МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

ПРОГНОЗУВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Методичні рекомендації
з вивчення дисципліни та виконання контрольних робіт
для студентів заочної форми навчання спеціальності 8.03060104
«Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності»

МИКОЛАЇВ
2015

УДК 338.27
ББК 65.23
П 78

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 27. 10. 2015 р., протокол № 2.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р. екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
М. А. Домаскіна – канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
А. М. Жорова – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
М. О. Єгорова – асистент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
А. В. Швед – канд. техн. наук, Чорноморський державний університет ім. Петра Могили.

ЗМІСТ

ВСТУП

Прогнозування соціально-економічних процесів є невід'ємним атрибутом системи управління на всіх її рівнях – від невеликої фірми до національної економіки в цілому. Оволодіння багатим арсеналом методів прогнозування з використанням сучасних комп'ютерних технологій є важливою складовою фахової підготовки сучасного економіста.

Саме цій меті підпорядковано навчальну дисципліну «Прогнозування соціально-економічних процесів», яка є логічним продовженням основних теоретичних положень, ідей і практичних задач, що вивчаються в навчальних дисциплінах економічна інформатика, мікроекономіка, макроекономіка, теорія ймовірностей та математична статистика, економетрика, методи оптимізації в економіці, стратегічне управління та ін.

Контрольні завдання та методичні рекомендації складено відповідно до навчальної програми курсу «Прогнозування соціально-економічних процесів» для студентів заочної форми навчання спеціальності 8.03060104 «Менеджмент зовнішньоекономічної діяльності».

Вони включають в собі: порядок виконання та правила оформлення контрольної роботи, теоретичні питання курсу, практичне завдання для самостійної роботи, основні теоретичні відомості, приклад виконання практичного завдання, додатки та список рекомендованої літератури.

Особливістю методичних рекомендацій є те, що вони складаються з двох взаємозв'язаних частин: теоретичної, в якій викладено основні ідеї, методи і результати теорії прогнозування, та практичної, в якій детально описано методику використання сучасних комп’ютерних технологій для розв’язання прикладних задач соціально-економічного змісту.

1. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1.1. Порядок виконання роботи

Виконання та захист контрольної роботи є важливим етапом вивчення курсу «Прогнозування соціально-економічних процесів». Контрольна робота виконуються згідно з навчальним планом і є формою проміжного контролю знань студентів та оцінки ефективності їх самостійної роботи.

Перед виконанням контрольної роботи студенту необхідно вивчити теоретичний матеріал та ознайомитися з прикладами виконання практичних завдань, використовуючи відповідну літературу та матеріали, розміщені на сайті дистанційної форми навчання Миколаївського національного аграрного університету **http://moodle.mnau.edu.ua/**.

Контрольна робота складається з двох теоретичних питань, що вибираються згідно номера варіанта за таблицею 1:

Таблиця 1

Варіанти теоретичних питань контрольної роботи

Передостання цифра варіанта		**Остання цифра варіанта**									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
	0	1	6	13	19	16	1	6	10	20	2
		24	39	32	38	21	27	22	38	35	26
	1	13	8	1	6	11	18	14	16	18	17
		26	25	26	40	30	28	33	21	26	37
	2	13	5	1	15	5	8	8	13	18	8
		38	30	37	39	27	30	32	22	37	26

та одного практичного завдання, що виконується за допомогою табличного редактора ***Excel***.

Студент виконує номер варіанта, який отримує індивідуально у викладача в період сесії.

1.2. Правила оформлення роботи

Контрольна робота повинна мати адресну частину, тобто титульний лист, на якому приводяться відповідні відомості про студента та бланк для рецензії. Робота повинна бути написана акуратно, розбірливим та чітким почерком (або надрукована), з нумерацією сторінок, таблиць і рисунків. Графіки та таблиці повинні виконуватися з урахуванням вимог до їх побудови та оформлення.

Роботи, в яких відсутні пояснення, а також роботи не свого варіанту не перевіряються. В кінці роботи необхідно привести список літератури, якою користувався студент при виконанні роботи, поставити дату та особистий підпис і прізвище її виконавця. Виконану роботу студент повинен здати на рецензування в установлений термін. Після рецензування студент повинен виправити в роботі всі вказані рецензентом недоліки. Якщо робота направлена на доопрацювання, то після виконання усіх вимог рецензента, її слід подати на повторне рецензування, додаючи при цьому попередню роботу.

Контрольна робота повинна виконуватися **самостійно**. Якщо буде встановлено протилежне, вона не зараховується, навіть якщо в цій роботі всі завдання виконані вірно.

У період лабораторно-екзаменаційної сесії студент повинен представити прорецензовану та допущену до захисту контрольну роботу. За вимогою викладача, він пояснює розв’язання практичного завдання та відповідає на поставленні теоретичні запитання. Після успішного захисту роботи студент допускається до здачі заліку у вигляді підсумкового тестування.

Якщо в процесі вивчення матеріалу чи при розв’язанні практичного завдання у студента виникають запитання, на які він не може відповісти самостійно, то він може звернутися до викладача для одержання від нього консультації. В своїх запитаннях потрібно найбільш точно вказати, які труднощі в нього виникли. При цьому потрібно вказати книгу, рік її видання та сторінку, на якій розглянуто питання, що викликає труднощі, або сформульована відповідна задача.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ КУРСУ

1. Економічне прогнозування, його суть та роль в управлінні і плануванні.
2. Класифікація прогнозів.
3. Класифікація методів прогнозування.
4. Моніторинг та альтернативи прогнозування.
5. Прогнозування на основі часових рядів. Поняття тренда.
6. Метод екстраполяції тенденції по одному часовому ряду.
7. Особливості методів короткострокового прогнозування.
8. Основні аналітичні показники динамічного ряду.
9. Екстраполяція на основі аналітичних показників рядів динаміки.
10. Екстраполяція на основі плинної середньої.
11. Екстраполяція на основі індексу сезонності.
12. Прогнозування методом ковзної середньої.
13. Визначення сезонної компоненти та методи її вилучення.
14. Метод експоненційного згладжування та його різноманітні форми.
15. Аналіз моделей вибору значення коефіцієнта згладжування.
16. Поняття про аналітичне вирівнювання тренду.
17. Виявлення та корегування аномальних рівнів. Метод Ірвіна.
18. Методи виявлення наявності в часовому ряді тренда. Метод перевірки різниць середніх рівнів.
19. Методи виявлення наявності в часовому ряді тренда. Метод Фостера-Стюарта.
20. Загальна характеристика кривих зростання.
21. Методи вибору форми тренду.
22. Розрахунок параметрів кривих зростання МНК.
23. Оцінка адекватності й точності трендових моделей.
24. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків. Алгоритм методу серій.
25. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків. Алгоритм методу піків.
26. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону. Алгоритм методу на основі асиметрії та ексцесу
27. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону. Алгоритм методу $\boldsymbol{RS}$ - критерію.
28. Перевірка рівності нулю математичного сподівання.

29. Перевірка незалежності значень рівнів залишків.
30. Розрахунок точності трендових моделей.
31. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями. Загальні поняття.
32. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями. Розрахунок точкового й інтервального прогномів.
33. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями. Верифікація прогнозу.
34. Методи колективної експертної оцінки.
35. Методи статистичної обробки матеріалів анкет.
36. Методи оцінки погодженості поглядів між експертами.
37. Етапи колективної генерації ідей («мозкова атака»).
38. Метод «Делфі» в соціально-економічному прогнозуванні.
39. Метод побудови «сценаріїв».
40. Метод побудови прогнозних графів.

3. ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

На основі статистичних даних підприємства по реалізації продукції (табл. 2) побудувати найкращу криву зростання для моделювання даного економічного процесу, провести її повне та комплексне дослідження.

Порядок виконання завдання

1. Методи вибору кривої зростання, що апроксимує тренд.

1.1. Метод послідовних різниць (метод Тінтнера).

1.2. Метод характеристик приросту.

2. Побудова обраних моделей.

2.1. Оцінка параметрів полінома першого степеня.

2.2. Оцінка параметрів полінома другого степеня.

2.3. Оцінка параметрів простої експоненти.

3. Вибір найкращої моделі та перевірка її адекватності статистичним даним.

3.1. Вибір найкращої моделі.

3.2. Перевірка статистичної значущості параметрів моделі.

3.3. Обчислення та аналіз коефіцієнта детермінації.

3.4. Визначення $\boldsymbol{F}$ - статистики Фішера.

3.5. Побудова трендової моделі за допомогою інструменту ***СЕРВИС ® АНАЛИЗ ДАННЫХ ® РЕГРЕССИЯ***

4. Перевірка виконання умов побудови обраної моделі.

4.1. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків.

4.1.1. Метод серій.

4.1.2. Метод піків.

4.2. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону.

4.2.1. Метод на основі асиметрії та ексцесу.

4.2.2. Метод $\boldsymbol{RS}$ - критерію.

4.3. Перевірка рівності нулю математичного сподівання.

4.4. Перевірка незалежності значень рівнів залишків.

5. Розрахунок точності трендових моделей.

6. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.

Таблиця 2

Статистичні дані підприємств по реалізації продукції

№	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
1	66,73	63,41	58,51	56,86	53,11	51,30	50,34	48,30	46,83	46,62
2	66,86	63,54	58,64	56,99	53,24	51,43	50,47	48,43	46,96	46,75
3	66,99	63,67	58,77	57,12	53,37	51,56	50,60	48,56	47,09	46,88
4	67,12	63,80	58,90	57,25	53,50	51,69	50,73	48,69	47,22	47,01
5	67,25	63,93	59,03	57,38	53,63	51,82	50,86	48,82	47,35	47,14
6	67,38	64,06	59,16	57,51	53,76	51,95	50,99	48,95	47,48	47,27
7	67,51	64,19	59,29	57,64	53,89	52,08	51,12	49,08	47,61	47,40
8	67,64	64,32	59,42	57,77	54,02	52,21	51,25	49,21	47,74	47,53
9	67,77	64,45	59,55	57,90	54,15	52,34	51,38	49,34	47,87	47,66
10	67,90	64,58	59,68	58,03	54,28	52,47	51,51	49,47	48,00	47,79
11	68,03	64,71	59,81	58,16	54,41	52,60	51,64	49,60	48,13	47,92
12	68,16	64,84	59,94	58,29	54,54	52,73	51,77	49,73	48,26	48,05
13	68,29	64,97	60,07	58,42	54,67	52,86	51,90	49,86	48,39	48,18
14	68,42	65,10	60,20	58,55	54,80	52,99	52,03	49,99	48,52	48,31
15	68,55	65,23	60,33	58,68	54,93	53,12	52,16	50,12	48,65	48,44
16	68,68	65,36	60,46	58,81	55,06	53,25	52,29	50,25	48,78	48,57
17	68,81	65,49	60,59	58,94	55,19	53,38	52,42	50,38	48,91	48,70
18	68,94	65,62	60,72	59,07	55,32	53,51	52,55	50,51	49,04	48,83
19	69,07	65,75	60,85	59,20	55,45	53,64	52,68	50,64	49,17	48,96
20	69,20	65,88	60,98	59,33	55,58	53,77	52,81	50,77	49,30	49,09
21	69,33	66,01	61,11	59,46	55,71	53,90	52,94	50,90	49,43	49,22
22	69,46	66,14	61,24	59,59	55,84	54,03	53,07	51,03	49,56	49,35
23	69,59	66,27	61,37	59,72	55,97	54,16	53,20	51,16	49,69	49,48
24	69,72	66,40	61,50	59,85	56,10	54,29	53,33	51,29	49,82	49,61
25	69,85	66,53	61,63	59,98	56,23	54,42	53,46	51,42	49,95	49,74
26	69,98	66,66	61,76	60,11	56,36	54,55	53,59	51,55	50,08	49,87
27	70,11	66,79	61,89	60,24	56,49	54,68	53,72	51,68	50,21	50,00
28	70,24	66,92	62,02	60,37	56,62	54,81	53,85	51,81	50,34	50,13
29	70,37	67,05	62,15	60,50	56,75	54,94	53,98	51,94	50,47	50,26
30	70,50	67,18	62,28	60,63	56,88	55,07	54,11	52,07	50,60	50,39

4. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Загальна характеристика кривих зростання

Якщо існує певна закономірність в динаміці деякого економічного явища або процесу, то тенденція зміни може бути встановлена добором відповідної функції $y(t) = f(t)$, що називається ***крива зростання.*** Вибір апроксимуючої кривої, як правило, відбувається вже за згладженим рядом.

Найчастіше в економіці використовують лінійні (поліноміальні), експоненціальні та S - подібні криві зростання.

Лінійна (поліноміальна) трендова модель:

$$y_t^* = \sum_{r=-q}^{s} a_r y_{t+r},$$

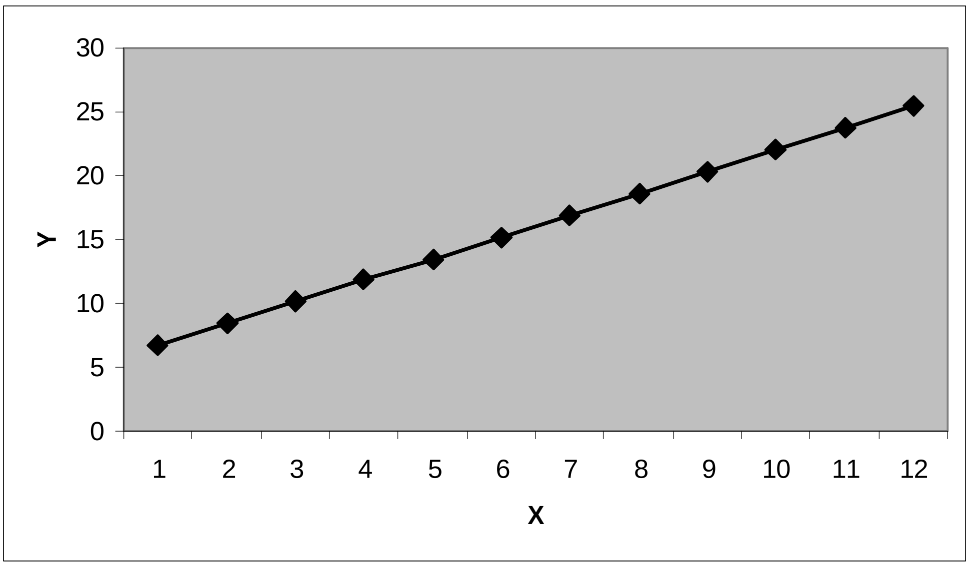
де y_t^* - згладжене (вирівняне) значення рівня на момент часу t; a_r - вага, яка надається рівню ряду, котрий знаходиться на інтервалі r від моменту часу t; s - кількість рівнів після моменту часу t; q - кількість рівнів до моменту часу t.

Найпростіші поліноміальні криві зростання:

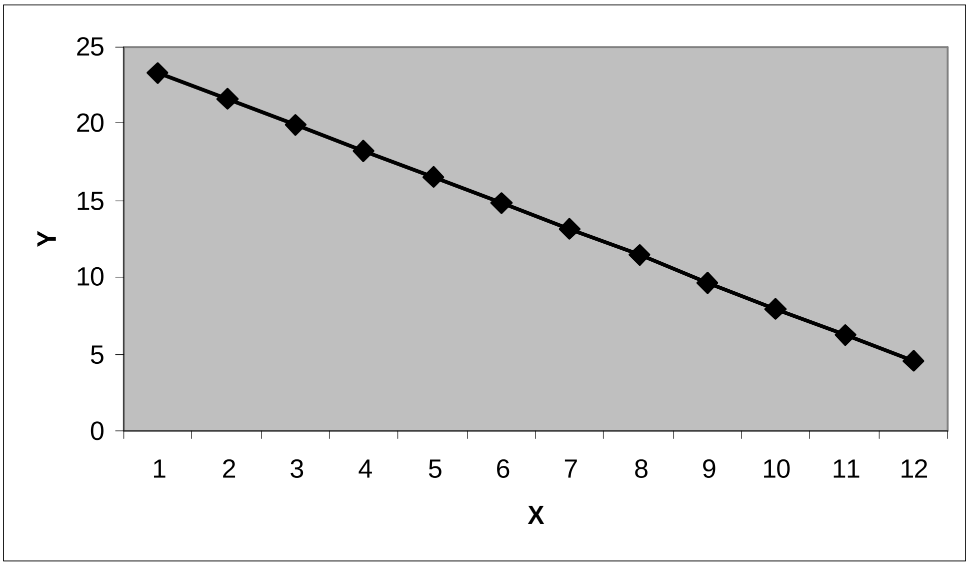
$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$ - першого степеня (рис. 1);

$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ - другого степеня (рис. 2);

$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ - третього степеня і т.д.



а) $a_1 > 0$



б) $\boldsymbol{a_1 < 0}$

Рис. 1. **Графік лінійної функції**

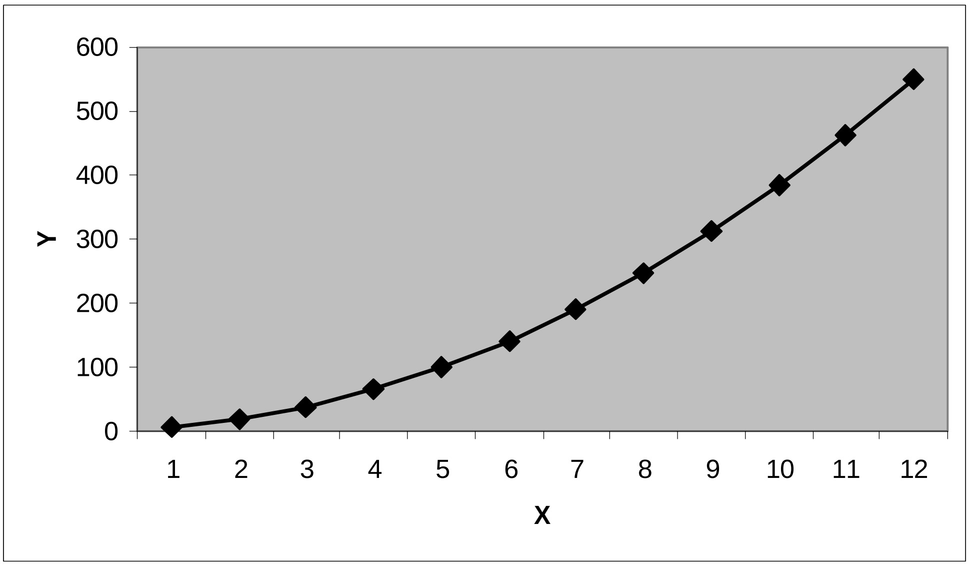


Рис. 2. **Графік параболи**

Параметр a_0 - вільний член функції, тобто значення y, якщо $x = 0$. Параметр a_1 – лінійний приріст (швидкість зростання), показує на скільки змінюється y, якщо незалежна змінна t змінюється на 1; знак "+" при a_1 вказує на прямий зв'язок, "–" – на обернений. Параметр a_2 - характеризує прискорення зростання, параметр a_3 - зміну прискорення зростання,

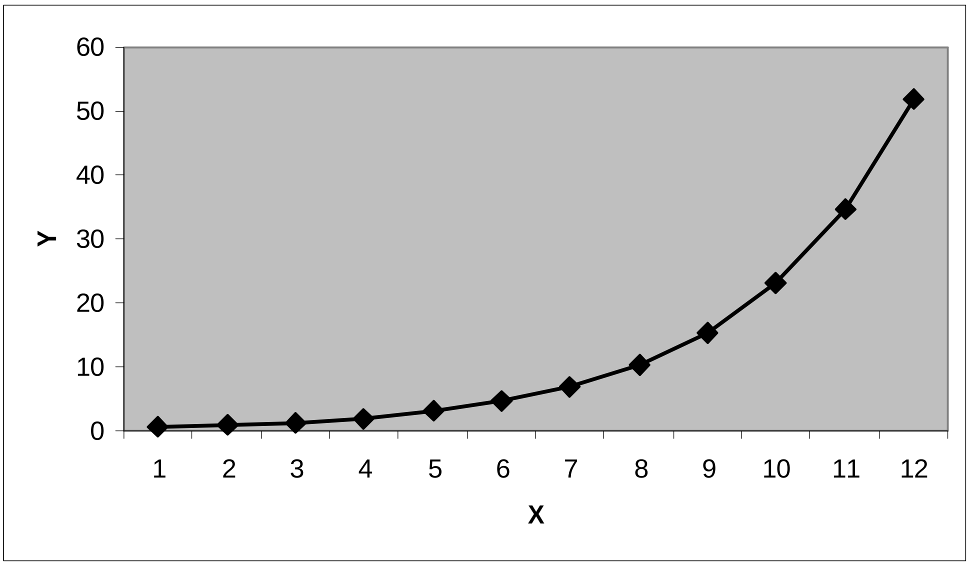
Парабола другого порядку (рис. 2) описує рух із рівномірною зміною прискорення як у додатному, так і в протилежному напрямі. Характерним для таких економічних процесів є рівноприскорене зростання або спад їх розвитку.

У параболі третього порядку приріст може змінювати свій знак один раз або двічі.

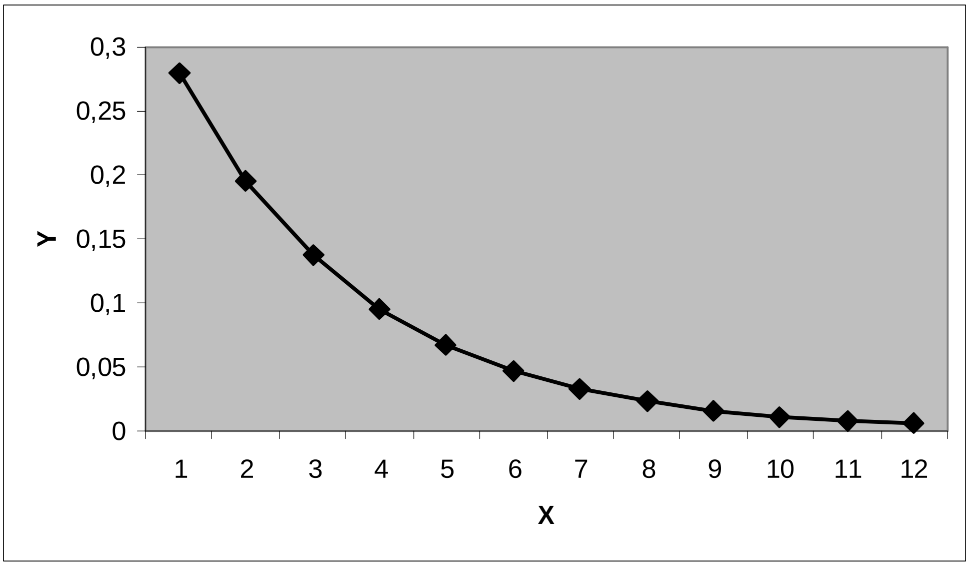
Поліноміальні криві зростання можна використовувати для апроксимації та прогнозування соціально-економічних процесів, у яких подальший розвиток не залежить від досягнутого рівня.

Використання ***експоненціальних кривих зростання*** передбачає, що подальший розвиток соціально-економічного процесу залежить від досягнутого рівня, наприклад, приріст залежить від значення функції.

В економіці найчастіше використовують два різновиди експоненціальних (показникових) кривих зростання (просту та модифіковану експоненти).



а) b > 1



б) b < 1

Рис. 3. **Графік простої експоненти**

Проста експонента (рис. 3) задається функцією:

$$\hat{y}_t = ab^t,$$

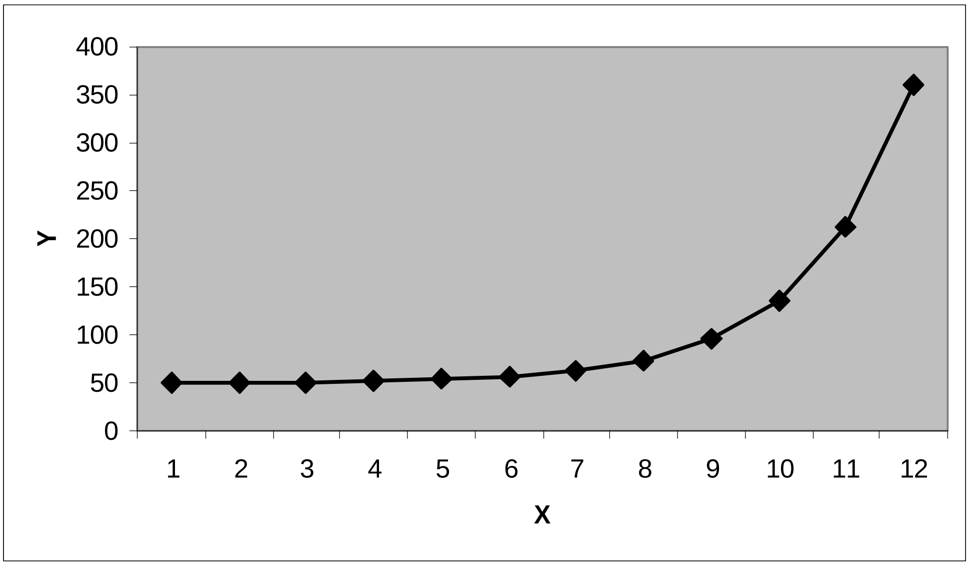
де a, b - додатні числа, причому, якщо $b > 1$, то крива зростає при збільшенні часу t, якщо $b < 1$, то крива спадає.

Дана функція описує процес зі сталим темпом зростання і сталим темпом приросту.

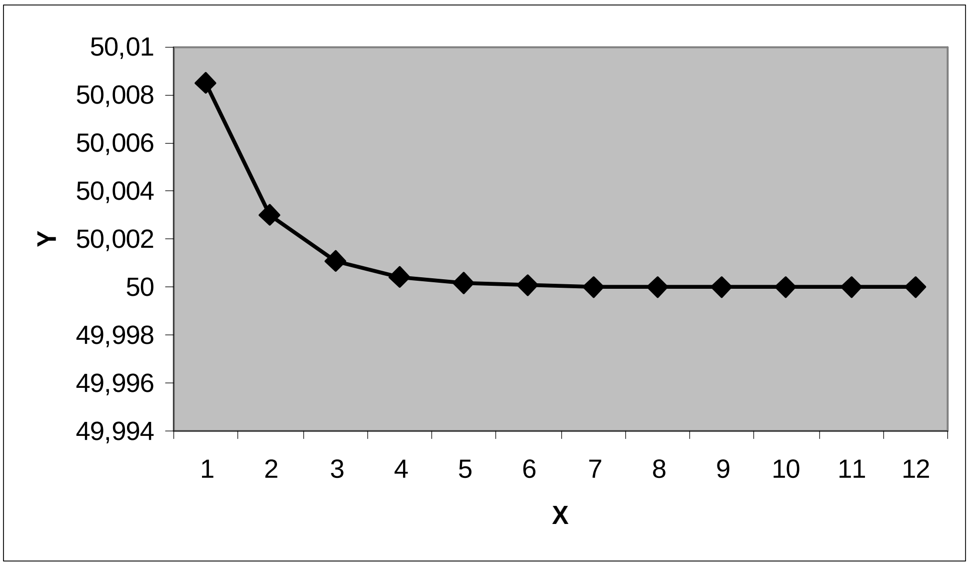
Модифікована експонента (рис. 4) описує процеси, що характеризуються насиченням і має вигляд:

$$\hat{y}_t = k + ab^t,$$

де a, b - параметри, причому $a < 0, 0 < b < 1$, k - асимптота функції, тобто значення функції необмежено наближуються знизу до k.



а) b > 1



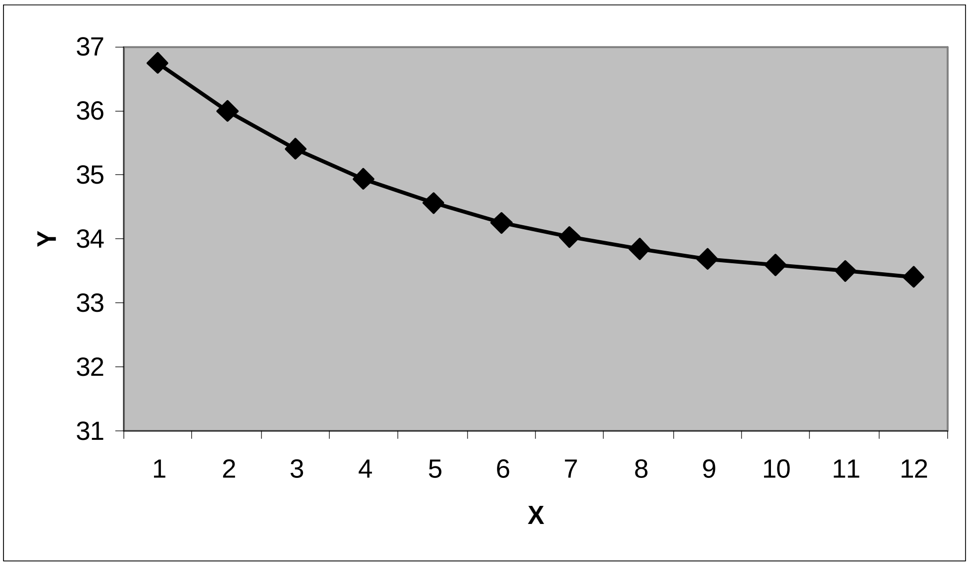
б) b < 1

Рис. 7.4. **Графік модифікованої експоненти**

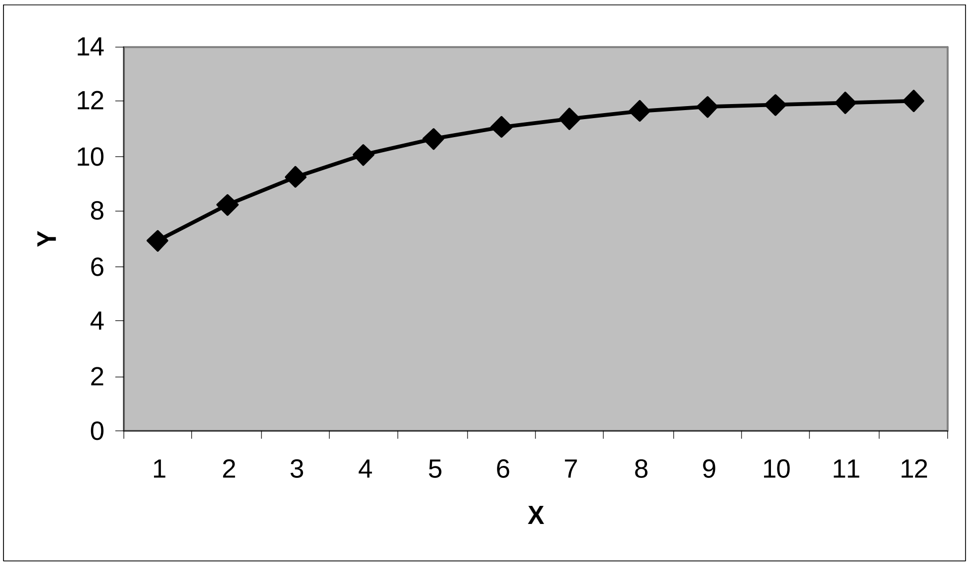
До S - ***подібних кривих зростання*** найчастіше відносять криву Гомперця та логістичну криву. У маркетингових дослідженнях, відбиваючи основну тенденцію у страхових та демографічних розрахунках, використовується ***крива Гомперця*** (рис. 5), що задається функцією:

$$\hat{y}_t = ka^{b^t},$$

де a, b - додатні параметри, k - асимптота функції.



а) $k > 0$



б) $k < 0$

Рис. 5. **Графік кривої Гомперця**

Логістична крива чи ***крива Перла-Ріда*** (рис. 6) є зростаючою функцією, яка найчастіше подається виразами:

$$\hat{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \quad \hat{y}_t = \frac{k}{1 + 10^{a+bt}},$$

де a, b - додатні параметри; k - граничне значення функції при нескінченному зростанні часу:

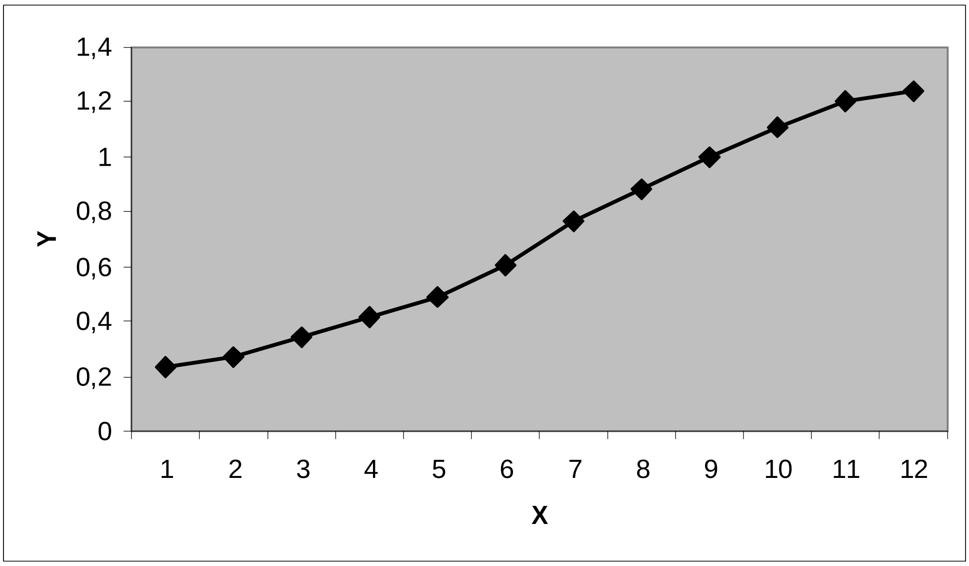


Рис. 6. **Графік логістичної кривої**

Дана крива в економіці застосовується для опису процесів, для яких характерне на початку повільне зростання, а далі, з часом, воно прискорюється і наприкінці – спадає, наближаючись до певної межі (асимптоти). Наприклад, попит на продукцію, яка ще недавно була дефіцитною, у мірі зростання її виробництва починає поволі спадати і зупиняється на певному рівні, наближаючись до асимптоти.

Висновок

Монотонному зростанню (спаданню) процесу відповідають лінійна, параболічна, показникові, проста та модифікована експоненціальна, гіперболічна (головним чином для спадаючого процесу) функції та їх комбінації.

Для моделювання динамічних рядів, у яких проявляється швидкий розвиток на початку ряду, спадання і насичення до його кінця, тобто, які характеризуються прямуванням до деякої граничної величини, використовуються логістичні криві.

Якщо рівні ряду зростають в арифметичній прогресії, то доцільно згладжування здійснювати прямою лінією, а коли зростання рівнів ряду іде в геометричній прогресії, то згладжування необхідно здійснювати показниковою функцією.

2. Методи вибору кривої зростання, що апроксимує тренд

2.1. Візуальний метод

Вибір форми тренду виконується на основі графічного зображення динамічного часового ряду – ***кореляційного поля***. За графіком і за результатами теоретичного аналізу даної тенденції можна передбачити характер тієї чи іншої динаміки економічного процесу.

2.2. Метод послідовних різниць (метод Тінтнера)

Цей метод може використовуватись для попереднього вибору поліноміальної кривої, якщо, по-перше, рівні часового ряду складають тільки трендову та випадкову компоненти, по-друге, тренд є достатньо гладким, щоб його можна було апроксимувати поліномом певного степеню.

Обчислюються прирости до порядку k включно:

$$u_t^{[1]} = y_t - y_{t-1},$$
$$u_t^{[2]} = u_t^{[1]} - u_{t-1}^{[1]},$$
$$u_t^{[3]} = u_t^{[2]} - u_{t-1}^{[2]},$$
$$\ldots$$
$$u_t^{[k]} = u_t^{[k-1]} - u_{t-1}^{[k=1]}$$

доти, доки різниці не будуть майже однаковими.

Порядок рівності таких різниць беруть за степінь многочленна для вирівнювання основної тенденції динаміки. Якщо перші різниці майже рівні, тренд описують **прямою**, якщо однакові значення мають другі різниці, динаміку вирівнюють **параболою другого порядку** і т.д.

З метою апроксимації економічних процесів, як правило, обчислюють прирости до 4-го порядку.

Далі обчислюються дисперсії для вихідного ряду:

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{\left(\sum\limits_{t=1}^{n} y_t\right)^2}{n}}{n-1},$$

та для кожного різницевого ряду порядку $k = 1, 2, \ldots$

$$s_k^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \left(u_t^{[k]}\right)^2}{(n-k)C_{2k}^k},$$

де $C_{2k}^k = \dfrac{(2k)!}{k!(2k-k)!}$ - біноміальний коефіцієнт.

Здійснюється порівняння кожної наступної дисперсії з попередньою, тобто обчислюються величини $\left|s_k^2 - s_{k-1}^2\right|$ і, якщо для будь-якого k ця величина не перевершує деякої наперед заданої додатної величини, тобто дисперсії одного порядку, то степінь поліному апроксимації повинна бути $k-1$.

2.3. За критерій вибору форми тренду беруть суму квадратів відхилень значень рівнів від розрахункових, отриманих на основі вирівнювання часового ряду. Із множини функцій вибирають таку, якій відповідає мінімальне значення цього критерію.

2.4. Метод характеристик приросту

Цей метод полягає в тому, що вибір форми кривої відбувається за попередньою статистичною обробкою динамічного ряду, яка складається з наступних етапів.

1. Згладжування часового ряду методом ковзної середньої.

Наприклад, для інтервалу згладжування $m = 3$ згладжені криві обчислюються за формулою $y_t^* = \dfrac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$, причому, щоб не загубити перший та останній рівні, їх згладжують за формулами:

$$\bar{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6}, \quad \bar{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}.$$

2. Обчислення середніх приростів для згладженого ряду.

Перші середні прирости:

$$U_t^{[1]} = \frac{y_{t+1}^* - y_{t-1}^*}{2}, \quad t = 2, 3, \ldots, n-1,$$

другі середні прирости:

$$U_t^{[2]} = \frac{U_{t+1}^{[1]} - U_{t-1}^{[1]}}{2}, \quad t = 3, 4, \ldots, n-2,$$

3. Обчислення похідних характеристик приростів, пов'язаних з обчисленими середніми приростами та згладженими рівнями ряду:

$$\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*},\ log\,U_t^{[1]},\ log\,\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*},\ log\,\frac{U_t^{[1]}}{y_t^{*2}}$$

Відповідно до характеру їх зміни вибирається вид кривої зростання вихідного часового ряду згідно таблиці 3.

Таблиця 3

Характеристики зміни показників середніх приростів

Характеристика приростів	**Характер зміни**	**Вид функції**
Перші середні прирости $U_t^{[1]}$	Майже рівні	Пряма
Перші середні прирости $U_t^{[1]}$	Змінюються лінійно	Парабола 2-го порядку
Другі середні прирости $U_t^{[2]}$	Змінюються лінійно	Парабола 3-го порядку
$\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*}$	Майже рівні	Проста експонента
$log\,U_t^{[1]}$	Змінюється лінійно	Модифікована експонента
$log\,\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*}$	Змінюється лінійно	Крива Гомперця
$log\,\frac{U_t^{[1]}}{y_y^{*2}}$	Змінюється лінійно	Логістична крива

Далі за допомогою специфікації потрібно вибрати найкращий варіант, використовуючи певний кількісний критерій.

3. Розрахунок параметрів кривих зростання МНК

Після того як було вибрано апроксимуючу модель (криву зростання) необхідно чисельно оцінити її параметри.

Параметри поліноміальних кривих оцінюються ***методом найменших квадратів (МНК),*** який вимагає, щоб сума квадратів відхилень фактичних рівнів ряду від відповідно вирівняних за певною кривою зростання, була мінімальною, тобто

$$\sum u_t^2 = \sum \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2 \to min,$$

де y_t - фактичне значення функції; $\hat{y}_t$ - розрахункове значення функції.

Для лінійного рівняння $\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ маємо:

$$\sum \left(y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 t\right)^2 \to min.$$

Після нескладних перетворень отримуємо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y_t = \hat{a}_0 n + \hat{a}_1 \sum t, \\ \sum y_t t = \hat{a}_0 \sum t + \hat{a}_1 \sum t^2, \end{cases}$$

розв'язавши яку, отримуємо оцінки параметрів рівняння:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\sum \left(t - \bar{t}\right)\left(y_t - \bar{y}\right)}{\sum \left(t - \bar{t}\right)^2}, \\ \hat{a}_1 = \bar{y} - \hat{a}_t \bar{t}. \end{cases}$$

Нелінійні моделі зводяться до лінійної моделі за допомогою логарифмування та відповідної заміни.

4. Оцінка адекватності й точності трендових моделей

Питання про можливість застосування функції для аналізу і прогнозування того чи іншого економічного явища може бути розв'язане тільки після встановлення її ***адекватності,*** тобто встановлення відповідності розрахованої моделі досліджуваному об'єкту чи процесу.

Трендова модель $\hat{y}_t$ конкретного часового ряду y_t буде ***адекватною***, якщо вона правильно відображає систематичні компоненти часового ряду.

Ця вимога еквівалентна тому, щоб залишки $u_t = y_t - \hat{y}_t$ $\left(t = 1, 2, \ldots, n\right)$ задовольняли властивостям випадкової складової ряду:

1) випадковість коливань послідовності залишків;
2) відповідність залишків нормальному закону розподілу;
3) рівність нулю математичного сподівання залишків;
4) незалежність значень рівнів залишків.

4.1. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків

Ця перевірка має бути проведена насамперед для підтвердження гіпотези про достовірність вибору виду тренда. Для дослідження випадковості відхилень від тренду потрібно розрахувати послідовність залишків $u_t = y_t - \hat{y}_t \quad (t = 1,2,\ldots,n)$.

Характер цих відхилень вивчається за допомогою **методу серій,** що ґрунтується на медіані вибірки та **метод піків (поворотних) точок**.

Алгоритм методу серій

1. Ряд залишків u_t ранжують в порядку зростання (або спадання), тобто будується новий ряд, де першим розташовується найменше значення $u_t \ (t = 1,2,\ldots,n)$, другим – найменше із решти значень $u_t \ (t = 1,2,\ldots,n-1)$ і т.д., останнім розташовується найбільше значення із усіх u_t.

Потім знаходять його ***медіану***:
серединне значення побудованого варіаційного ряду

$$u_{me} = u_{\frac{n+1}{2}}, \text{ якщо } n \text{ - непарне,}$$

і середнє арифметичне із двох серединних значень

$$u_{me} = \frac{u_{\frac{n}{2}} + u_{\frac{n}{2}+1}}{2}, \text{ якщо } n \text{ - парне.}$$

2. Кожне значення вихідної послідовності залишків u_t порівнюють із медіаною u_{me}:

якщо $u_t > u_{me}$, то ставиться знак «+»;

якщо $u_t < u_{me}$, то ставиться знак «–»;

якщо $u_t = u_{me}$, то відповідне значення u_t не враховується.

Утворюється послідовність, що складається з «+» та «–».

Послідовність плюсів або мінусів, які розташовані підряд, називається ***серія.*** Якщо є один «+» («–»), що чергується з «–» («+»), то його потрібно вважати окремою серією.

3. Визначається загальна кількість серій V і найбільша протяжність однієї з серій k_{max}. Для того, щоб послідовність залишків мала випадковий характер, протяжність найдовшої серії

k_{max} не повинна бути досить великою, а загальна кількість серій V не повинна бути досить малою.

4. Значення послідовності u_t приймаються випадковими для рівня значущості $\alpha = 0,05$ тільки тоді, коли одночасно виконуються дві умови:

$$k_{max} < [3,3(\lg n) + 1] \text{ і } V > [0,5(n + 1 - 1,96\sqrt{n - 1})],$$

де квадратні дужки визначають цілу частину числа.

Якщо хоча б одна нерівність порушується, то гіпотеза про випадковий характер залишків часового ряду відхиляється і, відповідно, трендова модель є **неадекватною.**

Алгоритм методу піків

1. У послідовності залишків вибираються поворотні точки.

Поворотною точкою є значення рівня залишків, що більше (менше) від обох сусідніх рівнів, тобто

$$u_{t-1} < u_t > u_{t+1},$$

або

$$u_{t-1} > u_t < u_{t+1}$$

2. Визначається загальна кількість поворотних точок Π.

3. Обчислюється математичне сподівання поворотних точок $\overline{\Pi}$ і їх дисперсія s_{Π}^2 за умови випадкової вибірки залишків:

$$\overline{\Pi} = \frac{2}{3}(n - 2);$$

$$s_{\Pi}^2 = \frac{16n - 29}{90}.$$

4. Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ приймається, що значення послідовності u_t є випадковими, якщо виконується нерівність $\Pi > \left[\overline{\Pi} - 1,96\sqrt{s_{\Pi}^2}\right]$, де квадратні дужки означають цілу частину числа. Якщо ця нерівність не виконується, трендова модель вважається **неадекватною.**

4.2. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону

Алгоритм методу на основі асиметрії та ексцесу

1. Для нормального закону розподілу показники асиметрії $\hat{\gamma}_1$ та ексцесу $\hat{\gamma}_2$ в генеральній сукупності дорівнюють нулю.

Припустимо, що відхилення від тренду є вибіркою з генеральної сукупності. Обчислимо вибіркові значення асиметрії $\hat{\gamma}_1$ та ексцесу $\hat{\gamma}_2$ та їх середньоквадратичні відхилення $\sigma_{\hat{\gamma}_1}$ і $\sigma_{\hat{\gamma}_2}$:

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum u_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum u_t^2\right)^3}}; \quad \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}};$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum u_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum u_t^2\right)^2} - 3; \quad \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}};$$

2. Якщо одночасно виконуються умови:

$$\left|\hat{\gamma}_1\right| < 1{,}5\hat{\sigma}_{\gamma_1}; \quad \left|\hat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| < 1{,}5\hat{\sigma}_{\gamma_2}$$

то гіпотеза про нормальний розподілу випадкових залишків приймається і модель вважається **адекватною.**

Якщо виконується хоча б одна з умов:

$$\left|\hat{\gamma}_1\right| > 2\hat{\sigma}_{\gamma_1}; \quad \left|\hat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| \geq 2\hat{\sigma}_{\gamma_2},$$

то гіпотеза про нормальний закон розподілу випадкової компоненти u_t відхиляється і модель вважається **неадекватною.**

Алгоритм методу *RS* - *критерію*

1. Обчислимо величину розмаху між рівнями ряду залишків $R = u_{max} - u_{min}$, та їх виправлене стандартне відхилення:

$$S = S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{n-1}}.$$

2. Обчислимо фактичне значення $\boldsymbol{RS}$ - ***критерію:***

$$\boldsymbol{RS} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{S}}.$$

3. Розраховане значення величини $\boldsymbol{RS}$ порівнюється з табличним $\boldsymbol{RS}$ - критерієм (а саме, з його нижньою та верхньою межею для рівня значущості α) (табл. 4).

Таблиця 4

Значення $\boldsymbol{RS}$ -критерію для α = 0,05

$\boldsymbol{n}$	**Нижня межа**	**Верхня межа**
10	2,67	3,685
20	3,18	4,49
30	3,47	4,849

Якщо це значення не попадає в інтервал між критичними межами, то для заданого рівня значущості гіпотеза про нормальний закон випадкової складової $\boldsymbol{u_t}$ відхиляється.

4.3. Перевірка рівності нулю математичного сподівання

1. Якщо випадкові значення послідовності $\boldsymbol{u_t}$ розподілені за нормальним законом, то виконується перевірка рівності нулю математичного сподівання залишків.

Розраховується фактичне значення критерію:

$$t_p = \frac{\bar{u}_t - 0}{\sigma_u}\sqrt{n},$$

де $\bar{u}_t = \frac{\sum u_t}{n}$ - середнє арифметичне рівнів залишків,

σ_u - середнє квадратичне відхилення залишків.

2. Якщо розрахункове значення t_p менше табличного $t_{табл} = t_{\alpha, n-1}$ для рівня значущості α та ступенів свободи $k = n - 1$, тобто $t_p < t_{табл}$, то гіпотеза про рівність нулю математичного сподівання випадкової складової приймається, в протилежному випадку – відхиляється.

4.4. Перевірка незалежності значень рівнів залишків

З метою перевірки наявності кореляції між сусідніми відхиленнями u_t використовують метод Дарбіна-Уотсона, фон Неймана і т.д. (курс «Економетрія»).

За методом Дарбіна-Уотсона обчислюється розрахункове значення DW - критерію за формулою:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2},$$

Обчислене таким чином значення DW - критерію порівнюється з його нижнім DW_1 та верхнім DW_2 критичними значеннями.

Якщо $DW_2 < DW < 4 - DW_2$, то приймається гіпотеза про відсутність кореляції між сусідніми значеннями послідовності u_t. Якщо $DW_1 < DW < DW_2$ і $4 - DW_2 < DW < 4 - DW_1$ то даний метод відповіді не дає, необхідні додаткові дослідження.

5. Розрахунок точності трендових моделей

Висновок про адекватність трендової моделі робиться тоді, коли всі попередні перевірки властивостей залишків дають позитивні результати. Для адекватних моделей повинно бути поставлене питання про точність моделі.

Точність характеризується величиною відхилень значень рівнів ряду за кривою зростання від фактичного рівня.

Розглянемо систему показників, які можна застосовувати як статистичні показники точності моделі.

Середнє квадратичне відхилення:

$$s_u = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}},$$

де n - кількість рівнів ряду; m - кількість параметрів моделі, що має функцію зростання; y_t - фактичний рівень ряду; $\hat{y}_t$ - значення рівня за трендовою моделлю.

Середня відносна помилка апроксимації:

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| 100\%.$$

Таблиця 5

Рівень середньої відносної помилки прогнозу

Рівень $\bar{e}$ $(MAPE)$	**Висновки щодо прогнозу**
Менше як 10%	Висока якість
10-20%	Досить добра якість
21-50%	Задовільна якість
Більше 50%	Незадовільна якість

Коефіцієнт збіжності:

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}.$$

Коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(\hat{y} - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}.$$

Його величина може приймати значення $0 \le R^2 \le 1$ і характеризує частку зміни емпіричних даних, яка пояснюється обраною моделлю. Тому чим більше значення коефіцієнта детермінації, тим більш якісною є обрана за найкращу модель.

За цими показниками можна зробити вибір із декількох трендових моделей і обрати найбільш точну.

6. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями

Головною метою дослідження трендових моделей економічної динаміки є розрахунок прогнозів про розвиток досліджуваного процесу.

Прогнозування часового ряду ґрунтується на ***методі екстраполяції***, тобто, спостерігаючи ту чи іншу тенденцію зміни процесу в минулому, продовжуємо її з певною ймовірністю у майбутній період.

Прогноз за трендовими моделями містить дві складові: точковий й інтервольний.

Точковий прогноз визначається окремим показником прогнозованого процесу, коли в рівняння його трендової моделі підставлено значення часу t, що відповідає **періоду упередження** $t = n + 1, n + 2, \ldots, n + L$.

Період упередження (або прогнозований період) визначає період часу від моменту, для якого є останні статистичні дані про об'єкт, до моменту його прогнозованого значення.

Інтервальний прогноз розраховується визначенням ***довірчого інтервалу*** – такого інтервалу, де з певною імовірністю можна очікувати появу фактичного значення прогнозованого економічного показника. Розрахунок довірчих інтервалів у прогнозуванні з використанням кривих зростання базується на висновках і формулах теорії регресії (курс «Економетрика»).

Методи, які розроблені для статистичних сукупностей, дозволяють розрахувати довірчий інтервал, що залежить від стандартної помилки оцінки прогнозуючого показника, періоду упередження, кількості рівнів в часовому ряду і рівня значущості α.

Стандартна (середня квадратична похибка) $S_{\hat{y}}$ оцінки прогнозованого показника визначається за формулою:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - m}},$$

де y_t - фактичні значення рівнів часового ряду для періоду t; $\hat{y}_t$ - розрахункові значення відповідного показника за кривою зростання; n - кількість рівнів ряду; m - кількість параметрів моделі.

У випадку прямолінійного тренду, розраховуючи інтервал довіри U_y, часто використовують аналогічну формулу для парної регресії:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n + 2L - 1)^2}{n(n^2 - 1)}},$$

де L - період упередження;

$\hat{y}_{n+L}$ - точковий прогноз за моделлю на $(n + L)$ - й період часу;

$S_{\hat{y}}$ - стандартна похибка $S_{\hat{y}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}{n - 2}}$;

t_α - табличне значення критерію Стьюдента для рівня значу-щості α.

Іноді для розрахунків інтервалів довіри прогнозу відносно лінійного тренду застосовують попередню формулу в дещо іншому вигляді, а саме:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2}},$$

де t - порядковий номер рівня ряду $(t = 1, 2, \ldots, n)$;

підсумування ведеться за всіма спостереженнями;

t_L відповідає $(n + L)$ - му періоду часу, для якого робиться прогноз; $\bar{t}$ - час, що відповідає середині періоду спостережень для вихідного ряду, наприклад $\bar{t} = \dfrac{n + 1}{2}$.

Попередню формулу можна спростити, якщо перенести початок розрахунку на середину періоду спостережень $(\bar{t} = 0)$.

Тоді,

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^{n} t^2}}.$$

Інтервали довіри прогнозу відносно тренду, що має вид поліному другого чи третього порядку:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_a S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum_{t=1}^{n} t^2} + \frac{\sum_{t=1}^{n} t^4 - 2t_L^2 \sum_{t=1}^{n} t^2 + nt_L^4}{n\sum_{t=1}^{n} t^4 - \left(\sum_{t=1}^{n} t^2\right)^2}}\,.$$

Аналогічно розраховуються інтервали довіри для експоненціальної кривої зростання, а також для кривих, що мають асимптоту (модифікована експонента, крива Гомперця, логістична крива), якщо значення асимптоти відоме.

Оптимальна довжина періоду упередження визначається окремо для кожного економічного явища з урахуванням статистичного коливання початкових даних, ґрунтуючись на змістовному міркуванні про стабільність явища. Ця довжина, як правило, не перевищує для рядів річних спостережень **однієї третьої обсягу даних**, а для квартальних і помісячних рядів **двох років**.

Якщо немає змістовних якісних і кількісних міркувань стосовно динаміки того чи іншого явища, то для його прогнозування слід обирати ряди більш-менш довгих часових періодів. Якщо динаміка економічного явища має циклічну складову, слід брати період ряду від середини першого до середини останнього періоду циклу. Коли ряд охоплює періоди з різними трендами, краще скоротити його, відкинувши найбільш ранні рівні, що стосуються іншої тенденції розвитку.

Для екстраполяційного прогнозування економічної динаміки з використанням трендових моделей важливим є заключний етап — ***верифікація прогнозу***.

Верифікація будь-яких дескриптивних моделей, до яких належать і трендові моделі, зводиться до зіставлення розрахункових значень за моделлю з відповідними дійсними даними певного економічного показника.

Верифікація прогнозної моделі являє собою сукупність критеріїв, способів і процедур, які дають змогу, спираючись на багатосторонній аналіз, оцінити якість прогнозу.

Однак найчастіше на етапі верифікації в більшій мірі відбувається оцінка **методу прогнозування**, за допомогою якого був здобутий результат, ніж **оцінка якості** самого результату. Це пов'язано з тим, що досі не знайдено ефективного підходу до оцінки якості прогнозу.

5. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНОГО ЗАВДАННЯ

На основі статистичних даних підприємства по реалізації продукції (табл. 6) побудувати найкращу криву зростання для моделювання даного економічного процесу та провести її повне та комплексне дослідження.

Таблиця 6. **Вихідні дані**

Рік	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
y_f	66,6	63,28	58,38	56,73	52,98	51,17	50,21	48,17	46,72	46,49

Порядок виконання роботи

1. Методи вибору кривої зростання, що апроксимує тренд.

1.1. Метод послідовних різниць (метод Тінтнера).

1.2. Метод характеристик приросту.

2. Побудова обраних моделей.

2.1. Оцінка параметрів полінома першого степеня.

2.2. Оцінка параметрів полінома другого степеня.

2.3. Оцінка параметрів простої експоненти.

3. Вибір найкращої моделі та перевірка її адекватності статистичним даним.

3.1. Вибір найкращої моделі.

3.2. Перевірка статистичної значущості параметрів моделі.

3.3. Обчислення та аналіз коефіцієнта детермінації.

3.4. Визначення $\boldsymbol{F}$ - статистики Фішера.

3.5. Побудова трендової моделі за допомогою інструменту ***СЕРВИС ® АНАЛИЗ ДАННЫХ ® РЕГРЕССИЯ***

4. Перевірка виконання умов побудови обраної моделі.

4.1. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків.

4.1.1. Метод серій.

4.1.2. Метод піків.

4.2. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону.

4.2.1. Метод на основі асиметрії та ексцесу.

4.2.2. Метод $\boldsymbol{RS}$ - критерію.

4.3. Перевірка рівності нулю математичного сподівання.

4.4. Перевірка незалежності значень рівнів залишків.

5. Розрахунок точності трендових моделей.

6. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями.

Розв'язання

1. Методи вибору кривої зростання, що апроксимує тренд

1.1. Метод послідовних різниць (метод Тінтнера)

Занесемо вихідні дані y_t до розрахункової таблиці 7 (другий стовпчик).

Таблиця 7

Розрахункова таблиця

t	y_t	$u_t^{[1]} = y_t - y_{t-1}$	$u_t^{[2]} = u_t^{[1]} - u_{t-1}^{[1]}$	$u_t^{[3]} = u_t^{[2]} - u_{t-1}^{[2]}$	$u_t^{[4]} = u_t^{[3]} - u_{t-1}^{[3]}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	66,6				
2	63,28	-3,32			
3	58,38	-4,90	-1,58		
4	56,73	-1,65	3,25	4,83	
5	52,98	-3,75	-2,10	-5,35	-10,18
6	51,17	-1,81	1,94	4,04	9,39
7	50,21	-0,96	0,85	-1,09	-5,13
8	48,17	-2,04	-1,08	-1,93	-0,84
9	46,72	-1,45	0,59	1,67	3,60
10	46,49	-0,23	1,22	0,63	-1,04
Сума	**540,73**	**-20,11**	**3,09**	**2,80**	**-4,20**
Дисперсії	**48,69591**	**3,462894**	**0,519956**	**0,545513**	**0,55445**
Різниці дисперсій			**2,942938**	**0,025557**	**0,00894**

Обчислимо прирости $u_t^{[k]} = u_t^{[k-1]} - u_{t-1}^{[k-1]}$ до порядку k включно доти, доки різниці не будуть майже однаковими і занесемо їх до таблиці 7 (третій, четвертий, п'ятий та шостий стовпчики).

Визначимо відповідні суми по стовпчикам. Далі обчислимо дисперсію для вихідного ряду y_t за допомогою формули:

$$s_0^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{\left(\sum_{t=1}^{n} y_t\right)^2}{n}}{n-1} = 48{,}69591,$$

або функції $ДИСП(Y) = 48{,}69591$ (додатки) та дисперсії для кожного різницевого ряду $u_t^{[k]}$ порядку $k = 1, 2, \ldots$, використовуючи формули:

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} \left(u_t^{[k]}\right)^2}{(n-k)C_{2k}^k},$$

де $C_{2k}^k = \dfrac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}$ - біноміальний коефіцієнт.

Застосовуючи функцію ***СУММКВ*** (додатки) до послідовних різниць $u_t^{[k]}$ (третій, четвертий, п’ятий та шостий стовпчики), визначимо відповідні дисперсії та записуємо їх до відповідного рядка таблиці 7:

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1+1}^{n} \left(u_t^{[1]}\right)^2}{(n-1)C_{2\cdot 1}^1} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(u_t^{[1]}\right)^2}{(n-1)\cdot 2} = 3{,}462894,\ де\ C_2^1 = \frac{2!}{1!\cdot(2-1)!} = 2,$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=2+1}^{n} \left(u_t^{[2]}\right)^2}{(n-2)C_{2\cdot 2}^2} = \frac{\sum_{t=3}^{n} \left(u_t^{[2]}\right)^2}{(n-2)\cdot 6} = 0{,}519956,\ де\ C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = 6,$$

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{t=3+1}^{n} \left(u_t^{[3]}\right)^2}{(n-3)C_{2\cdot 3}^3} = \frac{\sum_{t=4}^{n} \left(u_t^{[2]}\right)^2}{(n-3)\cdot 20} = 0{,}545513,\ де\ C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20,$$

$$\sigma_4^2 = \frac{\sum_{t=4+1}^{n} \left(u_t^{[4]}\right)^2}{(n-4)C_{2\cdot 4}^4} = \frac{\sum_{t=5}^{n} \left(u_t^{[4]}\right)^2}{(n-4)\cdot 70} = 0{,}55445,\ де\ C_8^4 = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = 70.$$

Обчислимо різниці знайдених дисперсій $\left|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2\right|$ та порівняємо їх з деякою наперед заданою додатною величиною ε. Якщо для деякого k ця величина не перевершує ε, тобто дисперсії одного порядку, то степінь поліному апроксимації повинна бути $k-1$. Для $\varepsilon = 0{,}05$ дана умова виконується для пар дисперсій 3 та 2 порядку, 4 і 3 порядку. Тому в якості кривої зростання можна розглядати поліноми 2 та 3 порядку.

1.2. Метод характеристик приросту

Занесемо вихідні дані y_t до розрахункової таблиці 8 (другий стовпчик).

Використовуючи формулу $y_t^* = \dfrac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}$, або функцію ***СРЗНАЧ,*** виконаємо згладжування вихідного ряду y_t методом ковзної середньої при інтервалі згладжування $m = 3$, а за формулами $y_1^* = \dfrac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6}$ та $y_n^* = \dfrac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} + 5y_n}{6}$ відновимо крайні (перший та останній) втрачені рівні.

Таблиця 8

Розрахункова таблиця

t	y_t	y_t^*	$U_t^{[1]}$	$U_t^{[2]}$	$\dfrac{U_t^{[1]}}{y_t^*}$	$lg\lvert U_t^{[1]}\rvert$	$lg\dfrac{\lvert U_t^{[1]}\rvert}{y_t^*}$	$lg\dfrac{\lvert U_t^{[1]}\rvert}{y_t^{*2}}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	66,6	66,86333						
2	63,28	62,75333	-3,7		-0,05896	0,568202	-1,22944	-3,02707
3	58,38	59,46333	-3,36167	0,390833	-0,05653	0,526555	-1,24769	-3,02194
4	56,73	56,03	-2,91833	0,536667	-0,05209	0,465135	-1,28329	-3,03171
5	52,98	53,62667	-2,28833	0,515	-0,04267	0,359519	-1,36986	-3,09924
6	51,17	51,45333	-1,88833	0,3725	-0,0367	0,276079	-1,43533	-3,14675
7	50,21	49,85	-1,54333	0,263333	-0,03096	0,18846	-1,50921	-3,20687
8	48,17	48,36667	-1,36167	0,251667	-0,02815	0,134071	-1,55048	-3,23502
9	46,72	47,12667	-1,04		-0,02207	0,017033	-1,65623	-3,3295
10	46,49	46,28667						

Згладжений ряд y_t^* запишемо в третій стовпчик розрахункової таблиці 8.

На підставі формул

$$U_t^{[1]} = \frac{y_{t+1}^* - y_{t-1}^*}{2}, \quad t = 2,3,\ldots,n-1$$

та

$$U_t^{[2]} = \frac{U_{t+1}^{[1]} - U_{t-1}^{[1]}}{2}, \quad t = 3,4,\ldots,n-2$$

обчислюємо перші (четвертий стовпчик) та другі (п’ятий стовпчик) середні прирости та ряд відповідних похідних:

$$\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*},\ \log_a\left|U_t^{[1]}\right|,\ \ \log_a\frac{\left|U_t^{[1]}\right|}{y_t^*},\ \ \log_a\frac{\left|U_t^{[1]}\right|}{y_t^{*2}}$$

(чотири наступні стовпчики табл. 8).

Відповідно до характеру зміни середніх приростів та похідних показників (табл. 8) вибираємо вид кривої зростання вихідного часового ряду згідно таблиці 3.

Для наочності та візуального дослідження побудуємо графіки отриманих залежностей (рис. 7,..., рис. 13).

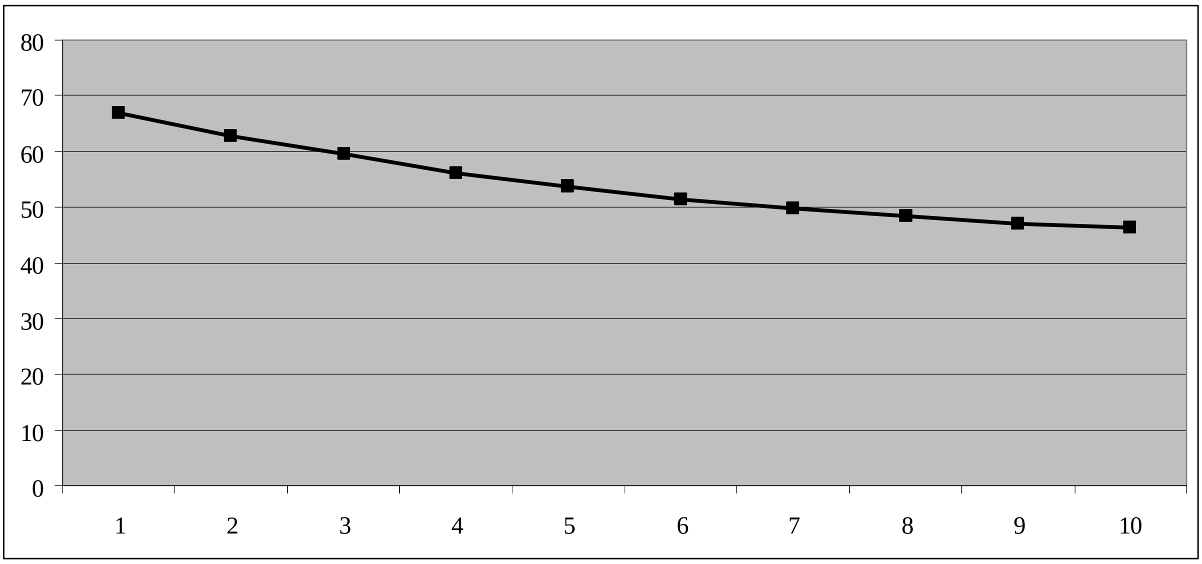


Рис. 7. **Графік згладжених значень** y_t^*

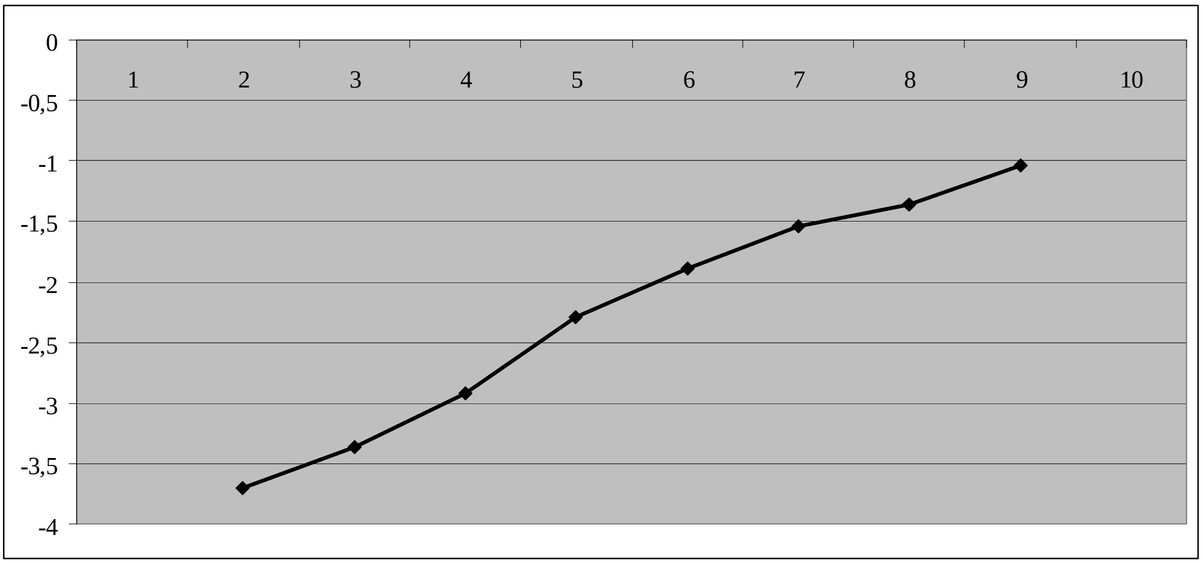


Рис. 8. **Графік** $U_t^{[1]}$

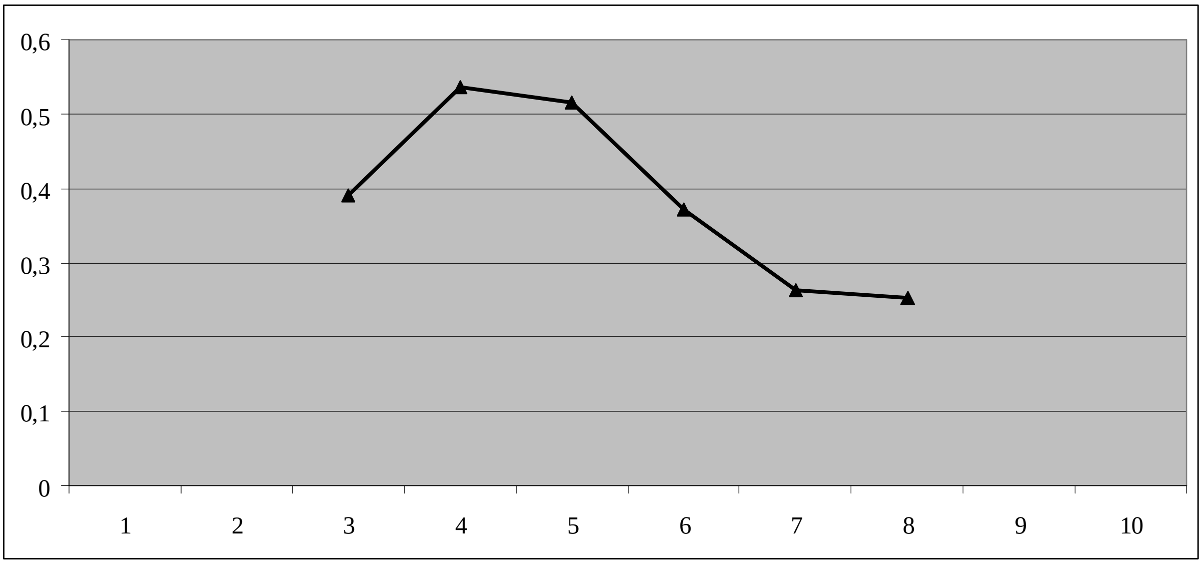


Рис. 9. **Графік** $\boldsymbol{U_t^{[2]}}$

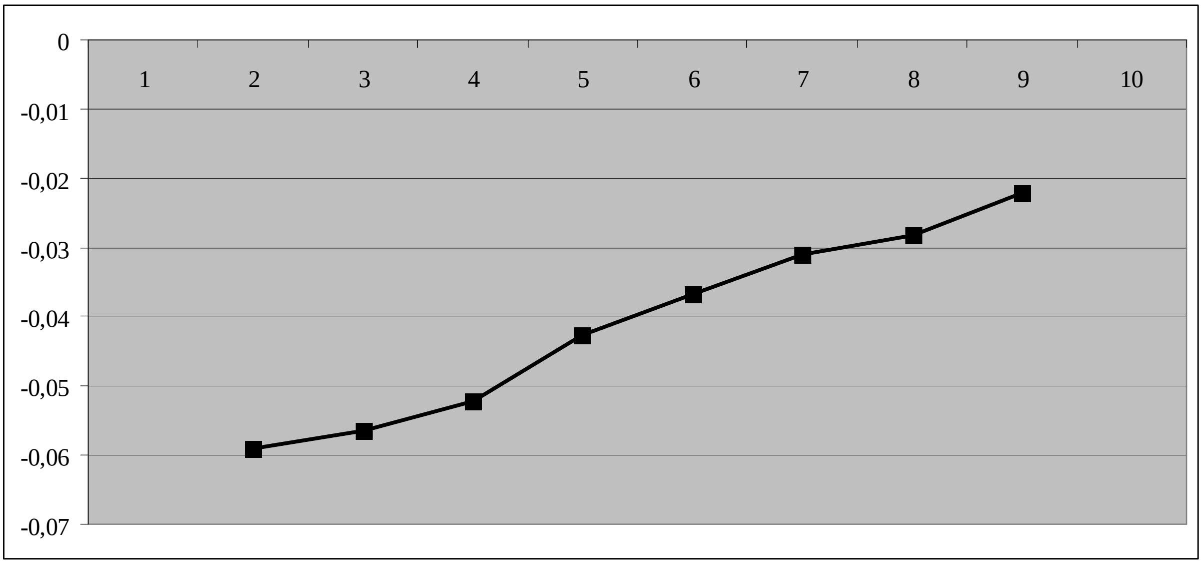


Рис. 10. **Графік** $\boldsymbol{\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*}}$

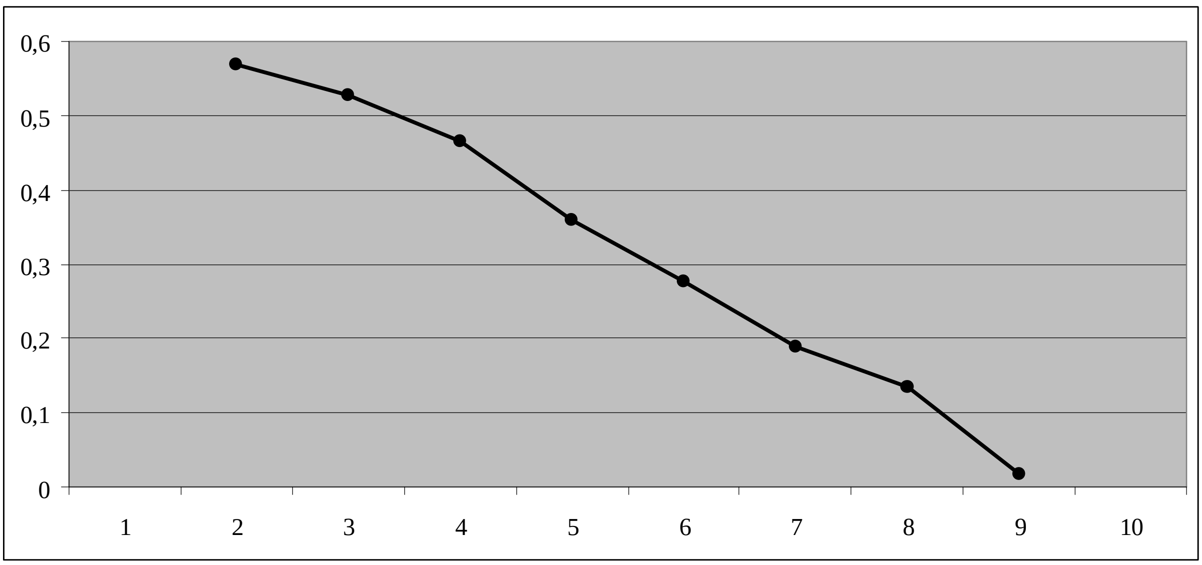


Рис. 11. **Графік** $\boldsymbol{lg\left|U_t^{[1]}\right|}$

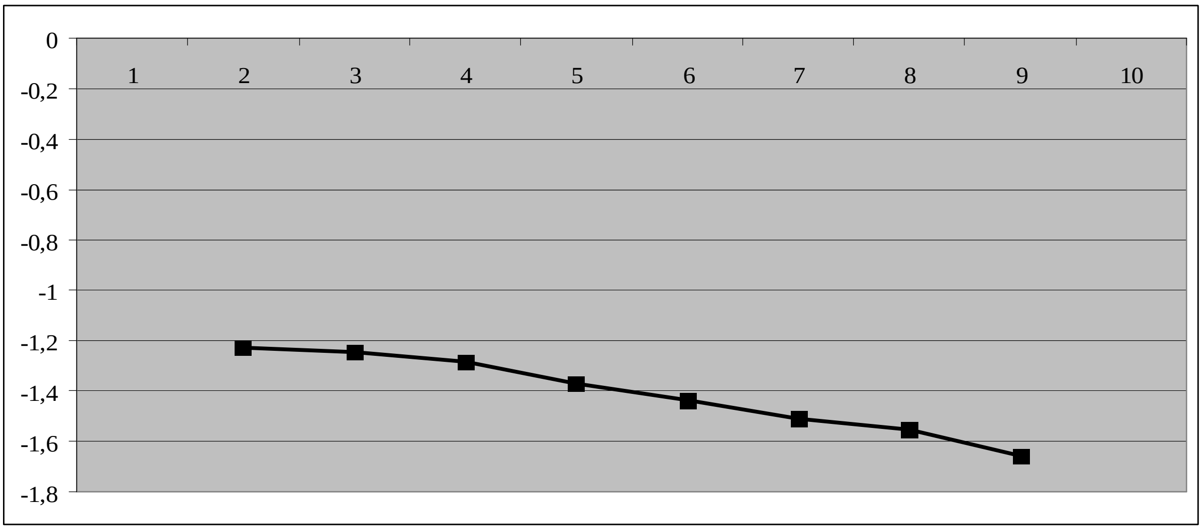


Рис. 12. **Графік** $lg\frac{\left|U_t^{[1]}\right|}{y_t^*}$

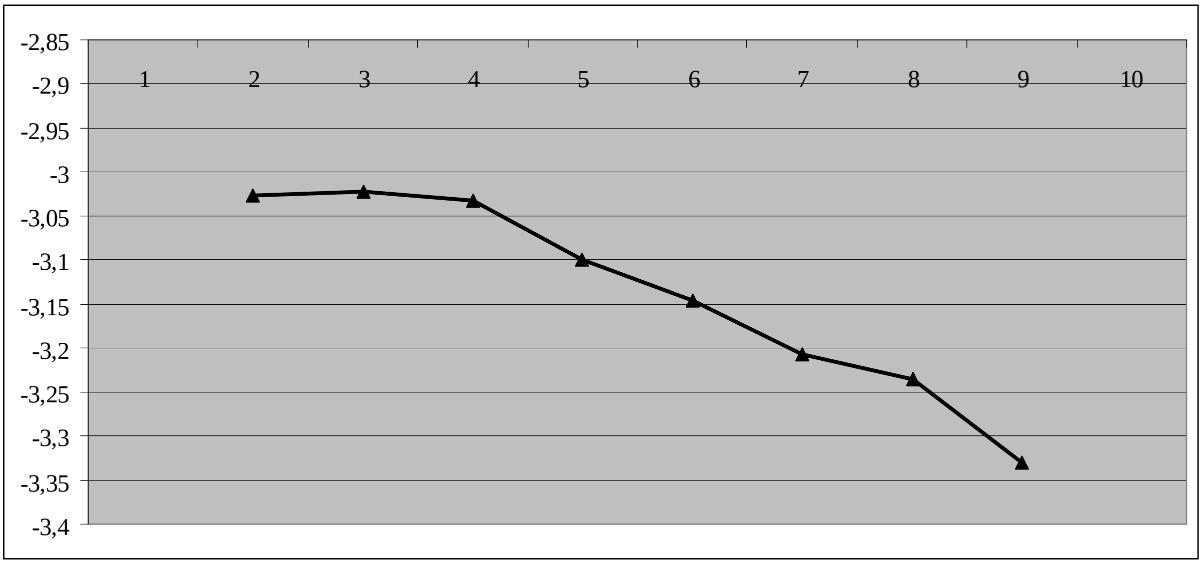


Рис. 13. **Графік** $lg\frac{\left|U_t^{[1]}\right|}{y_t^{*2}}$

Висновок

Аналіз цих графіків та даних табл. 8 свідчить, що в якості попередніх кривих зростання для моделювання досліджуваного економічного процесу доцільно обрати:

– поліном першого степеня $\hat{y}_t^{(1)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$, оскільки значення перших середніх приростів $U_t^{[1]}$ змінюються на невеликому проміжку, тобто майже однакові (рис. 8);

– поліном другого степеня $\hat{y}_t^{(2)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2$, оскільки значення перших середніх приростів $U_t^{[1]}$ змінюються майже лінійно (рис. 8);

– просту експоненту $\hat{y}_t^{(3)} = \hat{a}_0 \hat{a}_1^t$, оскільки значення функції $\frac{U_t^{[1]}}{y_t^*}$ змінюються майже лінійно (рис. 10).

2. Побудова обраних моделей

Після того як було вибрано апроксимуючу модель (криву зростання) необхідно чисельно оцінити її параметри.

Для оцінки параметрів вибраних моделей методом найменших квадратів (МНК) складемо розрахункову таблицю 9, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (третій стовпчик) та результати додаткових обчислень.

Таблиця 9

Розрахункова таблиця

t	t^2	y_t^*	$y_{t1}^* = \ln y_t^*$;
1	**2**	**3**	**4**
1	1	66,86333	4,2026507
2	4	62,75333	4,1392117
3	9	59,46333	4,0853599
4	16	56,0300	4,0258873
5	25	53,62667	3,9820465
6	36	51,45333	3,9406752
7	49	49,8500	3,9090185
8	64	48,36667	3,8788109
9	81	47,12667	3,852839
10	100	46,28667	3,8348539
Сума		**541,8200**	

2.1. Оцінка параметрів полінома першого степеня

Використовуючи згладжені рівні вихідного ряду y_t^* (третій стовпчик табл. 9) та фактора t (перший стовпчик табл. 9) оцінимо параметри прямої лінії $\hat{y}_t^{*(1)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$ функцією $ЛИНЕЙН\left(Y^*;T;1;1\right)$ (додатки) у вигляді таблиці 10.

Таблиця 10

Розрахункова таблиця

$\hat{a}_1$	$\hat{a}_0$	**-2,24711**	**66,54111**
$S_{\hat{a}_1}$	$S_{\hat{a}_0}$	**0,180317**	**1,11884**
R^2	s_u	**0,951011**	**1,637814**
F	$k = n - m$	**155,3009**	**8**
$SSR = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_t - \overline{Y}\right)^2$	$SSE = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_t - Y_t\right)^2$	**416,5844**	**21,45948**

Отже, досліджувана модель має вигляд:

$$\hat{y}_t^* = 66,541 - 2,247t.$$

Перевіримо одержаний результат побудувавши відповідну лінію тренда на графіку вихідних згладжених даних y_t^* (рис. 14):

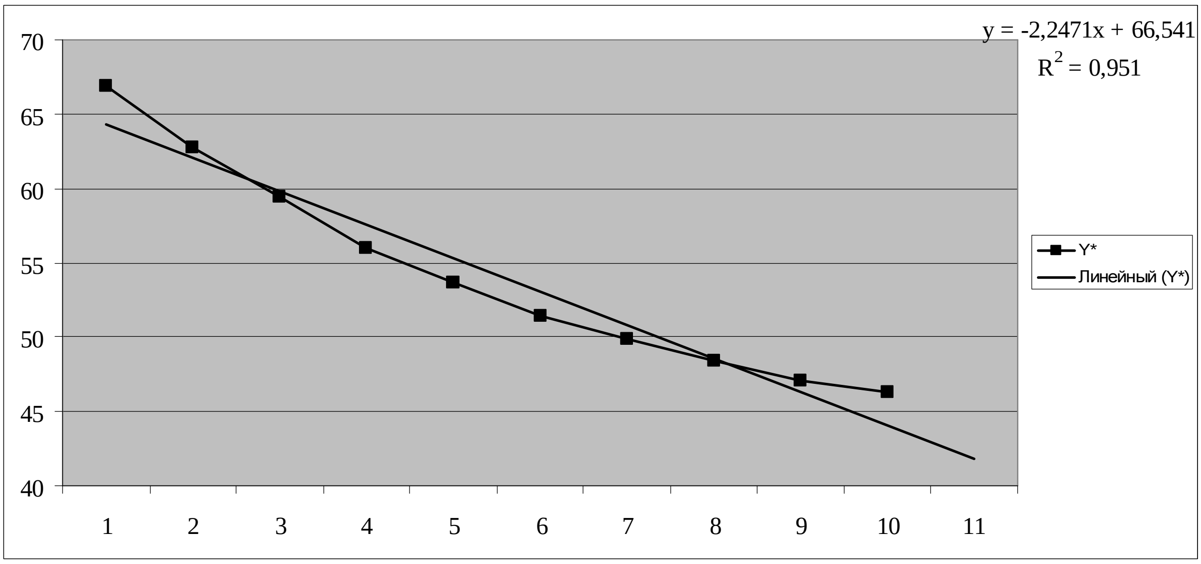


Рис. 14. **Лінійний тренд**

2.2. Оцінка параметрів полінома другого степеня

Використовуючи згладжені рівні вихідного ряду y_t^* (третій стовпчик табл. 9), фактора t та його квадрата t^2 (перший та другий стовпчики табл. 9) оцінимо параметри параболи $\hat{y}_t^{*(2)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2$ функцією $ЛИНЕЙН\left(Y^*; T : T^2; 1; 1\right)$ (додатки) у вигляді таблиці 11.

Таблиця 11

Розрахункова таблиця

$\hat{a}_2$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_0$
$S_{\hat{a}_2}$	$S_{\hat{a}_1}$	$S_{\hat{a}_0}$
R^2	s_u	#НД
F	$k = n - m$	#НД
$SSR = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_t - \bar{Y}\right)^2$	$SSE = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_t - Y_t\right)^2$	#НД

0,200265	**-4,45003**	**70,94694**
0,008757	**0,098844**	**0,236671**
0,999353	**0,201225**	**#Н/Д**
5405,596	**7**	**#Н/Д**
437,7605	**0,28344**	**#Н/Д**

Отже, досліджувана модель має вигляд:

$$\hat{y}_t^* = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2.$$

Перевіримо одержаний результат побудувавши відповідну лінію тренда на графіку вихідних згладжених даних y_t^* (рис. 15):

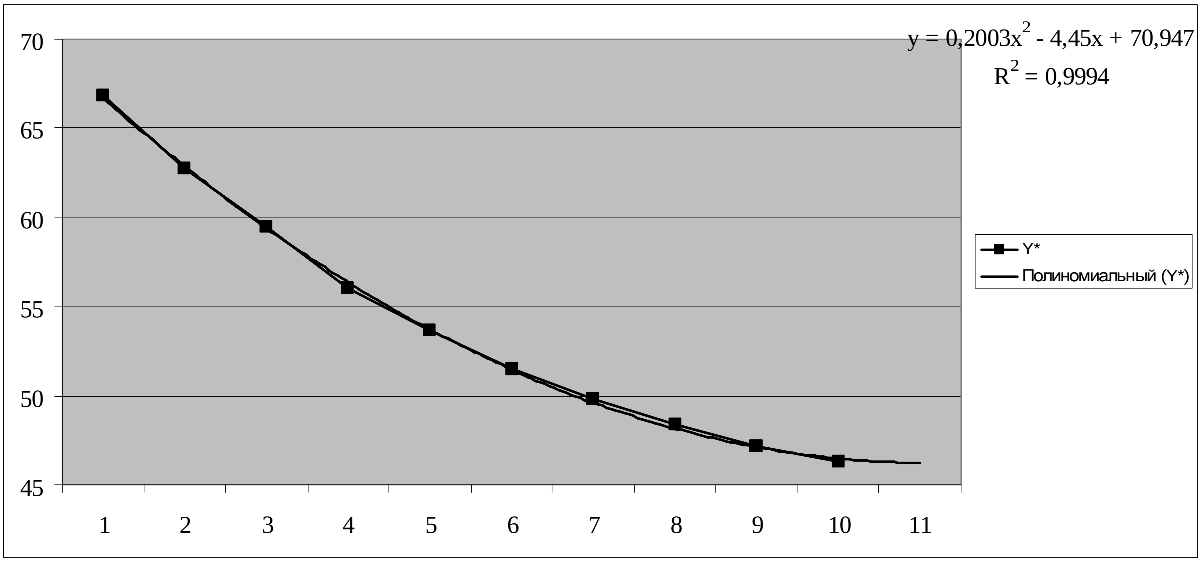


Рис. 15. **Тренд полінома 2 порядку**

2.3. Оцінка параметрів простої експоненти

Використовуючи згладжені рівні вихідного ряду y_t^* (третій стовпчик табл. 9) та фактора t (перший стовпчик табл. 9), оцінимо параметри простої експоненти:

$$\hat{y}_t^{*(3)} = \hat{a}_0 \hat{a}_1^t .$$

Досліджувана модель є нелінійною, оскільки її параметри перемножуються і фактор є показником степеня. Для зведення цієї моделі до лінійної виконаємо логарифмування обох її частин. Будемо мати:

$$\ln \hat{y}_t^* = \ln\left(\hat{a}_0 \hat{a}_1^t\right);$$

$$\ln \hat{y}_t^* = \ln \hat{a}_0 + \ln \hat{a}_1^t;$$

$$\ln \hat{y}_t^* = \ln \hat{a}_0 + t \ln \hat{a}_1 .$$

Введемо нові змінні

$y_{t1}^* = \ln y_t^*$ (четвертий стовпчик табл. 8); $\hat{b}_0 = \ln \hat{a}_0$; $\hat{b}_1 = \ln \hat{a}_1$.

Тоді нелінійну модель можна подати лінійною у вигляді $\hat{y}_{t1} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 t$, параметри якої визначимо функцією $ЛИНЕЙН\left(Y_1^*;T;1;1\right)$ (додатки) у вигляді таблиці 12.

Таблиця 12

Розрахункова таблиця

$\hat{b}_1$	$\hat{b}_0$	**-0,04085**	**4,209785**
$S_{\hat{b}_1}$	$S_{\hat{b}_0}$	**0,00255**	**0,015821**
R^2	s_u	**0,969768**	**0,023159**
F	$k = n - m$	**256,6217**	**8**
$SSR = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_{t1} - \overline{Y}_1\right)^2$	$SSE = \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{Y}_{t1} - Y_{t1}\right)^2$	**0,137639**	**0,004291**

Звідси

$$\hat{b}_0 = 4{,}209785,\ \hat{b}_1 = -0{,}04085,$$

тоді оцінки параметрів простої експоненти:

$$\hat{a}_0 = e^{\hat{b}_0} = e^{4{,}209785} \approx 67{,}342089;$$

$$\hat{a}_1 = e^{\hat{b}_1} = e^{-0{,}04085} \approx 0{,}959977 .$$

Отже, модель має вигляд:

$$\hat{y}_t^* = 67{,}342089 \cdot 0{,}959977^t .$$

Перевіримо одержаний результат побудувавши відповідну лінію тренда на графіку вихідних даних (рис. 16):

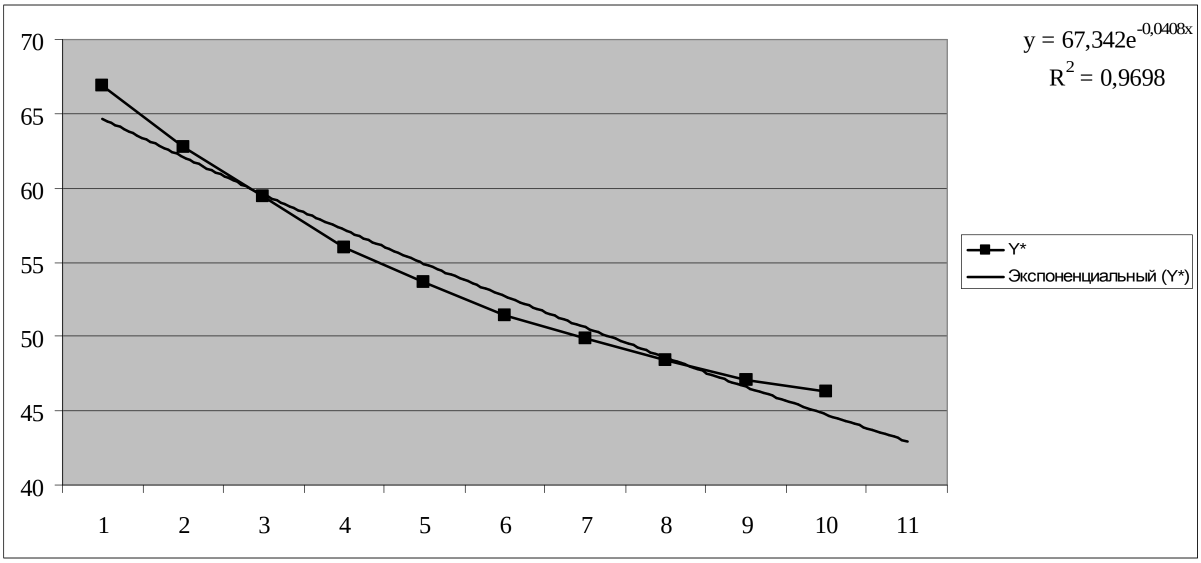


Рис. 16. **Експоненційний тренд**

3. Вибір найкращої моделі та перевірка її адекватності фактичним статистичним даним

3.1. Вибір найкращої моделі

Після того, як попередньо обрано та побудовано декілька моделей виникає питання, яку з них необхідно використати для подальшого дослідження даного соціально-економічного процесу? Для відповіді на це питання в якості такого критерію доцільно взяти мінімум суми квадратів відхилень між фактичними (статистичними) рівнями y_t^* та значеннями показника $\hat{y}_t^*$, отриманими внаслідок обчислень за обраними моделями:

$$\sum u_t^2 = \sum \left(y_t^* - \hat{y}_t^*\right)^2 \rightarrow min .$$

З трьох побудованих моделей:

$$\hat{y}_t^{*(1)} = 66{,}541 - 2{,}247t ,$$

$$\hat{y}_t^{*(2)} = 70{,}947 - 4{,}450t + 0{,}200t^2 ,$$

$$\hat{y}_t^{*(3)} = 67{,}342089 \cdot 0{,}959977^t$$

виберемо найкращу модель.

Складемо розрахункову таблицю 13, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (третій стовпчик), проміжні та остаточні результати обчислень.

Таблиця 13

Розрахункова таблиця

t	t^2	y_t^*	$\hat{y}_t^{*(1)}$	$\hat{y}_t^{*(2)}$	$\hat{y}_t^{*(3)}$	u_{1t}^2	u_{2t}^2	u_{3t}^2
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	66,86333	64,294	66,69718	64,64689	6,6015	0,028	4,9126
2	4	62,75333	62,04689	62,84795	62,05956	0,4991	0,009	0,4813
3	9	59,46333	59,79978	59,39925	59,57578	0,1132	0,004	0,0126
4	16	56,03	57,55267	56,35108	57,1914	2,3185	0,103	1,3489
5	25	53,62667	55,30556	53,70343	54,90246	2,8187	0,006	1,6276
6	36	51,45333	53,05844	51,45632	52,70512	2,5764	9E-06	1,567
7	49	49,85	50,81133	49,60974	50,59573	0,9242	0,058	0,5561
8	64	48,36667	48,56422	48,16369	48,57076	0,039	0,041	0,0417
9	81	47,12667	46,31711	47,11817	46,62683	0,6554	7E-05	0,2498
10	100	46,28667	44,07	46,47318	44,76071	4,9136	0,035	2,3285
Сума		**541,82**	**541,82**	**541,82**	**541,6352**	**21,459**	**0,283**	**13,126**

До четвертого, п’ятого та шостого стовпчиків табл. 13 заносимо теоретичні значення показника, обчисленого за першою $\hat{y}_t^{*(1)} = 66{,}541 - 2{,}247t$, другою $\hat{y}_t^{*(2)} = 70{,}947 - 4{,}450t + 0{,}200t^2$ та третьою моделями $\hat{y}_t^{*(3)} = 67{,}342089 \times 0{,}959977^t$ відповідно.

До сьомого, восьмого та дев’ятого стовпчиків табл. 13 заносимо поточні значення квадратів відхилень між статистичними та обчисленими за першою, другою та третьою моделями даними показника відповідно, які відповідають виразу $u_{it}^2 = \left(y_t^* - \hat{y}_t^{*(i)}\right), i = 1,2,3$.

В останньому рядку цієї таблиці записуємо значення відповідних сум квадратів відхилень. Отримані значення сум квадратів відхилень перевіримо за допомогою статистичних функцій (додатки):

$$SSE^{(1)} = u_{1t}^2 = СУММКВРАЗН(Y, \hat{Y}^{(1)}) = 21{,}459;$$

$$SSE^{(2)} = u_{2t}^2 = СУММКВРАЗН(Y, \hat{Y}^{(2)}) = 0{,}283;$$

$$SSE^{(3)} = u_{3t}^2 = СУММКВРАЗН(Y, \hat{Y}^{(3)}) = 13{,}126.$$

Для поліномів першого та другого степеня значення сум квадратів відхилень співпадають з відповідними значеннями, отриманими за допомогою функції *ЛИНЕЙН* (табл. 10, 11).

Оскільки сума квадратів відхилень є найменшою для другої моделі $\hat{y}_t^{*(2)} = 70{,}947 - 4{,}450t + 0{,}200t^2$, то її обираємо за найкращу для подальшого дослідження даного економічного процесу.

3.2. Перевірка статистичної значущості параметрів моделі

Перевірку статистичної значущості параметрів моделі $\hat{y}_t^* = 70{,}947 - 4{,}450t + 0{,}200t^2$ виконаємо шляхом обчислення t - статистики Ст'юдента за формулою:

$$t_{\hat{a}_i} = \frac{|\hat{a}_i|}{s_{\hat{a}_i}}, i = 0,1,\ldots m,$$

де m - кількість параметрів моделі.

Використовуючи результати оцінки параметрів параболи $\hat{y}_t^{(2)} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2$ функцією $ЛИНЕЙН\left(Y^*;T:T^2;1;1\right)$ з таблиці 11, маємо:

$$t_{\hat{a}_0} = \frac{|\hat{a}_0|}{s_{\hat{a}_0}} = \frac{|70{,}94694|}{0{,}236671} = 299{,}7704;$$

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{s_{\hat{a}_1}} = \frac{|-4{,}45003|}{0{,}098844} = 45{,}0208;$$

$$t_{\hat{a}_2} = \frac{|\hat{a}_2|}{s_{\hat{a}_2}} = \frac{|0{,}200265|}{0{,}008757} = 22{,}86867.$$

Табличне значення t - критерію при ступені свободи $k = n - m = 10 - 3 = 7$ і рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ (додатки) дорівнює:

$$t_{табл} = СТЬЮДРАСПОБР\left(0{,}05;7\right) = 2{,}364624.$$

Оскільки $t_{\hat{a}_i} > t_{табл}, i = 0,1,2$, то всі параметри моделі статично значущі, тобто мають значний вплив на залежну змінну y_t.

3.3. Обчислення та аналіз коефіцієнта детермінації

Для обчислення коефіцієнта детермінації складемо розрахункову таблицю 14, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (другий стовпчик), теоретичні дані $\hat{y}_t^*$ (третій стовпчик) проміжні та остаточні результати обчислень.

Таблиця 14

Розрахункова таблиця

t	y_t^*	$\hat{y}_t^*$	u_t^2	$\left(y_t^* - \bar{y}^*\right)^2$	$\left(\hat{y}_t^* - \bar{y}^*\right)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	66,86333	66,69718	0,028	160,8162	156,6298
2	62,75333	62,84795	0,009	73,46776	75,09868
3	59,46333	59,39925	0,004	27,89248	27,21967
4	56,03	56,35108	0,103	3,415104	4,70489
5	53,62667	53,70343	0,006	0,308395	0,229025
6	51,45333	51,45632	9E-06	7,445622	7,429314
7	49,85	49,60974	0,058	18,76622	20,90554
8	48,36667	48,16369	0,041	33,8181	36,22003
9	47,12667	47,11817	7E-05	49,77773	49,89767
10	46,28667	46,47318	0,035	62,33629	59,42588
Сума	**541,82**	**541,82**	**0,283**	**438,0439**	**437,7605**
Середнє	**54,182**				

Коефіцієнт детермінації без урахування числа ступенів свободи визначається за формулою:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t^* - \bar{y}^*\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t^* - \bar{y}^*\right)^2} = \frac{437,7605}{438,0439} = 0,999353 \approx 0,9994.$$

Отримане значення коефіцієнта детермінації співпадає зі знайденим раніше за допомогою функції ***ЛИНЕЙН*** (табл. 11) та при побудові відповідної лінії тренда (рис. 15).

Отже, побудована модель $\hat{y}_t^* = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2$ на ***99,94%*** пояснює дійсну зміну показника і тільки ***0,06%*** на його зміну впливають не враховані фактори. Це свідчить про достатньо високу якість побудованої моделі.

3.4. Визначення F - статистики Фішера

Величина F - критерію Фішера дає можливість оцінити загальну якість побудованої моделі.

Використовуючи результати розрахункової таблиці 14, обчислимо його значення за формулою:

$$F=\frac{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t^{*}-\bar{y}^{*}\right)^2}{m-1}}{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t^{*}-y_t^{*}\right)^2}{n-m}}=\frac{\dfrac{437{,}7605}{3-1}}{\dfrac{0{,}283}{10-3}}=5405{,}596.$$

Отримане значення критерію Фішера співпадає зі знайденим раніше за допомогою функції ***ЛИНЕЙН*** (табл. 11).

Табличне значення для заданого рівня значущості $\alpha=0{,}05$ та числа ступенів свободи $k_1=m-1=3-1=2$ і $k_2=n-m=10-3=7$ (додатки) дорівнює:

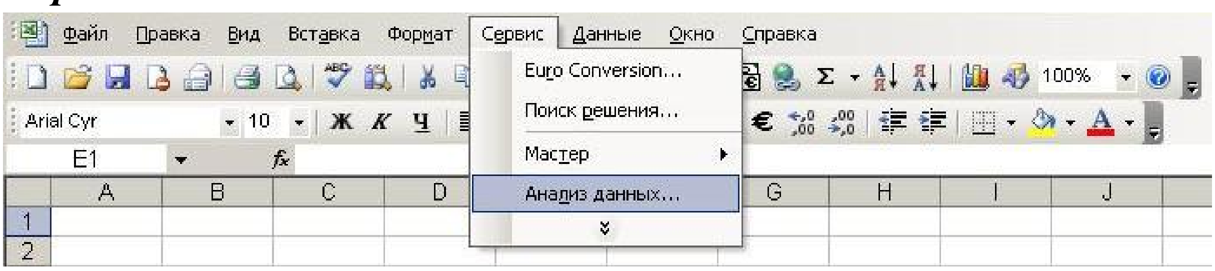
$$F_{табл}=FРАСПОБР(0{,}05;2;7)=4{,}7374.$$

Оскільки $F_{факт}>F_{табл}$, то з заданою ймовірністю $P=0{,}95$ приймається гіпотеза про загальну адекватність обраної моделі емпіричним даним.

3.5. Побудова трендової моделі за допомогою інструменту ***СЕРВИС → АНАЛИЗ ДАННЫХ → РЕГРЕССИЯ***

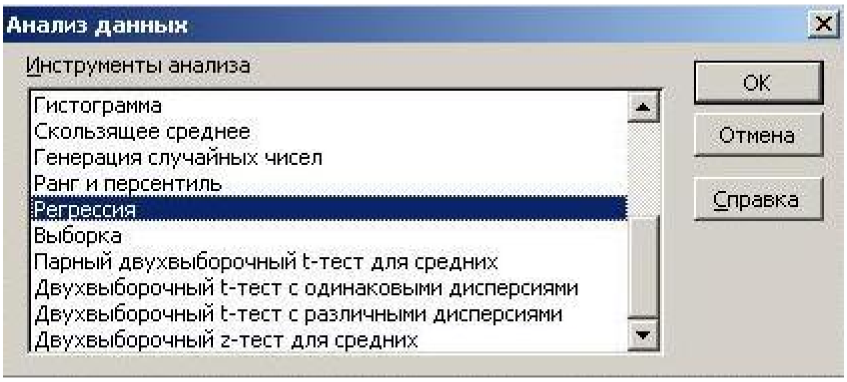
1. На панелі інструментів вибираємо

Сервис ⇒ ***Анализ данных***:



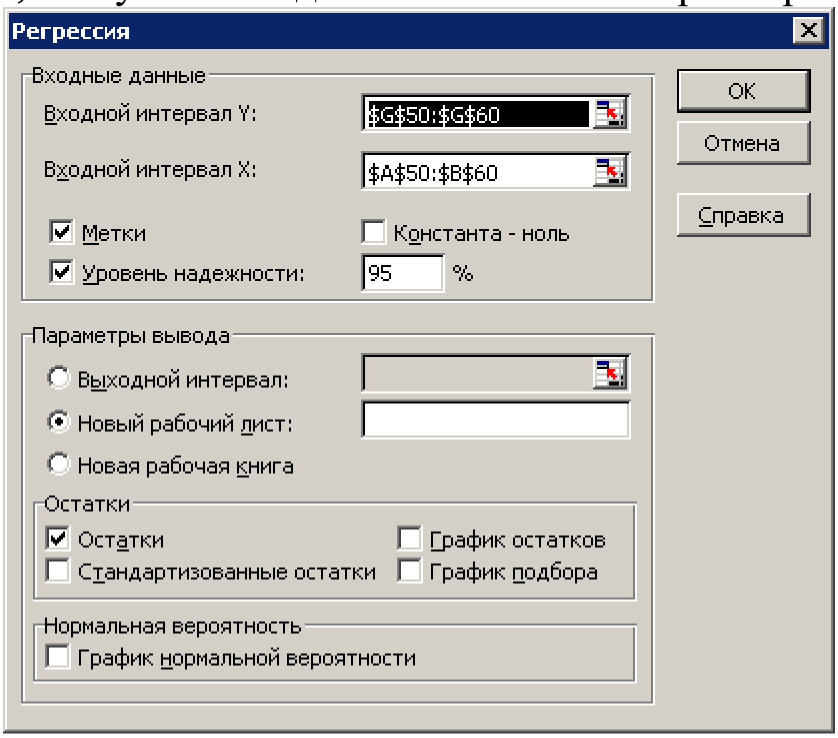
Натискаємо клавішу ***ОК***.

2. У вікні ***Анализ данных*** серед інструментів аналізу вибираємо ***Регрессия***



Натискаємо клавішу ***ОК*** .

3. У відкритому діалоговому вікні вказуємо діапазони вихідних даних разом з заголовками, вибираємо режим ***Метки***, рівень надійності ***95%***, вказуємо виведення залишків та параметри виводу.



Натискаємо клавішу ***ОК*** .

4. В результаті отримаємо оцінки параметрів регресії та її детальний аналіз (табл. 15). Побудова моделі на основі стандартної програми ***РЕГРЕССИЯ*** (додатки) дає найбільшу кількість характеристик взаємозв'язку змінних моделі, що дає можливість перевірити попередні наші дослідження.

Таблиця 15

Результати *АНАЛИЗ ДАННЫХ ® РЕГРЕССИЯ*

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	**0,999676**
R-квадрат	**0,999353**
Нормированный R-квадрат	**0,999168**
Стандартная ошибка	**0,201225**
Наблюдения	**10**

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	**2**	**437,7605**	**218,8802**	**5405,596**	**6,89E-12**
Остаток	**7**	**0,28344**	**0,040491**		
Итого	**9**	**438,0439**			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	**70,94694**	**0,236671**	**299,7704**	**1,21E-15**	**70,38731**	**71,50658**
t	**-4,45003**	**0,098844**	**-45,0208**	**6,97E-10**	**-4,68376**	**-4,2163**
t^2	**0,200265**	**0,008757**	**22,86867**	**7,75E-08**	**0,179558**	**0,220973**

ВЫВОД ОСТАТКА

Наблюдение	*Предсказанное Y**	*Остатки*
1	**66,69718**	**0,166152**
2	**62,84795**	**-0,09462**
3	**59,39925**	**0,064086**
4	**56,35108**	**-0,32108**
5	**53,70343**	**-0,07677**
6	**51,45632**	**-0,00299**
7	**49,60974**	**0,240258**
8	**48,16369**	**0,202975**
9	**47,11817**	**0,008495**
10	**46,47318**	**-0,18652**

4. Перевірка виконання умов побудови обраної моделі

4.1. Перевірка випадковості коливань рівнів послідовності залишків

4.1.1. Метод серій

1. Складемо розрахункову таблицю 16, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (другий стовпчик), значення показника, обчисленні за побудованою моделлю $\hat{y}_t^*$ (третій стовпчик), результати відхилень u_t (четвертий стовпчик) та ранжируваний ряд цих відхилень u_t^{rang} (інструмент «Сортировка по возрастанию», п'ятий стовпчик).

Таблиця 16

Розрахункова таблиця

t	y_t^*	$\hat{y}_t^*$	$u_t = y_t^* - \hat{y}_t^*$	u_t^{rang}	Серії
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	66,86333	66,69718	0,166152	-0,32108	+
2	62,75333	62,84795	-0,09462	-0,18652	-
3	59,46333	59,39925	0,064086	-0,09462	+
4	56,03	56,35108	-0,32108	-0,07677	-
5	53,62667	53,70343	-0,07677	-0,00299	-
6	51,45333	51,45632	-0,00299	0,008495	-
7	49,85	49,60974	0,240258	0,064086	+
8	48,36667	48,16369	0,202975	0,166152	+
9	47,12667	47,11817	0,008495	0,202975	+
10	46,28667	46,47318	-0,18652	0,240258	-

Визначимо медіану ряду. Оскільки його кількість рівнів парна, то медіана ряду знаходиться як середнє арифметичне із двох серединних значень:

$$u_{me} = \frac{u_{\frac{n}{2}} + u_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{-0,00299 + 0,008495}{2} = 0,002753,$$

або функцією $МЕДИАНА(u_t) = 0,002753$.

2. Кожне значення вихідної послідовності залишків u_t (стовпчик 4) порівнюємо із медіаною u_{me}:

якщо $u_t > u_{me}$, то ставимо знак «+»; якщо $u_t < u_{me}$, то ставимо знак «–»; якщо $u_t = u_{me}$, то відповідне значення u_t не враховується. Утворюється послідовність, що складається з «+» та «–» (стовпчик 6).

3. Визначаємо загальну кількість серій, тобто послідовність плюсів або мінусів, які розташовані підряд (якщо є один «+» («–»), що чергується з «–» («+»), то його вважають окремою серією) $V = 6$ і найбільшу протяжність однієї з серій $k_{max} = 3$.

4. Оскільки одночасно виконуються дві умови:

$$k_{max} < [3,3(\lg n) + 1], \text{ а саме } 3 < 6$$

і

$$V > [0,5(n + 1 - 1,96\sqrt{n - 1})], \text{ а саме } 6 > 2,$$

то значення послідовності u_t приймаються випадковими для рівня значущості $a = 0,05$ і, відповідно, трендова модель є **адекватною.**

4.1.2. Метод піків

1. У послідовності залишків u_t вибираємо поворотні точки, тобто ті, значення рівня залишків яких більше (менше) від обох сусідніх рівнів):

$$u_{t-1} < u_t > u_{t+1}, \text{ або } u_{t-1} > u_t < u_{t+1}.$$

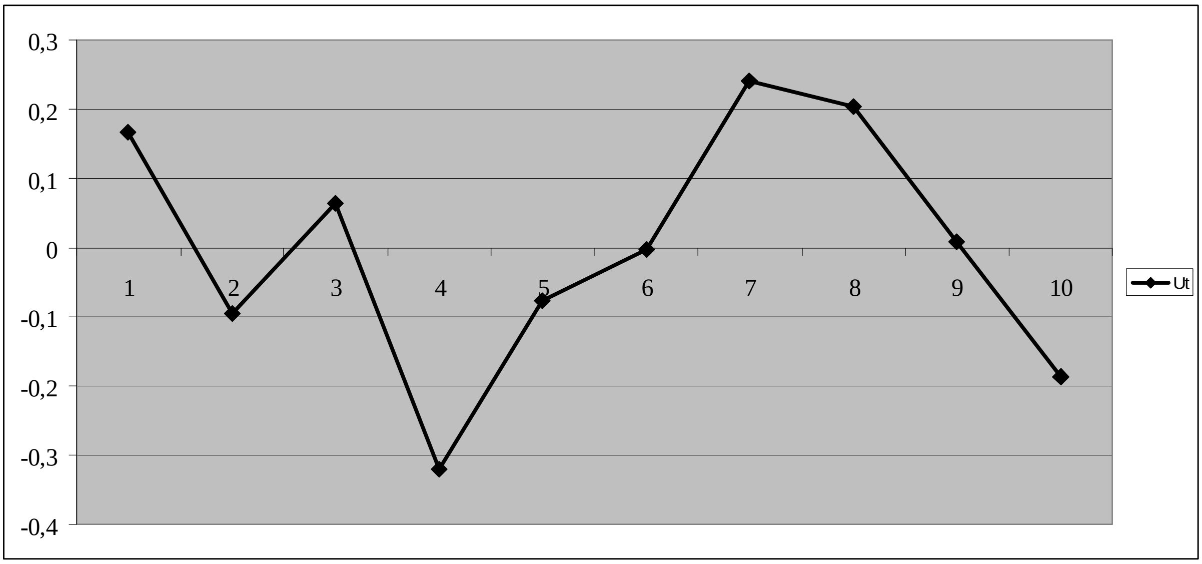


Рис. 17. **Графік залишків u_t**

Для цього побудуємо графік залишків u_t (рис. 17), використовуючи дані четвертого стовпчика таблиці 16.

З графіка залишків видно, що поворотними точками є друге, третє, четверте та сьоме значення відхилень.

2. Визначимо загальну кількість поворотних точок $\Pi = 4$.

3. Обчислимо математичне сподівання поворотних точок:

$$\overline{\Pi} = \frac{2}{3}(n - 2) = \frac{2}{3}(10 - 2) = 5{,}33333$$

та їх дисперсію:

$$\sigma^2_{\Pi} = \frac{16n - 29}{90} = \frac{16 \cdot 10 - 29}{90} = 1{,}45555 .$$

4. Оскільки виконується нерівність

$$\Pi > \left\lfloor \overline{\Pi} - 1{,}96\sqrt{\sigma^2_{\Pi}} \right\rfloor, \text{ а саме } 5{,}33333 > 2,$$

то значення послідовності u_t приймаються випадковими для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і, відповідно, трендова модель є **адекватною.**

4.2. Перевірка відповідності розподілу випадкової компоненти нормальному закону

4.2.1. Метод на основі асиметрії та ексцесу

1. Перевіримо гіпотезу про нормальний розподіл випадкової послідовності u_t шляхом обчислення вибіркових показників асиметрії $\hat{\gamma}_1$ та ексцесу $\hat{\gamma}_2$.

Складемо розрахункову таблицю 17, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (другий стовпчик), теоретичні значення показника, обчисленні за побудованою моделлю $\hat{y}_t^*$ (третій стовпчик), значення відхилень u_t (четвертий стовпчик) та відповідні значення u_t^2, u_t^3, u_t^4 (п’ятий, шостий та сьомий стовпчики).

Використовуючи дані таблиці 17, обчислимо вибіркові значення:

$$\text{асиметрії } \hat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum u_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum u_t^2\right)^3}} = -0{,}28932,$$

Таблиця 17

Розрахункова таблиця

t	y_t^*	$\hat{y}_t^*$	$u_t = y_t^* - \hat{y}_t^*$	u_t^2	u_t^3	u_t^4
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	66,86333	66,69718	0,16615152	0,027606	0,004587	0,0007621
2	62,75333	62,84795	-0,0946162	0,008952	-0,00085	8,014E-05
3	59,46333	59,39925	0,06408586	0,004107	0,000263	1,687E-05
4	56,03	56,35108	-0,3210758	0,10309	-0,0331	0,0106275
5	53,62667	53,70343	-0,0767677	0,005893	-0,00045	3,473E-05
6	51,45333	51,45632	-0,0029899	8,94E-06	-2,7E-08	7,991E-11
7	49,85	49,60974	0,24025758	0,057724	0,013869	0,003332
8	48,36667	48,16369	0,20297475	0,041199	0,008362	0,0016973
9	47,12667	47,11817	0,00849495	7,22E-05	6,13E-07	5,208E-09
10	46,28667	46,47318	-0,1865152	0,034788	-0,00649	0,0012102
Сума			**-1,137E-13**	**0,28344**	**-0,01381**	**0,0177609**

ексцесу $\hat{\gamma}_2 = \dfrac{\frac{1}{n}\sum u_t^4}{\left(\frac{1}{n}\sum u_t^2\right)^2} - 3 = -0{,}78923$

та їх середньоквадратичні відхилення:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}} = 0{,}75472,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}} = 0{,}579365.$$

2. Оскільки одночасно виконуються умови:

$|\hat{\gamma}_1| < 1{,}5\hat{\sigma}_{\gamma_1}$, а саме $0{,}28932 < 0{,}86905$

І $\left|\hat{\gamma}_2 + \dfrac{6}{n+1}\right| < 1{,}5\hat{\sigma}_{\gamma_2}$, а саме $0{,}24378 < 1{,}13209$,

то з ймовірністю $P = 0{,}95$ гіпотеза про нормальний розподіл випадкових залишків приймається і модель вважається **адекватною.**

4.2.2. Метод RS - критерію

1. Використовуючи ранжирований ряд залишків (п’ятий стовпчик табл. 16), визначимо величину розмаху між його рівнями:

$$R = u_{max} - u_{min} == 0{,}240258 - \left(-0{,}32108\right) = 0{,}561333.$$

За результатами таблиці 17 (п’ятий стовпчик) визначимо виправлене стандартне відхилення залишків:

$$S = S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}28344}{10-1}} = 0{,}177464.$$

2. Обчислимо фактичне значення RS *- критерію:*

$$RS = \frac{R}{S} = \frac{0{,}561333}{0{,}177464} = 3{,}16309.$$

3. Оскільки для $n = 10$ (табл. 4) фактичне значення RS - критерію попадає в інтервал між критичними межами $2{,}67 < RS < 3{,}685$, то з надійністю $P = 0{,}95$ приймаємо гіпотезу про нормальний закон розподілу випадкових залишків u_t і модель вважається **адекватною.**

4.3. Перевірка рівності нулю математичного сподівання

1. Використовуючи дані таблиці 17 (четвертий та п’ятий стовпчики), визначимо середнє арифметичне рівнів залишків:

$$\bar{u}_t = \frac{\sum u_t}{n} = \frac{-1{,}137 \cdot 10^{-13}}{10} = -1{,}137 \cdot 10^{-14}$$

та середнє квадратичне відхилення залишків:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{n-m}} = \sqrt{\frac{0{,}28344}{10-3}} = 0{,}201225.$$

Значення σ_u співпадає з раніше отриманим (табл. 11).

Обчислимо фактичне значення критерію:

$$t_p = \frac{\left|\bar{u}_t - 0\right|}{\sigma_u}\sqrt{n} = 1{,}8 \cdot 10^{-13}.$$

2. Табличне значення t - критерію при ступені свободи $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$ і рівні значущості $a = 0,05$ (додатки) дорівнює:

$$t_{табл} = СТЬЮДРАСПОБР(0,05;9) = 2,262157.$$

Оскільки $t_p < t_{табл}$, то гіпотеза про рівність нулю математичного сподівання послідовності випадкових залишків приймається.

4.4. Перевірка незалежності значень рівнів залишків

1. Складемо розрахункову таблицю 18, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (другий стовпчик), значення показника, обчисленні за побудованою моделлю $\hat{y}_t^*$ (третій стовпчик), значення відхилень u_t (четвертий стовпчик) та відповідні значення u_t^2, $u_{t+1} - u_t$, $(u_{t+1} - u_t)^2$ (п'ятий, шостий та сьомий стовпчики).

Таблиця 18

Розрахункова таблиця

t	y_t^*	$\hat{y}_t^*$	$u_t = y_t^* - \hat{y}_t^*$	u_t^2	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	66,86333	66,69718	0,16615152	0,027606		
2	62,75333	62,84795	-0,0946162	0,008952	-0,26077	0,068
3	59,46333	59,39925	0,06408586	0,004107	0,158702	0,025186
4	56,03	56,35108	-0,3210758	0,10309	-0,38516	0,148349
5	53,62667	53,70343	-0,0767677	0,005893	0,244308	0,059686
6	51,45333	51,45632	-0,0029899	8,94E-06	0,073778	0,005443
7	49,85	49,60974	0,24025758	0,057724	0,243247	0,059169
8	48,36667	48,16369	0,20297475	0,041199	-0,03728	0,00139
9	47,12667	47,11817	0,00849495	7,22E-05	-0,19448	0,037822
10	46,28667	46,47318	-0,1865152	0,034788	-0,19501	0,038029
Сума			**-1,137E-13**	**0,28344**		**0,443076**

З метою перевірки наявності кореляції між сусідніми відхиленнями u_t використовуємо метод Дарбіна-Уотсона.

2. Використовуючи дані таблиці 18, обчислимо розрахункове значення DW - критерію за формулою:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} u_t^2} = \frac{0,443076}{0,28344} = 1,563209.$$

3. Критичні значення статистики Дарбіна-Уотсона для $n = 10$ та $\alpha = 0,05$ дорівнюють $DW_1 = 0,879$ і $DW_2 = 1,320$.

Якщо $DW_2 < DW < 4 - DW_2$, то приймається гіпотеза про відсутність кореляції між сусідніми значеннями послідовності u_t. Якщо $DW_1 < DW < DW_2$ і $4 - DW_2 < DW < 4 - DW_1$ то даний метод відповіді не дає, необхідні додаткові дослідження.

Оскільки $DW_2 = 1,320 < DW = 1,563 < 4 - DW_2 = 2,68$, то з надійністю $P = 0,95$ приймаємо гіпотезу про відсутність кореляції між сусідніми значеннями послідовності випадкових залишків u_t.

Висновок

Проведені дослідження показали, що всі перевірки властивостей залишків u_t дали позитивні результати, тобто модель $\hat{y}_t^{*(2)} = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2$ – адекватна.

5. Розрахунок точності трендових моделей

Для перевірки точності побудованої моделі $\hat{y}_t^{*(2)} = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2$ складемо розрахункову таблицю 19, куди заносимо вихідні згладжені дані y_t^* (другий стовпчик), теоретичні значення показника, обчисленні за побудованою моделлю $\hat{y}_t^*$ (третій стовпчик), значення відхилень u_t (четвертий стовпчик) та значення $\left|\frac{y_t^* - \hat{y}_t^*}{y_t^*}\right| \cdot 100$ (п’ятий стовпчик).

Таблиця 19

Розрахункова таблиця

t	y_t^*	$\hat{y}_t^*$	$u_t = y_t^* - \hat{y}_t^*$	$\left\lvert\frac{y_t^* - \hat{y}_t^*}{y_t^*}\right\rvert \cdot 100$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	66,86333	66,69718	0,166152	0,2484942
2	62,75333	62,84795	-0,09462	0,1507747
3	59,46333	59,39925	0,064086	0,1077737
4	56,03000	56,35108	-0,32108	0,5730426
5	53,62667	53,70343	-0,07677	0,1431521
6	51,45333	51,45632	-0,00299	0,0058109
7	49,85000	49,60974	0,240258	0,4819610
8	48,36667	48,16369	0,202975	0,4196583
9	47,12667	47,11817	0,008495	0,0180258
10	46,28667	46,47318	-0,18652	0,4029565
Сума	**54,182**	**541,82**	**-1,1E-13**	**2,5516499**

Для характеристики точності трендової моделі визначимо середню відносну помилка апроксимації:

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right| 100\%. = \frac{2,55}{10} = 0,255\%.$$

Ця помилка не перевищує ***10%*** (табл. 5), що свідчить про високу якість побудованої моделі.

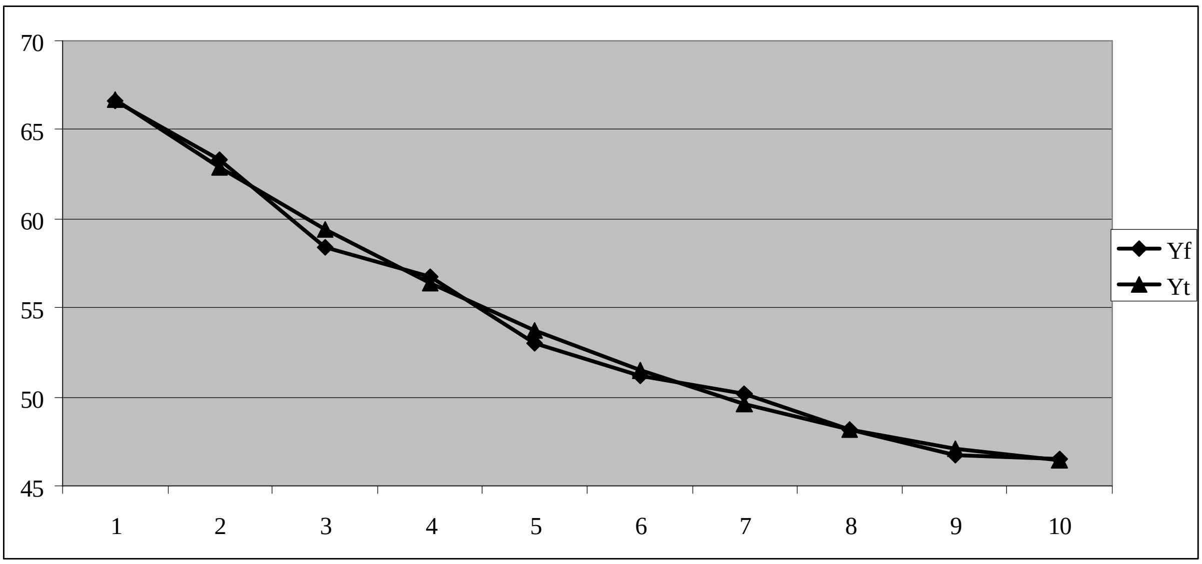


Рис. 18. **Графіки фактичних та теоретичних значень**

Це також підтверджує рис. 18 на якому спостерігається незначне відхилення теоретичних значень $\hat{y}_t$ від відповідних фактичних значень y_f.

При порівнянні різних моделей, побудованих на одній статистичній базі, перевагу надають моделям з меншою похибкою апроксимації $\bar{e}$.

6. Прогнозування економічної динаміки за трендовими моделями

Для побудови точкового та інтервального прогнозу складемо розрахункову таблицю 20.

Таблиця 20

Розрахункова таблиця

t	t^2	t^3	t^4	y_t^*	$\hat{y}_t^*$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	66,86333	66,69718
2	4	8	16	62,75333	62,84795
3	9	27	81	59,46333	59,39925
4	16	64	256	56,0300	56,35108
5	25	125	625	53,62667	53,70343
6	36	216	1296	51,45333	51,45632
7	49	343	2401	49,8500	49,60974
8	64	512	4096	48,36667	48,16369
9	81	729	6561	47,12667	47,11817
10	100	1000	10000	46,28667	46,47318
11	***121***	***1331***	***14641***		***46,22872***
Сума з 1 по 10	**385**	**3025**	**25333**	**541,82**	**541,82**

Використовуючи рівняння трендової моделі $\hat{y}_t^* = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2$ виконаємо точковий прогноз на наступний період $t = n + 1 = 10 + 1 = 11$:

$$\hat{y}_{t=11}^* = 70,947 - 4,450 \times 11 + 0,200 \times 11^2 = 46,22872.$$

Визначимо інтервали довіри прогнозу відносно тренду, що має вид поліному другого порядку за формулою:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_a S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} t^2} + \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} t^4 - 2t_L^2 \sum\limits_{t=1}^{n} t^2 + nt_L^4}{n \sum\limits_{t=1}^{n} t^4 - \left(\sum\limits_{t=1}^{n} t^2\right)^2}}.$$

Враховуючи, що

$t_a = СТЬЮДРАСПОБР(0,05;10-3) = 2,364624$ (додатки), $S_y = 0,201225$, отримаємо $U_y = 46,22872 \pm 0,699611$, тобто інтервальний прогноз має вигляд $(45,5291;46,9283)$.

Висновки

У результаті дослідження заданого економічного процесу було розглянуто декілька моделей, вибрано і побудовано найкращу модель у вигляді полінома другого степеня:

$$\hat{y}_t^* = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2 .$$

Згідно t - статистики Ст'юдента модель має статично значущі параметри, коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,9994$, тобто модель на ***99,94%*** пояснює дійсну зміну показника і тільки ***0,06%*** на його зміну впливають не враховані фактори, що свідчить про достатньо високу якість побудованої моделі.

За критерієм Фішера обрана модель адекватна фактичним даним і задовольняє всім властивостям випадкової складової ряду.

Точність моделі $\bar{e} = 0,255\%$ також свідчить про її досить високу якість. Точковий прогноз на наступний період дорівнює $\hat{y}_{t=11}^* = 46,22872$, а інтервальний прогноз $(45,5291;46,9283)$.

Таким чином проведене комплексне дослідження побудованої моделі $\hat{y}_t^* = 70,947 - 4,450t + 0,200t^2$ за допомогою табличного процесору Excel свідчить про те, що дана модель адекватна, достатньо точна, задовольняє всім властивостям випадкової складової ряду, тому її можна використовувати для прогнозування значень показника на наступний період.

ДОДАТКИ

Функції табличного редактора *MICROSOFT EXCEL*

У загальному вигляді функції мають наступний синтаксис:

$= \textbf{\textit{Имя \_ функции}}(\textbf{\textit{аргумент 1; аргумент 2;}} \ldots \textbf{\textit{; аргумент N}})$.

Формула може включати як окрему функцію, так і кілька функцій, константи, а також посилання на адреси клітинок, об'єднані знаками операторів. Функцію можна записати вручну, якщо знати її синтаксис, або скористатися ***Мастером функций*** за командою з меню ***Вставка*** чи піктограмою на панелі інструментів $\boxed{f_x}$. Аргументами функції можуть бути: константа, посилання на адресу клітинки або діапазону клітинок, текст, логічні величини, інші функції чи математичні формули.

Запис функції за допомогою ***Мастера функций*** здійснюється за два кроки. На першому кроці визначається категорія функції та вибирається ім'я конкретної функції із заданої категорії, а на другому кроці вказуються аргументи функції (за необхідністю).

Математичні функції

Математичні функції застосовуються для виконання математичних дій. Розглянемо застосування деяких з них.

ABS (число) – повертає модуль числа.

EXP (число) – повертає експоненту числа.

LN (число) – повертає натуральний логарифм числа.

LOG (число, основа) – повертає логарифм числа за заданою основою.

LOG10 (число) – повертає десятковий логарифм числа.

КОРЕНЬ (число) – повертає додатне значення квадратного кореня з числа.

СТЕПЕНЬ (число; степінь) – повертає результат піднесення числа до степеня.

ПРОИЗВЕД (число 1; число 2; …) – повертає добуток аргументів.

СУММ (число 1; число 2; …) – повертає суму аргументів.

СУММКВ (число 1; число 2; …) – повертає суму квадратів аргументів.

СУММКВРАЗН (масив x; масив y) – повертає суму квадратів різниць чисел двох масивів.

СУММПРОИЗВ(масив 1; масив 2; …) – повертає суму добутків чисел.

СУММРАЗНКВ (масив x; масив y) – повертає суму різниць квадратів відповідних елементів двох масивів.

СУММСУММКВ(масив x; масив y) – повертає суму сум квадратів відповідних елементів двох масивів.

Функції для роботи з матрицями (масивами)

МОПРЕД (масив) – повертає визначник матриці, що записана у масиві.

МОБР(масив) – повертає обернену матрицю, що записана у масиві.

МУМНОЖ(масив 1; масив 2) – повертає добуток матриць, які містяться в масивах. Результат – це масив з таким самим числом рядків, як і масив 1, та таким самим числом стовпців, як і масив 2.

ТРАНСП(масив) – повертає транспонований масив. Транспонування полягає в тому, що перший рядок вихідного масиву стає першим стовпцем нового масиву, а другий рядок – другим його стовпцем і т. д.

Приклад

Як приклад роботи з матрицями розглянемо операцію множення матриці $(\boldsymbol{A1:C4})$ з матрицею $(\boldsymbol{E1:E3})$ (рис.19). Для того щоб отримати результат, кількість стовпців першої матриці має дорівнювати кількості рядків другої матриці (в нашому випадку $\boldsymbol{3} = \boldsymbol{3}$).

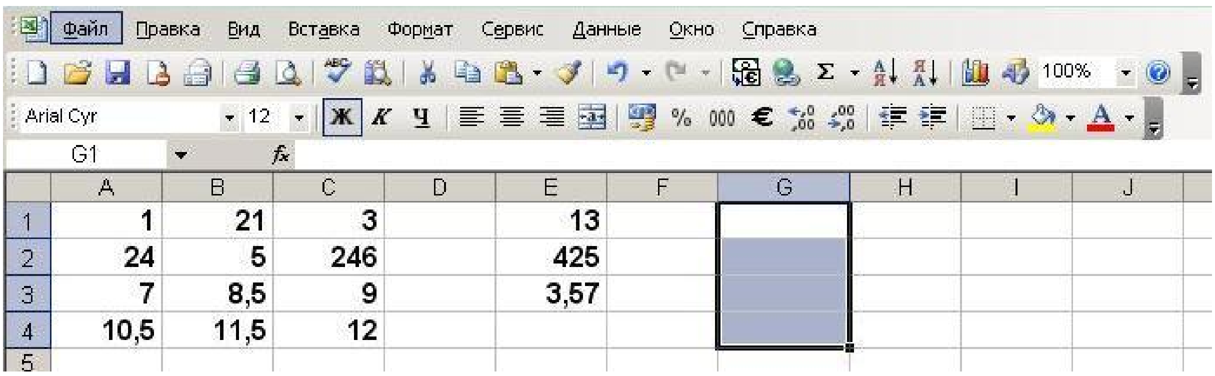


Рис.19. **Вихідні матриці та виділена область для результату множення**

Перш ніж звернутися до ***Мастера функций***, потрібно виділити область, де міститиметься результат множення, наприклад, ***G1 : G4*** (рис. 19).

Ця область згідно з правилом множення матриць матиме стільки ж рядків, скільки й перша вихідна (у даному прикладі – 4), і стільки стовпців, скільки друга (у прикладі – 1).

Далі в розділі ***Мастера функций*** вибираємо функцію ***МУМНОЖ*** (рис.20) із категорії ***ВСІ*** і вказуємо ліву верхню та праву, нижню клітинки обох матриць, що перемножуються (рис.21).

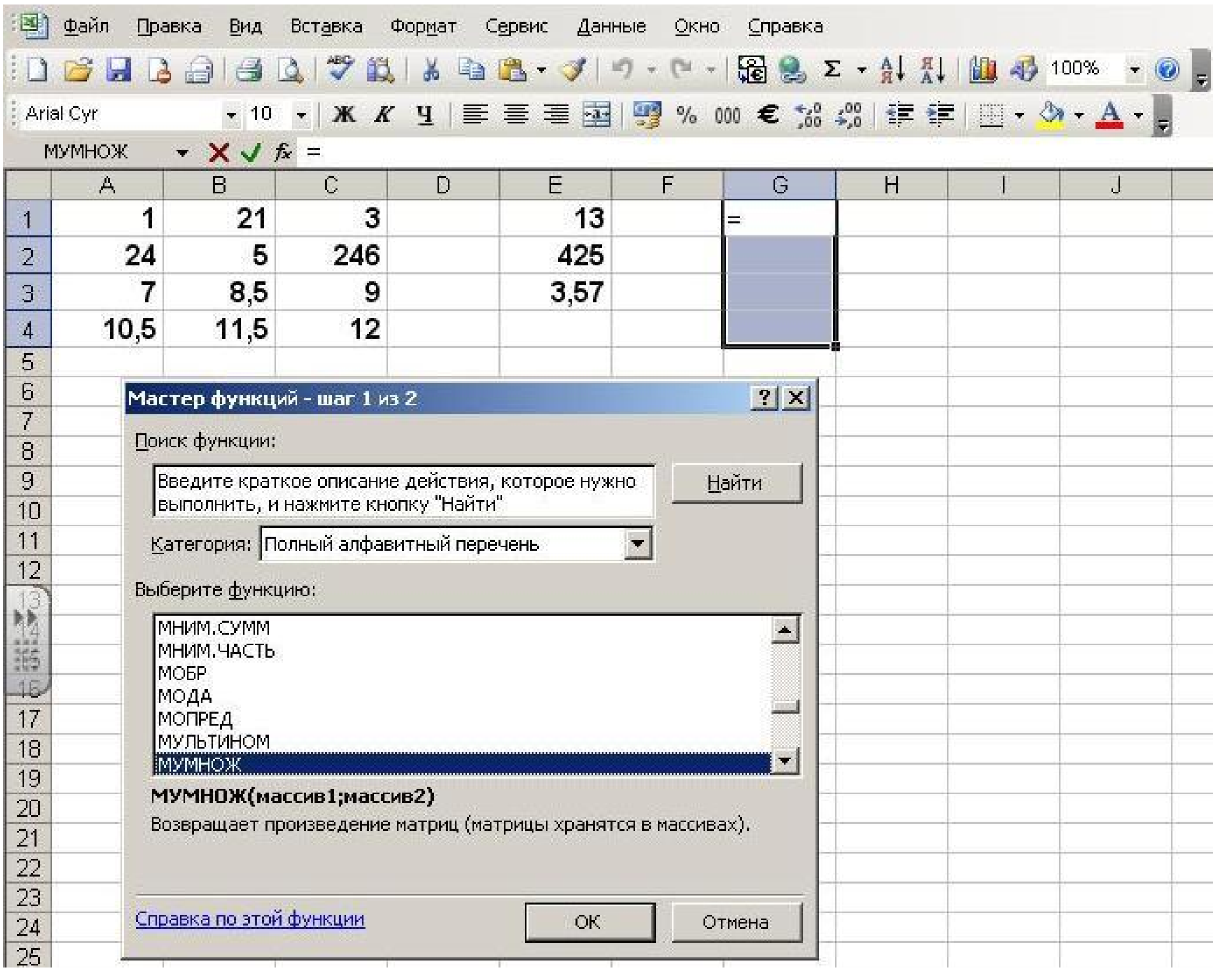


Рис. 20. **Вибір функції *МУМНОЖ***

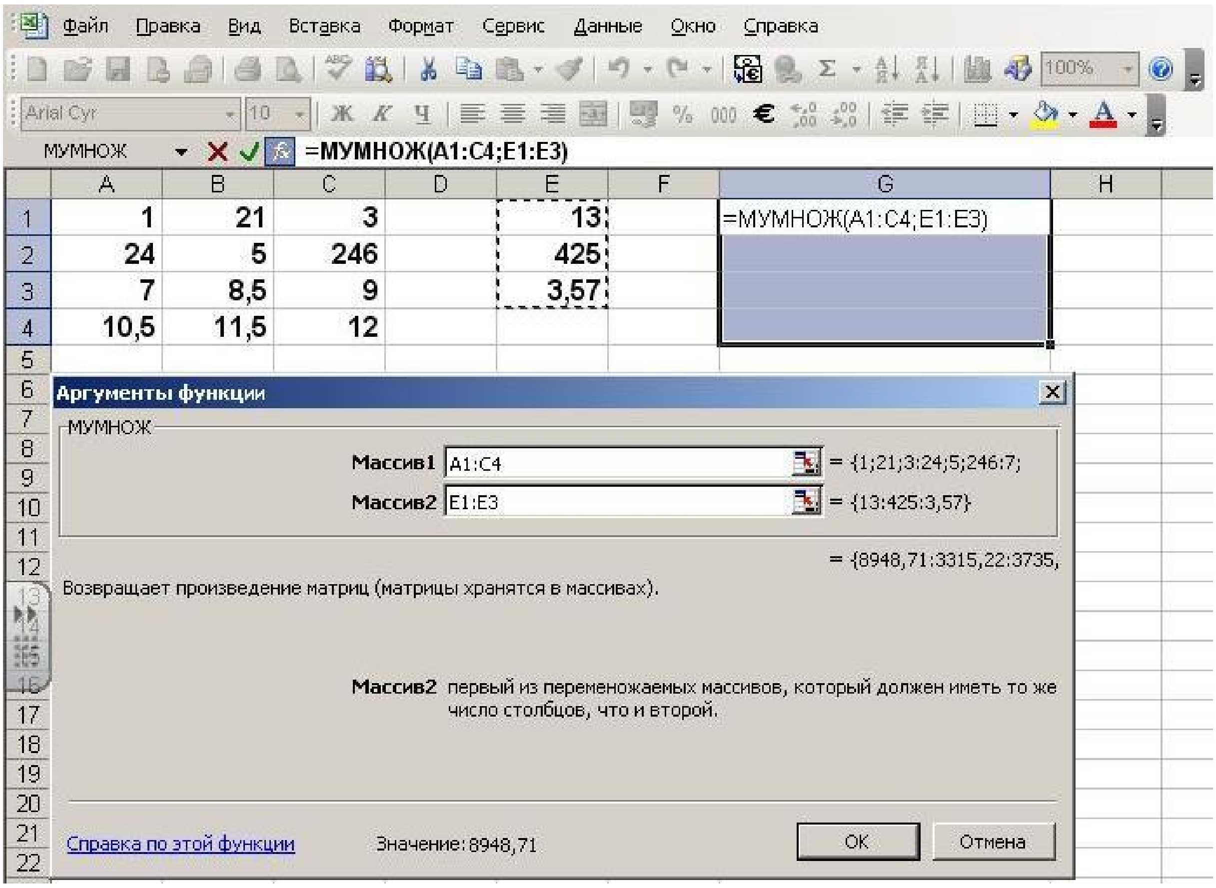


Рис. 21. **Заповнення параметрів функції *МУМНОЖ***

Коли ***Мастер функций*** підготує функцію, то з'явиться перший елемент матриці-результату (рис. 22).

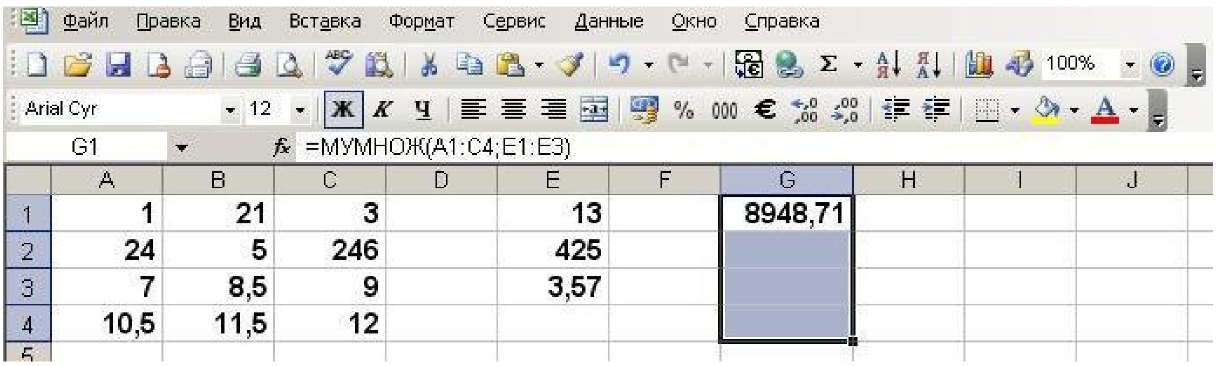


Рис. 22. **Перший елемент множення матриць**

Для появи інших елементів натиснемо спочатку клавішу ***F2***, а потім одночасно клавіші ***Ctrl*** + ***Shift*** + ***Enter*** (рис. 23). Ці дії слід виконувати завжди, коли знаходиться результат в операціях з матрицями.

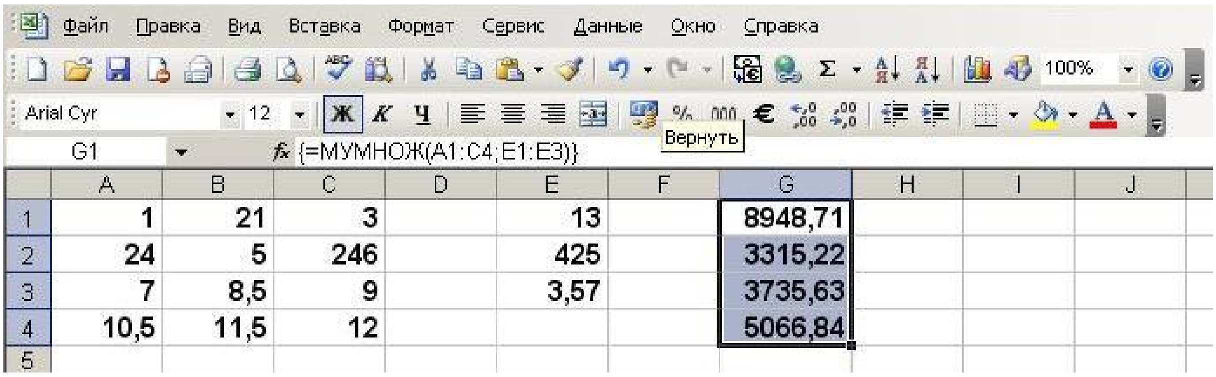


Рис. 23. **Результат множення матриць**

Статистичні функції

Статистичні функції використовують для проведення статистичного аналізу, визначення статистичних коефіцієнтів і констант. Розглянемо застосування деяких з цих функцій.

ДИСП (число 1; число 2; …) $(\boldsymbol{VAR})$ – повертає дисперсію випадково взятих $\boldsymbol{n}$ чисел, причому їх кількість не може перевищувати $\boldsymbol{30}$. Функція ***ДИСП*** передбачає, що аргументи є вибіркою з генеральної сукупності. Якщо дані являють собою генеральну сукупність, потрібно використовувати функцію ***ДИСПР***.

ДОВЕРИТ (a - альфа; s - стандартне відхилення; розмір) – повертає довірчий інтервал для середнього генеральної сукупності. Довірчий інтервал – окіл середнього вибірки (цей інтервал містить значення середнього вибірки, що рівновіддалене від його кінців).

a - це рівень значущості, застосовуваний для обчислення рівня надійності $\boldsymbol{P = 100(1 - a)}$. Якщо $a = \boldsymbol{0{,}05}$, це означає $\boldsymbol{95\%}$ - й рівень надійності.

s - це стандартне відхилення генеральної сукупності для інтервалу даних (вважається відомим).

КВАДРОТКЛ (число 1; число 2; …) – повертає суму квадратів відхилень точок даних від їх середнього. Кількість аргументів не повинна перевищувати ***30.*** Можна використовувати масив чи посилання на масив замість аргументів, що відокремлені крапкою з комою.

КВПИРСОН (відомі значення $\boldsymbol{y}$; відомі значення $\boldsymbol{x}$) – повертає квадрат коефіцієнта кореляції Пірсона для точок даних в аргументах «відомі значення $\boldsymbol{y}$» та «відомі значення $\boldsymbol{x}$». Значення коефіцієнта кореляції можна інтерпретувати як відношення дисперсії $\boldsymbol{y}$ до дисперсії $\boldsymbol{x}$.

«Відомі значення y» – це масив чи інтервал точок даних y.

«Відомі значення x» – це масив чи інтервал точок даних x.

КОВАР(масив 1; масив 2) – повертає коваріацію, тобто середній добуток відхилень для кожної пари точок даних.

КОРРЕЛ (масив 1; масив 2) – повертає коефіцієнт кореляції між інтервалами клітинок «масив 1» та «масив 2». Застосовується для визначення щільності лінійного зв’язку між двома показниками.

ЛИНЕЙН (відомі значення y; відомі значення x; константа; статистика) – повертає параметри лінійного наближення за методом найменших квадратів, тобто визначає оцінки параметрів лінійної регресії:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \ldots + \hat{a}_k x_k .$$

«Відомі значення y» – множина значень y. Якщо масив y має один стовпець, то кожен стовпець масиву «відомі значення x» інтерпретуються як окрема змінна. Якщо масив «відомі значення y» має один рядок, то кожен рядок «відомих значень x» інтерпретується як окрема змінна.

«Відомі значення x» – множина значень x, що враховує або одну (парна регресія), або кілька змінних (множинна регресія). Якщо «відомі значення x» пропустили, то вважається, що це масив $\{1;2;3;\ldots\}$ такого самого розміру, як n «відомих значень y».

«Константа» – логічне значення. Якщо «константа» має значення «ложь», то $a_0 = 0$. Якщо «константа» має значення «истина», то a_0 обчислюється традиційно (модель з вільним членом).

«Статистика» – логічне значення. Якщо «статистика» має значення «истина», то функція додатково обчислює регресійну статистику:

$\hat{a}_k$	$\hat{a}_{k-1}$	$\ldots$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_0$
$S_{\hat{a}_k}$	$S_{\hat{a}_{k-1}}$	$\ldots$	$S_{\hat{a}_1}$	$S_{\hat{a}_0}$
R^2	s_u			
F	$k = n - m$			
$SSR = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$	$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2$			

де $\hat{a}_j$ - оцінка параметра a_j, $j = \overline{1,k}$;

$\hat{a}_0$ - оцінка вільного члена регресії;

$S_{\hat{a}_j}$ - стандартна похибка оцінки параметра;

R^2 - коефіцієнт детермінації;

s_u - стандартна похибка залишків;

F - критерій Фішера;

$k = n - m$ - ступінь свободи, де n - кількість спостережень, m - кількість змінних у моделі.

$SSR = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - \overline{Y} \right)^2$ - сума квадратів відхилення, що пояснюється регресією;

$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - Y_i \right)^2$ - сума квадратів, що пояснюється похибкою u.

Якщо «статистика» має значення «ложь», то функція ***ЛИНЕЙН*** обчислює лише коефіцієнти $\hat{a}_j$ та константу $\hat{a}_0$.

ЛГРФПРИБЛ (відомі значення y; відомі значення x; константа; статистика) – повертає параметри експоненціального наближення.

МАКС (число 1; число 2; …) – повертає максимальне значення із списку аргументів.

МИН (число 1; число 2; …) – повертає мінімальне значення із списку аргументів.

МЕДИАНА(число 1; число 2; …) – повертає медіану заданих чисел, тобто число, що є серединою масиву чисел.

МОДА(число 1; число 2; …) – повертає моду, тобто число, що найбільш часто зустрічається чи повторюється в масиві чисел.

НОРМАЛИЗАЦИЯ (x; середні; стандартне відхилення). Функція обчислює нормалізоване значення для розподілу, що характеризується середнім та стандартним відхиленнями X - значень, що нормалізуються. Для нього задаються середнє арифметичне та стандартне відхилення розподілу. У дужках мають бути числа чи назви, масиви, чи посилання, що складаються з чисел. ***Excel*** перевіряє всі числа, які є масивами чи посиланнями. Якщо масив містить порожні клітинки, текстові чи логічні значення, то такі значення ігноруються, але клітинки, що містять нульові значення враховуються.

НАКЛОН (відомі значення y; відомі значення x) – повертає тангенс кута нахилу (нахил) лінії лінійної регресії для точок даних в аргументах «відомі значення y» та «відомі значення x».

«Відомі значення y» – це масив чи інтервал точок залежних даних y. «Відомі значення x» – це масив чи інтервал точок незалежних даних x.

НОРМСТРАСП (z) – повертає значення стандартного нормального інтегрального розподілу.

ОТРЕЗОК (відомі значення y; відомі значення x) – повертає точку перетину лінії з віссю ординат для точок даних в аргументах «відомі значення y» та «відомі значення x». «Відомі значення y» – це масив чи інтервал точок залежних даних y. «Відомі значення x» – це масив чи інтервал точок незалежних даних x.

ПИРСОН (масив 1; масив 2) – повертає коефіцієнт кореляції Пірсона, що відображає ступінь лінійного зв'язку між двома масивами даних.

«Масив 1» – множина незалежних значень x.

«Масив 2» – множина залежних значень y.

ПРЕДСКАЗ (x; відомі значення y; відомі значення x) – повертає або прогнозує значення функції в точці x, що прогнозується на основі лінійної регресії для масивів відомих значень x та y або інтервалів значень. y - масив залежної змінної, x - масив незалежних змінних.

Якщо «відомі значення y» та «відомі значення x» порожні чи містять різну кількість точок даних, то функція ***ПРЕДСКАЗ*** повертає значення помилки.

РОСТ (відомі значення y; відомі значення x; нові значення x; константа) – повертає прогнозоване експоненціальне зростання на основі наявних даних масиву x. Функція апроксимує експериментальну криву «відомі значення y» та «відомі значення x» і визначає відповідні цій кривій значення для чисел y, що визначаються «новими значеннями x».

«Відомі значення y» – це множина значень y, що визначаються відношенням

$$y = a_0 a_1^{x_1} a_2^{x_2} \ldots \qquad \text{або} \qquad y = a_0 a^x .$$

Якщо масив «відомі значення y» має один стовпець, то кожний стовпець масиву «відомі значення x» інтерпретуються як окрема змінна. Якщо масив «відомі значення y» має тільки один рядок, то кожний рядок масиву «відомі значення x» інтерпретується як окрема змінна. Якщо якісь числа в масиві «відомі значення y» дорівнюють нулю чи від'ємні, то функція ***РОСТ*** видає значення помилки ***#ЧИСЛО!***.

Масив «відомі значення x» може містити одну чи кілька змінних. Якщо використовується лише одна змінна, то «відомі значення y» та «відомі значення x» можуть мати будь-яку форму, але неодмінно при цьому – однакову розмірність. Якщо використовується більш як одна змінна, то «відомі значення y» має бути вектором (стовпцем чи рядком). Якщо «відомі значення x» пропустили, то це передбачає, що масив $\{1;2;3;\mathbf{L}\}$ такого самого розміру, як і «відомі значення y».

«Нові значення x» – значення x, для яких ***РОСТ*** розраховує відповідні значення y.

СРГАРМ (число 1; число 2; …) – повертає середнє гармонічне своїх аргументів, які можуть бути числами чи іменами, масивами чи посиланнями на масив замість аргументів, що відокремлені крапкою з комою.

СРГЕОМ (число 1; число 2; …) – повертає середнє геометричне своїх аргументів, які можуть бути числами чи іменами, масивами чи посиланнями на масив замість аргументів, що відокремлені крапкою з комою.

СРЗНАЧ (число 1; число 2; …) – повертає середнє арифметичне своїх аргументів, які можуть бути числами чи іменами, масивами чи посиланнями на масив замість аргументів, що відокремлені крапкою з комою.

СРОТКЛ (число 1; число 2; …) – повертає середнє абсолютних значень відхилень точок даних від середнього. ***СРОТКЛ*** є мірою розсіяння множини даних. Замість «число 1; число 2; …» можна використовувати масив чи посилання на масив. Кількість чисел у масиві має не перевищувати ***30***.

СТАНДОТКЛОН (число 1; число 2; …) – повертає стандартне відхилення за вибіркою та характеризує розкид точок відносно їх середнього. «Число 1; число 2; …» – це від одного до тридцяти числових аргументів, що відповідають вибірці з генеральної сукупності. Можна використовувати масив чи посилання на масив замість аргументів, що відокремлені крапкою з комою. ***СТАНДОТКЛОН*** передбачає, що аргументи є лише вибіркою з генеральної сукупності. Якщо дані являють собою всю генеральну сукупність, то стандартне відхилення потрібно обчислювати за допомогою функції ***СТАНДОТКЛОНП*** (число 1; число 2; …).

СТЬЮДРАСПОБР (ймовірність; ступені свободи) – повертає $\boldsymbol{t}$ - розподіл Стьюдента як функцію ймовірності та числа ступенів вільності (табличне значення).

СЧЕТ (значення 1; значення2; …) – повертає кількість чисел у списку аргументів.

СКОС (значення 1; значення2; …) – визначає ступінь асиметричності ряду або щільності розподілу ймовірності випадкової величини відносно середнього значення.

ТЕНДЕНЦИЯ (відомі значення $\boldsymbol{y}$; відомі значення $\boldsymbol{x}$; нові значення $\boldsymbol{x}$; константа) $(\boldsymbol{TREND})$ – повертає прогнозне значення відповідно до лінійного тренду. Функція передбачає, що тенденція зміни залежності змінної $\boldsymbol{y}$, яка була виявлена за «відомим значенням $\boldsymbol{x}$», буде збережена.

FРАСПОБР (ймовірність; ступені свободи 1; ступені свободи 2) – повертає обернене значення $\boldsymbol{F}$ - розподілу ймовірностей (табличне).

ХИ2ОБР (ймовірність; ступені свободи) – повертає значення до односторонньої ймовірності розподілу c - квадрат табличне).

ЭКСЦЕСС (значення 1; значення2; …) – визначає ступінь асиметричності ряду або щільності розподілу ймовірності випадкової величини відносно середнього значення.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Антохонова И. В. Методы прогнозирования социально-экономических процессов : учебное пособие / И. В. Антохонова. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГТУ, 2004. – 212 с.
2. Афанасьев В. Н. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник / В. Н. Афанасьев, М. М. Юзбашев. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 228 с.
3. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособ. / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
4. Боровиков В. П. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере: учеб. пособие / В. П. Боровиков, Г. И. Ивченко. – М. : Финансы и статистика, 1999. – 284 с.
5. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : навч. посіб. / В. В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2003. – 408 с.
6. Галущак М. П. Прогнозування соціально-економічних процесів : навчальний посібник / М. П. Галущак. – Тернопіль : ТДТУ, 2009. – 101 с.
7. Горелова В. Л. Основы прогнозирования систем : учеб. пособ. / для инж.-экон. спец. вузов / В. Л. Горелова, Е. Н. Мельникова. – М. : Высшая школа, 1986. – 287 с.
8. Економетрія. Лабораторний практикум в EXCEL : навч. посібник / В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. І. Хилько та ін. – Миколаїв : МДАУ, 2012. – 480 с.
9. Єріна А. М. Статистичне моделювання та прогнозування : навч. посіб. / А. М. Єріна. – К. : КНЕУ, 2001. – 170 с.
10. Лук'яненко І. Г. Економетрика / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова. – К. : Товариство «Знання» ; КОО, 1998. – 494 с.
11. Льюис К. В. Методы прогнозирования экономических показателей / пер. с англ. Е. З. Демиденко. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 133 с.
12. Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики : учеб.-практ. пособ. / В. И. Малыхин. – М. : УРАО, 1998. – 160 с.
13. Основы экономического и социального прогнозирования : учебник для вузов / под ред. В. Н. Мосина, Д. М. Крука. – М. : Высшая школа, 1985. – 200 с.

14. Наконечний С. І. Економетрія : підручник / С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко, Т. П. Романюк. – вид 2-ге, допов. та перероблен. – К. : КНЕУ, 2000. – 286 с.
15. Карасев А. И. Математические методы и модели в прогнозировании: учеб. пособ. для эконом. вузов / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева. – М. : Экономика, 1987. – 240 с.
16. Кильдишев Г. С. Анализ временных рядов и прогнозирование / Г. С. Кильдишев, А. А. Френкель. – М. : Статистика, 1973. – 100 с.
17. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 543 с.
18. Кулявець В. О. Прогнозування соціально-економічних процесів: навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів / В. О. Кулявець. – К. : Кондор, 2007. – 148 с.
19. Присенко Г. В. Прогнозування соціально-економічних процесів: навч. посіб. / Г. В. Присенко, Є. І. Равікович. – К. : КНЕУ, 2005. – 378 с.
20. Прогнозування соціально-економічних процесів: сучасні підходи та перспективи: монографія / за ред. О. І. Черняка, П. В. Захарченка. – Бердянськ : видавництво Ткачук, 2011. – 391 с.
21. Статистическое моделирование и прогнозирование / под ред. А. Г. Гринберга. – М. : Финансы и статистика, 1990. – 384 с.
22. Толбатов Ю. А. Економетрика : підруч. для студ. екон. спец. ВНЗ / Ю. А. Толбатов. – К. : Четверта хвиля, 1997. – 320 с.
23. Теория и практика статистического моделирования экономики / под ред. Е. М. Четыркина и А. Класса. – М. : Финансы и статистика, 1986. – 272 с.
24. Френкель А. А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели / А. А. Френкель. – М. : Экономика, 1989. – 214 с.
25. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: учеб. пособ. для вузов / С. И. Шелобаев. –М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 391 с.
26. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. пособ. для вузов / под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 331 с.
27. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования / Е. М. Четыркин. – М. : Статистика, 1977. – 199 с.

Навчальне видання

ПРОГНОЗУВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Домаскіна Марина Анатоліївна
Хилько Іван Іванович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 4,375.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.