другої достатньої теореми екстремуму функції маємо, що в точці x_1 – мінімум.

Враховуючи, що $x_2 = 8 - x_1 = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$, маємо $A\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ – точка мінімуму початкової задачі

3. Перевірка розв’язку засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

1. Для визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel. Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв’язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю-рядок коефіцієнтів обмеження (B19:C19), знак обмеження (E19), стовпчик вільних членів обмеження (F19), формулу лівої частини обмеження (D19) та формулу цільової функції (D23) (рис.9.1):

D21 fx =(B16-2)^2+(C16-5)^2

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	=	8
20					Напрям	
21	**Цільова функція**			=(B16-2)^2+(C16-5)^2	min	

Рисунок 9.1 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з’явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D21), напрям оптимізації (Мінімум), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження ($D$19=$F$19) (рис. 9.2).

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв’язок знайдено. Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв’язку, а в клітинці D21 оптимальне значення цільової функції задачі (рис. 9.3).

Як бачимо, оптимальний план отриманий засобами оптимізації *Microsoft Excel* повністю співпадає з раніше отриманими результатами.

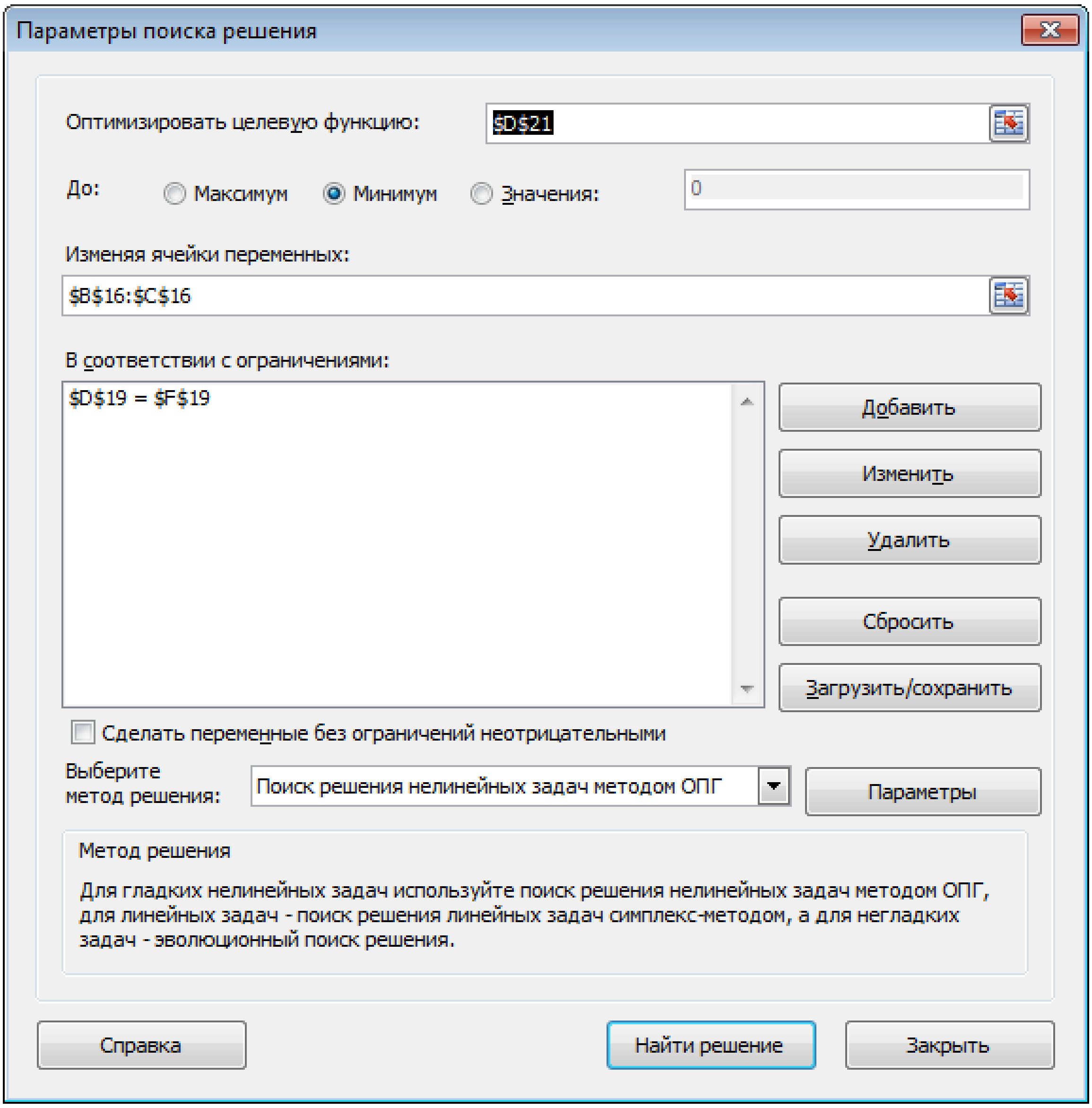


Рисунок 9.2 – Діалогове вікно ***«Поиск решения»***

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	2,5	5,5			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	8	=	8
20					Напрям	
21	**Цільова функція**			0,5	min	

Рисунок 9.3 – Оптимальний план задачі нелінійного програмування

Відповідь: $\boldsymbol{X_{min}\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right),\ F_{min}=\frac{1}{2}}$.

Контрольні запитання

1. Запишіть загальну задачу нелінійного програмування.
2. Труднощі розв’язування задач нелінійного програмування.
3. Функція Лагранжа.
4. Метод Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)?
6. Сформулюйте необхідні та достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боровик О. В., Боровик Л. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 424 с.
2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. Київ : КНЕУ, 2001. 248 с.
3. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі : оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.
4. Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з курсу. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.
5. Дослідження операцій в економіці : підруч. / О. І. Черняк та ін. ; ред. О. І. Черняк. Миколаїв : МНАУ, 2020. 398 с.
6. Дослідження операцій : метод рекоменд. для самост. роботи студентів ден. та заоч. форм навчання напряму підготов. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2014. 98 с.
7. Дослідження операцій : курс лекцій / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 248 с.
8. Дослідження операцій в економіці : підруч. / І. К Федоренко. та ін. ; за ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняка. Київ : Знання, 2007. Київ : Знання, 2017. 558 с.
9. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / В. В. Вітлінський та ін. ; за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.

10. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.

11. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / Т. С. Клебанова та ін. Харків : ВД «Інжек», 2012. 352 с.

12. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с.

13. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. Львів : Магнолія Плюс, 2015. 352 с.

14. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. 215 с.

15. Математичне програмування. Дослідження операцій : навч. посіб. / А. Ф. Барвінський та ін. Львів : «Інтелект-Захід», 2008. 468 с.

16. Математичне програмування : контр. індивід. завд. та метод. рек. для сам. роб. студ. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 80 с.

17. Математичне програмування : метод. рек. з вивч. дисципліни та виконання контрольних робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 132 с.

18. Математичне програмування. Методичні вказівки для самостійної роботи з використанням структурно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студентів денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв, 2003. 99 с.

19. Математичне програмування. Методичні вказівки для самостійної роботи з використанням структурно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студентів денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв, 2004. 55 с.

20. Математичне програмування. Контрольні завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи студентів денної та залчної форм навчання пеціальностей 7.050106, 7.050202, 7.050206 з урахуванням кредитно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв, 2005. 97 с.

21. Математичне програмування. Методичні рекомендації для самостійної роботи з використанням кредитно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студентів денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202, 7.050201 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв, 2005. 47 с.

22. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 452 с.

23. Оптимізаційні методи та моделі : метод. рек. з вивч. дисципліни та виконання контрол. робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2017. 107 с..

24. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 135 с.

25. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання практичних занять і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 87 с.

26. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання тестових завдань і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 107 с.

27. Толбатов Ю. А., Толбатов Є. Ю. Математичне програмування : підруч. для студентів екон. спец. вищ. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. 432 с.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Конспект лекцій

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 8,19.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.