

УДК 534.131

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ГАЗОВОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ ПРИ ЕЁ НАЧАЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЯХ В ЖИДКОСТИ

А. В. ШЕПТИЛЕВСКИЙ¹, И. Т. СЕЛЕЗОВ², В. М. КОСЕНКОВ³

¹Николаевский национальный аграрный университет,
54020, г. Николаев, ул. Парижской коммуны, 9

²Институт гидромеханики НАН Украины,
вул. Желябова, 8/4, 03680, МСП, Київ-180, Україна

³Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,
54018, г. Николаев, проспект Октябрьский,
email: v.m.kosenkov@gmail.com

Получено 12.01.2015

В работе рассмотрена динамика газовой полости в идеальной сжимаемой жидкости в результате импульсного ввода в неё энергии. Исследован процесс генерации сферической волны давления в жидкости, генерируемой пульсациями газовой полости. Предложен алгоритм расчёта пульсаций полости в нелинейной постановке на неподвижной эйлеровой сетке. Проведен сравнительный анализ динамики пузырька в линейной и нелинейной постановке.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: жидкость, сферическая газовая полость, пульсации, численное моделирование

В роботі розглянуто динаміку газової порожнини в ідеальній стисливій рідині внаслідок імпульсного введення в неї енергії. Досліджено процес генерації сферичної хвилі тиску в рідині, яка генерується пульсаціями газової порожнини. Запропоновано алгоритм розрахунку пульсацій порожнини в нелінійній постановці на нерухомій ейлеровій сітці. Проведено порівняльний аналіз динаміки бульбашки в лінійній та нелінійній постановці.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: рідина, сферична газова порожнина, пульсації, чисельне моделювання

The paper considers the dynamics of a gas cavity in an ideal compressible fluid as a result of the pulsed input of energy into it. The process of generating a spherical pressure wave in fluid generated by gas cavity pulsations is investigated. An algorithm for calculating the fluctuations of the cavity in nonlinear statement on a fixed Eulerian grid is proposed. A comparative analysis of the bubble dynamics in linear and nonlinear formulation is presented.

KEY WORDS: liquid, spherical gas cavity, pulsations, numerical simulations

ВВЕДЕНИЕ

Во многих технологических процессах используют давление гидродинамических волн на обрабатываемые объекты. К ним относятся процессы импульсной штамповки и калибровки металлов, а также разрушения и дробления грунтов и керамики. Исследования подводных объектов также выполняют с помощью генераторов мощных акустических волн. Генерация мощных волн в жидкости обычно сопровождается появлением газовых полостей, которые определяют характеристики излучаемых волн. Образование газовой полости в жидкости, как известно, может быть вызвано падением давления (гидродинамическая кавитация) или прохождением акустической волны (акустическая кавитация) [1, 2]. Кроме того, появление и рост газовой полости может быть вызван внешними факторами, связанными с вводом энергии

в жидкость в результате взрыва ВВ, электрического разряда в жидкости, электрического взрыва проводника, лазерного импульса и т.п. [3-7].

При исследовании взаимодействия газовой полости с жидкостью, в рамках задачи, проанализированной в работе [8], можно выделить два основных случая: малые амплитуды пульсаций газовой полости (не превышающие её начальный радиус) и большие амплитуды пульсаций.

Рассмотрение пульсаций газовой полости в жидкости при небольших возмущениях полости хорошо описывается в линейном приближении [9, 10]. В этом случае предполагают, что граница полости перемещается на бесконечно малую величину, т.е. её считают условно неподвижной, но скорость её движения изменяется в процессе пульсаций.

Если полость испытывает большие возмущения, когда амплитуда пульсаций полости значительно отличается от её начального радиуса, линейная постановка приводит к существенным погреш-

пностями, влияющим на оценку динамики полости. В этом случае возникает необходимость учитывать конечные перемещения поверхности полости [9, 11, 12].

Решение подобных задач выполняют с помощью численных методов, использующих подвижные сетки для дискретизации расчётной области [13, 14]. Алгоритм этих методов усложнён процедурами перестройки сеток и обеспечения устойчивости итерационного процесса. Поэтому задача разработки более простых алгоритмов учёта нелинейности гидродинамических задач по-прежнему остаётся актуальной.

Представляет интерес исследование пульсации газовой полости, генерируемой вводом энергии, в сжимаемой жидкости и взаимное влияние газовой полости и сжимаемой жидкости при их взаимодействии с учетом нелинейности пульсации полости.

В связи с этим разработан алгоритм расчёта пульсаций сферической газовой полости в нелинейной постановке, но с использованием эйлерова способа описания течения жидкости на неподвижной сетке.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается пузырёк газа в жидкости. В связи с размером пузырька его форму можно считать сферической, что обеспечивается силами поверхностного натяжения [15]. Полагаем, что пузырёк заполнен газом, образовавшимся в результате детонации сферического заряда ВВ, а также парами воды. Учитывая, что показатель адиабаты у продуктов детонации ВВ изменяется в пределах от 1.25 до 1.3, а водяного пара от 1.3 до 1.33, показатель адиабаты смеси газов в пузырьке принимается постоянным и равным 1.3.

При этом преобладают деформации объёмного сжатия, а не сдвига, и вязкие напряжения в жидкости можно не учитывать, то есть жидкость можно считать идеальной [15]. Это позволяет рассматривать волновые процессы в жидкости в потенциальном приближении.

Так как размеры полости малы по сравнению с размерами области, заполненной жидкостью, то за время ввода энергии, намного меньшего, чем период пульсации полости, не имеет принципиального значения закон ввода энергии [3]. Поэтому считали, что заданная энергия выделяется в пузырьке с постоянной мощностью за малое конечное время в результате взрывных процессов. Промежуток времени τ_3 подвода энергии выбирались из условия, что он меньше $0.01 \cdot T_0$, но не меньше $\Delta t (\Delta t -$

вычислительный шаг по времени), где T_0 – период пульсации газовой полости.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Динамика пульсаций газовой полости определяется уравнением баланса энергии. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что одним из способов выведения системы пузырек-жидкость из состояния равновесия является ввод энергии в газовую полость [3]:

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} (P_b \cdot V_b) + P_b \frac{dV_b}{dt} = N(t), \quad (1)$$

где $V_b = \frac{4}{3} \pi R_b^3$ – объём пузырька; R_b – радиус пузырька; P_b – давление в пузырьке; γ – показатель адиабаты газа в пузырьке; $N(t)$ – мощность вводимой в полость энергии взрывных процессов.

На некотором удалении от полости в жидкости может возникать асимметрия при распространении возмущения, связанная с формой поверхности, ограничивающей жидкость, или наличием в жидкости преграды. Для возможного учета асимметрии распространения возмущения в жидкости при описании ее динамики применялось волновое уравнение в сферической системе координат в трехмерной постановке [16, 17]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2)$$

где f – потенциал скорости жидкости; c – скорость звука в невозмущённой жидкости.

В данной статье применяется волновое уравнение гидроакустики (2) без учета асимметрии. Давление в жидкости находится с помощью интеграла Коши-Лагранжа в линеаризованной форме [18]:

$$P = P_0 - \rho_0 \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3)$$

где ρ_0 – плотность невозмущённой жидкости.

Взаимодействие пузырька с жидкостью определяется условиями на контактной границе двух сред, в виде равенства скоростей и давлений жидкости и газа на границе пузырька [19]:

$$\frac{dR_b}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad P_b = P^*, \quad (4)$$

где P^* – давление жидкости на границе пузырька. Так как жидкость предполагается идеальной, то касательные напряжения на границе раздела жидкости и пузырька равны нулю.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Уравнения математической модели решали с помощью численных методов, заменив непрерывную, пространственную область решений дискретной. Пространственная область дискретизировалась, а время, рассматриваемое до четырех пульсаций, настолько мало, что отраженные от границы дискретизации волны не приходили. Граница дискретизации выбиралась так, чтобы отраженные волны успели подойти. По существу можно говорить о поведении системы в очень узком временном интервале. Это приближенный анализ. В точной постановке необходимо рассматривать уходящие волны, чтобы гарантировать условия Зоммерфельда (единственность решения) и из этих условий формулировать условия на границе дискретизации или применять метод конечного объема.

Дифференциальные уравнения дискретизировались в пространстве и во времени по методу конечных разностей [20, 21]. Решение полученной алгебраической системы уравнений выполнялось с помощью явных численных методов, использующих рекуррентные по времени формулы [8].

На основе волнового уравнения (2) вычислялись потенциалы жидкости во всех точках, кроме граничных. С помощью условий контактного взаимодействия (4) определялись потенциалы жидкости на границе с полостью, при этом, если смещение границы происходило в пределах от первой до второй точки сетки, вычислялась динамика полости по разработанному алгоритму. Если перемещения полости превышали шаг пространственной сетки по радиальной координате, то на основе алгоритма взаимодействия определялся потенциал жидкости в узле сетки, который является нижним пределом интервала, и в котором расположена граница полости. Такой алгоритм позволяет учесть перемещение границы полости относительно пространственной сетки.

На рис. 1 показано, как учитывалась нелинейность пульсаций газовой полости относительно начального радиуса R_{b0} .

Точки r_1 и r_{n_k} – граничные, такие что $r_1 = R_{b0}$, $r_{n_k} = R_{s0}$, где R_{s0} – радиус сферической поверхности, ограничивающей жидкость, R_{b0} – начальный радиус газовой полости. Фиксированная

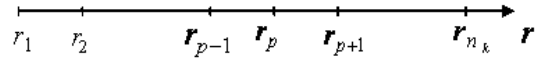


Рис. 1. Узлы пространственной сетки по радиальной координате с номерами $k = \overline{1, n_k}$

сферическая поверхность считалась непроницаемой, поэтому скорость жидкости на ней равна нулю. Радиус фиксированной сферической поверхности R_{s0} выбирался из условия, что отраженная от неё волна не успеет достичь поверхности пузырька за время расчёта (T), т.е. $R_{s0} = \tilde{n} \cdot \dot{O}$, а время $T = 2 \cdot T_0$. Это обеспечивало расчёт приблизительно четырёх пульсаций пузырька без влияния волн, отражённых от поверхности радиусом R_{s0} .

При движении границы полости она проходит через узловы точки пространственного шаблона. Пусть r_p – точка, в которой выполняется неравенство $r_p \leq R_b < r_{p+1}$, тогда точка r_p рассматривается, как граничная и значения переменных системы определяются на $(n + 1)$ -м слое по времени, с учетом значения потенциала жидкости f_p^n , радиуса пузырька R_b^n и давления в пузырьке P_b^n на предыдущем временном слое, а также условия контактного взаимодействия сред на границе раздела (4) и уравнения баланса энергии полости (1). В результате определяется радиус и давление в полости, а также значение потенциала жидкости на границе с газовой полостью [22].

Значения потенциалов жидкости в точках r_i при $p < i < n_k$ вычисляются с помощью волнового уравнения, а в точках $i = n_k$ определяются с учетом граничных условий (4). В точках $i < p$ потенциал жидкости находится линейной экстраполяцией [20] по известным значениям потенциала в точках r_p и r_{p+1} .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассматривается газовая полость $R_{b0} = 1$ мм в идеальной сжимаемой жидкости с $\rho_0 = 1000$ кг/м³. В начальный момент времени система пузырёк-жидкость находится в состоянии равновесия, поэтому давление жидкости и газа в полости одинаково: $P_0 = 0.1$ МПа. При вводе энергии E_0 (энергия на пузырек) в газовую полость она начинает совершать пульсации (рис. 2).

При этом скорость движения поверхности полости (рис. 3) принимает максимальные значения в начале процесса ввода энергии, уменьшаясь со временем.

При больших энергиях изменение среднего зна-

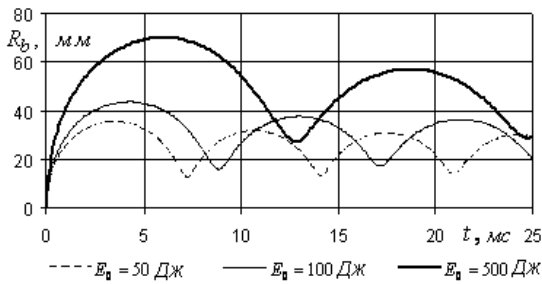


Рис. 2. Изменение радиуса полости со временем

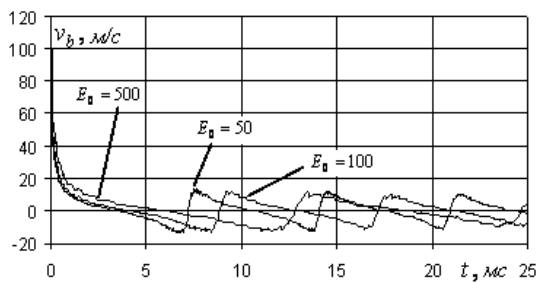


Рис. 3. Изменение скорости пульсаций

чения радиуса, относительно которого пульсирует полость, вычисленного в линейной постановке (рис. 4, штриховая линия), существенно превышает соответствующие значения радиуса, определенного с учётом нелинейности (рис. 4, сплошная линия).

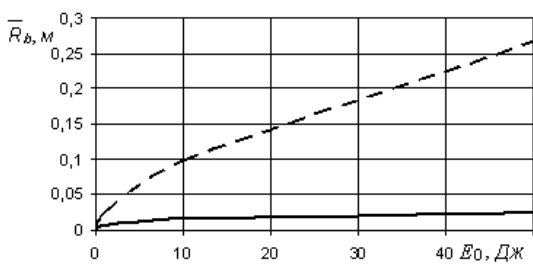


Рис. 4. Изменение среднего радиуса

Пульсации газовой полости относительно некоторого среднего значения радиуса \bar{R}_b должны соответствовать периоду собственных её пульсаций [15]:

$$T_0 = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{3\gamma P_0}} \quad (5)$$

Пусть T_b , \bar{R}_b – период и средний радиус пульсации полости, который определяется с помощью

уравнений (1) и (4). По известному среднему радиусу с помощью формулы (5) находится период пульсации T_0 . Погрешность вычислений определяется по формуле: $\Delta T = \frac{|T_b - T_0|}{T_0} 100\%$ (рис. 5).

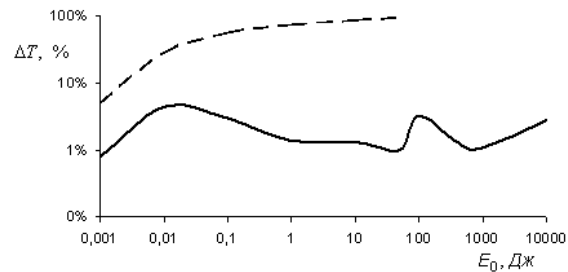


Рис. 5. Погрешность вычислений

Увеличение энергии, вводимой в полость, приводит к увеличению погрешности расчёта при линейной постановке задачи (рис. 5, штриховая линия), которая асимптотически приближается к 100%. Вычисления периода пульсаций полости с учетом нелинейности обеспечивает погрешность вычисления T_b , не превышающую 5% (рис. 5, сплошная линия). Амплитуда пульсаций пузырька монотонно возрастает с увеличением вводимой энергии по степенному закону с показателем степени меньшим единицы (рис. 6).

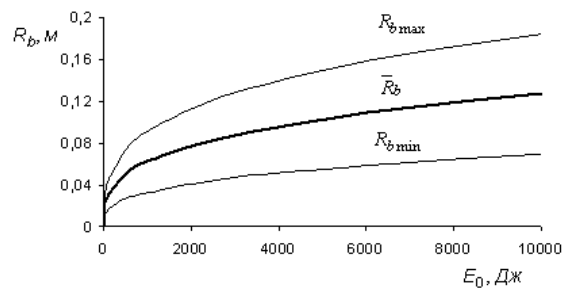


Рис. 6. Амплитуда пульсаций

Отличия расчетного периода пульсаций от вычисленного по формуле (5) невелики, если энергия, вводимая в полость такова, что амплитуда пульсаций полости намного меньше, чем расстояние между узлами пространственной сетки, тогда поверхность полости располагается вблизи начальной граничной точки. Такое расположение границы также возможно при увеличении геометрического шага сетки, однако в импульсных процессах это может приводить к погрешности вычисления распространения волны в жидкости. На рис. 7 представлены зависимости максимального

давления в жидкости на границе полости от величины, введенной в полость энергии. Как видно из рис. 7, даже при достаточно малой энергии давление на границе существенно зависит от начального радиуса полости, и это влияние возрастает при увеличении вводимой энергии.

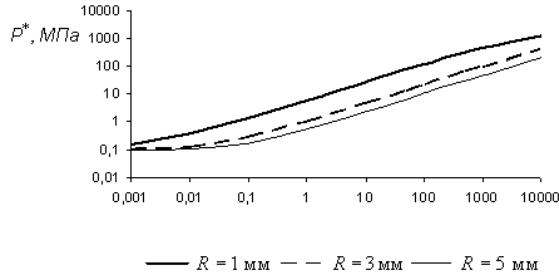


Рис. 7. График изменения максимального давления

Начальный радиус полости существенно влияет на динамику системы пузырек-жидкость. Чем больше начальный радиус, тем меньшее давление достигается на границе полости при вводе заданного количества энергии. Так, для радиусов 1 и 5 мм давление при соответствующих значениях энергии отличается на порядок.

На рис. 8 представлен график зависимости количества энергии E_0^* , передаваемой полостью жидкости, от энергии, вводимой в полость E_0 . Если шаг дискретизации расчётной области относительно большой по сравнению с радиусом полости, а энергия мала, то расчёт выполняется по линейному алгоритму, так как граница полости не переходит через соседний узел сетки. В этом случае необходимо согласовывать шаг сетки с амплитудой пульсации полости. При больших значениях вводимой энергии количество энергии передаваемой жидкости (равной работе расширения полости) практически не зависит от начального радиуса полости.

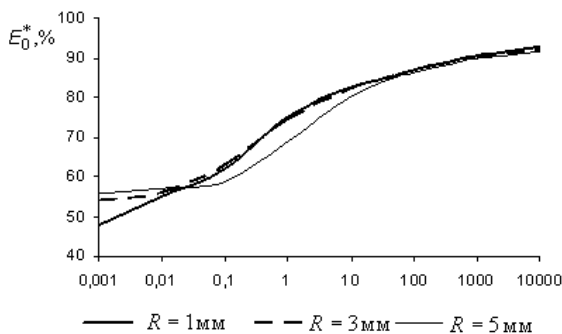


Рис. 8. Оценка количества энергии

В работах [22–27] рассматривалась задача для жидкости, ограниченной упругой сферической оболочкой с несимметричным закреплением. Движение жидкости описывалось уравнением (2). Принималось, что в пределах очень малого времени оболочка возбуждалась пульсациями, а обратное воздействие на пульсирующую сферическую полость не учитывалось. Не учитывалось также излучение оболочки во внешнюю среду. Поэтому результаты указанных работ также справедливы в пределах того же малого времени, соответствующего четырем пульсациям.

ВЫВОДЫ

Представлен алгоритм, позволяющий рассчитывать пульсации сферически симметричной газовой полости при малом начальном времени с использованием эйлера способа описания течения жидкости на неподвижной сетке, но с учётом конечной деформации границы раздела газовой полости и окружающей её жидкости. Проведен сравнительный анализ влияния линейной и нелинейной постановок задачи на результаты исследования динамики газовой полости и ее взаимодействия с жидкостью. Показано, что даже при малых энергиях (0.001 Дж), вводимых в полость, погрешность вычислений характеристик её пульсаций в линейной постановке на порядок больше, чем в нелинейной постановке, когда погрешность вычисления не превышает 5 %.

В дальнейшем в связи с этим необходимо представить общую постановку задачи и на основе соответствующих оценок показать малость неучитываемых эффектов, а общую задачу гидроупругости решать разложением по собственным функциям.

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 337 с.
2. Brennen C. E. Cavitation and bubble dynamics.– N.-Y.: Oxford University Press, 1995.– 294 p.
3. Наугольных К. А., Рой Н. А. Электрические разряды в воде.– М.: Наука, 1977.– 151 с.
4. Каменская Л. А., Косенков В. М. Расчет расширения канала электрического разряда в жидкости, описываемой в потенциальном приближении // Акуст. вісн.– 2001.– 4, № 2.– С. 47–52.
5. Косенков В. М., Кускова Н. И. Развитие пробоя в воде // ЖТФ.– 1987.– 57, № 10.– С. 2017–2020.
6. Ахатов И. Ш., Вахитова Н. К., Топольников А. С. Динамика пузырька в жидкости при воздействии лазерного импульса // ПМТФ.– 2002.– 43, № 1.– С. 52–59.

7. Орленко Л. П. Физика взрыва и удара: учебное пособие для вузов.– М.: Физматлит, 2006.– 404 с.
8. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Трехмерная модель гидроупругой системы, ограниченной сферической оболочкой // Мат. методы та фіз.-мех. поля.– 2012.– **55**, № 1.– С. 159–167.
9. Красильников В. А., Крылов В. В. Введение в физическую акустику.– М.: Наука, 1987.– 400 с.
10. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч.1.– М.: Наука, 1987.– 464 с.
11. Акуличев В. А. Пульсации кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля. Под ред. Л. Д. Розенберга., – М., Наука, 1968. – С. 129–167.
12. Оганян Г. Г. Нелинейные свободные пульсации газового пузырька в несжимаемой жидкости // Известия нац. академии наук Армении. – 2006. – № 2. – С. 62 – 71.
13. Смирнов Н. Н., Никитин В. Ф. Влияние геометрии канала и температуры смеси на переход горения в детонацию в газах // Физика горения и взрыва. – 2004. – № 2. – С. 68–83.
14. Stockie J. M., MacKenzie J. A., Russell R. D. A moving mesh method for one-dimensional hyperbolic conservation laws // SIAM Journal on Scientific Computing: SISC.– 2001.– **22**, N 5.– P. 1791–1813.
15. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред.– М.: Энергоатомиздат, 1990.– 248 с.
16. Сташкевич А. П. Акустика моря.– Л.: Судостроение, 1966.– 350 с.
17. Durst F. Fluid mechanics: an introduction to the theory of fluid flows.– Berlin: Springer, 2008.– 723 p.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.– 848 с.
19. Connor J. J., Brebbia C. A. Finite element techniques for fluid flow. – Newnes– Butterworth, London/Boston, 1976. Русский перевод: Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
20. Бахвалов Н. С. Численные методы.– М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2006.– 640 с.
21. Atkinson K., Han W. Finite difference method // Theoretical Numerical Analysis. – 2009. – **39**. – P. 253–275.
22. Шептилевский А. В. Динамика пульсаций газовой полости в сжимаемой жидкости в результате электроразрядного ввода энергии // Электронная обработка материалов.– 2013.– **49**, N 4.– С. 94–99.
23. Шептилевский А. В., Косенков В. М. Пульсации сферической оболочки с жидкостью при вводе энергии в центре // Прикладная гидромеханика.– 2014.– **16**, N 1.– С. 70–77.
24. Шептилевский А. В., Косенков В. М., Селезов И. Т. Трехмерная модель гидроупругой системы, ограниченной сферической оболочкой // Мат. методы и физико-механ. поля.– 2012.– **55**, N 1.– С. 159–167.
25. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Математическая модель динамической системы пузырек-жидкость-сферическая оболочка // 9-ая Междунар. научная конференция “Импульсные процессы в механике сплошных сред”, 2011, Николаев. – С. 29–32.
26. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Гидроупругие колебания сферической оболочки, заполненной жидкостью // Геотехническая механика. – 2012. – Вып. 98. – С. 232–238.
27. Шептилевский А. В., Селезов И. Т., Косенков В. М. Динамическое контактное взаимодействие упругой сферической оболочки и заполняющей ее жидкости с учетом кавитации // Прикладная гидромеханика.– 2013.– **15**, N 2.– С. 73–84.