МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.
Диференціальні рівняння
(Модуль 11)

Завдання та методичні рекомендації

для самостійної роботи

здобувачів вищої освіти ступеня „бакалавр”

спеціальностей

141 “Електроенергетика, електротехніка та

електромеханіка”,

208 "Агроінженерія"

МИКОЛАЇВ

2017

УДК 512:514:517

В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 30.06.2017 р., протокол № 9.

Укладачі:
В. С. Шебанін - д-р техн. наук., професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
О. В. Шебаніна - д-р екон. наук., професор, декан факультету менеджменту, Миколаївський національний аграрний університет;
І. П Атаманюк - д-р техн. наук., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
В. Г. Богза - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Цепуріт - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Богданов - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шептилевський - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
Рецензенти:
В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор,
ректор Миколаївського національного університету
ім. В. О. Сухомлинського;
І. Д Бурковський – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти ІІІ-ІV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 141 - “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”, 208 - "Агроінженерія"

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей,: розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремленими змінними та зі змінними, що відокремлюються..

Тема 2. Диференціальні рівняння 1-го порядку з однорідною функцією.

Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння типу Бернуллі.

Тема 4. Диференціальні рівняння другого порядку, які можна звести до диференціальних рівнянь першого порядку

Тема 5. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

Тема 6. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною.

Тема 7. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами Метод варіації довільних сталих.

Тема 8. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

Практичне заняття 1

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремленими змінними та зі змінними, що відокремлюються

ОзначенняДиференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y':

$$F\left(x,\ y,\ y'\right) = 0 .(1)$$

Розв’язавши рівняння (1) відносно y' (якщо це можливо), приходимо до диференціального рівняння

$$y' = f\left(x,\, y\right), \qquad (2)$$

яке називають розв’язаним відносно похідної.

Розв’язком рівняння (1) або (2) на інтервалі $(a,\, b)$ називають диференційовану на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність при всіх x з інтервалу $(a,\, b)$.

Загальним розв’язком рівняння (1) або (2) називають функцію $y = \varphi(x,\, C)$, яка є розв’язком даного рівняння при будь-якому фіксованому значенні сталої C і для довільної початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв’язок $y = \varphi(x,\, C_0)$ задовольняє початкову умову. Розв’язок $y = \varphi(x,\, C_0)$ називають частинним або розв’язком задачі Коші.

Співвідношення $G(x,\, y,\, C) = 0$, яким загальний розв’язок $y = \varphi(x,\, C)$ рівняння (1) задається неявно, називають загальним інтегралом рівняння (1). При конкретному значенні $C = C_0$ співвідношення $G(x,\ y,\ C_0) = 0$ називають частинним інтегралом.

Найпростіше диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f\left(x\right) \qquad (3)$$

зводиться до обчислення невизначеного інтеграла. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо $\frac{dy}{dx} = f(x)$, або $dy = f(x)dx$. Інтегруємо $\int dy = \int f(x)dx + C$ і отримуємо $y = \int f(x)dx + C$.

Означення. Диференціальні рівняння виду $M(x)dx + N(y)dy = 0$, де $M(x); N(y)$ - деякі функції від змінної x, називаються рівняннями з відокремленими змінними.

Це рівняння розв'язується безпосереднім інтегруванням $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$.

Диференціальні рівняння зі змінними, які можна відокремити

Це рівняння виду $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Для того, щоб звести це рівняння до рівняння з відокремленими змінними треба поділити його на $N_1(y) \cdot M_2(x)$.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

$$M_2(x) \neq 0$$

$$N_1(y) \neq 0$$

Це рівняння можна розв'язати інтегруванням. Рівняння зі змінними, які можна відокремити завжди має особливий розв'язок: $\begin{cases} N_1(y) = 0 \\ M_2(x) = 0 \end{cases}$

Приклади розв'язання

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y' = 8^x$.

$\frac{dy}{dx} = 8^x$, $dy = 8^x\,dx$, $\int dy = \int 8^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв'язок $y = \frac{8^x}{\ln 8} + C$.

2. Знайти розв’язок задачі Коші $y' = \cos x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Спочатку знайдемо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y' = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x, \quad dy = \cos x\, dx,$$

$$\int dy = \int \cos x\, dx, \quad y = \sin x + C$$ – загальний розв’язок.

Тепер знайдемо розв’язок задачі Коші. За умовою задачі $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Тому, підставляючи в загальний розв’язок $y = 3$ та $x = \frac{\pi}{2}$, маємо $3 = \sin\frac{\pi}{2} + C$, $3 = 1 + C$, $C = 3 - 1 = 2$. Підставивши $C = 2$ в загальний розв’язок, знаходимо частинний розв’язок $y = \sin x + 2$.

3. $x + y \cdot y' = 0$

Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то $x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \,\Big|\, \cdot dx$,

$$xdx + ydy = 0,$$

$$\int xdx + \int ydy = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

$x^2 + y^2 = C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

4.

$$\left(1+x^2\right)y\cdot dx+\left(1+y^2\right)x\cdot dy=0$$

$$\frac{1+x^2}{x}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0$$

$$x\neq 0$$

$$y\neq 0$$

Дістали рівняння з відокремленими змінними, яке можна інтегрувати

$$\int\left(\frac{1}{x}+x\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=C$$

$$\ln|x|+\frac{x^2}{2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=C$$

$ln|xy|+\dfrac{x^2+y^2}{2}=C$ - загальний інтеграл диференціального рівняння.

Крім того диференціальне рівняння має особливий розв'язок

$$x=0$$

$$y=0\cdot$$

Завдання для розв'язання

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$1.(1+x^2)dx+y^2dy=0;$ $\quad$ $2.\ y'(3x^2+1)+2xy^2=0;$

$3.y^2dx=e^x dy;$ $\quad$ $4.\ 6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx;$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Перевірити, чи є вказана функція $y=Cx$ розв'язком диференціального рівняння $y'x-y=0$.

2. Перевірити, чи є вказана функція $y=\sin x$ розв'язком диференціального рівняння $y'-y=0$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

3. $x^2y'+y=0$. $\quad$ **4.** $y'=\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y$.

5. $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

6. $y'\left(x^2+1\right) = 2xy$, якщо $y(0)=1$.

7. $y = 2y'\sqrt{x}$, якщо $y(4)=1$.

8. $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$, якщо $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Відповіді:

3. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

4. $\sin y = \frac{C}{\cos x}$.

5. $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

6. $y = x^2 + 1$.

7. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

8. $y = \frac{1}{2}\left(4\sin^2 x - 1\right)$.

Контрольні питання

1. Яке рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Яка функція називається розв’язком диференціального рівняння першого порядку?
3. Який розв’язок диференціального рівняння першого порядку називається загальним і який частинним?
4. Який загальний вигляд диференціального рівняння з відокремленими змінними?
5. Який загальний вигляд диференціального рівняння зі змінними, що можна відокремити?
6. У чому полягає задача Коші?

Практичне заняття 2

Тема 2. *Диференціальні рівняння 1-го порядку з однорідною функцією*

Означення. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією n-ного виміру щодо змінних x і y, якщо при будь-якому t справедлива тотожність

$$f(t\,x,t\,y)=t^{\,n}f(x,y).$$

Якщо $f(t\,x,t\,y)=f(x,y)$, то $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру щодо змінних x і y.

Однорідне диференціальне рівняння має вигляд:

$y'=f(x,y)$, де $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру

Для розв'язання таких рівнянь робиться заміна $y=xu$,

$y'=u+xu'$.

Підставляємо у рівняння і одержуємо:

$xu'+u=f(1,u)$, яке очевидно є рівнянням з відокремленими змінними.

Приклади розв'язання

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$x^2+y^2-2xyy'=0$$

Розв'язання. Надамо рівняння у виді

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}. \qquad (*)$$

Це рівняння є рівнянням з однорідною функцією, оскільки при заміні *x* на *tx* і *y* на *ty* воно не зміниться.

$$y'=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{2(tx)(ty)}=\frac{t^2(x^2+y^2)}{2t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}.$$

Розділимо чисельник та знаменник правої частини рівняння $(*)$ на *xy*, дістанемо

$$y'=\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}.$$

Робимо заміну $\frac{y}{x}=u(x),$ де *u(x)* – нова невідома функція. Тоді $y'=u+xu'$, і рівняння зводиться до виду

$$u+xu'=\frac{1}{2u}+\frac{1}{2}u.$$

В результаті перетворень дістанемо

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2u}.$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні, помноживши обидві частини рівняння на $\frac{2udx}{x(1-u^2)}$:

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, дістанемо

$$\int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{dx}{x},$$

$$-\ln\left|1-u^2\right|=\ln\left|x\right|+\ln c,$$

$$1-u^2=\frac{1}{x}c.$$

Тепер повернемось до змінної *y*, для цього замінимо *u* на $\frac{y}{x}$:

$$\frac{x^2-y^2}{x^2}=\frac{1}{x}c,$$

Отже,

$x^2-y^2=c\,x-$ загальний інтеграл.

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+tg\,\frac{y}{x}.$$

Розв’язання.

Робимо заміну $y=xu$, $y'=u+xu'$, тоді

$$u + xu' = tgu + u,,$$

$$x\frac{du}{dx} = tgu,,$$

$$xdu = tgudx,$$

$$ctgudu = \frac{1}{x}dx,$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln c,$$

$$\sin u = cx$$

$$u = \arcsin(cx),$$

$y = x \cdot \arcsin(cx)$ - загальний інтеграл.

3. $\left(x^2 - xy\right)dy + y^2 dx = 0$.

$$\left(x^2 - xy\right)dy = -y^2 dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{x^2 - xy}, \quad y' = \frac{-y^2}{x^2 - xy}.$$

Права частина рівняння – функція $f\left(x,\ y\right) = \frac{-y^2}{x^2 - xy}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f\left(tx,\ ty\right) = \frac{-\left(ty\right)^2}{\left(tx\right)^2 - txty} = \frac{-t^2 y^2}{t^2\left(x^2 - y^2\right)} = \frac{-y^2}{x^2 - y^2} = f\left(x,\ y\right).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{-u^2x^2}{x^2 - x \cdot ux}, \quad u'x + u = \frac{-u^2x^2}{x^2\left(1-u\right)}, \quad u'x + u = \frac{-u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{-u^2}{1-u} - u, \quad u'x = \frac{-u^2 - u + u^2}{1-u},$$

$$u'x = \frac{-u}{1-u}, \quad u'x = \frac{u}{u-1},$$

$$u' = \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{u-1}{u} \cdot du = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{u-1}{u}du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C, \quad u = \ln C|x| + \ln|u|,$$

$$u = \ln\left(C|xu|\right), \quad \frac{y}{x} = \ln\left(C\left|x \cdot \frac{y}{x}\right|\right), \text{ звідки } y = x \ln C|y|.$$

Завдання для розв'язання

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$1.\ y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2};$ $\qquad 2.\ y' = e^{y/x} + \dfrac{y}{x};$

$3.\ xy + y^2 = (2x^2 + xy)y';$ $\qquad 4.\ (2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0;$

$5^*.\ xy' \sin(y/x) + x = y \sin(y/x).$

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' = \dfrac{y}{x} + 5\cos^2 \dfrac{y}{x}$. $\qquad$ **2.** $y' + \sqrt{4 - \dfrac{y^2}{x^2}} = \dfrac{y}{x}$.

3. $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$. $\qquad$ **4.** $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

5. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$.

6. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$.

Відповіді:

1. $\operatorname{tg} \dfrac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$. $\qquad$ **2.** $\arcsin \dfrac{y}{2x} + \ln C|x| = 0$.

3. $y = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{C}$. $\qquad$ **4.** $\sin \dfrac{y}{x} = Cx$.

5. $y = -x\left(1 + \dfrac{1}{\ln C|x|}\right)$. $\qquad$ **6.** $y = xe^{1-x}$.

Контрольні питання

1. Який загальний вигляд однорідного диференціального рівняння першого порядку?

2. За допомогою якої підстановки вирішується однорідне дифференціальне рівняння першого порядку і до якого рівняння зводиться його рішення?

Практичне заняття 3

Тема 3 *Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння типу Бернуллі*

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку це рівняння лінійне відносно невідомої функції та її похідної

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

де $P(x), Q(x)$ - будь-які функції від x.

Розв'язання. Використовуєтьсятвердження про те, що будь-яку функцію можна надати, як добуток двох функцій одна з яких вибирається довільно.

Надамо шукану функцію у виді $y = u(x)\cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$.

Підставляємо y та y' в вихідне диференціальне рівняння

$$u'v + (uv' + P(x)\cdot uv) = Q(x)$$

$$u'v + u(v' + P(x)\cdot v) = Q(x)$$

Вибираємо функцію $v(x)$ таким чином, щоб вираз в дужках був рівним 0. Тоді дістанемо систему рівнянь:

$$v' + P(x)v = 0$$

$$u'v = Q(x)$$

Розв'яжемо перше з цих рівнянь

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

$$dv = -P(x)vdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx$$

$$\ln v = -\int P(x)dx$$

$$e^{\ln v} = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставимо одержаний виріз в друге рівняння системи $u' \cdot v(x) = Q(x)$.

$$\frac{du}{dx} \cdot v(x) = Q(x)$$

$$v(x)du = Q(x)dx$$

$$du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx$$

$$\int du = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$$

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C$$

Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння

$$y = \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^{\alpha}$ або $y' = -P(x)y + Q(x) \cdot y^{\alpha}$, де функції $P(x)$ та $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b), $\alpha \in R$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$, називається рівнянням Бернуллі.

При $\alpha = 0$ рівняння перетворюється на лінійне диференціальне рівняння $y' + P(x)y = Q(x)$, розглянуте раніше, а при $\alpha = 1$ – в рівняння з відокремлюваними змінними $y' = \left(Q(x) - P(x)\right)y$.

Розв'язок рівняння Бернуллі зручно шукати у вигляді $y = u \cdot v$.

Приклади розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0. \qquad (**)$$

Знаходимо v:

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x|,$$

$\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння $(**)$, то тут і надалі у методі Бернуллі, після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u : $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \dfrac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad du = 2x\,dx, \quad \int du = \int 2x\,dx, \quad u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C, \quad u = x^2 + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$.

2. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,$$

$$u'v + u\left(v' + v\,\mathrm{tg}\,x\right) = \cos^2 x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x, \quad \frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx,$$

$\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u : $u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$,

$\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$, $\int du = \int \cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

Маємо $y = uv = \left(\sin x + C\right)\cos x$

3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = -\ln|x|$, $\ln|v| = \ln\frac{1}{|x|}$,

звідки $v = \frac{1}{x}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$, $u' = \frac{\sin 2x}{x} \cdot x$,

$\frac{du}{dx} = \sin 2x$, $du = \sin 2x\,dx$, $\int du = \int \sin 2x\,dx$, звідки $u = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$.

Маємо $y = uv = \left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\frac{1}{x}$.

4. $xy' - y = x^2 \cos x$.

Задане рівняння запишемо як $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$. Отже, це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x\cos x,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = x\cos x. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, звідки $v = x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$u'x = x\cos x$, $u' = x\cos x \cdot \dfrac{1}{x}$,

$\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$, $\int du = \int \cos x\,dx$, $u = \sin x + C$.

Маємо $y = uv = (\sin x + C)x$.

5. $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$.

$y' + \dfrac{5xy}{x^2} = -\dfrac{4}{x^2}$, $y' + \dfrac{5y}{x} = -\dfrac{4}{x^2}$, і, отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2},$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \dfrac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{5v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = -5\dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dv}{v} = -5\int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = -5\ln|x|$,

$\ln|v| = \ln\dfrac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \dfrac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \dfrac{1}{x^5} = -\dfrac{4}{x^2}$, $u' = -\dfrac{4}{x^2} \cdot x^5$,

$\dfrac{du}{dx} = -4x^3$

$du = -4x^3 dx$, $\int du = -4\int x^3 dx$, $u = -4 \cdot \dfrac{x^4}{4} + C$, $u = -x^4 + C$.

Отже, $y = uv = \dfrac{C - x^4}{x^5}$.

6. $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y(0) = 2$.

Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+1}uv = x\sqrt{x^2+1},$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{x^2+1}v\right) = x\sqrt{x^2+1}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' - \frac{2xv}{x^2+1} = 0$. Знаходимо v:

$\frac{dv}{dx} = \frac{2xv}{x^2+1}$, $\quad \frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+1}dx$, $\quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^2+1}dx$, $\quad \ln|v| = \ln\left|x^2+1\right|$,
$v = x^2+1$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\quad u'\left(x^2+1\right) = x\sqrt{x^2+1}$,

$u' = x\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}$, $\quad \frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\quad du = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$,

$\int du = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, $\quad u = \sqrt{x^2+1} + C$.

Отже, $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right)\cdot\left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1+C)\cdot 1$, $C = 1$. Отже, частинний розв'язок

$y = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right)$, $\quad y = \left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1$,

або $y = \sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + x^2 + 1$.

7. $x^2y^2\dfrac{dy}{dx}+xy^3=a^2$ (a – стала). $x^2y^2y'+xy^3=a^2$,

$y^2y'+\dfrac{xy^3}{x^2}=\dfrac{a^2}{x^2}$, $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$.

$$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}, \qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\dfrac{v}{x}=0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},\ \ln|v|=-\ln|x|,\ v=\frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{x^2\cdot u^2\,\frac{1}{x^2}}$, $\dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{a^2}{u^2}$, $u^2du=a^2xdx$,

$$\int u^2du=a^2\int x\,dx,\ \frac{u^3}{3}=a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right),\ u=\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}.$$

$$y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)},\ \text{або}\ \ y^3=\frac{3}{2}\frac{a^2}{x}+\frac{C}{x^3}.$$

8. $y'+xy=3xy^3$.

Це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

$$u'v+uv'+xuv=3x(uv)^3,$$

$$u'v+u\left(v'+xv\right)=3x\cdot(vu)^3. \qquad (*)$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+xv=0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx}=-xv,\ \frac{dv}{v}=-xdx,\ \int\frac{dv}{v}=-\int xdx,\ \ln|v|=-\frac{x^2}{2},\ v=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи v в рівняння $(*)$, отримуємо рівняння для знаходження u : $u' e^{-\frac{x^2}{2}} = 3xu^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^3$, $\frac{du}{dx} = 3xe^{-x^2}u^3$;

$$\frac{du}{u^3} = 3xe^{-x^2}dx, \quad \int\frac{du}{u^3} = 3\int xe^{-x^2}dx.$$

1) $\int\frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C$;

2) $\int xe^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} t = -x^2 \\ dt = -2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

Отже, $\frac{1}{u^2} = \frac{3}{e^{x^2}} + C$, $\frac{1}{u^2} = 3e^{-x^2} + C$, $u^2 = \frac{e^{x^2}}{3 + Ce^{x^2}}$,

$$u = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}.$$

$$y = uv = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ або } y = \pm\frac{1}{\sqrt{3 + Ce^{x^2}}}.$$

Завдання для розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$, якщо $y(0) = 0$.

2. $(1 - x^2)y' + xy = 1$, якщо $y(0) = 1$.

3. $y' - y = e^x$. **4.** $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

5. $y' + \frac{2y}{x} = y^2x$. **6.** $y' + 2xy = 2y^3x^3$.

.

Завдання для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin x$. **2.** $\left(x^2+1\right)y' + 4xy = 3$.

3. $y' - y = e^x$. **4.** $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

5. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, якщо $y(0) = 0$.

6. $\left(1-x^2\right)y' + xy = 1$, якщо $y(0) = 1$.

Відповіді:

1. $y = (C+x)\sin x$. **2.** $y = \dfrac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

3. $y = e^x\left(C+x\right)$. **4.** $y = \left(\dfrac{x^2}{2}+C\right)\cdot\ln x$.

5. $y = \dfrac{x}{\cos x}$. **6.** $y = x + \sqrt{1-x^2}$.

Розв'язати диференціальні рівняння:

7. $y' - \dfrac{1}{x}y = -y^2$. **8.** $y' + \dfrac{2y}{x} = y^2 x$.

9. $y' + 2xy = 2y^3x^3$.

Відповіді:

7. $y = \dfrac{2x}{x^2+C}$. **8.** $y = \dfrac{-1}{x^2\ln C|x|}$.**9.** $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

Примітка. При розв'язанні диференціальних рівнянь першого порядку найпершим (і принциповим) кроком є визначення типу рівняння. Від цього у великій мірі залежить можливість розв'язання диференціального рівняння. Тому слід запам'ятати основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, які класифіковано у наступній таблиці:

№ п/п	*Вид рівняння*	*Назва диференціального рівняння*
I	$y' = f(x)$	Найпростіше рівняння
II	$y' = f(x)\cdot g(y)$	Рівняння з відокремлюваними змінними
III	$y' = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру	Однорідне рівняння
IV	$y' = -P(x)y + Q(x)$	Лінійне рівняння
V	$y' = -P(x)y + Q(x)y^{\alpha}$	Рівняння Бернуллі

Зручно звести диференціальне рівняння першого порядку до виду $y' = f(x, y)$, а потім за даною класифікацією визначити тип рівняння і тільки після цього розв'язувати його відповідним методом.

Контрольні питання

1. Назвіть відомі вам типи диференціальних рівнянь 1-го порядку.

2. Який загальний вигляд лінійного диференціального рівняння першого порядку?

3. За допомогою якої підстановки вирішується лінійне диференціальне рівняння першого порядку і до якого рівняння зводиться його рішення?

4. Яке рівняння називається рівнянням Бернуллі?

5. Як перевірити, чи правильно знайдено розв'язок диференціального рівняння ?

Практичне заняття 4

Тема 4.*Диференціальні рівняння другого порядку, які можна звести до диференціальних рівнянь першого порядку*

1. Нехай задане рівняння $y'' = f(x)$. (1)
Його порядок можна знизити, ввівши нову функцію p(x), припустивши що $y' = p(x)$. Тоді отримуємо диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язавши його, тобто знайшовши функцію $p = p(x)$, розв'яжемо рівняння $y' = p(x)$. Таким чином, отримаємо загальний розв'язок рівняння (1).
На практиці роблять інакше: порядок знижується безпосередньо шляхом послідовного інтегрування рівняння.

Оскільки $y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx}$, то рівняння (1) можна записати у вигляді. $dy' = f(x)dx$. Тоді, інтегруючи рівняння $y'' = f(x)$, отримуємо: $y' = \int f(x)dx$, або $\varphi_1(x) + c_1$. Далі, інтегруючи отримане рівняння по *x*, знаходимо $y = \int (\varphi_1(x) + c_1)dx$, тобто $y = \varphi_2(x) + c_1 x + c_2$ - загальний розв'язок заданого рівняння.

. **2.** Нехай задане рівняння $y'' = f(x; y')$, (2)
яке не містить явно шуканої функції *y*.
Позначимо $y' = p$, де $p = p(x)$ - нова невідома функція. Тоді

$y'' = p'$ і рівняння (2) набуває вигляду $p' = f(x; p)$. Нехай $p = \varphi(x; c_1)$ - загальний розв'язок отриманого диференціального рівняння першого порядку. Замінюючи функцію p на y', отримуємо диференціальне рівняння $y' = \varphi(x; c_1)$. Воно має вигляд (1). Для відшукання у необхідно проінтегрувати останнє рівняння. Загальний розв'язок рівняння (2) буде мати вигляд $y = \int \varphi(x; c_1)dx + c_2$. .
Окремим випадком рівняння (2) є рівняння $y'' = f(y')$ (3), яке не містить також і незалежну змінну *x*. Воно

інтегрується тим же самим способом: $y' = p(x),\ y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}.$

Отримуємо рівняння $p' = f(p)$ з відокремлюваними змінними.

3. Розглянемо рівняння $y'' = f(y; y')$ (5) ,
яке не містить явно незалежної змінної *x*.
Для зниження порядку рівняння введемо нову функцію $p = p(y)$, що залежить від змінної *y*, вважаючи, що $y' = p$. Диференціюючи цю рівність по *x*, ураховуючи, що $p = p(y(x))$, маємо

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

тобто $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}.$

Тепер рівняння (5) запишеться у вигляді $p \cdot \dfrac{dp}{dy} = f(y; p)$. Нехай $p = \varphi(y; c_1)$ є спільним розв'язком цього диференціального рівняння першого порядку. Замінюючи функцію $p(y)$ на y', отримаємо $y' = \varphi(y; c_1)$ - диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Інтегруючи його, знаходимо загальний інтеграл рівняння (5):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; c_1)} = x + c_2$$

Окремим випадком рівняння (5) є рівняння вигляду $y'' = f(y)$. Таке рівняння розв'язується за допомогою аналогічної заміни: $y' = p(y),\ y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$.

Приклади розв'язання

1. Розв'язати рівняння $y^{IV} = \sin 2x$.

Розв'язання: Послідовно інтегруючи чотири рази задане рівняння, отримаємо:

$$y^{\prime\prime\prime} = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c_1,$$

$$y^{\prime\prime} = \int -\frac{1}{2}\cos 2x dx + \int c_1 dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + c_1 x + c_2,$$

$$y^{\prime} = \frac{1}{8}\cos 2x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3,$$

$$y = \frac{1}{16}\sin 2x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

2. Розв'язати рівняння. $y^{\prime\prime} - \dfrac{y^{\prime}}{x} = 0$.

Розв'язання: Вважаємо, що $y^{\prime} = p$, де $p = p(x),\ y^{\prime\prime} = p^{\prime}$.

Тоді. $p^{\prime} - \dfrac{p}{x} = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p}{x},\ \dfrac{dp}{p} = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи його, отримаємо $\ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1|,\ \ln|p| = \ln|c_1 x|,\ p = c_1 x.$ Повертаючись до змінної x, отримаємо $y^{\prime} = c_1 x$, $y = c_1\dfrac{x^2}{2} + c_2$ - загальний розв'язок рівняння.

3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y^{\prime\prime} - (y^{\prime})^2 + y^{\prime}(y-1) = 0$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 2,\ y^{\prime}(0) = 2.$
Розв'язання: Рівняння має вигляд (5). Припустивши $y^{\prime} = p(y),\ y^{\prime\prime} = p\cdot\dfrac{dp}{dy}$, отримаємо $p\cdot\dfrac{dp}{dy} - p^2 + p(y-1) = 0$.

Оскільки $p \neq 0$ (інакше $y^{\prime} = 0$, що суперечить початковій умові $y^{\prime} = 2$), то $\dfrac{dp}{dy} - p + y - 1 = 0$ - отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку.
Розв'яжемо це рівняння методом Бернуллі. Вважаємо, що $p = u\cdot\upsilon$.

Маємо: $u'\upsilon + u\upsilon' - u\upsilon + y - 1 = 0$, або $u'\upsilon + u(\upsilon' - \upsilon) = 1 - y$.

Підберемо функцію υ так, що $\upsilon' - \upsilon = 0$. Тоді $\dfrac{d\upsilon}{\upsilon} = dy, \upsilon = e^{y}$.
Отримаємо $\upsilon' \cdot e^{y} + \upsilon \cdot 0 = 1 - y$, тобто $du = (1 - y) \cdot e^{-y} dy$.
Інтегруючи цю рівність, знаходимо, що $u = -(1 - y) \cdot e^{-y} + e^{-y} + c_1$.
Отже, $p = u\upsilon = ((-1 + y)e^{-y} + e^{-y} + c_1) \cdot e^{+y}$,
або $p = c_1 e^{y} + y$. Замінюючи p на y', отримаємо $y' = c_1 \cdot e^{y} + y$.
Підставляючи $y' = 2$ і $y = 2$ в цю рівність, знаходимо c_1:
$2 = c_1 e^{2} + 2, c_1 = 0$.

Маємо $y' = y$. Звідси $y = c_2 e^{x}$. Знаходимо c_2 з початкових умов: $2 = c_2 e^{0}$, $c_2 = 2$. Таким чином, $y = 2e^{x}$ - частинний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Завдання для розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$.

2. $yy'' - (y')^2 - y^2 y' = 0$

3. $3yy'' + (y')^2 = 0$.

4. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$.

Відповіді:

1. $y = \sqrt{x^3} + 2$.

2. $\dfrac{y}{y + C_1} = e^{C_1(x + C_2)}$.

3. $y = (C_1 x + C_2)^{\frac{3}{4}}$.

4. $y = \dfrac{x^4}{16} + C_1 \ln x + C_2$.

Завдання для самостійного розв’язання

1. $y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$.

2. $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}$.

3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Відповіді:

1. $y = 4x^6 + 2x^2 - 25x + 9$. **2.** $y = \arcsin x + C_1 x + C_2$.

3. $y = -\ln\left|\cos x\right| + C_1 x + C_2$.

Розв’язати диференціальні рівняння:

1. $2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$.

2. $yy'' - \left(y'\right)^2 - y^2 y' = 0$.

3. $3yy'' + \left(y'\right)^2 = 0$. **4.** $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$.

Відповіді:

1. $y = \sqrt{x^3} + 2$. **2.** $\dfrac{y}{y + C_1} = e^{C_1\left(x + C_2\right)}$.

3. $y = \left(C_1 x + C_2\right)^{\frac{3}{4}}$. **4.** $y = \dfrac{x^4}{16} + C_1 \ln x + C_2$.

Практичне заняття 5

Тема 5.*Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами*

Нехай дано диференціальне рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (1)

Де p і q – сталі числа. Для того, щоб знайти його загальний розв'язок, треба знайти два лінійно незалежні частинні розв'язки цього рівняння y_1 і y_2 та підставити в формулу $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Частинні розв'язки цього рівняння шукають у вигляді $y = e^{kx}$. Для того, щоб знайти k в цій формулі знайдемо першу і другу похідні та підставимо y, y', y'' в диференційне рівняння (1)

$y' = ke^{kx}$ $y'' = k^2 e^{kx}$

$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$

$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$

$e^{kx} > 0$

Отже $k^2 + pk + q = 0$ (2)

Алгебраїчне рівняння (2) називається характеристичним і є квадратним рівнянням, яке має два кореня.

$$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Можливі три випадки**:**

1) $D > 0$. Маємо два дійсних різних кореня $k_1 \neq k_2$. Тоді розв'язками рівняння (1) будуть $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$

Загальний розв'язок має вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

Отже, корені k_1 і k_2 дійсні, кратні.

Один з розв'язків диференціального рівняння (1) має вид $y_1 = e^{k_1 x} = e^{-\frac{p}{2}x}$. В цьому випадку другим розв'язком є $y_2 = xe^{k_1 x}$ або $y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}$

Загальний розв'язок має вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

2) $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$

Тоді маємо два корені

$k_1 = \alpha - \beta i$, $k_2 = \alpha + \beta i$,

$$\alpha = -\frac{p}{2} \;,\; \beta i = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)(-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \cdot i$$

$$\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Загальний розв’язок диференціального рівняння (1) в цьому випадку має вид

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

Приклади розв’язання

Розв’язати диференціальні рівняння.

1. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Запишемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв’яжемо його: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1$ і $k_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Загальний розв’язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$.

2. $y'' + 8y' + 16y = 0$. Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k + 4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв’язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3. $y'' + 2y' + 10y = 0$. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$, $k_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

4. $y'' + 25y = 0$.

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 25 = 0$. Розв'язуємо його: $k^2 = -25$, $k = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$. Тоді $k_1 = -5i$, а $k_2 = 5i$. Маємо третій випадок. При цьому $\alpha = 0$, $\beta = 5$. Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

5. $y'' - 2y' + 1 = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння має вигляд $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = 1$ дійсні та рівні. Тоді за формулою (33) записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(e^x (C_1 + C_2 x)\right)' = \left(e^x\right)'(C_1 + C_2 x) + e^x \cdot (C_1 + C_2 x)' =$$

$$= e^x (C_1 + C_2 x) + e^x \cdot C_2 = e^x (C_1 + C_2 x + C_2),$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^x (2 + 5x)$.

6. $y'' - y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$.

Характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має дійсні корені $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$. Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$. Знайдемо похідну загального розв'язку: $y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$. Підставляємо умови Коші і отримаємо систему

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ -2(3 - C_2) + 3C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ 5C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-2x} + 2e^{3x}$.

8. $y'' - 16y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k - 4)(k + 4) = 0$ має дійсні корені $k_1 = -4$ і $k_2 = 4$. Тоді за формулою (32) записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$. ⌋

9. $y'' - 4y' + 5y = 0$. Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 5 = 0$. Розв'язуємо його: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. Тоді:,

$$k_1 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i \quad k_2 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha = 2$ і $\beta = 1$. Загальний розв'язок рівняння: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Завдання для розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $y'' - 9y' = 0$.

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$.

3. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

4. $y'' + 6y' + 34y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

5. $y'' - 12y' + 36y = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$.

6. $y'' + 5y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$.

7. $y'' + 4y = 0;\ y' = 2,\ y = 1$ при $x = 0.$

Відповіді:

1. $y = C_1 + C_2 e^{9x}$. **2.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

3. $y = e^{2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right)$. **4.** $y = e^{-3x}\left(3\cos 5x + 2\sin 5x\right)$.

Завдання для самостійного розв'язання

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$ **2.** $y'' - y = 0.$

3. $y'' - 4y' + 3y = 0.$ **4.** $y'' - y' - 2y = 0.$

5. $y'' + 6y' + 5y = 0.$ **6.** $y'' - 5y' + 4y = 0.$

7. $y'' + 2y' - 2y = 0.$ **8.** $y'' - 2y' - 3y = 0.$

9. $6y'' + 7y' + 2y = 0.$ **10.** $3y'' + 5y' - 2y = 0.$

11. $y'' - 2y' + y = 0.$

12. $y'' + 2y' + y = 0.$ **13.** $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

14. $y'' + y = 0;\ y' = 1,\ y = 0$ при $x = 0.$

15. $y'' + 4y = 0;\ y' = 2,\ y = 1$ при $x = 0.$

16. $y'' + 4y' + 8y = 0;\ y' = 0,\ y = 1$ при $x = 0.$

Контрольні питання

1. Як визначається і записується в загальному вигляді лінійне диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами?
2. Що таке характеристичне рівняння?
3. Який вид має загальне рішення лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння :

а) дійсні і різні($k_2 \neq k_1$);

б) дійсні і рівні($k_2 = k_1 = k$);

в) комплексні спряжені($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$)?

Практичне заняття 6

Тема 6.*Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною*

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

Нехай дано диференціальне рівняння виду $y'' + py' + qy = f(x)$ (1), $f(x) \neq 0$ $p, q -$ сталі числа.

Структура загального розв'язку цього диференціального рівняння визначається за теоремою 1.

Теорема 1. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння 1 є сумою загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (2)та

будь-якого частинного розв'язку y^* диференціального рівняння (1).

Теорема 2. Якщо надано рівняння (3) $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$, то його частинний розв'язок y^* можна знайти як суму $y^* = y_1^* + y_2^*$ де y_1^* - частинний розв'язок диференціального рівняння

(4) $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а y_2^* - частинний розв'язок диференціального рівняння

(5) $y'' + py' + qy = f_2(x)$

Знаходження частинногорозв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною

Нехай надано рівняння виду $y'' + py' + qy = f(x)$ (1)

Частинний розв'язок y^* цього рівняння можна знайти за видом правої частини.

I. Нехай права частина рівняння має вигляд $f(x) =$ P EMBED Equation.3 , де $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$. Тоді можливі такі випадки:

1). Число α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Тобто, якщо характеристичне рівняння $k^2 + pk + qk = 0$ має корені k_1, k_2 то $\alpha \neq k_1$; $\alpha \neq k_2$. В цьому випадку частинний розв'язок y^* слід шукати у виді $y^* = q_n(x)e^{2x}$, де $q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + ... + A_{n-1}x + A_n$, де $A_0, A_1, A_2.....A_n$ - невідомі коефіцієнти, які можна знайти після підстановки $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в рівняння (1)

2) Нехай α - є коренем характерного рівняння. Причому корені диференціального рівняння різні. Тобто $\alpha = k_1$ або $\alpha = k_2$, тоді

y^* шукають у виді $y^* = xQ_n(x)e^{\alpha x}$

3) Якщо характеристичне рівняння має кратні корені $k_1 = k_2$, які дорівнюють α, то частинний розв'язок шукаємо у виді $y^* = x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$

II. Нехай права частина рівняння (1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$$

1). Нехай число $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння. Тоді частинний розв'язок шукають у виді $y^* = u_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

2). Якщо рівняння має корені $\alpha \pm \beta i,$

$y^* = x(u_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + v_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x)$

Нехай права частина рівняння (1) має вид $f(x) = M\cos\beta \cdot x + N\sin\beta \cdot x$, де M, N – деякі числа, тоді можливі 2 випадки***:***

1. Число βi , не є коренем рівняння, тоді частинний розв'язок слід шукати у виді $y^* = A\cos\beta x + B\sin\beta x$, де A і B – невизначені коефіцієнти.

2.Якщо βi є коренем рівняння, то частинний розв'язок має вигляд $y^* = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Приклади розв'язання

Знаходження загального розв'язку рівняння

1. $y'' + y = e^{2x}(x+1)$.

Розв'язання.

Запишемо відповідне однорідне рівняння:

$$y'' + y = 0$$

та складемо його характеристичне рівняння:

$\lambda^2 + 1 = 0$,

коренями якого є $\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm \beta = 0 \pm 1i$.

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння при $\alpha = 0,\ \beta = 1$ має вигляд:

$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Із вигляду правої частини $f(x)=e^{2x}(x+1)$ встановлюємо, що $a=1,\ P_1(x)=x+1$, та впевнюємося, що $a=2$ не буде коренем характеристичного рівняння.

Отже, частинний розв'язок слід шукати за формулою у вигляді

$$y^*=e^{2x}(Ax+B),$$

де многочлен $S_1(x)=Ax+B$ того ж степеня, що і многочлен $P_1(x)=x+1$, але із невизначеними коефіцієнтами. Для визначення коефіцієнтів A та B підставимо цей розв'язок у рівняння і зведемо подібні члени:

$$e^{2x}\left(4Ax+4B+4A\right)+e^{2x}\left(Ax+B\right)=e^{2x}\left(x+1\right).$$

Дістанемо:

$$5Ax+5B+4A=x+1\ .$$

Із рівності цих многочленів складемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 5A=1; \\ x^0 & 5B+4A=1. \end{array}$$

Розв'язавши її, знайдемо, що $A=\dfrac{1}{5};\ B=\dfrac{1}{25}.$ Отже, частинний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y^*=e^{2x}\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

Загальний розв'язок рівняння буде таким:

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

2.

$$y''+2y'+2y=e^x\sin x\ .$$

Розв'язання.

Відповідне однорідне рівняння

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

має таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 .$$

Його коренями є $\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\beta = 1 \pm i$, а отже, загальний розв'язок однорідного рівняння такий:

$$\bar{y} = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Із вигляду правої частини $f(x) = e^x \sin x$ знаходимо, що $a = 1;\ b = 1;$ $P = 0;\ Q = 1.$ У цьому разі коренями характеристичного рівняння будуть $a \pm bi = 1 \pm i$, а тому частинний розв'язок y^* шукаємо за формулою:

$$y^* = xe^x(A\cos x + B\sin x).$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A та B підставляємо у неоднорідне рівняння розв'язок y^* і дістаємо таку рівність:

$$\begin{aligned} &e^x((2Bx + 2A + 2B)\cos x + (-2Ax + 2B - 2A)\sin x) - \\ &- 2e^x((Ax + Bx + A)\cos x + (Bx - Ax + B)\sin x) + \\ &+ 2xe^x(A\cos x + B\sin x) = e^x \sin x. \end{aligned}$$

Після скорочення на $e^x \neq 0$ та зведення подібних членів прирівняємо коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях у лівій та правій частинах цієї рівності. Тоді дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 2B = 0; \\ \sin x & -2A = 1 \end{array}\Bigg\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = 0; \\ A = -\dfrac{1}{2} \end{array}\Bigg\}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде таким:

$$y^* = xe^x\left(-\frac{1}{2}\cos x\right),$$

а загальний розв'язок набуде вигляду:

$$y = \overline{y} + y^* = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) - \frac{x}{2} e^x \cos x .$$

3. Знаходження частинного розв'язку рівняння

$$y'' - 2y' + y = e^x(2x+1).$$

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння для відповідного даному однорідного рівняння:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

За виглядом правої частини неоднорідного рівняння $f(x) = e^x(2x+1)$ встановлюємо, що $a = 1$, $P_1(x) = 2x+1$ — многочлен першого порядку. Зауважимо, що $a = 1$ збігається з обома коренями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y^* = x^2 e^x (Ax + B).$$

Після підстановки цього розв'язку у неоднорідне рівняння дістанемо таку рівність:

$$\begin{aligned}
&e^x\left(Ax^3 + 6Ax^2 + Bx^2 + 4Bx + 6Ax + 2B\right) - \\
&- 2e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx\right) + \\
&+ e^x\left(Ax^3 + Bx^2\right) = e^x(2x+1).
\end{aligned}$$

Після скорочення на $e^x \neq 0$ та зведення подібних членів маємо рівність таких многочленів:

$$x(6B + 6A) + 2B = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 6B + 6A = 2; \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{2}; \\ A = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y^* = x^2 e^x \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \right).$$

Завдання для розв’язання

Знайти загальні розв’язки рівнянь:

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 6x + 6.$ **2.** $y'' + y' = e^x (2x + 3).$

3. $y'' - y' = e^x (4x + 2).$ **4.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x + 1).$

5. $y'' - 2y' + y = e^x (6x + 6).$ **6.** $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 2 - e^x.$

7. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(6x + 2).$ **8.** $y'' + y' - 2y = e^{-2x}.$

Завдання для самостійного розв’язання

1.$y'' + y = \cos x;$ 2.$y'' + y = x \sin x;$

3.$y'' - 2y' + y = e^{2x};$ 4.$y'' - 4y = 8x^3;$

5.$y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x.$

1.$y'' - 3y' + 2y = e^x;$ 2.$y'' + 3y' = 9x;$

3.$y'' + 4y' = \sin x;$ 4.$y'' - 9y = e^{3x} \cos x;$

5.$y'' + y' - 2y = 6x^2.$

Практичне заняття 7

Тема 7 *Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами Метод варіації довільних сталих*

Метод варіації довільних сталих є універсальним методом, який дає змогу розв'язувати неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами з довільною правою частиною $f(x)$.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння буде функція

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

де $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння, а $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції, що визначаються з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Приклади розв'язання

1. Проінтегрувати рівняння $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x.$

Корені характеристичного рівняння $k^2 + 1 = 0$ комплексні спряжені: $k_{1,2} = \pm i,$ звідси загальним розв'язком однорідного рівняння є $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$

Оскільки для даного прикладу $y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x;\ y_1' = -\sin x,$ $y_2' = \cos x,$ то:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

Із цієї системи знайдемо функції $C_1'(x), C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg}^2 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\sin^3 x}{\cos^2 x},\ C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg}^2 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)dx}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + C_2.$$

Підставивши знайдені значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$, отримаємо загальний розв'язок даного диференціального рівняння:

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left[-\sin x + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C_2\right]\sin x,$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

Завдання для розв'язання

Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих:

1. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$. **2.** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3. $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. **4.** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

5. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2 x}$. **6.** $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

7. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. **8.** $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\cos x}$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$. **2.** $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

3. $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$. **4.** $y'' - y' = e^{2x}\sin\left(e^x\right)$.

Контрольні питання

1. У яких випадках, розв'язуючи неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами, застосовують метод варіації довільних сталих?
2. Наведіть алгоритм методу варіації довільних сталих

Практичне заняття 8

Тема 8. Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Якщо ліва частина диференціального рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy\,,$$

і, таким чином, рівняння приймає вигляд $du(x, y) = 0,$ то рівняння називається рівнянням вповних диференціалах. Звідси вираз

$$u(x, y) = C$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння.

Критерієм того, що рівняння є рівнянням в повних диференціалах, тобто необхідною та достатньою умовою, є виконання рівності

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Нехай маємо рівняння в повних диференціалах. Тоді

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Звідси $u(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y),$ де $\phi(y)$ - невідома функція. Для її визначення продиференціюємо співвідношення по y і прирівняємо $N(x,y)$.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y).$$

Звідси

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy.$$

Остаточно, загальний інтеграл має вигляд

$$\int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy = C.$$

Як відомо з математичного аналізу, якщо відомий повний диференціал

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

то $u(x,y)$ можна визначити, взявши криволінійний інтеграл по довільному контуру, що з'єднує фіксовану точку (x_0, y_0) і точку із змінними координатами (x,y). Більш зручно брати криву,

що складається із двох відрізків прямих. В цьому випадку криволінійний інтеграл розпадається на два простих інтеграла

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy =$$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(x,y_0)dx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(x,y)dy =$$

$$= \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy.$$

В цьому випадку одразу одержуємо розв'язок задачі Коші.

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y_0)dy = 0.$$

Множник, що інтегрує

В деяких випадках рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

не є рівнянням в повних диференціалах, але існує функція $\mu = \mu(x,y)$ така, що рівняння

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

вже буде рівнянням в повних диференціалах. Необхідною та достатньою умовою цього є рівність

$$,\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y)$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким чином замість звичайного диференціального рівняння відносно функції $y(x)$ одержимо диференціальне рівняння в частинних похідних відносно функції $\mu(x,y)$. Задача інтегрування його значно спрощується, якщо відомо в якому вигляді шукати функцію $\mu(x,y)$, наприклад $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ - відома функція. В цьому випадку одержуємо

$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}, \ \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}.$ Після підстановки в рівняння маємо

$$\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

або

$$\frac{d\mu}{d\omega}\left[N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right] = \mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right].$$

Розділимо змінні

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}d\omega.$$

Проінтегрувавши і поклавши сталу інтегрування одиницею, одержимо:

$$\mu(\omega(x,y)) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} d\omega \right\}.$$

Розглянемо частинні випадки.

1) Нехай $\omega(x,y) = x$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0,\ d\omega = dx.$

І формула має вигляд

$$\mu(x) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} dx \right\}.$$

2) Нехай $\omega(x,y) = y$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = 0,\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 1,\ d\omega = dy.$

І формула має вигляд

$$\mu(y) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy \right\}$$

3) Нехай $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$.Тоді

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial \omega}{\partial y} = \pm 2y,\ d\omega = d(x^2 \pm y^2).$$

І формула має вигляд

$$\mu(x,y) = \exp\left\{ \int \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN \pm 2yM} d(x^2 \pm y^2) \right\}.$$

4) Нехай $\omega(x,y) = xy$. Тоді $\dfrac{\partial \omega}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = x,\ d\omega = d(xy).$

І формула має вигляд

$$\mu(x,y)=\exp\left\{\int\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}d(xy)\right\}.$$

Приклади розв'язання

1. Розв'язати рівняння

$$(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0.$$

Розв'язок. Перевіримо, що це рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Обчислимо

$\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y)=3x^2$, $\dfrac{\partial}{dy}(x^3-3y^2)=3x^2$. Таким чином існує функція $u(x,y)$, що $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x+3x^2y$. Проінтегруємо по x. Отримаємо

$$u(x,y)=\int(2x+3x^2y)dx+\Phi(y)=x^2+x^3y+\Phi(y).$$

Для знаходження функції $\Phi(y)$ візьмемо похідну від $u(x,y)$ по y і прирівняємо до x^3-3y^2. Отримаємо

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x^3+\Phi'(y)=x^3-3y^2.$$

Звідси $\Phi'(y)=-3y^2$ і $\Phi(y)=-y^3$. Таким чином, $u(x,y)=x^2+x^3y-y^3$ і загальний інтеграл диференціального рівняння має вигляд $x^2+x^3y-y^3=C$.

Розв'язати диференційне рівняння

$$(x^3+y)dx+\left(x-y\right)dy=0. \qquad M=x^3+y, \qquad N=x-y.$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}=1.$ Використовуємо формулу при $x_0=y_0=0.$

Знайдемо $\int\limits_0^x \left(x^3 + y\right)dx + \int\limits_0^y (0 - y)dy = c.$ Отже, $\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = c$ - загальний інтеграл.

Цей розв’язок буде єдиний .

Завдання для розв’язання

Розв’язати рівняння

1. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$;

2. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$;

3. $(y - \frac{ay}{x} + x)dx + ady = 0,\ \mu = \mu(x + y)$;

.4. $(x^2 + y)dy + x(1 - y)dx = 0,\ \mu = \mu(xy)$;

Завдання для самостійного розв’язання

1. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$;

2. $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$;

3. $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0$;

4. $(2x^2 y^2 + y)dx + (x^3 y - x)dy = 0$.

Завдання для виконання контрольної роботи

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння або розв’язати задачу Коші:

Варіант № 1

1. $14xdx - 13ydy = 13x^2 ydy - 12xy^2 dx$;

2. $y' = \frac{x + 2y}{x - 2y}$;

3. $y' - \operatorname{ctg} xy = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

4. $y'' + 3y' = 2x^3$.

Варіант № 2

1. $x\sqrt{16+y^2} + yy'\sqrt{16+x^2} = 0$;

2. $xy' = \frac{13y^3 + 12yx^2}{12y^2 + x^2}$;

3. $y' - \operatorname{ctg} xy = 2x\sin x, \quad y\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$;

4. $y'' - 4y' - 5y = x^2 e^{-x}$.

Варіант № 3

1. $\sqrt{49+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$;

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 14\frac{y}{x} + 12$;

3. $y' - \operatorname{ctg} xy = 3x^2 \sin x, \quad y\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right) = 0$;

4. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

Варіант № 4

1. $\sqrt{36+y^2}\,dx - ydy = x^2 ydy$;

2. $xy' = \sqrt{x^2 + 2y^2} + y$;

3. $y' - \operatorname{ctg} xy = \sin x \ln x, \quad y(1) = \sin 1$;

4. $4y'' - 8y' + 5y = 3x - 1$.

Варіант № 5

1. $16xdx - 16ydy = 12x^2 ydy - 13xy^2 dx$;

2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 26\frac{y}{x} + 23;$

3. $y' - \operatorname{ctg} xy = -\sin^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2};$

4. $2y'' + 5y' = x\sin x.$

Варіант № 6

1. $x\sqrt{13+y^2}\,dx + y\sqrt{13+x^2}\,dy = 0;$

2. $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + x^2};$

3. $y' + \frac{y}{2x} = \sqrt{x}, \quad y(3) = 0;$

4. $y'' - 4y' + 4y = 1.$

Варіант № 7

1. $(e^{2x} + 15)dy + ye^{2x}dx = 0;$

2. $y' = \frac{2x + 22y}{22x - y};$

3. $y' + \frac{y}{2x} = 2x\sqrt{x}, \quad y(2) = 0;$

4. $y'' - 3y' - 10y = 2xe^{5x}.$

Варіант № 8

1. $yy'\sqrt{25 + x^2} + \sqrt{25 - y^2} = 0;$

2. $xy' = 22\sqrt{x^2 + y^2} + y;$

3. $y' + \frac{y}{2x} = 3x^2\sqrt{x}, \quad y(1) = 0;$

4. $y'' + 2y' = x^2 + x - 1.$

Варіант № 9

1. $16xdx - 16ydy = 13x^2ydy - 12xy^2dx$;

2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 28\frac{y}{x} + 24$;

3. $y' + \frac{y}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{x}, \quad y(1) = 2$;

4. $y'' + 4y' = 5\sin 2x$.

Варіант № 10

1. $x\sqrt{25 + y^2}dx + y\sqrt{36 + x^2}dy = 0$;

2. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$;

3. $y' + \frac{y}{2x} = -\sqrt{x}\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4.. $y'' - y' = (x - 3)e^{-x}$.

Варіант № 11

1. $y(14 + e^x)dy + e^{12x}dx = 0$;

2. $y' = \frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - 32xy}$;

3. $y' + y = e^x, \quad y(0) = \pi$;

4. $y'' + y = x + 2e^x$.

Варіант № 12

1. $\sqrt{64 - x^2}y' + xy^2 + x = 0$;

2. $xy' = \sqrt{32x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + y = 2xe^x, \quad y(1) = 2$;

4. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

Варіант № 13

1. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$;

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 36\frac{y}{x} + 36$;

3. $y' + y = 3x^2e^x, \quad y(3) = e^3$;

4. $y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x$.

Варіант № 14

1. $x\sqrt{64 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$;

2. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$;

3. $y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = e$;

4. $y'' + y = 5\sin 2x$.

Варіант № 15

1. $(e^x + 8)dy - ye^{2x}dx = 0$;

2. $y' = \frac{x^2 + 32xy - y^2}{32x^2 - 32xy}$;

3. $y' + y = -\sin xe^x, \quad y(0) = 1$;

4. $y'' - 2y' + 4y = (x + 2)e^{3x}$

Варіант № 16

1. $\sqrt{25 + y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0$;

2. $xy' = 33\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + \frac{y}{x - 1} = x - 1, \quad y(2) = 1$;

4.1 $y'' - 9y = 2 - x$.

Варіант № 17

1. $26xdx - ydy = yx^2dy - 23xy^2dx$;

2. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 38\frac{y}{x} + 38$;

3. $y' + \frac{y}{x-1} = 2x(x-1), \quad y(2) = 4$;

4.1 $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$.

Варіант № 18

1. $2y \ln y + 2xy' = 0$;

2. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$;

3. $y' + \frac{y}{x-1} = 3x^2(x-1), \quad y(2) = 9$;

4. $y'' + y = -\sin 2x$.

Варіант № 19

1. $(21 + e^x)y' = ye^x$;

2. $y' = \frac{x^2 + 33xy - y^2}{33x^2 - 32xy}$;

3. $y' + \frac{y}{x-1} = \frac{x-1}{x}, \quad y(e) = e - 1$;

4. $y'' + y = x\cos x$.

Варіант № 20

1. $\sqrt{13 - x^2}\, y' + xy^2 + x = 0$;

2. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + \frac{y}{x-1} = (1-x)\sin x, \quad y(2) = \cos 2$;

4. $y'' - 2y' + 3y = e^x \cos x$.

Варіант № 21

1. $36xdx - 32ydy = 32yx^2dy - 33xy^2dx$;

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$;

3. $y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad y(0) = \pi$;

4. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$.

Варіант № 22

1. $y(1 + 3\ln y) + 3xy' = 0$;

2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$;

3. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = e$;

4. $y''' + y = e^{2x}(x^2 + x + 1)$.

Варіант № 23

1. $(33 + e^x)yy' = e^x$;

2. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$;

3. $y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \quad y(1) = e$;

4. $4y'' - y = x^3 - 24$.

Варіант № 24

1. $\sqrt{33 + y^2} + yy'\sqrt{3 - x^2} = 0$;

2. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + 2xy = \dfrac{e^{-x^2}}{x}, \quad y(1) = e^2$;

4. $y'' - 2y' = x^2 - x$.

Варіант № 25

1. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$;

2. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$;

3. $y' + 2xy = -\sin xe^{-x^2}$, $\quad y(0) = 2$;

4. $y'' - 4y' + 4y = e^x$.

Варіант № 26

1. $\sqrt{5+y^2}dx + 4\left(x^2y + y\right)dy = 0$;

2. $xy' = -\dfrac{3y^3 + 4yx^2}{4y^2 + 7x^2}$;

3. $y' + \dfrac{4y}{x} = x^4$, $\quad y(1) = 0$;

4. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

Варіант № 27

1. $(31 + e^x)yy' = e^x$;

2. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$;

3. $y' + \dfrac{4y}{x} = 2x^5$, $\quad y(2) = 16$;

4.. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$.

Варіант № 28

1. $3\left(x^2y + y\right)dy + \sqrt{1+y^2}dx = 0$;

2. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + \dfrac{4y}{x} = 3x^6$, $\quad y(1) = 0$;

4. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Варіант № 29

1. $2xdx - ydy = yx^2dy - 4xy^2dx$;

2. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 51\dfrac{y}{x} + 51$;

3. $y' + \frac{4y}{x} = x^3, \quad y(1) = 5$;

4.1. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

Варіант № 30

1. $2x + x^2 y + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0$;

2. $xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$;

3. $y' + \frac{4y}{x} = -x^4 \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$;

4. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Варіант № 31

1. $(33 + e^x) yy' = e^x$;

2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 24\frac{y}{x} + 32$;

3. $y' + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}} y = \frac{\arcsin x}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$;

4.. $y''' + 3y = e^x (x^2 + 1)$.

Варіант № 32

1. $5y \ln y + 2xy' = 0$;

2. $y' = \frac{x + 23y}{x - 32y}$;

3. $y' + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x^2}} y = 3x^2 \arcsin x, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$;

4. $y'' - 2y' + 10y = x^2$.

Приклад виконання контрольної роботи

1. Розв’язати диференціальне рівняння $x(2 - 6y)dy - (1 + y^2)dx = 0$.

Розв’язання

Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, таким чином:

$$\frac{dy}{dx}x = \frac{1+y^2}{2-6y}, \ \frac{(2-6y)dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}, \ \int\frac{(2-6y)dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$2\int\frac{dy}{1+y^2} - 3\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \ln|x| + C$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,y - 3\ln(1+y^2) = \ln|x| + C,$$

$$2\,arctg\,y = ln\left(|x|\left(1+y^2\right)^3\right) + C.$$

2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$.

Розв'язання

Замінимо x на λx та y на λy:

$$y' = \frac{d\lambda y}{d\lambda x} = \frac{dy}{dx}, \ \frac{(\lambda x)^2 + 2\lambda x\lambda y - 5(\lambda y)^2}{2(\lambda x)^2 - 6\lambda x\lambda y} = \frac{\lambda^2x^2 + 2\lambda^2xy - 5\lambda^2y^2}{2\lambda^2x^2 - 6\lambda^2xy} =$$

$$= \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}.$$

Цим доведено, що вихідне диференціальне рівняння однорідне. Зробимо підстановку $y = u\cdot x$. Значить

$$y' = (u\cdot x)' = u'\cdot x + u\cdot x' = u'x + u,$$

і вихідне рівняння матиме вигляд

$$u'x + u = \frac{x^2 + 2xux - 5u^2x^2}{2x^2 - 6ux\cdot x},$$

скоротимо на x^2, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1+2u-5u^2}{2-6u},$$

звідки

$$u'x = \frac{1+u^2}{2-6u}.$$

Отримане диференціальне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, таким чином

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{2-6u},\ \frac{(2-6u)du}{1+u^2} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{(2-6u)du}{1+u^2} = \int\frac{dx}{x},$$

$$2\int\frac{du}{1+u^2} - 3\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \ln|x| + C$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,u - 3\ln(1+u^2) = \ln|x| + C,$$

$$2\,\mathrm{arctg}\,u = \ln\left(|x|(1+u^2)^3\right) + C.$$

Замінимо u на $\frac{y}{x}$, отримаємо

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(|x|\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^3\right) + C.$$

3. Розв’язати диференціальне рівняння $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$.

Розв’язання

Це диференціальне рівняння вигляду $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, застосуємо метод варіації довільної сталої.

Шукаємо розв’язок однорідного рівняння $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$.

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2},\ \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2xdx}{1+x^2},\ \ln|y| = \ln\left|1+x^2\right| + \ln C,\ y = C(1+x^2).$$

Будемо вважати $C = C(x)$, тоді $y = C(x)(1+x^2)$, а

$$y' = C'(x)(1+x^2) + C(x)(1+x^2)' = C'(x)(1+x^2) + 2xC(x)$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$C'(x)(1+x^2)+2xC(x)-\frac{2xC(x)(1+x^2)}{1+x^2}=1+x^2,$$

$$C'(x)(1+x^2)=1+x^2,\ C'(x)=1,\ dC(x)=dx,\ C(x)=x+C_1,$$

$$y=C(1+x^2).$$

Відповідь: $y=(x+C_1)(1+x^2)$.

4.1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''-3y'+2=2e^{3x}.$$

Розв'язання

Розглядаємо відповідне однорідне рівняння

$$y''-3y'+2y=0$$

і шукаємо його загальний розв'язок. Для цього складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

і знаходимо його корені

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2},\ \lambda_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2},\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$$

Записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння, виходячи з вигляду правої частини k дорівнює кратності α як кореня характеристичного рівняння $\lambda^2-3\lambda+2=0$. Оскільки $\alpha=3$ не збігається ні з $\lambda_1=1$ ні з $\lambda_2=2$ тоді $k=0$, а отже частинний розв'язок шукаємо у вигляді $z=Ae^{3x}$. Маємо: $z'=3Ae^{3x}$, $z''=9Ae^{3x}$. Підставимо ці значення у вихідне рівняння:

$$9Ae^{3x}-3\cdot 3Ae^{3x}+2Ae^{3x}=2e^{3x},$$

$2Ae^{3x}=2e^{3x}$, $A=1$, звідки

$$z=e^{3x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння тепер має вигляд

$$y = \bar{y} + z = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$

4.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + y = 2\sin x.$$

Розв'язання

Розглядаємо відповідне однорідне рівняння

$$y'' + y = 0$$

і шукаємо його загальний розв'язок. Для цього складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

і знаходимо його корені

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1},\ \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{1},\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i.$$

Записуємо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Права частина $y'' + y = 2\sin x$ має вигляд

$$2\sin x = e^{0\cdot x}(0\cdot\cos x + 2\cdot\sin x).$$

Це означає, що частинний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$z = x^k e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

де k – кратність числа $\alpha + \beta i$ як кореня характеристичного рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$.

Оскільки $\alpha + \beta i = 0 + 1\cdot i = i$ збігається з $\lambda_1 = i$ (є однократним коренем характеристичного рівняння), то частинний розв'язок (при $k = 1$) шукаємо у вигляді

$$z = x(A\cos x + B\sin x).$$

Маємо

$$z' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x = (A + Bx)\cos x + (-Ax + B)\sin x$$

$$z' = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x.$$

$$(2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x + Ax\cos x + Bx\sin x = 2\sin x,$$

$B = 0$, $A = -1$.

Записуємо частинний розв'язок $z = -x\cos x$. Тоді загальний розв'язок

$$y = \bar{y} + z = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x.$$

Список рекомендованої літератури

***Основна*:**

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./ Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
2. Валєєв К. Г, Вища математика: навч. посіб. : у 2-х ч. – ч. 1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. / И. П. Натансон. – СПб. : Издательство Лань, 1999. – 736 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2-х т. - Т.1. / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. – 560 с.
5. Соколенко О. І. Вища математика: підруч./ О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.

Додаткова:

1. Гудименко Ф.С. Диференціальні рівняння. – К.: Вид-во Київ. держ. ун-ту ім.Т.Г.Шевченка, 1958. – 206 с.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие. – М.: «Наука», 1978. – С. 255-278.
3. Лейфура В.М. та ін. Математика для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації. – К.: Техніка, 2003. – С. 513-537.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Высшая школа, 1974. – 768 с.

Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2002. – С. 280-304

Зміст

Навчальне видання

Вища математика.
Диференціальні рівняння
(Модуль 11)
Завдання та методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В'ячеслав Сергійович
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 4
Тираж 50 прим. Зам. № 1403-1

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р