

УДК 539.3

*В. Д. Будак, д-р техн. наук, О. Я. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук,
М. Ю. Борисенко, О. П. Пригода, О. В. Бойчук, канд.фіз.-мат.наук*

ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТОНКОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ МЕТОДОМ СТРОБОГОЛОГРАФІЧНОЇ ІНТЕРФЕРОМЕТРІЇ

Досліджуються динамічні характеристики тонкостінної ізотропної еліптичної оболонки методом стробоголографічної інтерферометрії. Описується методика експерименту. Проведено порівняльний аналіз результатів експериментальних та числових досліджень.

Ключові слова: некругова оболонка, власні частоти, форми коливань, голограма, інтерферометрія.

Вступ. Раціональне проектування деталей та елементів конструкцій машин потребує дослідження міцності та стійкості як кожного елемента окремо, так і всієї конструкції в цілому. Не менш важливим є визначення динамічних характеристик, тобто частот та форм власних коливань деталей, для уникнення руйнівної дії явища резонансу. Тому особливе значення набувають надійні експериментальні та чисельні методи визначення частот та форм власних коливань.

Метою цієї роботи є визначення частот та форм власних коливань пружної ізотропної еліптичної циліндричної оболонки методом стробоголографічної інтерферометрії та порівняння отриманих результатів з розрахунками, виконаними методом скінченних елементів на базі програмного засобу Femap [2]. Обраний експериментальний метод широко застосовується багатьма дослідниками завдяки можливості безконтактно, з точністю реєстрації до півхвилі, визначати амплітуди коливань, візуально спостерігати виникнення переміщень та деформування конструкції при статичному навантаженні. Згідно зазначених переваг застосування даного методу для розв'язування поставлених у роботі завдань є актуальним.

В [1, 5] методом голографічної інтерферометрії визначаються частоти та форми вільних коливань ізотропних кругових циліндричних оболонок постійної та змінної товщини еквівалентної маси. Цей метод також використовувався для визначення частот та форм власних коливань лопаток компресора газотурбінного двигуна (ГТД) в [6].

Експериментальне та аналітичне дослідження власних частот еліптичних оболонок еквівалентної маси з різним відношенням півосей широко висвітлене в [9]. Отримані експериментально за допомогою повітряно-реактивного вібраційного грохоту власні частоти та форми коливань добре узгоджуються з аналітичними частотами, розрахованими за допомогою метода Релея – Рітца з урахуванням доданків вищих порядків в позовжніх та колових модальних розкладах.

Теоретичне дослідження частот і форм вільних коливань тонкостінних некругових циліндричних оболонок має певні труднощі, які зумовлені

ні складністю системи вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними із змінними коефіцієнтами та необхідністю задовільнити крайові умови. Різні теоретичні підходи до розв'язування даної проблеми описані в [4, 7, 8].

У наш час широке застосування для розв'язування задач механіки набуло використання систем автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – CAE), які можуть розраховувати конструкцію будь-якої форми завдяки використанню метода скінченних елементів.

Методика проведення експерименту. Голографія – це метод запису і відновлення хвильового фронту, оснований на реєстрації картини інтерференції хвиль та їх дифракції на зафіксованій просторовій структурі [3].

Для визначення частот та форм власних коливань досліджуваної оболонки використовувалась двопроменева оптична схема голографічної установки (рис. 1). Оболонка (8) жорстко закріплювалась на масивній плиті голографічного стенду. Джерелом когерентного випромінювання використовувався He-Ne лазер ЛГН-222 (1), промінь якого, пройшовши затворний механізм (2) та електрооптичний модулятор МЛ-3 (3), відбивається від дзеркала (4), ділиться на два променя за допомогою світлоподілювача (6). Відбитий від світлоподілювача промінь дзеркалом (5) та мікрооб'єктивом (7) формує опорну світлову хвилю, яка освітлює фотопластинку (11). Промінь, пройшовши крізь світлоподілювач та діафрагму (9), сферичним дзеркалом (10) формує пучок освітлення оболонки. Відбившись від поверхні досліджуваного об'єкта, пучок дає предметну світлову хвилю. Інтерференційні картини різних форм коливань збудженої оболонки фіксувались за допомогою фотокамери (12).

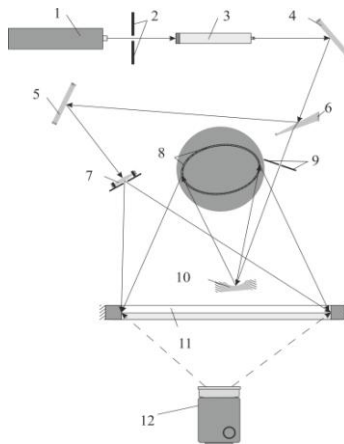


Рис. 1 – Голографічна установка

Проведення експериментального дослідження поділено на наступні етапи:

1. Підготовка поверхні оболонки для проведення експерименту.
2. Закріплення досліджуваної оболонки в спеціальному затискному пристрої.
3. Компонування оптичної схеми голографічної установки.
4. Юстування оптичної схеми.

5. Фіксування на фотопластині голограми оболонки.
6. Фотохімічна обробка та сушка фотопластини.
7. Збудження оболонки за допомогою звукового генератора через п'єзокерамічний вібратор.
9. Модуляція променя прямокутними стробуючими імпульсами.
10. Фіксування форми коливань збудженої оболонки на відповідних власних частотах за допомогою цифрової фотокамери Canon S5 IS.

Результати експерименту. Для експериментального розв'язання поставленої задачі була виготовлена тонкостінна циліндрична еліптична оболонка з високолегованої сталі марки 40X (модуль Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,26$, густина $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$), яку вважаємо ізотропним однорідним матеріалом. Циліндрична еліптична оболонка виточена на станку з ЧПУ та має такі параметри: висота $h = 120 \text{ мм}$, велика піввісь $a = 51,8 \text{ мм}$, мала піввісь $b = 37,295 \text{ мм}$, товщина $d = 2 \text{ мм}$. Для коректного дотримання крайових умов оболонка виготовлялась разом з масивною основою, яка призначена для фіксування у затискному пристрої на масивній плиті голографічної установки лабораторії експериментальної механіки.

Результати експериментальних та аналітичних [2] досліджень частот та форм власних коливань представлені у вигляді порівняльної таблиці 1 та гістограми (рис. 2), де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки.

Таблиця 1 – Порівняння експериментально та чисельно отриманих частот ($\Gamma\text{ц}$)

m	n	$f_{\text{експ.}}$	$f_{\text{чис.}}$	$\varepsilon, \%$
1	4	1723	1712	0,64%
1	6	2306	2161	6,29%
1	8	4097	3860	5,78%
1	10	6519	6154	5,60%
1	12	9493	8978	5,43%
2	6	4782	4498	5,94%
2	8	5597	4911	12,26%

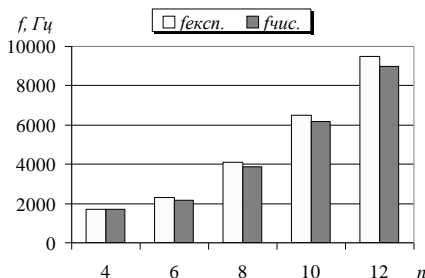
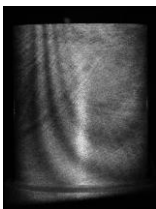


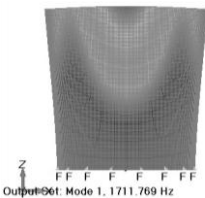
Рис. 2 – Порівняння частот для форм коливань при $m = 1$

Нижче для ілюстрації приводяться деякі форми коливань, які були отримані експериментальним та чисельним методами (рис. 3).

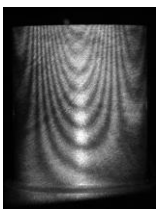
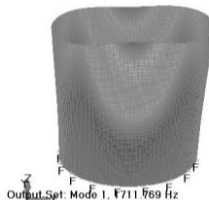
Для візуалізації переміщення точок поверхні оболонки, що отримані за допомогою програми Фетар, представлені в п'ятикратному збільшенні.



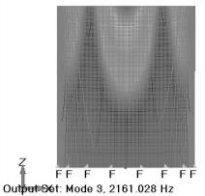
$$m = 1, n = 4, f = 1723 \text{ Гц}$$



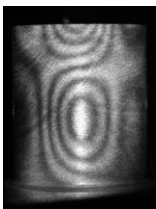
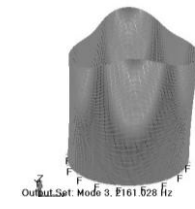
$$m = 1, n = 4, f = 1712 \text{ Гц}$$



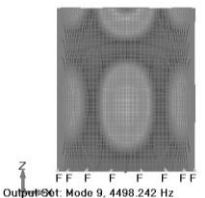
$$m = 1, n = 6, f = 2306 \text{ Гц}$$



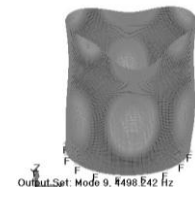
$$m = 1, n = 6, f = 2161 \text{ Гц}$$



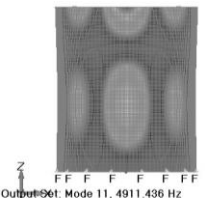
$$m = 2, n = 6, f = 4498 \text{ Гц}$$



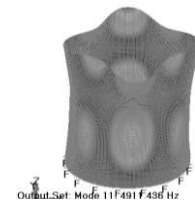
$$m = 2, n = 6, f = 4782 \text{ Гц}$$



$$m = 2, n = 8, f = 4911 \text{ Гц}$$



$$m = 2, n = 8, f = 5597 \text{ Гц}$$



а)

б)

Рис. 3 – Порівняння експериментально (а) та чисельно (б) отриманих форм коливань (спостереження у двох напрямках)

Експериментально підтверджуються чисельно отримані симетричні та антисиметричні форми коливань, що добре спостерігається для першої моди коливань при $m = 1$, $n = 4$ (рис. 4).

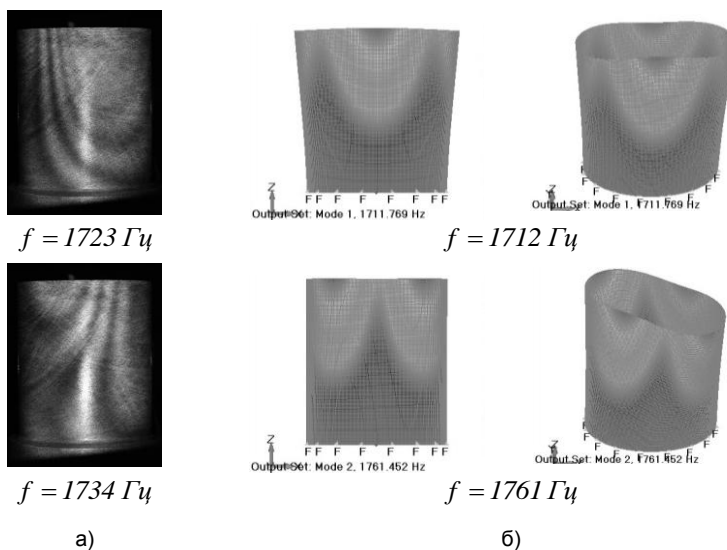


Рис. 4 – Симетричні та антисиметричні форми коливань: а) отримані експериментально; б) чисельно отримані (у двох напрямках спостереження)

Висновки. Проведено дослідження вільних коливань некругової циліндричної оболонки методом стробоголографічної інтерферометрії, отримані інтерференційні картини форм власних коливань досліджуваної оболонки.

Експериментальні частоти власних коливань циліндричної еліптичної оболонки порівнювались з розрахованими за допомогою програми Femap:

- спостерігається мале відхилення між експериментально визначеними частотами та частотами, розрахованими чисельно: максимальне відхилення не перевищує 13%, а для першої частоти 1%;
- експериментально підтверджується наявність симетричних та антисиметричних форм коливань, які наочно зображені на рис. 4;
- порядок появи форм коливань при чисельних розрахунках та в експерименті повністю співпадає.

Узгодження отриманих частот та форм коливань вказує на добру відповідність експериментальних і чисельних методів досліджень.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Будак В. Д.** Исследование свободных колебаний цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины с помощью метода голографической интерферометрии / В. Д. Будак, А. Я. Григоренко, В. В. Хоришко, М. Ю. Борисенко // Прикладная механика. – 2014. – 50, № 1 – С. 101–109.

2. **Будак В. Д.** Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В. Д. Будак, А. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, Е. В. Бойчук // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2014. – 57, № 1. – С. 145–152.
3. **Вест Ч.** Голографическая интерферометрия / Ч. Вест – М.: Мир, 1982. – 504 с.
4. **Григоренко А. Я.** Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощью метода сплайн-коллокации / А. Я. Григоренко, С. В. Пузырев, Е. А. Волчек // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2011. – 54, № 3. – С. 60–69.
5. **Григоренко А. Я.** Экспериментальное исследование собственных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки методом голографической интерферометрии / А. Я. Григоренко, Ю. Г. Золотой, А. П. Пригода [и др.] // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2012. – 55, № 3. – С. 93–98.
6. **Макаева Р. Х.** Исследование резонансных частот и форм колебаний лопаток компрессора ГТД с применением голографической интерферометрии / Р. Х. Макаева, А. Х. Каримов, А. М. Царева, Э. М. Фатыхов // *Авиационно-космическая техника и технология* – 2011 – №8(85) – С. 57–60.
7. **Hayek S. I.** Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S. I. Hayek, J. E. Boisvert // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – 128, № 3. – P. 1063–1072.
8. **Patel B. P.** Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory / B. P. Patel, S. S. Gupta, M. S. Loknath, C. P. // *Composite Structures* – 2005 – Vol. 69, № 3. – P. 259–270
9. **Sewall J. L.** An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells / J. L. Sewall, W. M. Thompson, C. G. Pnsey // *NASA TN D-6089*, 1971. – 81 p.

*В. Д. Будак, д-р техн. наук, А. Я. Григоренко, д-р физ.-мат. наук,
М. Ю. Борисенко, А. П. Пригода, Е. В. Бойчук, канд. физ.-мат. наук*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ НЕКРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ СТРОБОГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Исследуются динамические характеристики тонкостенной изотропной эллиптической оболочки методом стробоголографической интерферометрии. Описывается методика проведения эксперимента. Проведен сравнительный анализ результатов экспериментальных и численных исследований.

Ключевые слова: некруговая оболочка, собственные частоты, формы колебаний, голограмма, интерферометрия.

*V. D. Budak, Dr. Sci. (Tech.), A. Ya. Grigorenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
M. Yu. Borisenko, A. P. Prigoda, O. V. Boychuk, PhD (Phys.-Math.)*

DETERMINATION OF THE NATURAL FREQUENCIES OF THIN-WALLED SHELLS WITH NON-CIRCULAR CROSS-SECTION USING THE METHOD OF STROBOHOLOGRAPHIC INTERFEROMETRY

The dynamic characteristics of a thin-walled isotropic elliptical shell are investigated by stroboscopic interferometry method. The experimental technique was described. The experimental results and the numerical ones are analyzed comparatively.

Keywords: non-circular shell, natural frequencies, waveform, hologram, interferometry.

The machines components and construction elements rational design requires research of strength and stability for both the entire structure and its separate elements. It is also important to determine the dynamic characteristics, i.e., the parts natural vibration frequencies and modes to avoid

the destructive effects of resonance. That is why reliable experimental and numerical methods used to determine natural frequencies and modes of oscillations are of particular importance.

The purpose of this issue is to measure natural frequencies and modes of oscillation of elastic isotropic elliptical cylindrical shell using stroboscopic holographic interferometry method and to compare the results with the calculations performed using the finite element method with the help of FEMAP software as a modeler and NX Nastran as a solver [2]. The selected experimental method is widely used by many researchers due to its advantages, such as an ability to determine the amplitude with high accuracy, visually observe movements occurrence and deformation of structures under static load without contact. According to the mentioned advantages the usage of this method for solving formulated problems is relevant.

In the works [1, 5] isotropic circular cylindrical shells of constant and variable thickness and equivalent weight free oscillations frequencies and forms are defined using the holographic interferometry method. The method was also used to study the free vibration resonant frequencies and modes of gas turbine engine compressor blades in the work [6].

Experimental and analytical study of natural frequencies of elliptical membranes of equivalent weight with different semiaxes ratio is widely covered in the work [9]. Frequencies and modes experimentally obtained by using air-jet vibrating screen are in good agreement with the analytical frequencies calculated using Rayleigh – Ritz method.

Theoretical study of thin non-circular cylindrical shells free oscillation frequencies and modes has certain difficulties caused by the complexity of the resolving system of partial differential equations with variable coefficients and the need to meet the boundary conditions. Various theoretical approaches for solving this problem are described in works [4, 7, 8].

Currently computer-aided engineering systems which can calculate designs of any shape by using finite element method are widely used for solving problems in mechanics.

For this problem solving a thin elliptical cylindrical shell through experimental research was made of high-alloy steel 40X (Young's modulus $E = 214\text{GPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0,26$, density $\rho = 7820\text{kg/m}^3$) which we consider a homogeneous isotropic material. Elliptical cylindrical shell was carved with CNC machine tools and has the following geometric parameters: height $h = 120\text{mm}$, major axis $a = 51,8\text{mm}$, minor axis $b = 37,295\text{mm}$, thickness $d = 2\text{mm}$. To satisfy boundary conditions the shell was made together with the massive base which is meant for fixing the shell in the clamping device on a massive slab of a holographic installation in the laboratory of experimental mechanics.

The study of free-oscillating non-circular cylindrical shell was conducted using stroboscopic holographic interferometry technique. As a result the investigated object interference patterns of natural oscillations forms were obtained.

Natural frequencies of elliptical cylindrical shell were compared with the ones calculated by FEMAP:

- frequencies determined experimentally and calculated numerically differ slightly: maximum difference -13%, 1% for the first frequency;
- the presence of the symmetric and antisymmetric modes was experimentally confirmed. They are shown on fig. 4;
- the order of oscillation modes appearance in numerical calculation and in experiment coincides.

The obtained frequencies and modes agreement indicates good correspondence between experimental and numerical research methods.

REFERENCES

1. **Budak V. D.** Holographic interferometry study of the free vibrations of cylindrical shells of constant and variable thickness / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, V. V. Khorishko, M. Yu. Borisenko // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – 50, № 1. – P. 101–109. (in Russian).
2. **Budak V.D.** Determination of natural frequencies of an elliptic shell of constant thickness by the finite element method / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boychuk // *Mathematical methods and physicomachanical fields.* – 2014. – 57, № 1. – P. 145–152. (in Russian).
3. **Vest Ch.** Holographic interferometry / Ch. Vest. – M. : Mir, 1982. – 504 p. (in Russian).
4. **Grigorenko A. Ya.** Investigation of free vibrations of non-circular cylindrical shells by the spline-collocation method / A. Ya. Grigorenko, S. V. Puzyrev, E. A. Volchek // *Mathematical methods and physicomachanical fields.* – 2011. – 54, № 3. – P. 60–69. (in Russian).
5. **Grigorenko A. Ya.** Experimental investigation of dynamic of thick-walled cylindrical shells by method of holographic interferometry / A. Ya. Grigorenko, Yu. G. Zolotoi, A. P. Prigoda, I. Yu. Zhuk, V. V. Khorishko, A.V. Ovcharenko // *Mathematical methods and physicomachanical fields.* – 2012. – 55, № 3. – P. 93–98. (in Russian).
6. **Makayeva R. Kh.** Investigation of resonance frequencies and oscillation modes in GTE compressor blades with use of the holographic interferometry / R. Kh. Makayeva, A. Kh. Karimov, A. M. Tzareva, E. M. Fatihova // *Aviation space technics and technology* – 2011. – №8(85). – P. 57–60. (in Russian).
7. **Hayek S. I.** Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory / S. I. Hayek, J. E. Boisvert // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2010. – 128, № 3. – P. 1063–1072.
8. **Patel B. P.** Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory / B. P. Patel, S. S. Gupta, M. S. Loknath // *Composite Structures* – 2005 – Vol. 69, № 3. – P. 259–270.
9. **Sewall J. L.** An experimental and analytical vibration study of elliptical cylindrical shells / J. L. Sewall, W. M. Thompson, C. G. Pnsey // *NASA TN D-6089*, 1971. – 81 p.

*Миколаївський національний університет
ім. В. О. Сухомлинського,
Миколаїв, Україна,
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України,
Київ, Україна*

Надійшла до редколегії 29.04.2015