

УДК 336.763

DOI: [https://doi.org/10.31521/modecon.V38\(2023\)-11](https://doi.org/10.31521/modecon.V38(2023)-11)

Мажара Г. А., док. філос. з екон., старший викладач кафедри економічної кібернетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

ORCID: 0000-0002-1860-756X

e-mail: SkyDoor13@gmail.com

Крикун Є. О. Студент 4-го курсу кафедри економічної кібернетики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

ORCID: 0009-0001-5146-4273

e-mail: genia2002g@gmail.com

Моделювання оптимального інвестиційного портфеля орієнтованого на мінімізацію ризику

Анотація. Моделювання оптимального інвестиційного портфеля — це дослідження, яке має за мету визначити оптимальний спосіб розподілу коштів інвестора між цінними паперами різних компаній. Дослідження використовує ряд методів та підходів таких як: методи багатокритеріальної оптимізації — оптимізація критеріїв на мінімум та максимум, моделювання оптимального портфелю акцій при мінімальному ризику, щоб визначити найкращий спосіб розподілу коштів, який допоможе інвесторам досягти максимальної прибутковості при мінімізації ризику.

На сучасному американському фондовому ринку існує велика кількість публічних акціонерних товариств. Обравши компанії, які можуть мати зріст в майбутньому, актуальним залишається проблема розподілу своїх коштів між ними. Побудова оптимального портфелю цінних паперів різними економіко-математичними методами розв'язує проблему розподілу фінансових ресурсів, орієнтуючись на бажаний прибуток в майбутньому та рівень схильності до ризику.

Одним з перших, хто запропонував розв'язання даної проблеми є американський вчений-економіст Гаррі Марковіц. На основі його «Сучасної портфельної теорії» було проведено дослідження, а саме, побудова диверсифікованого портфеля акцій, який буде максимізувати прибуток при найменш можливому ризику. Модель для даної роботи побудована за допомогою одного з методів багатокритеріальної оптимізації — згортки критеріїв з урахуванням диверсифікації портфеля та заданих обмежень. Шляхом згортки, вдалося оптимізувати відповідні частини цільових функцій на максимум та на мінімум. Як результат, вдалося отримати диверсифікований портфель акцій компаній, які торгуються на фондовому ринку США. Портфель орієнтований на отримання максимального прибутку при мінімально можливому ризику. Вся робота реалізована у програмних середовищах Python та Excel. За допомогою Python було отримано історичні ціни акцій та оформлено їх в один файл. За допомогою Excel було проведено розрахунки та оптимізація цільової функції.

Ключові слова: економіка; фінансові ринки; акції; моделювання; аналіз ефективності управління.

Mazhara G. A., Ph.D. in economics, senior lecturer at the Department of Economic Cybernetics, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

Krykun Y. O., 4th year student at the Department of Economic Cybernetics, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

Modeling of the Optimal Investment Portfolio Focused on Risk Minimization

Abstract. Introduction. Portfolio optimization modelling is a study aimed at determining the best way to allocate an investor's funds between securities of different companies. The study uses a number of methods and approaches, such as: multi-criteria optimization methods - optimization of criteria for minimum and maximum, modeling of the optimal stock portfolio with minimal risk, to determine the best way to allocate funds that will help investors achieve maximum return while minimizing risk.

Purpose. There are a lot of publicly traded companies in the modern American stock market. Having chosen the companies that may grow in the future, the problem of allocating your funds among them remains relevant. Building an optimal portfolio of securities using various economic and mathematical methods solves the problem of allocating financial resources, focusing on the desired future profit and the level of risk exposure.

Results. The model for this study was built using one of the methods of multi-criteria optimization - criteria convolution, taking into account portfolio diversification and the specified constraints. The optimization is based on the "Modern Portfolio Theory" of the prominent scientist Harry Markowitz.

Conclusions. As a result, we built an optimal and diversified portfolio of shares, in which each company on the list represents at least 1%. All constraints have been met and the main conditions have been fulfilled - the portfolio minimizes risk

¹Стаття надійшла до редакції: 03.04.2023

Received: 03 April 2023

and maximizes profit. With a minimum risk of 5.39%, we expect a return of 1.75%. Such results can be obtained if we use a convolution of the criteria where the preference is given to minimizing risk - 0.7. The largest contributors to the portfolio were the following companies: T-Mobile Us Inc., McKesson Corporation, The Kroger Co., Microsoft Corporation, and Apple Inc. These companies account for a significant portion of the portfolio - 65%.

Given the focus on portfolio diversification and the ratio of risk to potential return, we can say that the portfolio is efficient and can be used in practice.

Keywords: economy; financial markets; shares; modeling; management efficiency analysis.

JEL Classification: C6; G11.

Постановка проблеми. На сучасному американському фондовому ринку існує велика кількість публічних акціонерних товариств. Обравши компанії, які можуть мати зріст в майбутньому, актуальним залишається проблема розподілу своїх коштів між ними. Побудова оптимального портфеля цінних паперів різними економіко-математичними методами розв'язує проблему розподілу фінансових ресурсів, орієнтуючись на бажаний прибуток в майбутньому та рівень схильності до ризику.

Одним з перших, хто запропонував розв'язання даної проблеми є американський вчений-економіст Гаррі Марковіц. На основі його «Сучасної портфельної теорії» [1] було проведено дослідження, а саме, побудова диверсифікованого портфеля акцій, який буде максимізувати прибуток при найменш можливому ризику.

Підбір оптимального спектра компаній в акції яких можна інвестувати кошти:

1. Вкласти кошти так, щоб отримати максимальний можливий прибуток у складний для світового фондового ринку час;

2. Мінімізувати ризик втратити кошти, враховуючи стан фондового ринку;

Об'єктом дослідження у даній роботі є інвестиційний портфель, що складається з цінних паперів певних компаній – акцій.

Предметом дослідження є компанії, що торгуються на фондових біржах США.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Інформаційною базою є роботи вітчизняних та іноземних науковців таких як Г. Марковіц [1], який розробив сучасну портфельну теорію, Дж. Лінтнер [2], В. Шарп [3], розробив теорію співвідношення дохідності та ризику, Р. Шиллер [4], Дж. Трейнор [5], В. О. Капустян, Г. А. Мажара [6]. А також основні роботи Г. Марковіца [7, 8, 9]. Історичні дані цін акцій взяті з сайту Yahoo Finance.

Формулювання цілей дослідження. Завдання даного дослідження – це знаходження такого оптимального портфеля, що буде максимізувати прибуток, при мінімально можливому ризику. Оцінити частки кожної компанії, виділити основні компанії, які вносять найбільший вклад у портфель.

Скласти економіко-математичну модель оптимізації портфелю акцій, яка базується на теорії Гаррі Марковіца.

Основні результати дослідження. Ідеального інвестування не існує, але важливим завданням сучасних інвесторів є створення стратегії, яка пропонує високу прибутковість при відносно низькому ризику. На сьогодні дане завдання не є таким складним, але ще до другої половини 20-го століття не існувало жодної такої стратегії, яка могла це реалізувати.

У 1952 р. економіст Гаррі Марковіц написав дисертацію на тему «Вибір портфеля», яка містила теорії, що трансформували процес управління портфелем, і за яку майже чотири десятиліття потому він отримав Нобелівську премію з економіки.

Модель Марковіца має такі основні припущення:

за дохідність цінних паперів приймається математичне очікування дохідності;

За ризик цінних паперів приймається середньоквадратичне відхилення дохідності;

Вважається, що дані минулих періодів, які використані при розрахунках дохідності й ризику, повністю відображають майбутні значення дохідності;

Ступінь і характер взаємозв'язку між цінними паперами виражається коефіцієнтом лінійної кореляції [10].

Г. Марковіц створив формулу, яка дозволяє інвестору математично узгодити схильність до ризику та очікування винагороди, в результаті чого формується ідеальний портфель. Ця теорія базувалася на двох основних концепціях:

Метою кожного інвестора є максимізація доходу при будь-якому рівні ризику.

Ризик може бути зменшений шляхом диверсифікації портфеля в розрізі окремих, не пов'язаних між собою цінних паперів.

У даному дослідженні використовується модель Гаррі Марковіца МТР (Modern Portfolio Theory) – сучасна теорія портфеля. Задача полягає в тому, щоб знайти вектор вагів w кожного виду цінних паперів у портфелі [11, 1].

Вважаємо, що для інвестора необхідно визначити, яку частку його портфеля будуть становити цінні папери кожної з компаній.

Очікуваний прибуток визначається за формулою:

$$R_p = \sum_i R_i w_i, \quad (1)$$

де: R_p — дохідність портфеля;

R_i — дохідність активу;

w_i — частка активу в портфелі.

Очікуваний ризик всього портфелю визначається за формулою:

$$\sigma_p^2 = E[(R_p - E(R_p))^2] = E \left(\sum_i \sum_j w_i w_j E \left(\sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} \right) \right) \quad (2)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (3)$$

Базуючись на концепції Марковіца, побудуємо задачу багатокритеріальної оптимізації в якій матимемо два критерії: мінімізація ризику та максимізація прибутку.

Маємо дві функції для оптимізації. Перша функція – функція очікуваного прибутку, яка буде оптимізуватися на максимум:

$$f_1 = R_p \rightarrow \max \quad (4)$$

Друга функція – це функція загального ризику портфеля – вона буде оптимізуватися на мінімум:

$$f_2 = \sigma_p \rightarrow \min \quad (5)$$

Обмеженнями для кожної з цих функцій є сума всіх ваг, яка дорівнює 1, та те, що кожен з w_i повинен бути не менше 1% - таке обмеження встановлюється для диверсифікації портфеля, що зменшує ризик:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0,01 \end{cases} \quad (6)$$

Визначивши дві функції робимо згортку критеріїв. Цільова функція згортки оптимізується на мінімум. Також, отримуємо додаткові обмеження: прибуток та ризик невіддільні.

$$W = \frac{\alpha * \sigma_p}{(1 - \alpha) * R_p} \rightarrow \min$$

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{40} w_i = 1 \\ w_i \geq 0,01 \\ \sum_{i=1}^{40} R_i * w_i > 0 \\ \sqrt{w^T * COV * w} \geq 0 \end{cases}$$

$$W = \frac{\alpha * \sqrt{w^T * COV * w}}{(1 - \alpha) * \sum_{i=1}^n R_i * w_i} \rightarrow \min$$

$$(8) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0,01 \\ \sum_{i=1}^n R_i * w_i > 0 \\ \sqrt{w^T * COV * w} \geq 0 \end{cases}$$

Нехай, ми маємо невеликий капітал для інвестування у цінні папери компаній (акції). Для спрощення поставленої задачі, зведемо світове середовище інвестування до фондового ринку США. Фондовий ринок США – це найбільший та найбільш стабільний у світі ринок цінних паперів, тож саме він буде джерелом вибору компаній для інвестування. Ринок акцій достатньо об'ємний, тож інвестиційний портфель буде базуватися на компаніях, які є в інвестиційному портфелі відомого американського інвестора Уоррена Баффета. Цей портфель зарекомендував себе як достатньо надійний та ефективний.

Виходячи з вище зазначеного, інвестиційний портфель містить в собі акції 40 компаній, які є на фондових біржах США, а саме: Apple Inc., Bank Of America Corp, Chevron Corp, Coca Cola Co, American Express Co, Occidental Petroleum, Moodys Corp, Activision Blizzard Inc, Taiwan Semiconductor S.A., Davita Healthcare Partners I, Hp Inc., Verisign Inc., Kroger Co., Liberty Media Corp Delaware, General Mtrs Co., Visa Inc., Amazon Com Inc., Aon Plc., Charter Communications Inc N., Mastercard Inc., Mckesson Corp., Celanese Corp., Ally Financial Inc., Liberty Sirius Xm Series A, T-Mobile Us Inc., Globe Life Inc., Restoration Hardware Holdings Inc., Markel Corp., Liberty Media Corp Formula One., Floor & Decor Holdings, Louisiana-Pacific Corp, Johnson & Johnson,

Marsh & McLennan, Mondelez Intl Inc., Procter & Gamble Co, Jefferies Financial Group Inc., Spdr S&P 500 Etf Trust, United Parcel Service Inc., Vanguard S&P 500 Etf, Microsoft Corp.

Основна мета – визначити частку акцій кожної з цих компаній у своєму портфелі, враховуючи те, що він хоче мінімізувати ризик та максимізувати прибуток. Також важливим фактором є те, що молодий інвестор хоче, щоб кожна компанія займала в портфелі не менше 1% задля диверсифікації портфеля.

Для розв'язання даної задачі використаємо мову програмування Python та програмне середовище Excel.

За допомогою Python та бібліотеки «yfinance» імпортуємо історичні дані цін акцій із сайту Yahoo Finance. Маємо великий об'єм даних починаючи з 2017-12-10 до 2022-12-10. Щоб проводити подальші розрахунки, візьмемо дані за кожні 30 днів.

Для наочного відображення побудуємо два графіки з історичними даними кожної компанії. Будуємо два графіки (рисунок 1 та рисунок 2), кожен з яких буде містити дані 20 компаній:

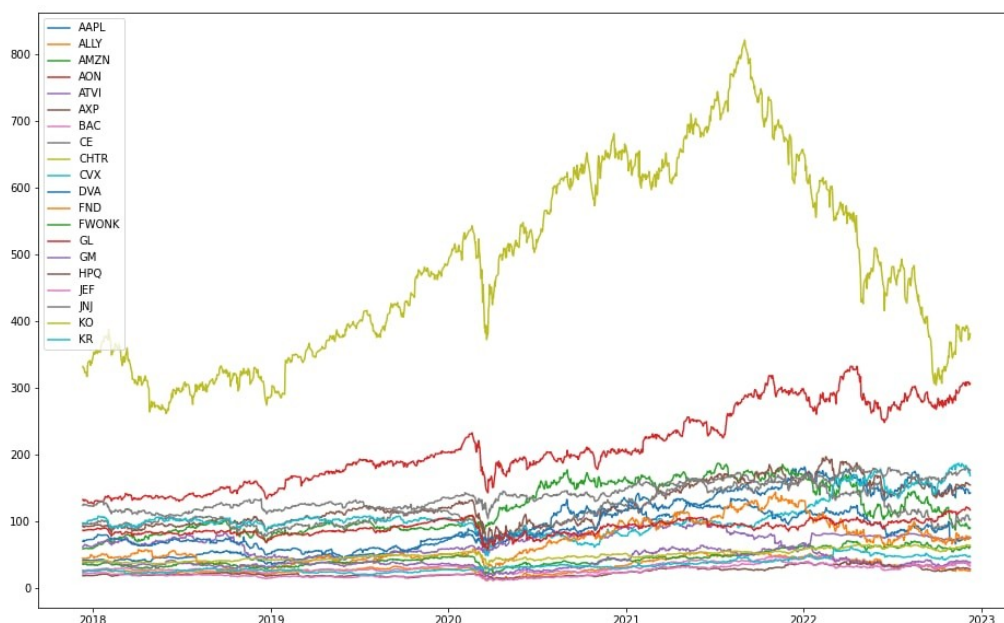


Рисунок 1 — Ціни акцій компаній 1-20

Джерело: побудовано на історичних цінах акцій з ресурсу Yahoo Finance

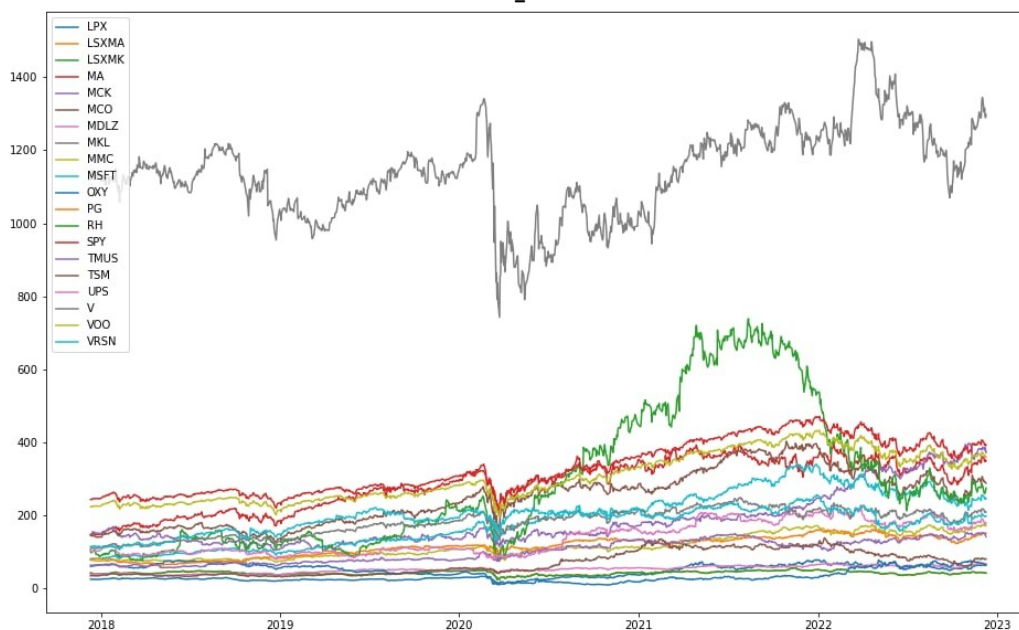


Рисунок 2 — Ціни акцій компаній 21-40

Джерело: побудовано на історичних цінах акцій з ресурсу Yahoo Finance

Наступним етапом буде знаходження норми прибутку. Норму прибутку розрахуємо за формулою [13]:

$$r_i = \ln \left(\frac{P_i}{P_{i-1}} \right)$$

(9)

Наступний етап – це розрахунок очікуваного доходу від акцій кожної компанії. Розрахуємо очікуваний дохід як середнє значення норми прибутку:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{40} r_i}{n} \quad (10)$$

З результатів бачимо, що очікуваний прибуток кожної компанії більший 0, отже, у кожну з цих компаній можна інвестувати кошти.

Окрім очікуваного доходу, потрібно розрахувати ризик кожної акції. За ризик акції приймемо стандартне відхилення її норми прибутку за період часу. Розрахуємо за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} (R_i - \bar{R})^2}{N-1}} \quad (11)$$

Було оброблено дані акцій 40 компаній. Наведемо результати 3 найкращих та 3 найгірших розрахованих компаній для зрівняння у таблиці 1:

Таблиця 1 Перші та останні три компанії

Компанія	Дохід	Ризик
AAPL	0,032	0,115
KR	0,016	0,103
MCK	0,024	0,078
MSFT	0,026	0,086
TMUS	0,021	0,067

Джерело: сформовано авторами

Наступним кроком знайдемо коваріаційну матрицю побудовану на основі даних норми прибутку кожної компанії. Коваріаційна матриця потрібна для розрахунку загального ризику портфеля.

Очікуваний прибуток портфелю розрахуємо за формулою:

$$I = \sum_{i=1}^{40} R_i * w_i \quad (12)$$

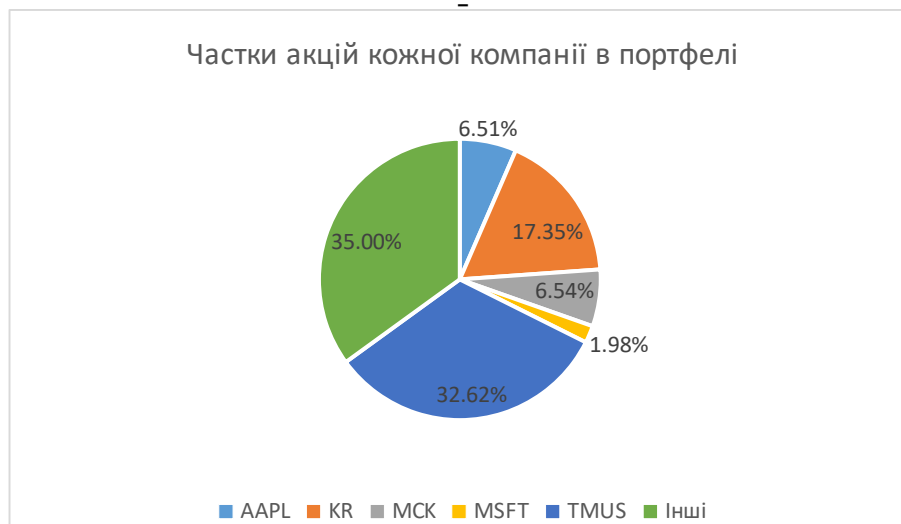


Рисунок 3 — Частки акцій компаній в портфелі

Джерело: побудовано на основі розрахованих вагів акцій кожної компанії у портфелі.

Висновки. У процесі були виконані такі поставленні завдання:

1. Знайти такий оптимальний портфель, що буде максимізувати прибуток, при мінімально можливому ризику;
2. Оцінити частки компаній, виділити основні компанії, які вносять найбільший внесок у портфель;
3. Скласти економіко-математичну модель оптимізації портфеля акцій, яка базується на теорії Гаррі Марковіца.

Була розглянута портфельна модель Гаррі Марковіца, яку було модифіковано задля мінімізації ризику. Модель була побудована на основі історичних даних списку компаній, який складений на основі інвестиційного портфеля Уоррена Баффета, оскільки його портфель добре зарекомендував себе як надійний. Помірний розрив між можливим

отриманим доходом та ризиком можна пояснити тим, що аналіз проводиться на даних, велика частка яких припадає на період пандемії. Пандемія сильно вплинула на діяльність компаній, а відповідно й на ціни акцій.

Отже, при мінімальному ризику 5,39% очікується дохід у розмірі 1,75%. Такі результати можна отримати, якщо використати згортку критеріїв, де перевага надається мінімізації ризику – 0,7. Найбільший внесок у портфель зробили такі компанії: T-Mobile Us Inc., McKesson Corporation, The Kroger Co., Microsoft Corporation та Apple Inc. Ці компанії складають вагому частину портфеля – 65 відсотків.

Враховуючи орієнтованість на диверсифікацію портфеля та співвідношення ризику до можливого прибутку, можна сказати, що портфель є дієвим та таким, який можна використовувати на практиці.

Література:

1. Modern portfolio theory (2023). URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory (дата звернення : 10.02.2023 р.).
2. The Lintner Model (2023). URL : <https://www.investopedia.com/terms/l/lintnersmodel.asp> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
3. Sharpe Ratio Formula and Definition With Examples (2023). URL : <https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
4. Shiller R. (2008). The Subprime Solution: How Today's Global Financial Crisis Happened, and What to Do about It. Princeton University Press, 208 с.
5. Treynor Ratio : What It Is, What It Shows, Formula To Calculate It. (2023). URL : <https://www.investopedia.com/terms/t/treynorratio.asp> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
6. В. О. Капустян, Г. А. Мажара, І. Д. Фартушний. Моделювання економіки. Київ, 2022. С. 214-226.
7. Теорія ризику інвестицій Г. Марковіца (2023). URL : <https://buklib.net/books/24868/> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
8. Модель Марковіца (2023). URL : <https://uk.economy-pedia.com/11036900-markowitz-model> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
9. Harry Markowitz's Modern Portfolio Theory : The Efficient Frontier (2023). URL : <https://www.guidedchoice.com/video/dr-harry-markowitz-father-of-modern-portfolio-theory/> (дата звернення : 10.02.2023 р.).
10. Моделювання доходності та ризику портфеля (2023). URL : https://pidru4niki.com/15660721/investuvannya/modelyuvannya_dohidnosti_riziku_portfelya (дата звернення : 10.02.2023 р.).
11. Теорія ризику інвестицій Гаррі Марковіца. (2023). URL : https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D1%83_%D1%96%D0%BD%D0%B2%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%86%D1%96%D0%B9_%D0%93%D0%B0%D1%80%D1%96_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%86%D0%B0 (дата звернення : 10.02.2023 р.).
12. Rate of return (2023). URL : https://en.wikipedia.org/wiki/Rate_of_return (дата звернення : 10.02.2023 р.).

–
References:

1. Modern portfolio theory (2023). Retrieved from : https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory [in English].
2. The Lintner Model (2023). Retrieved from : <https://www.investopedia.com/terms/l/lintnersmodel.asp> [in English].
3. Sharpe Ratio Formula and Definition With Examples (2023). Retrieved from : <https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp> [in English].
4. Shiller R. (2008) The Subprime Solution: How Today's Global Financial Crisis Happened, and What to Do about It. Princeton University Press. [in English].
5. Treynor Ratio: What It Is, What It Shows, Formula To Calculate It. (2023). Retrieved from : <https://www.investopedia.com/terms/t/treynorratio.asp> [in English].
6. Kapustian, V. O., Mazhara, G. A. & Fartushnyi, I. D. (2022). *Economic Modelling*. Kyiv : KPI [in Ukrainian].
7. Investment risk theory by G. Markowitz (2023). Retrieved from: <https://buklib.net/books/24868/> [in Ukrainian]
8. Model Markovitsa (2023). Retrieved from : <https://uk.economy-pedia.com/11036900-markowitz-model> [in Ukrainian]
9. Harry Markowitz's Modern Portfolio Theory: The Efficient Frontier (2023). Retrieved from : <https://www.guidedchoice.com/video/dr-harry-markowitz-father-of-modern-portfolio-theory/> [in English].
10. Modelling portfolio returns and risk (2023). Retrieved from : https://pidru4niki.com/15660721/investuvannya/modelyuvannya_dohidnosti_riziku_portfelya [in Ukrainian]
11. Investment risk theory by Gary Markowitz [(2023). Retrieved from : https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%80%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D1%83_%D1%96%D0%BD%D0%B2%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B8%D1%86%D1%96%D0%B9_%D0%93%D0%B0%D1%80%D1%96_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%86%D0%B0 [in Ukrainian]
12. Rate of return (2023). Retrieved from : https://en.wikipedia.org/wiki/Rate_of_return [in English].



Ця робота ліцензована Creative Commons Attribution 4.0 International License