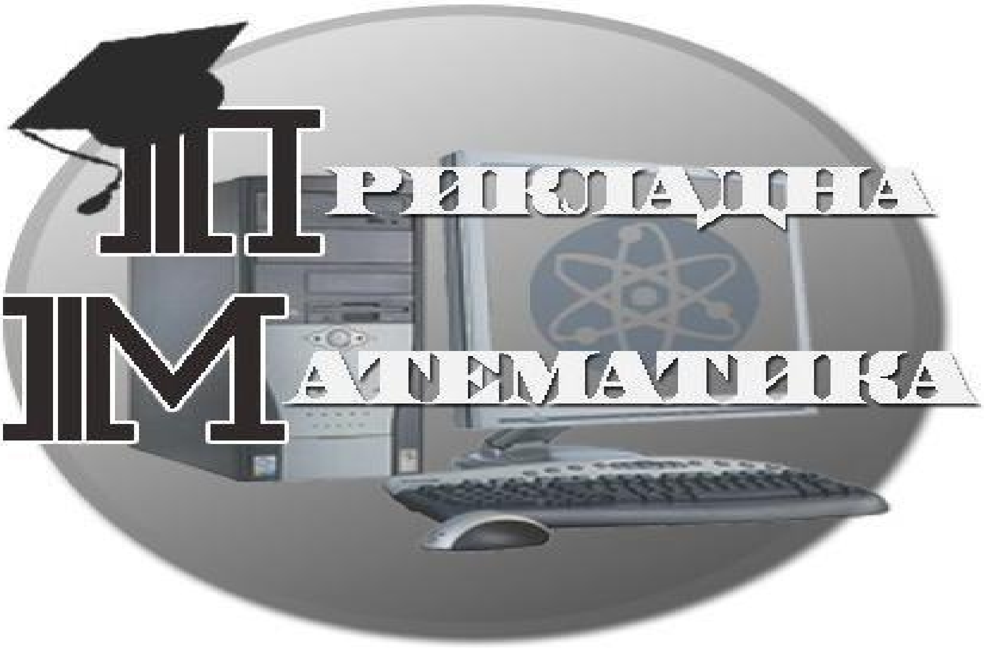
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту
Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання



Методичні рекомендації
з вивчення дисципліни та виконання контрольних завдань
для студентів заочної форми навчання

спеціальності 1001 Техніка та енергетика аграрного виробництва

(6.100101 - Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі
6.100102 - Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва)

Миколаїв 2016

УДК 519.6
ББК 22.19
П 75

Методичні рекомендації для студентів заочної форми навчання технічних спеціальностей аграрних ВНЗ, які вивчають дисципліну “Прикладна математика”

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 10.06. 2016 р., протокол № 10

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р. екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
М. А. Домаскіна – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
А. М. Жорова – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
М. О. Єгорова – асистент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І.Т. Кіщак – д-р. екон. наук, професор, декан факультету економіки, Миколаївський національний університет імені В.О.Сухомлинського

Г.О. Іванов – канд.техн.наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП

Для наукового пізнання якогось процесу чи явища можна користуватися в якості інструментаріїв такими методами: теоретичним аналізом, спостереженням, науковим експериментом, моделюванням. Всі ці методи використовуються як в технічних науках, так і в економічних. Розв'язок будь-якої практичної задачі починають зі складання математичної моделі. Побудова математичної моделі дає змогу використовувати аналоги відомих процесів і за допомогою порівняння кількісних ознак приймати правильні рішення. До моделі основного об'єкта ставлять вимогу, щоб вона відображала суть досліджуваної проблеми. Водночас вона має бути позбавлена несуттєвих деталей, що дає змогу знайти більш ефективне рішення, яке легше реалізується на практиці. Однак, з ускладненням математичної моделі розрахунки вимагають величезної обчислювальної роботи. Тому найбільш ефективне використання чисельних методів, за допомогою яких здійснюється розв'язання моделі з наперед заданою точністю, важливе для всіх прикладних задач.

При сучасному розвитку науки всі етапи розв'язання практичної задачі – від побудови математичної моделі до отримання кінцевого результату – охоплює "Прикладна математика". В даних методичних рекомендаціях розглянуто елементи лінійної алгебри, а саме, методи розв'язання систем лінійних рівнянь. Що є допоміжною ланкою при побудові математичних моделей на основі методу найменших квадратів. Розглянуті елементи інтерполювання та екстраполювання функцій, які широко застосовуються при обробці експериментальних даних.

Контрольні завдання та методичні рекомендації складено відповідно до навчальної програми курсу «Прикладна математика» для студентів заочної форми навчання спеціальності 1001 «Техніка та енергетика аграрного виробництва». Вони включають: основні теоретичні відомості, порядок виконання та правила оформлення практичних та лабораторних робіт, теоретичні питання для самостійної роботи, приклади виконання практичних завдань, список рекомендованої літератури.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Розв'язок системи лінійних рівнянь

Фактично цей розділ при побудові та дослідженні математичних моделей є допоміжним. Побудова великої кількості математичних моделей зводиться до розв'язання систем лінійних рівнянь.

У загальному вигляді система m лінійних рівнянь з n невідомими записується так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються *невідомими або змінними* системи лінійних рівнянь; $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ - *коефіцієнтами* при невідомих системи. Коефіцієнт при невідомому x_{ij} у i-м рівнянні позначається через a_{ij}, де перший індекс i вказує номер рівняння, у якому знаходиться даний коефіцієнт, а другий індекс j - номер стовпця невідомого, при якому знаходиться даний коефіцієнт. Наприклад, коефіцієнт a_{23} знаходиться в другому рівнянні системи при невідомому x_3. Числа b_1, b_2, ..., b_m називаються *вільними членами* системи. Коротко лінійна система (1.1) може бути записана так:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, ..., m). \tag{1.1'}$$

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1.1) називається будь-яка сукупність чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, що будучи підставлені на місце невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ у рівняння даної системи, перетворює всі ці рівняння в числові тотожності.

Система лінійних рівнянь (1.1) називається *сумісною,* якщо вона має розв'язок. Якщо система лінійних рівнянь не має розв'язка, то вона називається *несумісною,* або *суперечливою.*

Система лінійних рівнянь може мати одне чи декілька розв'язків і називається *визначеною,* якщо має один єдиний розв'язок, і *невизначеною,* якщо має більше одного розв'язка.

Дві системи рівнянь називають *еквівалентними (рівносильними),* якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

Розглянемо систему лінійних рівнянь, у якої число невідомих співпадає з числом рівнянь, отже систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.2}$$

Дану систему, користуючись матричними позначеннями, можна записати наступним чином:

$$A \cdot X = B, \tag{1.2'}$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається *матрицею системи* (1.2), а вектори X і B — відповідно *вектором-стовпцем невідомих* системи і *вектором-стовпцем* її *вільних членів.*

1.1.1. Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

При розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом слід помножити зліва обидві частини (1.2') на A^{-1} (очевидно, якщо існує ліва обернена матриця A^{-1}):

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$

Але добуток $A^{-1}\cdot A=E$, отже, $E\cdot X=A^{-1}\cdot B$, звідки

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

<u>Приклад</u>. Знайти розв’язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

Розв’язок.

Запишемо систему у вигляді $A\cdot X=B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Обернену матрицю будемо знаходити за схемою:

1) обчислюємо визначник матриці $\det A$;

2) знаходимо транспоновану матрицю A^T;

3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;

4) записуємо обернену матрицю за правилом

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & ... & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & ... & A_{2n}^T \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & ... & A_{nn}^T \end{pmatrix}$$

Знаходимо A^{-1}:

$$detA=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}=6;$$

A_{11}^T =-6; A_{12}^T =-2; A_{13}^T =4; A_{21}^T =0; A_{22}^T=-4; A_{23}^T=2; A_{31}^T=6; A_{32}^T=3; A_{33}^T=-3;

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix};\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Далі, дістанемо:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}-1 & -1/3 & 2/3\\ 0 & -2/3 & 1/3\\ 1 & 1/2 & -1/2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -2\end{bmatrix}.$$

Таким чином, x_1=l; x_2=2; x_3=-2.

1.1.2. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих (метод Гауса)

Найбільш розповсюдженим методом розв'язання систем лінійних рівнянь (1.1) є метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса опирається на здійснення елементарних перетворень. *Елементарними перетвореннями* називаються наступні три типи перетворень систем лінійних рівнянь: перестановка двох рівнянь системи; множення обох частин рівняння системи на будь-яке відмінне від нуля число; додавання (вирахування) до обох (з обох) частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на будь-яке відмінне від нуля число. Можна довести, що елементарні перетворення переводять дану систему лінійних рівнянь в еквівалентну, тобто розв'язок даної системи не змінюється.

За допомогою елементарних перетворень вихідна система лінійних рівнянь зводиться до рівносильної їй системі трикутної форми.

Припустимо, що $a_{11}\neq 0$, тоді a_{11} називається ведучим елементом для першого кроку. (Якщо ця умова не виконується рівняння можна поміняти місцями рівняння або стовпці з відповідними невідомими). Тоді поділимо на нього перше рівняння системи (2.1) і за допомогою утвореного рівняння виключимо невідому x_1 з другого, третього,..., *m*-го рівнянь. В результаті таких перетворень дістанемо рівносильну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\quad\ldots\quad+\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n=\dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \qquad a'_{22}x_2+\quad\ldots\quad+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2+\quad\ldots\quad+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases}.$$

Коефіцієнти перетвореної системи обчислюють за формулами

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{1l}}{a_{11}} a_{k1}, \qquad b'_k = b_k - \frac{b_1}{a_{11}} a_{k1}, \qquad k = 2,...,m; \qquad l = 2,...,n.$$

На другому кроці проведемо процес виключення, але вже с системою з *m-1* рівняння, починаючи с другого. При цьому припустимо, що $a_{22} \neq 0$. a_{22} - ведучий елемент другого кроку. Поділимо друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ та виключимо невідому x_2 з решти рівнянь. Перше рівняння залишаємо без змін.

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \quad \ldots \quad + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \quad x_2 + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 + \quad \ldots \quad + \dfrac{a'_{2n}}{a'_{22}} x_n = \dfrac{b'_2}{a'_{22}} \\ \qquad a''_{33} x_3 + \quad \ldots \quad + a''_{3n} x_n = b''_3 \\ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad a''_{m3} x_3 + \quad \ldots \quad + a''_{mn} x_n = b''_m \end{cases}.$$

Коефіцієнти цієї системи знаходять за формулами

$$a''_{kl} = a_{kl}' - \frac{a_{2l}'}{a_{22}'} a_{k2}', \qquad b''_k = b_k' - \frac{b_2'}{a_{22}'} a_{k2}', \qquad k = 3,...,m; \qquad l = 3,...,n.$$

Далі перше та друге рівняння залишаємо без змін, 3-є рівняння поділимо на a_{33}'', а з решти рівнянь виключаємо x_3 за рахунок третього рівняння і т.д.

За скінчене число кроків, яке визначається рангом матриці, ми дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \quad \dots \quad + d_{1r}x_r + d_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad x_2 + \quad \dots \quad + d_{2r}x_r + d_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad\qquad x_r + d_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + d_{rn}x_n = \beta_r \\ \qquad 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = \beta_{r+1} \\ \qquad .. \qquad \dots \qquad \dots \\ \qquad 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n = \beta_s \end{cases}.$$

Матриця коефіцієнтів останньої системи має трикутний вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1r} & d_{1,r+1} & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & \dots & d_{2r} & d_{2,r+1} & \dots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & d_{3r} & d_{3,r+1} & \dots & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{r,r+1} & \dots & d_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Таким чином, отримаємо, що система рівнянь (1.1) або не сумісна, якщо хоча б один вільний член з $\beta_{r+1},\dots,\beta_s$ не дорівнює нулю, або система (1.1) сумісна.

Нехай система (1.1) сумісна. Тоді невідомі $x_1, x_2, \dots, x_r$ - базисні, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ - вільні.

Щоб знайти загальний розв'язок системи рівнянь (1.1) необхідно з *r*-го рівняння виразити $x_r = \beta_r - d_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - d_{rn}x_n$ і підставити у *r-1*-ше рівняння системи. Далі, з *r-1* рівняння знайдемо x_{r-1} і виключимо x_r, x_{r-1} з *r-2* –го рівняння і т.д. продовжуємо цей процес. В результаті дістанемо систему відносно вільних невідомих $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, які приймають довільні значення.

<u>Приклад.</u> Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 \qquad = 8 \\ 2x_1 \qquad - 5x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

1. $a_{11} \neq 0$. Перше рівняння ділимо на $a_{11} = 2$. Крім того, помножимо перше рівняння на –4 і додамо цей результат до другого рівняння. Помножимо знов перше рівняння (робоче рівняння) на –2 і додамо до третього рівняння. В результаті дістанемо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3/2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -8x_2 + 4x_3 - 12x_4 = 8 \\ -2x_2 - 2x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}.$$

2. $a_{22} \neq 0$. Перше рівняння залишаємо без змін, а друге ділимо на $a_{22} = -8$. Крім того, помножимо друге рівняння на 2 і додамо цей результат до третього рівняння. Дістанемо,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3/2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 1/2x_3 + 3/2x_4 = -1 \\ -3x_3 - 6x_4 = -3 \end{cases}. \quad \text{Тоді,} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 3/2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 1/2x_3 + 3/2x_4 = -1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Звідси, $x_3 = 1 - 2x_4$

$$x_2 = -1 + 1/2(1 - 2x_4) - 3/2x_4 = -1/2 - 5/2x_4$$

$$x_1 = -(-1/2 - 5/2x_4) + 3/2(1 - 2x_4) - 3x_4 = 2 - 7/2x_4.$$

В наведеному прикладі x_1, x_2, x_3 - базисні невідомі, x_4 - вільна невідома.

Базисний розв'язок: x_1=2; x_2=-1/2; x_3=1 при $x_4 = 0$.

Метод Гауса з вибором головного елементу для розв'язання систем лінійних рівнянь є більш точним методом ніж метод Гауса, тому що близькість до нуля ведучих елементів може привести до втрати точності знайденого результату. Отже, в методі Гауса з вибором головного елементу обирається максимальний за модулем ведучий елемент, який треба розташувати в лівому верхньому куті за допомогою перестанови рівнянь і невідомих.

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гауса з вибором головного елементу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}.$$

Максимальним за модулем коефіцієнтом є –5. Переставимо місцями перше та друге рівняння та стовпці при невідомих x_1 і x_2

$$\begin{cases} -5x_2 + x_1 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}.$$

Поділимо перше рівняння на головний елемент і виключимо стовпець при x_2 з 2-4 рівняння:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{5} \\ 2\frac{1}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3 + 1\frac{1}{5}x_4 = -\frac{1}{5} \\ 1\frac{1}{5}x_1 + 1\frac{1}{5}x_3 + 1\frac{1}{5}x_4 = 4\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}x_1 + 1\frac{1}{5}x_3 - 1\frac{4}{5}x_4 = 6\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Другий крок: ведучий елемент вже розташовано на місці елемента a_{22}' .Тому поділимо 2 рівняння на 2,2 та виключимо невідому x_1 з 3, 4 рівняння.

$$\begin{cases} x_2 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_3 - 0{,}2x_4 = 0.2 \\ x_1 - 0{,}363636x_3 + 0{,}545454x_4 = -0{,}090909 \\ 1{,}636363x_3 + 0{,}545455x_4 = 4{,}909091 \\ 1{,}272727x_3 - 1{,}909091x_4 = 6{,}818182 \end{cases}$$

Ведучий елемент на 3 етапі дорівнює –1,909091. Отже, поміняємо третє та четверте рівняння місцями, також стовпець при невідомих x_3 та x_4.

$$\begin{cases} x_2 \quad -0{,}2x_1 \quad -0{,}2x_4 \quad -0{,}2\,x_3 = 0{,}2 \\ \quad x_1 \; + \; 0{,}545454\,x_4 - \; 0{,}363636\,x_3 = -0{,}090909 \\ \quad -1{,}909091\,x_4 + 1{,}272727\,x_3 = 6{,}818182 \\ \quad 0{,}545455\,x_4 + 1{,}636363\,x_3 = 4{,}909091 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x_2 \quad -0{,}2x_1 \quad -0{,}2x_4 \quad -0{,}2\,x_3 = 0{,}2 \\ \quad x_1 \; + \; 0{,}545454\,x_4 - \; 0{,}363636\,x_3 = -0{,}090909 \\ \quad x_4 - 0{,}666666\,x_3 = -3{,}571428 \\ \quad 1{,}999999\,x_3 = 6{,}857141 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 \quad -0{,}2x_1 \quad -0{,}2x_4 \quad -0{,}2\,x_3 = 0{,}2 \\ \quad x_1 \; + \; 0{,}545454\,x_4 - \; 0{,}363636\,x_3 = -0{,}090909 \\ \quad x_4 - 0{,}666666\,x_3 = -3{,}571428 \\ \quad x_3 = 3{,}428572 \end{cases}.$$

Звідси, оберненим шляхом дістанемо:

$x_3 = 3{,}428572;$

$x_4 = -1{,}285716;$

$x_1 = 1{,}857142;$

$x_2 = 1.$

Перевірка: 0,000004=0;
-1,000002= -1;
4,999998=5;
7,000004=7.

1.2. Метод найменших квадратів при побудові математичних моделей

У процесі вивчення різних питань природознавства, економіки і техніки доводиться на основі великої кількості дослідних даних виявляти суттєві фактори, які впливають на досліджуваний об'єкт, а також встановлювати форму зв'язку між різними зв'язаними одна з одною величинами (ознаками).

Нехай у результаті досліджень дістали таку таблицю деякої функціональної залежності:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n

y	y_1	y_2	…	y_n

Треба знайти аналітичний вигляд функції $y=f(x)$, яка добре відображала б цю таблицю дослідних даних. Функцію $y=f(x)$ можна шукати у вигляді одного з інтерполяційних поліномів, але інтерполяційні поліноми не завжди добре відображають характер поведінки таблично заданої функції. До того ж значення y_i дістають у результаті експерименту, а вони, як правило, сумнівні. У цьому разі задача інтерполювання табличної функції втрачає сенс. Тому шукають таку функцію $y=F(x)$, значення якої при $x=x_i$ досить близькі до табличних значень y_i (i=1,2,...,n). Формулу $y=F(x)$ називають *математичною моделлю*, *емпіричною функцією*, або *рівнянням регресії у* на x. Емпіричні формули мають велике практичне значення, вдало підібрана емпірична формула дає змогу не тільки апроксимувати сукупність експериментальних даних, "згладжуючи" значення величини y, а й екстраполювати знайдену залежність на інші проміжки значень x.

Процес побудови емпіричних формул складається з двох етапів: встановлення загального виду цієї формули і визначення найкращих її параметрів.

Щоб встановити вигляд математичної моделі, на площині будують точки з координатами (x_i, y_i) (i=1,2,...,n). Деякі з цих точок сполучають плавною кривою, яку проводять так, щоб вона проходила якомога ближче до всіх даних точок. Після цього візуально визначають, графік якої з відомих нам функцій найкраще підходить до побудованої кривої. Звичайно, намагаються підібрати найпростіші функції: лінійну, квадратичну, дробово-раціональну, степеневу, показникову, логарифмічну.

Встановивши вигляд емпіричної формули, треба знайти її параметри (коефіцієнти). Найточніші значення коефіцієнтів емпіричної формули визначають ***методом найменших квадратів***. Цей метод запропонували відомі математики К. Гаус і А. Лежандр. Розглянемо ідею методу найменших квадратів.

Нехай емпірична формула має вигляд

$$y=F(x; a_1, a_2, ..., a_m), \tag{1.3}$$

де $a_1, a_2, ..., a_m$ - невідомі коефіцієнти. Треба знайти такі значення коефіцієнтів a_i (i=1,2,...,m) за яких задана крива якомога ближче проходитиме до всіх n точок (x_1, y_1), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), знайдених експериментально. Зрозуміло, що жодна з експериментальних точок не задовольняє точно рівняння. Нев'язки (відхилення) від підстановки координат (x_i, y_i) у рівняння (1.3) дорівнюватимуть величинам $\delta_i = y_i - F(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)$ (i=1,2,...,n).

За методом найменших квадратів найкращі значення коефіцієнтів a_1, a_2, ..., a_m ті, для яких сума квадратів відхилень

$$S(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i; a_1, a_2, ..., a_m))^2 \qquad (1.4)$$

дослідних даних y_i від обчислених за емпіричною формулою (1.3) найменша. Звідси випливає, що величина (1.4), яка є функцією від коефіцієнтів $a_1, a_2, ..., a_m$ повинна мати мінімум. Необхідна умова мінімуму функції багатьох змінних — її частинні похідні мають дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{\partial S(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_1} = 0; \ \frac{\partial S(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_2} = 0; \ \ldots; \ \frac{\partial S(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_m} = 0.$$

Продиференціювавши вираз (1.4) по невідомих параметрах a_1, a_2, ..., a_m матимемо відносно них систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)) \cdot \dfrac{\partial F(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_1} = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)) \cdot \dfrac{\partial F(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - F(x_i; a_1, a_2, ..., a_m)) \cdot \dfrac{\partial F(a_1, a_2, ..., a_m)}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Система (1.5) називається ***нормальною***. Якщо вона має єдиний розв'язок, то він і буде шуканим.

Якщо емпірична функція (1.3) лінійна відносно параметрів a_1, a_2, ..., a_m, то нормальна система (1.5) буде системою з m лінійних рівнянь відносно шуканих параметрів.

Будуючи емпіричні формули, припускатимемо, що експериментальні дані (x_i, y_i) $(i=1,2,...,n)$ додатні.

Якщо серед значень x_i і y_i є від'ємні, то завжди можна знайти такі додатні числа p і q, що $\overline{x_i}=x_i+p>0$ і $\overline{y_i}=y_i+q>0$ $(i=1,2,...,n)$. Тому розв'язування поставленої задачі завжди можна звести до побудови емпіричної формули для додатних значень $(\overline{x_i}, \overline{y_i})$.

Побудова лінійної емпіричної формули.

Нехай між даними (x_i, y_i) $(i=1,2,...,n)$ існує лінійна залежність. Шукатимемо емпіричну формулу у вигляді

$$y=ax+b, \tag{1.6}$$

де коефіцієнти a і b невідомі.

Знайдемо значення a і b, за яких функція $S(a, b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ матиме мінімальне значення. Щоб знайти ці значення, прирівняємо до нуля частинні похідні функції $S(a, b)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial a}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-x_i)=0, \\ \dfrac{\partial S(a,b)}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)(-1)=0. \end{cases}$$

Звідси, врахувавши, що $\sum_{i=1}^{n}b=nb$, маємо

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i. \end{cases} \tag{1.7}$$

Розв’язавши відносно a і b систему, знайдемо

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}.$$

Зазначимо, що, крім графічного, є ще й аналітичний критерій виявлення лінійної залежності між значеннями x і y.

Аналітичний критерій лінійної залежності.

Покладемо: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $k_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ (i=1,2,...,n-1). Якщо k_i=const, то залежність між x і y лінійна, тобто точки (x_i, y_i) лежатимуть на одній прямій. Якщо $k_1 \approx k_2 \approx ... \approx k_{n-1}$, то між x і y існує майже лінійна залежність, оскільки точки (x_i, y_i) лежатимуть близько до деякої прямої.

Приклад. Побудувати лінійну функцію $y=ax+b$ для залежності, поданої таблично:

x	0,6	0,8	1,1	1,4	1,8	2,0
y	0,194	0,603	1,213	1,788	2,621	2,981

Спочатку перевіримо залежність на лінійність: k_1=2,045; k_2=2,033; k_3=1,917; k_4=2,083; k_5=1,8. Усі обчислені k_i (i=1,2,...,5) відрізняються одне від одного на величину, яка не перевищує 0,3. Отже, для даної залежності можна будувати лінійну емпіричну формулу.

Для обчислення коефіцієнтів a і b складемо наступну таблицю

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	δ
1	0,6	0,194	0,1164	0,36	-0,007
2	0,8	0,603	0,4824	0,64	-0,002
3	1,1	1,213	1,3343	1,21	0.013
4	1,4	1,788	2,5032	1,96	-0,011
5	1,8	2,621	4,7178	3,24	0,023
6	2,0	2,981	5,962	4	-0,016
$\sum$	7,7	9,4	15,1161	11,41	$\sum\delta^2$=0,00116

Значення коефіцієнтів дорівнюють: a=1,9974≈1,997, b=-0,9967≈-0,997. Отже, шуканою прямою є пряма y=1,997x-0,997.

За цією формулою обчислюємо значення функції y і знаходимо нев'язки, які також записуємо в таблицю. Сума квадратів нев'язок $\sum\delta^2$≈0,0012.

Щоб перевірити правильність проведених обчислень, перевіримо контрольну суму

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} y_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{1.8}$$

Щоб вивести формулу (1.8), знайдемо вираз для суми квадратів нев’язок.

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + a^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b^2 + 2ab\sum_{i=1}^{n} x_i - 2a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Перегрупувавши члени, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + a(a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i) + b(a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i) \,.$$

Врахувавши рівняння нормальної системи (1.7), знайдемо

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - b\sum_{i=1}^{n} y_i \,.$$

Перевіримо тепер за допомогою формули (1.8) результати, обчислені в прикладі. Справді,

$$\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 20{,}82556, \quad \sum_{i=1}^{6}\delta_i^2 + b\sum_{i=1}^{6} y_i + a\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 20{,}82507.$$

Отже, на підставі формули (1.8), виконані вище обчислення правильні, оскільки різниця в результатах цілком допустима за такої точності обчислень.

Побудова квадратичної емпіричної залежності.

Нехай функціональна залежність між x та y - квадратична. Шукатимемо емпіричну формулу у вигляді

$$y=a_0 x^2+a_1x+a_2. \tag{1.9}$$

Тоді формулу (1.4) запишемо так:

$S(a_0, a_1, a_2)=\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 x_i^2 - a_1 x_i - a_2)^2$.

Для знаходження коефіцієнтів a_0, a_1, a_2, за яких функція $S(a_0, a_1, a_2)$ мінімальна, обчислимо частинні похідні $\frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_0}$, $\frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_1}$, $\frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_2}$ і прирівняємо їх до нуля. В результаті дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 x_i^2 - a_1 x_i - a_2)(-x_i^2) = 0, \\ \frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 x_i^2 - a_1 x_i - a_2)(-x_i) = 0, \\ \frac{\partial S(a_0 , a_1 , a_2)}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 x_i^2 - a_1 x_i - a_2)(-1) = 0. \end{cases}$$

Після рівносильних перетворень маємо систему

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i , \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i , \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot a_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i . \end{cases} \tag{1.10}$$

Розв'язок цієї системи і визначає єдину параболу, яка краще від усіх інших парабол (3.8) подає на даному проміжку задану таблично функціональну залежність.

Формула для контролю обчислень, яку виводимо аналогічно до формули (1.8), має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 + a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} y_i . \tag{1.11}$$

Сформулюємо *аналітичний критерій для квадратичної залежності*. Введемо поділені різниці першого й другого порядку як відношення

$[x_i, x_{i+1}]=\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ і

$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$.

Точки (x_i, y_i) розміщені на параболі (1.9) тоді і тільки тоді, коли, всі поділені різниці другого порядку зберігають майже сталі значення.

Якщо точки x_i (i=1,2,...,n) рівновіддалені, тобто $\Delta x_i = h$=const, то для існування квадратичної залежності (1.9) необхідно й достатньо, щоб скінчені різниці другого порядку були практично сталими.

$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$ (i=1,2,...,n-2),

причому, $\Delta^2 y_i = 2h^2 a$.

<u>Приклад.</u>

Для залежності, заданої у вигляді таблиці, побудувати квадратичну функцію $y=ax^2+bx+c$ за методом найменших квадратів

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	-4,281	-4,117	-3,755	-3,195	-2,437	-1,481	-0,325	1,028	2,581	4,331	6,278

С початку перевіримо існування квадратичної залежності між x та y.

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$
1	0	-4,281		
			0,164	
2	0,2	-4,117		0,198
			0,362	
3	0,4	-3,755		0,198
			0,560	
4	0,6	-3,195		0,198
			0,758	
5	0,8	-2,437		0,198
			0,956	
6	1,0	-1,481		0,2
			1,156	
7	1,2	-0,325		0,197
			1,353	
8	1,4	1,028		0,2
			1,553	
9	1,6	2,581		0,197

			1,750	
10	1,8	4,331		0,197
			1,947	
11	2,0	6,278		

Оскільки точки x_i (i=1,2,...,11) рівновіддалені, причому h=0,2, то складемо таблицю скінчених різниць другого порядку.

З таблиці видно, що скінчені різниці другого порядку майже сталі, тому залежність між x і y можна вважати квадратичною.

Для зручності обчислень складемо таблицю. Звернемо увагу, що серед значень y_i є від'ємні. Тому до всіх y_i (i=1,2,...,11) додамо, наприклад, число 4,3. Це означає, що початок координат перенесено в точку (0; 4,3). Нові значення координат $\overline{y_i}=y_i+4,3$ заносимо в таблицю:

i	x_i	y_i	$\overline{y_i}$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot \overline{y_i}$	$x_i^2 \cdot \overline{y_i}$
1	0	-4,281	0,019	0	0	0	0	0
2	0,2	-4,117	0,183	0,04	0,008	0,0016	0,0366	0,0073
3	0,4	-3,755	0,545	0,16	0,064	0,0256	0,218	0,0872
4	0,6	-3,195	1,105	0,36	0,216	0,1296	0,663	0,3978
5	0,8	-2,437	1,863	0,64	0,512	0,4096	1,4904	1,1923
6	1,0	-1,481	2,819	1	1	1	2,819	2,819
7	1,2	-0,325	3,975	1,44	1,728	2,0736	4,77	5,724
8	1,4	1,028	5,328	1,96	2,744	3,8416	7,4592	10,4429
9	1,6	2,581	6,881	2,56	4,096	6,5536	11,0096	17,6154
10	1,8	4,331	8,631	3,24	5,832	10,4976	15,5358	27,9644
11	2,0	6,278	10,578	4	8	16	21,156	42,312
$\sum$			41,927	15,4	24,2	40,5328	65,1576	108,56232

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 40{,}5328a + 24{,}2b + 15{,}4c = 108{,}5623, \\ 24{,}2a + 15{,}4b + 11c = 65{,}1576, \\ 15{,}4a + 11b + 11c = 41{,}927. \end{cases}$$

Розв'язування цієї системи методом Гауса дає: a=2,47909≈2,479, b=0,32149≈0,321, c=0,01932≈0,019.

Тоді математична модель другого порядку у системі координат xOy має вигляд:

$$y=2{,}479x^2+0{,}321x-4{,}281. \qquad (1.12)$$

Коефіцієнти a, b, c обчислюємо так, щоб знайдена формула забезпечувала точність, яку мають вихідні дані.

За формулою (1.12) визначаємо значення $y_{обч}$ і знаходимо нев'язки $\delta=y-y_{обч}$. В результаті обчислень маємо

$\sum\limits_{i=1}^{11}\delta_i^2$ =0,000015; $\sum\limits_{i=1}^{11}y_i$ =-5,373; $\sum\limits_{i=1}^{11}y_i^2$ =133,7118; $\sum\limits_{i=1}^{11}x_i\cdot y_i$ =17,8576;

$\sum\limits_{i=1}^{11}x_i{}^2\cdot y_i$ =42,3423,

$$\sum_{i=1}^{11}\delta_i^2+a\sum_{i=1}^{11}x_i^2y_i+b\sum_{i=1}^{11}x_i\,y_i+c\sum_{i=1}^{11}y_i=133{,}7116.$$

Звідси видно, що рівність (1.12) у межах точності вихідних даних задовольняється.

Побудова емпіричних формул найпростіших нелінійних залежностей. Нехай у системі координат xOy маємо нелінійну залежність $y=F(x,a,b)$, неперервну і монотонну на відрізку $[x_1, x_n]$.

Введемо змінні $X=\varphi(x)$, $Y=\Psi(y)$, так, щоб у новій системі координат XOY задана емпірична нелінійна залежність стала лінійною

$$Y=AX+B. \qquad (1.13)$$

Тоді точки з координатами $(\varphi(x_i), \Psi(y_i))$ в площині XOY лежатимуть на прямій лінії.

Покажемо, як від нелінійних залежностей

1) $y=ax^b$, 2) $y=ab^x$, 3) $y=\ln x+b$,

4) $y=\dfrac{a}{x}+b$, 5) $y=\dfrac{1}{ax+b}$, 6) $y=\dfrac{x}{ax+b}$

перейти до лінійних.

1) Розглянемо степеневу залежність $y=ax^b$, де $x>0$, $a>0$, $b>0$. Логарифмуючи її, знаходимо $\ln y=b\ln x+\ln a$. Звідси, поклавши $Y=\ln y$, $X=\ln x$, $A=b$, $B=\ln a$, маємо $Y=AX+B$.

2) Логарифмуючи показникову залежність $y=ab^x$, маємо $\ln y=x\ln b+\ln a$. Поклавши $Y=\ln y$, $X=x$, $A=\ln b$, $B=\ln a$ в системі координат XOY дістанемо залежність (1.13).

Зазначимо, що замість показникової залежності $y=ab^x$ часто шукають залежність $y=ae^{bx}$. Остання перетвориться в лінійну, якщо позначити $X=x$, $Y=\ln y$, $B=\ln a$, $A=b$.

3) Щоб перейти від логарифмічної залежності $y=\ln x+b$ до лінійної $Y=aX+b$, досить зробити підстановку $Y=y$, $X=\ln x$.

4) У гіперболічній залежності замінимо змінні $1/x=X$, $y=Y$. Тоді гіперболічна залежність перетвориться в лінійну (1.13), в якій $A=a$, $B=b$.

5) Розглянемо дробово-лінійну функцію $y=\dfrac{1}{ax+b}$. Знайдемо обернену функцію $1/y=ax+b$. Тоді, ввівши нові координати $Y=1/y$, $X=x$, дістанемо лінійну залежність (1.13), де $A=a$, $B=b$.

6) Нехай маємо дробово-раціональну залежність $y=\dfrac{x}{ax+b}$. Оберненою до неї буде залежність $1/y=a+b/x$. Ввівши нові змінні $Y=1/y$, $X=1/x$, дістанемо лінійну залежність (1.13) з коефіцієнтами $A=b$, $B=a$.

Отже, для побудови будь-якої з емпіричних формул 1)-6) треба:

а) за вихідною таблицею даних (x_i, y_i) побудувати нову таблицю (X_i, Y_i), використавши відповідні формули переходу до нових координат;

б) за новою таблицею даних знайти методом найменших квадратів коефіцієнти A і B лінійної функції (1.13);

в) за відповідними формулами знайти коефіцієнти a і b даної нелінійної залежності.

Вибрати емпіричну формулу для нелінійних залежностей графічним методом часто буває важко. Тоді вдаються до перевірки аналітичних критеріїв існування певної залежності. Для цього зводять її до лінійної і перевіряють виконання критерію лінійної залежності між перетвореними вихідними даними (X_i, Y_i).

1.3. Інтерполювання функцій

Нехай на відрізку [a;b] визначено певний клас функцій $\{P(x)\}$, а в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ цього проміжку задано значення деякої функції $y=f(x)$: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ..., $y_n=f(x_n)$. Наближену заміну функції f на відрізку $[a;b]$ однією з функцій $P(x)$ певного класу так, щоб функція $P(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ набувала таких самих значень, що й функція f, тобто щоб $P(x_i)=y_i$ ($i=0,1,\ldots,n$) називають *інтерполюванням* або *інтерполяцією*. Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ називають *вузлами інтерполювання*, функцію $P(x)$ називають *інтерполюючою функцією*, а формулу $f(x) \approx P(x)$--*інтерполяційною формулою*.

Вузли інтерполювання називаються рівновіддаленими, якщо $x_{i+1}-x_i=h=const$, де $i=0,1,\ldots,n-1$. В протилежому випадку вузли називаються нерівновіддалени-ми.

Якщо функція $P(x)$ належить класу алгебраїчних багаточленів, то інтерполювання називається параболічним. В загальної постановки задача параболічного інтерполювання може мати нескінченну множину розв'язків, або зовсім не мати розв'язків. Але ця задача буде однозначною, якщо функцію $f(x)$ змінювати багаточленом степеня n. (Звернемо увагу, що інтерполяційний багаточлен n степеня тільки один у випадку, коли усі вузли інтерполювання x_i ($i=0,1,\ldots,n$) різні.)

Розглядатимемо задачу параболічного інтерполювання, яку сформулюємо так: в $n+1$ різних точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ задано значення функції f:

$$y_0=f(x_0),\quad y_1=f(x_1), \ldots, y_n=f(x_n),$$

і треба побудувати багаточлен

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \tag{1.14}$$

степеня n, який би задовольняв умови $P_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,...,n)$. (1.15)

При цьому виникає питання: наскільки точно побудований багаточлен відображає поведінку заданої функції на відрізку $[a;b]$.

Означення: Функцію $R_n(f,x)=f(x)-L_n(x)$, яка характеризує точність наближення інтерполяційного полінома до функції f, називають залишковим членом інтерполяційної формули, або похибкою інтерполювання. Якшо відомий аналітичний вираз функції f, то $R_n(f,x)$ можна оцінити. Справедлива **теорема:**

Якщо вузли інтерполювання x_i $(i=0,1,...n)$ різні і належать відрізку $[a;b]$, а функція f диференційована $n+1$ раз на відрізку $[a;b]$, то для будь-якої точки

$x \in [a;b]$ існує така точка $\xi \in (a;b)$, що для похибки інтерполювання справедлива рівність:

$$R_n(f,x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

де $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$.

1.3.1. Скінченні різниці.

Перший та другий інтерполяційні багаточлени Ньютона

Нехай задано таблично функцію $y=f(x)$ значеннями

$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ ...,\ y_n=f(x_n)$

в рівновіддалених вузлах інтерполяції $x_i \ (i=1,...,n)$.

Нехай h —крок таблиці, тобто $h=x_{i+1}-x_i=const(i=0,1,...,n-1)$.

Скінченною або табличною різницею першого порядку називається різниця між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції. Таким чином,

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f(x_0);$
$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - \Delta f(x_0 + h) = \Delta f(x_1);$
....
$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h) = \Delta f(x_0 + (n-1) \cdot h) = \Delta f(x_{n-1}).$

Прирости скінченних різниць першого порядку називають скінченними різницями другого порядку:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1; ...; \ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}.$

Взагалі, скінченні різниці *к*-го порядку утворюються з різниць (*к*-*1*)-го порядку за допомогою рекурентних формул:

$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0;$
$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1;$
....
$\Delta^k y_m = \Delta^{k-1} y_{m+1} - \Delta^{k-1} y_m.$

Вважають, що за означенням $\Delta^0 y_k = y_k$.

Властивості скінченних різниць.

1. Скінченні різниці сталої С дорівнюють нулю, тобто Δ^k C=0.
2. Сталий множник можна виносити за знак скінченної різниці $\Delta^k \left(Cf(x)\right) = C \ \Delta^k \ f(x)$.
3. Скінченні різниці алгебраїчної суми функцій дорівнюють алгебраїчній сумі скінченних різниць цих функцій: $\Delta^k(\mathrm{f}(x) \pm \mathrm{g}(x)) = \Delta^k \mathrm{f}(x) \pm \Delta^k \mathrm{g}(x)$.
4. Скінченні різниці *m*-го порядку від скінченних різниць *к*-го порядку функції f дорівнюють скінченним різницям *m*+*к* -го порядку функції *f*, тобто $\Delta^m(\Delta^k f(x)) = \Delta^{m+k} f(x)$. $(m, k -$невід’ємні числа).

Зв’язок між похідними функції і скінченними різницями.

Якщо функція f має на відрізку $[x_0, x_n]$ неперервні похідні до порядку *n* включно, то для досить малих h і для будь-якого натурального *n* можна дістати наближену формулу

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Таблиця скінченних різниць.

В обчислювальній практиці послідовні різниці зручно записувати у вигляді таблиці (наприклад, при $n=5$):

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5	Δy_0 Δy_1 Δy_2 Δy_3 Δy_4	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$ $\Delta^2 y_2$ $\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_0$ $\Delta^3 y_1$ $\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_0$ $\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$
$\sum$		$\sum_{i=0}^{4} \Delta y_i$	$\sum_{i=0}^{3} \Delta^2 y_i$	$\sum_{i=0}^{2} \Delta^3 y_i$	$\sum_{i=0}^{1} \Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_0$
S	y_5-y_0	$\Delta y_4 - \Delta y_0$	$\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_1 - \Delta^4 y_0$	

Два останні рядки ($\sum$ і S)--додаткові. Вони необхідні для контролю правильності обчислень. У рядок $\sum$ заносять суми різниць кожного із стовпців, а в рядок S — різниці між крайніми (останьою і першою) різницями кожного стовпця. Легко впевнитись, що сума різниць будь-якого стовпця таблиці дорівнює різниці між крайніми різницями попереднього стовпця, тобто

$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta y_i = y_n - y_0$; $\sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 y_i = \Delta y_{n-1} - \Delta y_0$ і т.д.

Однак, не завжди треба обчислювати скінченні різниці усіх порядків. Існує умова зупинення процесу обчислення різниць.

Для того щоб її сформулювати наведемо таке *означення*: якщо всі скінченні різниці l-го порядку відрізняються одна від одної не більш як на 2^l одиниць нижчого розряду табличних значень функції, то ці різниці називаються *практично сталими.*

Тоді, якщо різниці *l*-го порядку практично сталі, то скінченні різниці *l+1*-го порядку вважають рівними нулю і не беруть їх до уваги, а інтерполяційний багаточлен у цьому випадку поводить себе як багаточлен *l*-го степеня.

<u>Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона.</u>

Обчислення значень функції для значень аргументу, які знаходяться з початку таблиці, зручно проводити користуючись першим інтерполяційним поліномом Ньютона:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}). \quad (1.16)$$

Для практичного використання формулу (1.16) звичайно записують в іншому вигляді. Позначимо: $t=\dfrac{x-x_0}{h}$,

тоді $\dfrac{x-x_1}{h}=t-1,\ \dfrac{x-x_2}{h}=t-2,\ldots,\dfrac{x-x_{n-1}}{h}=t-n+1$, і формула (1.16) матиме вигляд:

$$P_n(x)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots+\frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (1.17)$$

(1.17)—інший запис першого багаточлена Ньютона.

Формула $f(x)\approx P_n(x)$ називається *першою інтерполяційною формулою Ньютона.*

<u>Приклад .</u> Нехай функція *y=f(x)* задана таблицею:

x_i	1	1,6	2,2	2,8	3,4
y_i	5,115	5,358	5,985	6,125	6,308.

Знайти значення цієї функції в точці x=1,5.

Оскільки вузли інтерполювання рівновіддалені, то складемо спочатку таблицю скінченних різниць

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$

1,0 1,6 2,2 2,8 3,4	<u>5,115</u> 5,358 5,985 6,125 6,308	<u>0,243</u> 0,627 0,14 0,183	<u>0,384</u> -0,487 0,043	<u>-0,871</u> 0,53	<u>1,401</u>
$\sum$		1,193	-0,06	-0,341	1,401
S	1,193	-0,06	-0,341	1,401	

Прийнявши x_0=1,0, y_0=5,115, будемо мати

$$P_4(x)=5{,}115+t\cdot 0{,}243+\frac{t(t-1)}{2!}\cdot 0{,}384+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\cdot(-0{,}871)+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\cdot 1{,}401.$$

або

$$P_4(x)=5{,}115+t\cdot 0{,}243+t(t-1)\cdot 0{,}192+t(t-1)(t-2)\cdot(-0{,}145)+t(t-1)(t-2)(t-3)\cdot 0{,}058,$$

де $$t=\frac{x-x_0}{h}=\frac{1{,}5-1}{0{,}6}=0{,}833.$$

Звідси,

$$P_4(1{,}5)=5{,}115+0{,}833\cdot 0{,}243+0{,}833(0{,}833-1)\cdot 0{,}192+0{,}833(0{,}833-1)(0{,}833-2)\cdot(-0{,}145)+$$
$$+0{,}833(0{,}833-1)(0{,}833-2)(0{,}833-3)\cdot 0{,}058=5{,}2468$$

Таким чином, значення функції $f(1{,}5)\approx P_4(1{,}5)=5{,}2468$.

<u>Другий інтерполяційний багаточлен Ньютона.</u>

Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона практично невигідний для інтерполювання функції при аргументах з другої половини таблиці. В цьому випадку застосовують другий інтерполяційний багаточлен Ньютона:

$$P_n(x)=y_n+\frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n)+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1})+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdot\ldots\cdot(x-x_1). \tag{1.18}$$

Рівність $f(x)\approx P_n(x)$ називають *другою інтерполяційною формулою Ньютона*.

Існує інший запис формули (1.18).

Нехай $t=\dfrac{x-x_n}{h}$,

тоді $\frac{x - x_{n-1}}{h} = t + 1$, $\frac{x - x_{n-2}}{h} = t + 2$, $\frac{x - x_{n-3}}{h} = t + 3$ і т. д.

Підставивши ці значення в (1.18), дістанемо:

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{t(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (1.19)$$

(1.19)— інший запис другого інтерполяційного багаточлена Ньютона.

Якщо треба обчислити значення функції при аргументі x, то за x_n треба взяти найближче, але більше за x значення аргументу з таблиці так, щоб x є $\left(x_{n-1;}x_n\right)$ і |t|<1.

Приклад. Для функції $y = f(x)$, заданої таблично

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y_i	0,2588	0,3420	0,4226	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071,

необхідно знайти *f(*4,4).

Розв'язок.

Складемо таблицю скінченних різниць

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,5	0,2588	0,0832	-0,0026	-0,0006
2	0,3420	0,0806	-0,0032	-0,0006
2,5	0,4226	0,0774	-0,0038	-0,0006
3	0,5000	0,0736	-0,0044	-0,0005
3,5	0,5736	0,0692	-0,0049	
4	0,6428	0,0643		
4,5	0,7071			
$\sum$		0,4483	-0,0189	-0,0023
S	0,4483	-0,0189	-0,0023	

Так у таблиці скінченні різниці 3-го порядку відрізняються одна від одної менше як на 2^3=8 одиниць розряду 10^{-4}, тому їх треба вважати практично сталими, а різниці 4-го, 5-го, 6-го порядків рівними нулю.

Оскільки точка x=4,4 належить до другої половини таблиці, то необхідно використовувати другий інтерполяційний багаточлен Ньютона третього степеня,

де $x_n = 4{,}5,\ y_n = 0{,}7071,\ \Delta y_{n-1} = 0{,}0643,\ \Delta^2 y_{n-2} = -0{,}0049,\ \Delta^3 y_{n-3} = -0{,}0005.$

Отже,

$$P_3(x) = 0{,}7071 + 0{,}0643t - \frac{0{,}0049}{2}t(t+1) - \frac{0{,}0005}{6}t(t+1)(t+2),$$

$$P_3(x) = 0{,}7071 + 0{,}0643t - 0{,}00245t(t+1) - 0{,}000083t(t+1)(t+2),$$

де $t = \dfrac{x - 4{,}5}{0{,}5} = 2x - 9.$

Якщо x=4,4 , то t= - 0,2, а значення інтерполяційного полінома дорівнює:

$$P_3(4{,}4) = 0{,}7071 + 0{,}0643(-0{,}2) - 0{,}00245(-0{,}2)0{,}8 - 0{,}000083(-0{,}2)\cdot 0{,}8\cdot 1{,}8 =$$

=0,694656

Таким чином, $f(4{,}4) \approx P_3(4{,}4)$=0,694656.

Оцінка похибок інтерполяційних формул Ньютона

Якщо вузли інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – рівновіддалені, тобто

$$x_{i+1} - x_i = h = const \quad (i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1),$$

позначимо $q = \dfrac{x - x_0}{h}$.

На основі формули:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f_i^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \ .$$

Отримаємо похибку першої інтерполяційної формули Ньютона

$$R_n(x) = h^{n+1}\cdot\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

де ξ – деяке проміжне значення між вузлами інтерполяції x_0 та x_n і даною точкою *x*. Відмітимо, що для випадку інтерполяції у вузькому сенсі слова $\xi \in [x_0, x_n]$; при екстраполюванні можливо, що $\xi \notin [x_0, x_n]$.

Аналогічно, позначимо $q = \dfrac{x - x_n}{h}$.

Отримаємо похибку другої інтерполяційної формули Ньютона

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

де ξ – деяке проміжне значення між вузлами інтерполяції x_0 та x_n і точкою *x*.

Взагалі, при практичних обчисленнях інтерполяційна формула Ньютона закінчується на членах, що містять такі різниці, які в межах заданої точності можна вважати постійними.

Передбачаючи, що $\Delta^{n+1} y$ майже постійні для функції $y = f(x)$ і *h* досить мале, і враховуючи, що

$f^{(n+1)}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}}$, можна приблизно вважати:

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}} .$$

В цьому випадку залишковий член першої інтерполяційної формули Ньютона дорівнює

$$R_n(x) \approx \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_0 .$$

У цих же умовах для залишкового члена другої інтерполяційної формули Ньютона маємо вираз: $R_n(x) \approx \dfrac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y_n$.

Приклад. У п'ятизначних таблицях логарифмів даються логарифми цілих чисел від $x = 1000$ до $x = 10000$ з граничною абсолютною похибкою $\dfrac{1}{2} \cdot 10^{-5}$. Чи можлива лінійна інтерполяція з тією ж мірою точності?

Розв'зок. $y = \lg x$, матимемо:

$y' = \dfrac{1}{x}$ и $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. Звідси, $M_2 = \max|y''| < \dfrac{0{,}5}{10^6} = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-6}$.

При $n = 2$ і $h = 1$ отримуємо оцінку для похибки лінійної інтерполяції:

$$|R_1(x)| \le \frac{|q(q-1)|}{2!} M_2 \le \frac{q(1-q)}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}.$$

Оскільки при $0 \le q \le 1$ маємо $q(1-q) \le \dfrac{1}{4}$, то $|R_1(x)| \le \dfrac{\frac{1}{4}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 10^{-6} < 10^{-7}$.

Отже, лінійна інтерполяція цілком допустима.

Приклад. Оцінити похибку функції $f(x) = \sin x$ інтерполяційним поліномом п'ятого степеня $P_5(x)$, який співпадає з даною функцією при значеннях $x = 0^0, 5^0, 10^0, 15^0, 20^0, 25^0$.

Розв'язок. Функція $f^{(6)}(x) = \sin x$; тому $\left|f^{(6)}(x)\right| \le 1$. Маємо:

$$|\sin x - P_5(x)| \le \frac{1}{6!}\left| x\left(x - \frac{\pi}{36}\right)\left(x - \frac{\pi}{18}\right)\left(x - \frac{\pi}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{9}\right)\left(x - \frac{5\pi}{36}\right)\right|.$$

Наприклад, при $x = 12^o30'$ arcsinx= 0,21816 отримаємо:

$$|\sin x - P_5(x)| < 2{,}2 \cdot 10^{-9}.$$

1.3.2. Інтерполяційний багаточлен Лагранжа

Нехай задано $n+1$ значення аргументу: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \ne x_j$, якщо $i \ne j$) і відповідні значення функції f: $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Не важко перевірити, що багаточлен

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}y_i \qquad (1.20)$$

задовольняє умови: $L_n(x_i)=y_i \qquad (i=0,1,...,n)$.

Тому за означенням цей поліном є інтерполяційним.

Багаточлен $L_n(x)$, заданий формулою (1.20), називають інтерполяційним багаточленом Лагранжа.

Вирази $\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$, що є коефіцієнтами при значеннях y_i $(i=0,1,...,n)$ у багаточлені Лагранжа, називають коефіцієнтами Лагранжа.

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа можна записати компактніше. Для цього введемо позначення:

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n). \qquad (1.21)$$

Це є багаточлен $n+1$ степеня. Продиференціювавши цей багаточлен по x і підставивши отримане значення в формулу (1.20), дістанемо:

$$L_n(x)=\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}. \qquad (1.22)$$

(1.22) - інший запис багаточлену Лагранжа.

Якщо треба обчислити значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа лише в одній точці $x \neq x_i$, де x_i $(i=0,1,...,n)$ -- вузли інтерполювання, то немає потреби явно будувати багаточлен. Досить використати наведену нижче *схему.*

Схема обчислень за інтерполяційною формулою Лагранжа.

1. Складемо таблицю 1:

$\underline{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	…	x_0-x_{n-1}	x_0-x_n	D_0	y_0/D_0
x_1-x_0	$\underline{x-x_1}$	x_1-x_2	…	x_1-x_{n-1}	x_1-x_n	D_1	y_1/D_1

$\boldsymbol{x_2\text{-}x_0}$ $\boldsymbol{x_2\text{-}x_1}$ $\boldsymbol{\underline{x\text{-}x_2}}$ … $\boldsymbol{x_2\text{-}x_{n\text{-}1}}$ $\boldsymbol{x_2\text{-}x_n}$ $\boldsymbol{D_2}$ $\boldsymbol{y_2/D_2}$

… … … … … … …

$\boldsymbol{x_n\text{-}x_0}$ $\boldsymbol{x_n\text{-}x_1}$ $\boldsymbol{x_n\text{-}x_2}$ … $\boldsymbol{x_n\text{-}x_{n\text{-}1}}$ $\boldsymbol{\underline{x\text{-}x_n}}$ $\boldsymbol{D_n}$ $\boldsymbol{y_n/D_n}$,

де D_0--добуток елементів першого рядка (тобто, $D_0=(x-x_0)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_{n-1})(x_0-x_n))$, D_1--добуток елементів другого рядка, і т. д., D_n--добуток елементів $n+1$ рядка;

2. Обчислюємо добуток діагональних елементів (підкреслених у таблиці), який дорівнює значенню $\omega_{n+1}(x)$ у точці x;

3. Знаходимо суму: $$S=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}.$$

4. Значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа в точці x дорівнює: $$L_n(x)=\omega_{n+1}(x)*S.$$

<u>Приклад.</u> Значення функції $y=f(x)$ задано таблично

$\mathbf{X_i}$	$\mathbf{Y_i}$
0,2	1,64
0,7	1,47
1,0	1,33
1,3	1,18
1,6	0,93.

За допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа обчислити значення функції в точці x=0,3.

Виконаємо обчислення за схемою наведеною вище.

Складаємо таблицю 1 для даної функції

<u>0,1</u>	-0,5	-0,8	-1,1	-1,4	0,0616	26,62338
0,5	-<u>0,4</u>	-0,3	-0,6	-0,9	0,0324	45,37037

0,8	0,3	-<u>0,7</u>	-0,3	-0,6	-0,03024	-43,98148
1,1	0,6	0,3	<u>-1</u>	-0,3	0,0594	19,86532
1,4	0,9	0,6	0,3	<u>-1,3</u>	-0,29484	-3,15425

2. ω_5(0,3)= 0,0364.

3. S=44,72334.

4. L_4(0,3)=0,0364*44,72334 =1,62793.

1.3.3. Параболічне інтерполювання за схемою Ейткіна

Нехай функція f задана таблично: у вузлах інтерполювання $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ приймає відповідні значення $y_i = f(x_i)$ $(i=0,1, \ldots, n)$. Необхідно знайти її значення у точці $x \in [x_0, x_n]$, причому $x \neq x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$. Це зручно робити за допомогою схеми Ейткіна. Особливістю цієї схеми є однотипність дій.

Якщо функція $y = f(x)$ задана в двох точках x_0 та x_1, то її значення в точці $x \in [x_0, x_1]$ можна знайти за формулою $P_{0,1}(x) = \dfrac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 - \dfrac{x_0 - x}{x_1 - x_0} y_1$, яка співпадає з формулою лінійного інтерполювання за Лагранжем.

Неважко впевнитись, що $P_{0,1}(x_0) = y_0$, $P_{0,1}(x_1) = y_1$.

Нехай функція $y = f(x)$ задана в трьох вузлах x_0, x_1, x_2. Дано значення $y_i = f(x_i)$ $(i=0,1,2,3)$. Треба знайти значення в точці $x \in [x_0, x_2]$.

В цьому випадку спочатку обчислюють значення двох лінійних багаточленів у точці x:

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix} \;;\; P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix} .$$

Потім обчислюють значення квадратного тричлена:

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}.$$

Покажемо, що $P_{0,1,2}(x)$ фактично співпадає зі значенням квадратного багаточлена Лагранжа:

$$P_{1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1-\frac{x_1-x}{x_2-x_1}y_2 .$$

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{x_1-x}{x_1-x_0}y_0-\frac{x_0-x}{x_1-x_0}y_1\right)(x_2-x)-$$

$$-\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1-\frac{x_1-x}{x_2-x_1}y_2\right)(x_0-x)=$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=L_2(x)$$

Введемо позначення: $P_{i,i+1}(x)=\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i-x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix}$ ($i=0,1,\ ...,\ n-1$);

$$P_{i,i+1,i+2}(x)=\frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} P_{i,i+1}(x) & x_i-x \\ P_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2}-x \end{vmatrix} \quad (i=0,1,\ ...,\ n-2);$$

$$P_{i,i+1,...,i+j}(x)=\frac{1}{x_{i+j}-x_i}\begin{vmatrix} P_{i,i+1,...,i+j-1}(x) & x_i-x \\ P_{i+1,i+2,...,i+j}(x) & x_{i+j}-x \end{vmatrix} \quad (i=0,1,\ ...,\ n-1;\ j=1,2,...,n-i).$$

Функція $P_{i,i+1,...,i+j}(x)$ збігається з інтерполяційним багаточленом Лагранжа j-го степеня.

Взагалі, якщо функцію f задано в $n+1$-му вузлах інтерполювання $x_0, x_1, ..., x_n$, то значення інтерполяційного багаточлена степеня n в точці $x\in(x_0;\ x_n)$, що не збігається з вузлами інтерполювання, можна обчислити за формулою:

$$P_{0,1,...,n}(x)=\frac{1}{x_n-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,...,n-1}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,...,n}(x) & x_n-x \end{vmatrix}.$$

Отже, для знаходження значення функції f в точці x за схемою Ейткіна треба обчислити $n\times\frac{n-1}{2}$ визначників другого порядку.

Результати обчислень для зручності прийнято записувати у вигляді таблиці.

(Наприклад, $n=5$)

i	x_i	y_i	x_i-x	$P_{i,i+1,\ldots,i+j}(x)$					
0	x_0	y_0	x_0-x	$P_{0,1}(x)$	$P_{0,1,2}(x)$	$P_{0,1,2,3}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$	$P_{0,1,2,3,4,5}(x)$
1	x_1	y_1	x_1-x	$P_{1,2}(x)$	$P_{1,2,3}(x)$	$P_{1,2,3,4}(x)$	$P_{1,2,3,4,5}(x)$	
2	x_2	y_2	x_2-x	$P_{2,3}(x)$	$P_{2,3,4}(x)$	$P_{2,3,4,5}(x)$		
3	x_3	y_3	x_3-x	$P_{3,4}(x)$	$P_{3,4,5}(x)$			
4	x_4	y_4	x_4-x	$P_{4,5}(x)$				
5	x_5	y_5	x_5-x					

Широке застосування схема Ейткіна має завдяки властивості: при залученні нових вузлів, тобто при підвищенні порядку багаточлена всі обчислення не виконують заново, а проводять лише додаткові. А це не значно збільшує обсяг обчислювальної роботи.

Приклад . За схемою Ейткіна обчислити значення функції в точці x=0,8, якщо функцію задано таблично:

Xi	Yi
0,5	0,123
1,0	0,238
1,2	0,356
1,4	0,503

Послідовно знаходимо Pi,i+1,…,i+j(0,8) з однією запасною цифрою та результати обчислень запишемо у таблицю:

Xi	Yi	Pi,i+1(0,8)	Pi,i+1,i+2(0,8)	Pi,i+1,i+2,i+3(0,8)
0,5	0,123	0,192	0,1611	0,157
1,0	0,238	0,12	0,149	
1,2	0,356	0,062		

1,4 0,503

$$P_{0,1}(0,8)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1-0,5}\begin{vmatrix} 0,123 & 0,5-0,8 \\ 0,238 & 1-0,8 \end{vmatrix}=0,192,$$

$$P_{1,2}(0,8)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} y_1 & x_1-x \\ y_2 & x_2-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1,2-1}\begin{vmatrix} 0,238 & 1-0,8 \\ 0,356 & 1,2-0,8 \end{vmatrix}=0,12,$$

$$P_{2,3}(0,8)=\frac{1}{x_3-x_2}\begin{vmatrix} y_2 & x_2-x \\ y_3 & x_3-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1,4-1,2}\begin{vmatrix} 0,356 & 1,2-0,8 \\ 0,503 & 1,4-0,8 \end{vmatrix}=0,062,$$

$$P_{0,1,2}(0,8)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0-x \\ P_{1,2}(x) & x_2-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1,2-0,5}\begin{vmatrix} 0,192 & 0,5-0,8 \\ 0,12 & 1,2-0,8 \end{vmatrix}=0,1611,$$

$$P_{1,2,3}(0,8)=\frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix} P_{1,2}(x) & x_1-x \\ P_{2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1,4-1}\begin{vmatrix} 0,12 & 1-0,8 \\ 0,062 & 1,4-0,8 \end{vmatrix}=0,149,$$

$$P_{0,1,2,3}(0,8)=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0-x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3-x \end{vmatrix}=\frac{1}{1,4-0,5}\begin{vmatrix} 0,1611 & 0,5-0,8 \\ 0,149 & 1,4-0,8 \end{vmatrix}=0,157$$

Отже, значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа L3(0,8)=0,157.

Зауваження: часто обчислення припиняють, коли значення двох послідовних багаточленів збігатимуться. Наприклад, якщо P0,1,2(x)=P0,1,2,3(x), то обчислення слід припинити та за значення багаточлена приймають P0,1,2(x).

1.3.4. Інтерполяційний багаточлен Ньютона з поділеними різницями

На практиці дуже часто зустрічаються таблиці для нерівновіддалених значень аргументу, тобто таблиці зі змінним кроком. Для цих таблиць поняття скінченних різниць узагальнюється, а саме: запроваджуються так звані поділені різниці.

Нехай функція $y=f(x)$ задана значеннями $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ..., $y_n=f(x_n)$ в не рівновіддалених вузлах інтерполяції $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Відношення $[x_0;x_1]=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$, $[x_1;x_2]=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, ..., $[x_i;x_{i+1}]=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$

називаються поділеними різницями першого порядку.

Аналогічно визначаються поділені різниці другого порядку:

$$[x_0;x_1;x_2]=\frac{[x_1;x_2]-[x_0;x_1]}{x_2-x_0};$$

$$[x_1;x_2;x_3]=\frac{[x_2;x_3]-[x_1;x_2]}{x_3-x_1};$$

$$[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]=\frac{[x_{i+1};x_{i+2}]-[x_i;x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}.$$

Взагалі, поділені різниці k-го порядку отримують з поділених різниць $k-1$-го порядку за допомогою рекурентного співвідношення:

$$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};...;x_{i+k-1};x_{i+k}]=\frac{[x_{i+1};x_{i+2};...,x_{i+k}]-[x_i;x_{i+1};...;x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$$

$(k=1,2,...;i=0,1,2,...)$.

Іноді поділені різниці першого порядку позначають так:

$f(x_0;x_1), f(x_1;x_2), \ldots, f(x_i;x_{i+1})$;

поділені різниці другого порядку позначають відповідно:

$f(x_0;x_1;x_2), \quad f(x_1;x_2;x_3), \ldots, f(x_i;x_{i+1};x_{i+2})$.

Аналогічно, для поділених різниць k-го порядку використовують вираз: $f(x_i;x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$.

Поділені різниці звичайно розташовують у вигляді таблиці (наприклад, $n=4$):

x	y	$[x_i;x_{i+1}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3};x_{i+4}]$
x_0	y_0	$[x_0;x_1]$	$[x_0;x_1;x_2]$	$[x_0;x_1;x_2;x_3]$	$[x_0;x_1;x_2;x_3;x_4]$
x_1	y_1	$[x_1;x_2]$	$[x_1;x_2;x_3]$	$[x_1;x_2;x_3;x_4]$	
x_2	y_2	$[x_2;x_3]$	$[x_2;x_3;x_4]$		
x_3	y_3	$[x_3;x_4]$			
x_4	y_4				

<u>Приклад.</u> Скласти таблицю поділених різниць для експериментальних значень x та y:

x	0	1	5	10
y	10	20	100	1100

Безпосередньо використовуючи визначення, знаходимо поділені різниці першого порядку:

$$\left[x_0\,;x_1\right]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{20-10}{1-0}=10; \ \left[x_1\,;x_2\right]=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{100-20}{5-1}=20;$$

$$\left[x_2\,;x_3\right]=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{1100-100}{10-5}=200.$$

Аналогічно, за визначенням дістанемо:

$$\left[x_0\,;x_1\,;x_2\right]=\frac{\left[x_1\,;x_2\right]-\left[x_0\,;x_1\right]}{x_2-x_0}=\frac{20-10}{5-0}=2;$$

$$\left[x_1;x_2\,;x_3\right]=\frac{\left[x_2\,;x_3\right]-\left[x_1\,;x_2\right]}{x_3-x_1}=\frac{200-20}{10-1}=20;$$

$$\left[x_0\,;x_1\,;x_2\,;x_3\right]=\frac{\left[x_1\,;x_2\,;x_3\right]-\left[x_0\,;x_1\,;x_2\right]}{x_3-x_0}=\frac{20-2}{10-0}=1{,}8$$

Результати обчислень запишемо в таблицю.

x_i	y_i	$[x_i;x_{i+1}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}]$
0	10	10	2	1,8
1	20	20	20	
5	100	200		
10	1100			

Для побудови інтерполяційної формули Ньютона з поділеними різницями важливе значення має

ЛЕМА. Якщо $y=P(x)$ є поліном n-го степеня, то його поділені різниці $(n+1)$-го степеня тотожно дорівнюють нулю, тобто $[x;x_0;x_1;x_2;\ldots;x_n]\equiv 0$ для будь-якої системи різних між собою чисел $x;\ x_0;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n$.

Враховуючи приведену лему і визначення поділених різниць, отримують інтерполяційний багаточлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу.

$$P(x)=y_0+[x_0;x_1](x-x_0)+[x_0;x_1;x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+$$
$$+[x_0;x_1;x_2,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (1.23)$$

Перевага інтерполяційної формули Ньютона (1.23) в порівнянні з формулою Лагранжа полягає в тому, що додавання нових вузлів приводить тільки до деяких додаткових обчислень.

Приклад. Скласти інтерполяційний поліном Ньютона для функції *y=f(x)* заданої табличто

x_i	0,05	0,13	0,19	0,27	0,32
y_i	0,110	0,235	0,331	0,628	0,983.

За допомогою цього полінома знайти *f(*0,147*)*.

Розв'язок.

Складемо таблицю поділених різниць функції y=*f(x)*

x_i	y_i	$[x_i;x_{i+1}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3}]$	$[x_i;x_{i+1};x_{i+2};x_{i+3};x_{i+4}]$
0,05	0,110	1,5625	0,2678571	67,370127	-35,709888
0,13	0,235	1,6	15,089285	57,728457	
0,19	0,331	3,7125	26,057692		
0,27	0,628	7,1			
0,32	0,983				

Використовуючи формулу (1.23), дістанемо значення інтерполяційного багаточлена Ньютона:

$$P_4(x)=0,110+1,5625(x-0,05)+0,2678571(x-0,05)(x-0,13)+67,370127(x-0,05)(x-0,13)\cdot(x-0,19)-35,709888(x-0,05)(x-0,13)(x-0,19)(x-0,27).$$

Звідси, $P_4(0,147)=0,110+1,5625(0,147-0,05)+0,2648571(0,147-0,05)(0,147-0,13)+$ $+67,370127(0,147-0,05)(0,147-0,13)(0,147-0,19)-35,709888(0,147-0,05)(0,147-0,13)$ $\cdot(0,147-0,19)(0,147-0,27)=0,2569162$

Отже, $f(0,147)\approx P_4(0,147)\approx 0,2569$.

1.3.5. Екстреполювання та обернене інтерполювання

Обчислення значень функції для значень аргумента, що не належить відрізку $[x_0;x_n]$, тобто для $x<x_0$ і $x>x_n$ називають екстраполюванням або екстраполяцією. Для обчислень значень функції в деякій точці $x\in[x_0;x_n]$ можна скористатись інтерполяційною формулою Лагранжа, інтерполяційною формулою Ньотона з поділеними різницями або схемою Ейткіна, якщо вузли не рівновіддаленні.У випадку коли вузли рівновіддалені доцільніше користуватися інтерполяційним багаточленом Ньотона з скінченними різницями при $x<x_0$, та другим інтерполційним багаточленом Ньотона при $x>x_2$.

Слід зазначити, що екстраполювання є менш точною операцією,ніж інтерполювання, тому до екстраполювання можна вдатися тоді, коли відстань точки x від точок x_0, x_n досить мала.(Наприклад, якщо вузли інтерполювання рівновіддалені то відстань повинна бути менша за крок таблиці h).

Отже, межі застосування екстраполяції обмежені.

Обернене інтерполювання . Обернена задача полягає в тому, що по данному значенню функції *y* необхідне знайти відповідне значення аргументу. Якщо вузли інтерполювання $x_i (i=0,1,\ldots,n)$ рівновіддалені, то для оберненого інтерполювання використовується метод послідовних наближень. Припустимо,що функція *f* монотонна і значення *y* міститься між значеннями $y_0=f(x_0)$ та $y_1=f(x_1)$.

Змінюючи функцію *f(x)* першим багаточленом Ньотона, будемо мати:

$$y = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

$$t = \varphi(t), де$$

$$\varphi(t) = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0}t(t-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\Delta y_0}t(t-1)\ldots(t-n+1).$$

За початкове значення приймаємо $t_0 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0}$. Тоді використовуємо метод інтерацій, отримаємо: $t_m = \varphi(t_{m-1})$ __$(m=1,2,\ldots)$.

Якщо $f(x) \in C^{(n+1)}[a;b]$, містить вузли інтерполювання, і крок h достатньо малий,то інтерполяційний процес збігається.

На практиці процес ітерації продовжують поки не буде досягнута задана точність, причому $t \approx t_n$.Після знаходження t, визначаємо *x*: $x=x_0+th$.

Задача оберненого інтерполювання функції у випадку нерівновіддалених значень аргументу $x_0, x_1, \ldots x_n$ безпосередньо може бути розв'язана за допомогою інтерполяційного багаточлена Лагранжа або інтерполяційного багаточлена Ньютона з поділеними різницями. Для цього достатньо змінну x вважати як незалежну і записати функцію x від y. Тобто для оберненого інтерполювання застосовують формули:

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{k-1})(y-y_{k+1})\ldots(y-y_n)}{(y_k-y_0)(y_k-y_1)\ldots(y_k-y_{k-1})(y_k-y_{k+1})\ldots(y_k-y_n)} * x_k;$$

$$x = x_0 + [y_0;y_1](y-y_0) + [y_0;y_1;y_2](y-y_0)(y-y_1) + [y_0;y_1;..,y_n](y-y_0)\ldots(y-y_{n-1}).$$

Приклад. Функція *y=f(x)* задано таблично:

x_i	1,0	1,2	1,4
y_i	35	55	63

При якому значенні *x* значення у дорівнює 40.

Розв'язок.

Вузли інтерполювання рівновіддалені, тому застосовуємо метод послідовних наближень.Складаємо таблицю скінченних різниць:

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
1,0	35	20	-12
1,2	55	8	
1,4	63		

Значення y=40 міститься між y_0=35 і y_1=55, тому за початкове наближене приймаємо y_0=35. Звідси

$$t_0 = \frac{y-y_0}{\Delta y_0} = \frac{40-35}{20} = 0{,}25$$

$$далі, t_1 = t_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} t_0(t_{_0} - t) = 0{,}25 - \frac{-12}{2{,}20} * 0{,}25(-0{,}75) = 0{,}25 - 0{,}056 = 0{,}194;$$

$$t_2 = t_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} t_1(t_2 - 1) = 0{,}25 - 0{,}3 * 0{,}194 * 0{,}806 = 0{,}203;$$

$$t_3 = t_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} t = (t_2 - 1) = 0{,}25 - 0{,}3 * 0{,}203 * 0{,}797 = 0{,}201;$$

$$t_4 = t_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\Delta y_0} t_3 (t_3 - 1) = 0{,}25 - 0{,}3 * 0{,}201 * 0{,}799 = 0{,}201.$$

$$Отже, t = 0{,}201, \quad x = x_0 + th = 1{,}0 + 0{,}201 * 0{,}2 = 1{,}04$$

Таким чином, значенню y=40 функції y=f(x) відповідає значення x=1,04.

Обернене інтерполювання має дуже важливе практичне значення.

2. Перелік тем та контрольних завдань з лабораторних та розрахунково-графічних робіт

ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

1. Розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з вибором головного елемента.

2. Метод найменших квадратів при побудові математичних моделей залежних від одного фактору (парна криволінійна залежність).

3. Метод найменших квадратів при побудові лінійних математичних моделей залежних від двох факторів (багатофакторне моделювання).

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

1. Визначення значень функцій при заданих значеннях аргументу з використанням першого та другого інтерполяційних багаточленів Ньютона для рівновіддалених значень аргументу.

2. Визначення значень функцій при заданих значеннях аргументу з використанням інтерполяційних багаточленів Лагранжа і Ньютона (з поділеними різницями).

Зауваження 1. Студенти спеціальності 6.100101 - *Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі* використовують Варіант 1.

Студенти спеціальності 6.100102 - *Процеси, машини та обладнання АПВ* використовують Варіант 2.

Зауваження 2. За α приймають дві останні цифри залікової книжки.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Розв'язок систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса з вибором головного елемента

Варіант 1.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = B$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$, де:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 15 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2+\alpha \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5+\alpha \\ -1+\alpha \\ 5+\alpha \\ -5+\alpha \end{bmatrix}.$$

Варіант 2.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = B$ з точністю $\varepsilon = 0{,}01$, де:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 5 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2+\alpha \end{bmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} 10+\alpha \\ -1+\alpha \\ 5+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Метод найменших квадратів при побудові математичних моделей залежних від одного фактору

Варіант 1.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Дані по 12 ТОВ щодо економічної ефективності виробництва зернових культур наведені в таблиці

№	Середня доза внесених добрив, ц діючої речовини	Урожайність, ц/га
1	60,1+(α+6)/4	12,2+ α/10
2	62,1+(α+6)/4	18,8+ α/10
3	66,3+(α+6)/4	22,1+ α/10
4	68,2+(α+6)/4	23,1 + α/10
5	70,8+(α+6)/4	24,2 + α/10
6	73,6+(α+6)/4	26,3 + α/10
7	75,3+(α+6)/4	28,5 + α/10
8	78,8+(α+6)/4	32,5 + α/10
9	81,2+(α+6)/4	35,7 + α/10
10	83,4+(α+6)/4	40,9 + α/10
11	85,6+(α+6)/4	45,6 + α/10
12	88,8+(α+6)/4	44,4 + α/10

Скласти математичну модель другого порядку $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, яка наближено описує цю таблицю.

Зауваження. Для визначення параметрів математичної моделі треба розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Варіант 2.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Дані по 12 ТОВ щодо економічної ефективності виробництва зернових культур наведені в таблиці

№	Середня доза внесених добрив, ц діючої речовини	Урожайність, ц/га
1	48,5+α /5	10,1+ α/7
2	49,1+α /5	18,8+ α/7
3	52,3+α /5	22,1+ α/7
4	56,2+α /5	23,1 + α/7
5	59,8+α /5	25,2 + α/7
6	60,6+α /5	26,3 + α/7
7	62,3+α /5	28,5 + α/7
8	64,8+α /5	34,8 + α/7
9	65,2+α /5	36,7 + α/7
10	70,4+α /5	40,9 + α/7
11	76,6+α /5	44,6 + α/7
12	80,0+α /5	42,0 + α/7

Скласти математичну модель другого порядку $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$, яка наближено описує цю таблицю.

Зауваження. Для визначення параметрів математичної моделі треба розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Метод найменших квадратів при побудові лінійних математичних моделей залежних від двох факторів

Варіант 1.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Вихідні дані про динаміку виходу валової продукції с/г в залежності від факторів інтенсифікації виробництва в господарстві за 2003-2015рр.

Рік	З розрахунку на 100 га сільськогосподарських угідь		
	Вартість основних виробничих фондів (фондозабезпеченість), тис.грн	Енергетичних потужностей (енергозабезпеченість)	Вартість валової продукції с\г, тис.грн
2003	155,1+α/5	200	67,1 +0,2 α
2004	66,3+α/5	212	74,2 + 0,2α
2005	169,2+α/5	238	76,3 + 0,2α
2006	172,0+α/5	259	77,5 +0,2 α
2007	174,6+α/5	280	79,5 + 0,2α
2008	178,9+α/5	304	80,7 +0,2α
2009	181,2+α/5	324	83,9 +0,2 α
2010	185,0+α/5	337	83,6 + 0,3α
2011	187,0+α/5	350	87,1 + 0,3α
2012	193,3+α/5	365	91,1 + 0,3α
2013	196,7+α/5	378	94,6 + 0,3α
2014	199,1+α/5	384	95,1 + 0,3α
2015	200,0+α/5	392	96,1 + 0,3α
		400	

Скласти математичну модель виду $F(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$, яка описує цю таблицю.

Зауваження. Для визначення параметрів математичної моделі треба розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_3\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i} \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + a_3\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i} \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + a_3 n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Варіант 2.

Метод найменших квадратів при побудові лінійних математичних моделей залежних від двох факторів

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Вихідні дані про динаміку виходу валової продукції с/г в залежності від факторів інтенсифікації виробництва в господарстві за 2005-2015рр.

Рік	З розрахунку на 100 га сільськогосподарських угідь		
	Вартість основних виробничих фондів (фондозабезпеченість), тис.грн	Енергетичних потужностей(енергозабезпеченість)	Вартість валової продукції с\г, тис.грн
2005	170,2+α/7	320	76,3 + 0,2α
2006	172,0+α/7	325	77,5 +0,2 α
2007	174,6+α/7	380	79,5 + 0,2α
2008	178,9+α/7	395	80,7 +0,2α
2009	181,2+α/7	400	83,9 +0,2 α
2010	185,0+α/7	415	83,6 + 0,3α
2011	187,0+α/7	422	87,1 + 0,3α
2012	193,3+α/7	451	91,1 + 0,3α
2013	196,7+α/7	489	94,6 + 0,3α
2014	199,1+α/7	500	95,1 + 0,3α
2015	200,0+α/7	520	96,1 + 0,3α
		540	

Треба скласти математичну модель виду $F(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3$, яка описує цю таблицю.

Зауваження. Для визначення параметрів математичної моделі треба розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_3\sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i} \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 + a_3\sum_{i=1}^{n} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i} \\ a_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + a_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + a_3 n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

Визначення значень функцій при заданих значеннях аргументу з використанням першого та другого інтерполяційних багаточленів Ньютона для рівновіддалених значень аргументу

Варіант 1.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти наближені значення функції при значеннях аргументу x=1,05+(α+11)/1100 і x=2,60-α/800 за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона з скінченними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
1	α/5
1,2	α/8
1,4	α/12
1,6	α/18
1,8	α/23
2,0	α/27
2,2	α/32
2,4	α/36
2,6	α/44

Схематично побудувати графік інтерполяційного багаточлена для даної функції на відрізку [1; 2,60].

Варіант 2.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти наближені значення функції при значеннях аргументу x=15,2+(α+10)/120 і x=19-α/520 за допомогою інтерполяційних багаточленів Ньютона з скінченними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
15	(α+2)/7
15,5	(α+2) /10
16	(α+2) /12
16,5	(α+2) /18
17	(α+2) /25
17,5	(α+2) /27
18	(α+2) /30
18,5	(α+2) /36
19	(α+2)/40

Схематично побудувати графік інтерполяційного багаточлена для даної функції на відрізку [15; 19].

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 2

Визначення значень функцій при заданих значеннях аргументу з використанням інтерполяційних багаточленів Лагранжа і Ньютона (з поділеними різницями)

Варіант 1.

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти наближене значення функції при даному значенні аргументу $x=2{,}5$ за допомогою інтерполяційного багаточлена Ньютона з поділеними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
1,4	$\alpha/2{,}7$
1,7	$\alpha/5{,}2$
2,1	$\alpha/7{,}5$
2,6	$\alpha/9{,}3$
3,9	$\alpha/12{,}1$
5,1	$\alpha/15{,}6$

Порівняйте значення цієї функції в точці $x=2{,}5$ отримане за допомогою багаточлена Ньютона зі значенням, отриманим за допомогою багаточлена Лагранжа (схема Ейткіна).

Схематично побудувати графік інтерполяційного багаточлена для даної функції на відрізку [1,4; 5,1].

Варіант 2.

Інтерполяційні багаточлени Лагранжа і Ньютона (з поділеними різницями).

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ: Знайти наближене значення функції при даному значенні аргументу $x=13{,}0$ за допомогою інтерполяційного багаточлена Ньютона з поділеними різницями, якщо функція задана таблично:

X_i	Y_i
12,1	$\alpha/15$
12,7	$\alpha/16$
13,5	$\alpha/20$
14,0	$\alpha/26$
14,3	$\alpha/30$
15,0	$\alpha/45$

Порівняйте значення цієї функції в точці $x=13{,}0$ отримане за допомогою багаточлена Ньютона зі значенням, отриманим за допомогою багаточлена Лагранжа (схема Ейткіна).

Схематично побудувати графік інтерполяційного багаточлена для даної функції на відрізку [12,1; 15,0].

3. Порядок виконання та правила оформлення контрольних завдань

Виконання та захист контрольних завдань є важливим етапом вивчення курсу «Прикладна математика». Приведені завдання відповідають навчальному плану і є формою проміжного контролю знань студентів та оцінки ефективності їх самостійної роботи. Перед виконанням роботи студенту необхідно вивчити теоретичний матеріал та ознайомитися з прикладами виконання практичних завдань.

Контрольні завдання складаються з двох розрахунково-графічних та трьох лабораторних робіт, які виконуються студентом індивідуально. При виконанні робіт за значення α приймають дві останні цифри залікової книжки.

Правила оформлення роботи

Індивідуальна робота повинна мати адресну частину, тобто титульний лист, на якому приводяться відповідні відомості про студента. Робота повинна бути написана на листах формату А4 акуратно, розбірливим та чітким почерком (або надрукована), з нумерацією сторінок, таблиць і рисунків.

Графіки та таблиці повинні виконуватися з урахуванням вимог до їх побудови та оформлення.

Роботи, в яких відсутні пояснення, а також роботи не свого варіанту не перевіряються.

Виконану роботу студент повинен здати в установлений термін. Після рецензування студент повинен виправити в роботі всі вказані недоліки. Якщо робота направлена на доопрацювання, то після виконання усіх вимог рецензента, її слід подати на повторне рецензування, додаючи при цьому попередню роботу.

Контрольні завдання повинні виконуватися **самостійно**. Якщо буде встановлено протилежне, вона не зараховується, навіть якщо в цій роботі всі завдання виконані вірно.

У період лабораторно-екзаменаційної сесії студент повинен представити роботу і вміти пояснювати розв'язання практичних завдань та відповідати на поставленні теоретичні запитання.

Якщо в процесі вивчення матеріалу чи при розв'язанні практичного завдання у студента виникають запитання, на які він не може відповісти самостійно, то він може звернутися до викладача для одержання від нього консультації. В своїх запитаннях потрібно найбільш точно вказати, які труднощі в нього виникли. При цьому потрібно вказати книгу, рік її видання та сторінку, на якій розглянуто питання, що викликає труднощі, або сформульована відповідна задача.

4. Питання для самоперевірки та для самостійної роботи

1. Запишіть загальний матричний вигляд системи лінійних рівнянь.
2. Скільки розв'язків має система лінійних рівнянь? Від значення чого це залежить.
3. Які методи розв'язання систем лінійних рівнянь Вам знайомі?
4. Що називається головним елементом в методі Гауса розв'язання системи лінійних рівнянь?

5. Чи може в методі Гауса головний елемент дорівнювати нулю?
6. Ідея методу Гауса з вибором головного елементу.
7. Метод Гауса належить до аналітичних чи чисельних методів?
8.* Метод простої ітерації для розв'язання систем лінійних рівнянь.
9.* Метод квадратних коренів для розв'язання систем лінійних рівнянь.
10. Що таке емпірична функція?
11. Ідея методу найменших квадратів при побудові математичних моделей.
12. Побудова лінійної математичної моделі.
13. Аналітичний критерій лінійної залежності.
14. Побудова квадратичної математичної моделі.
15. Аналітичний критерій квадратичної залежності.
16. Як від нелінійних залежностей перейти до лінійної. Навести приклади.
17. Що таке інтерполяція?
18. Що називають вузлами інтерполяції?
19. Яке інтерполювання називають параболічним?
20. Скільки інтерполяційних багаточленів можна побудувати для функції, яка задана таблично?
21. В яких випадках будують інтерполяційний багаточлен?
22. Загальний вигляд інтерполяційного багаточлена Лагранжа для нерівновіддалених та рівновіддалених вузлів.
23. Схема застосування інтерполяційного багаточлена Лагранжа на практиці.
24. Як обчислити скінченні різниці першого, другого,..., k-го порядків?
25. Формула зв'язку між похідними і скінченними різницями.
26. Властивості скінченних різниць.
27. Перший інтерполяційний багаточлен Ньютона.
28. Другий інтерполяційний багатогочлен Ньютона.
29. В яких випадках застосовують перший інтерполяційний багаточлен Ньютона, а в яких- другий?
30. Означення поділених різниць.

31. Схема Ейткіна для знаходження значення інтерполяційного багаточлена Лагранжа.

32. Інтерполяційний багаточлен Ньютона з поділеними різницями.

33.* Який процес називають екстраполюванням.

34.* Визначення оберненого інтерполювання.

35.* Знаходження коренів рівнянь методом оберненого інтерполювання.

36.* Визначення сплайна степеня m дефекта k.

37.* Визначення інтерполяційного кубічного сплайна.

37.* Ідея методу інтерполяції для розвернення вікового визначника.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Наконечний С. І. Eконометрія : підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – вид 2-ге, допов. та переробл. – К. : КНЕУ, 2000. – 286 с.
2. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
3. Лященко М.Я. Чисельні методи : підручник / М.Я.Лященко, М.С. Головань - Київ, 1996. – 288с.
4. Лугінін О.Є. Економетрія: Навчальний посібник / О.Є.Лугінін, С.В.Білоусова, Білоусов О.М.– Київ: Центр навчальної літератури, 2005.-252 с.
5. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р.В. Хемминг. - М. Издательство „Наука” , 1968. – 400 с.
6. Гатаулин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве : підручник / А.М. Гатаулин, Г.В. Гаврилов, Т.М. Сорокина под ред. А.М. Гатаулина. – М: Агропромиздат, 1990. – 432 с.
7. Тунеев П.С. Экономико-математические методы в организации и планировании сельскохозяйственного производства : підручник / П.С. Тунеев, Г.И.Сухоруков . – М.: «Финансы и статистика», 1986. – 312 с.
8. Черняк О.І. Економетрика : підручник / О.І.Черняк, А.В.Ставицький, О.В.Баженова, О.В.Шебаніна ; за ред. О.І.Черняка. – 2-ге вид., двереоб. та доп. Миколаїв : МНАУ, 2014. – 414 с.
9. Адамень Ф.Ф. Основы математического моделирования агробиопроцессов : учебник / Ф.Ф.Адамень, В.А. Вергунов, И.Н.Вергунова. – К: Нора - принт, 2005. – 372 с.
10. Лопотко В.О. Математичні методи в розрахунках на ЕОМ : Навчальний посібник / В.О. Лопотко. – Львів : «Магнолія плюс», 2005. – 200 с.
11. Ермаков С.М. Математическая теорія оптимального эксперимента : учебное пособие / С.М. Ермаков, А.А. Жиглявский.– М : Наука, 1987.-320 с.
12. Зельдович Я.Б. Элементи прикладной математики : учебник / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис.– М : Наука, 1972. - 592 с.
13. Засуха В.А. Прикладна математика [Текст] : підручник / В. А. Засуха, В. П. Лисенко, Б. Л. Голуб. 3е вид., перероб. та доп. К. : Арістей, 2006. - 324 с.

Навчальне видання

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Домаскіна Марина Анатоліївна
Хилько Іван Іванович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 3,437.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.