УДК 624.014.072

Математична модель розрахунку прогинів стержнів в області обмежених пластичних деформацій при складному опорі.

В.С. Шебанін, В.Г. Богза, І.І. Хилько

Кафедра вищої та прикладної математики, Миколаївська державна аграрна академія, вул. Паризької комуни, 9, м.Миколаїв, 54021, Україна

Описано методику розрахунку прогинів стержнів до яких прикладено поздовжню та поперечну зосереджену сили. На основі одержаних даних з використанням методу найменших квадратів розроблено математичну модель розрахунку прогинів стержнів в області обмежених пластичних деформацій при складному опорі та одержано ряд апроксимуючих кривих, які з достатнім ступенем точності можна використовувати в практичних розрахунках.

(Ключові слова: прогин стержня, метод найменших квадратів, математична модель, апроксимуючі криві, область обмежених пластичних деформацій)

При розрахунку стержнів в області обмежених пластичних деформацій при складному опорі важливими питаннями є додержання вимог міцності та жорсткості [1]. У зв'язку з цим постає задача одержання аналітичних залежностей для практичного знаходження прогинів стержня в області обмежених пластичних деформацій, які використовуються при розрахунку з врахуванням деформованої схеми або по другому граничному стані.

Для виконання поставленої задачі на першому етапі було отримано значення прогинів в кожній точці стержня в залежності від прикладеної зосередженої сили для стержнів різної довжини. Розглянемо це більш детально.

Для побудови пружно-пластичної епюри нормальних напруг і одерження величини згинаючого моменту в кожному перерізі стержня допускалися наступні припущення:

- деформаційна теорія пластичності;
- гіпотеза плоских перерізів;
- ідеалізована діаграма Прандтля.

При розрахунку пружно-деформованого стану стержня за межами пружності з врахуванням деформованої схеми використовувався критерій граничного стану: обмеження інтенсивності пластичної деформації [2] граничною величиною $\varepsilon_{ip,lim} = 0,002$. Це досягалося за допомогою методу поновлення граничної величини на кожному кроці ітераційного процесу [3], який гарантував збіг і ефективно зменшував кількість необхідних послідовних наближень.

Спираючись на відому методику [4] отримання аналітичних залежностей пружно-деформованого стану при одноосному згині з поздовжньою силою за межами пружності для двотаврових перерізів визначався з рівності

$$M = \left|\int \sigma_x \cdot y dA\right| + N \cdot h_H \qquad (1)$$

граничний згинаючий момент M_{lim} в найбільш навантаженому перерізі стержня, для якого величина пластичної деформації приймала граничне значення $\varepsilon_{ip,lim}$.

Потім на першому кроці ітераційного процесу шукана епюра згинаючих моментів за деформованою схемою M_{di} вважалася рівною граничній епюрі моментів M, яка була визначена за недеформованою схемою, при умові, що $M_{max} = M_{lim}$.Визначалися ті перерізи стержня для яких справджувалася нерівність

$$M_{SN} < M_{di} < M_{lim}, \qquad (2)$$

де M_{SN} - найбільший момент, визначений в межах пружності при дії сили N, і для кожного з цих перерізів будувалася епюра нормальних напруг σ_i [4]. На основі одержаної епюри σ_i в кожному перерізі затронутому текучістю матеріалу визначалися повні кривизни χ_i

$$\chi_i = \frac{\varepsilon_{Hi} - \varepsilon_{Bi}}{H}, \tag{3}$$

де ε_{Hi} і ε_{Bi} - крайові відносні деформації, взяті зі своїми знаками;

H – висота стержня.

При роботі матеріалу стержня в межах пружності

$$\chi_i = \frac{M_{di}}{E \cdot I}, \tag{4}$$

де E – модуль пружності; I – момент інерції.

Використовуючи метод Мора визначалися величини повних прогинів $Y_i (i = 1,2,...,n-1)$ [5]

$$Y_i = \int_0^l \overline{M_i} \cdot \chi dl, \tag{5}$$

де $\overline{M}_i$ - епюра згинаючих моментів від одиничного навантаження, прикладеного в і – му перерізі стержня.

Одержаний інтеграл в (5) знаходимо наближено за допомогою формули Сімпсона, яка з врахуванням того, що $\overline{M}_{i,0} = \overline{M}_{i,m} = 0$ дає слідуючий результат [6]

$$Y_i = \frac{2\Delta l}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \overline{M}_{i,2k} \cdot \chi_{2k} + 2\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{i,2k-1} \cdot \chi_{2k-1} \right),$$

$$\Delta l = \frac{l}{m}(m = 2n), i = 1,2,...,m-1; (Y_0 = Y_m = 0). \tag{6}$$

Потім будувалася епюра згинаючих моментів наступної ітерації за деформованою схемою

$$M_{d,i} = M_{p,i} - M_{N,i}, \tag{7}$$

де $M_{p,i}$ - епюра згинаючих моментів від прикладеної сили, $M_{N,i}$ - епюра моментів, які виникають від поздовжньої сили внаслідок геометричної нелінійності навантаженого стержня

$$M_{N,i} = N \cdot Y_i \tag{8}$$

Описаний вище процес продовжувався до досягнення необхідної точності прогину стержня і вже на 3-4 ітерації точність досягала 0,1%.

Згідно з запропонованою методикою було розроблено відповідну програму для ПЕОМ на мові TYRBO CI з врахуванням геометричних розмірів стержня, розрахункових опорів матеріалу стінки R_W та полок R_F, величини поздовжньої сили N та схеми навантаження.

Використовуючи одержану програму було проведено розрахунки прогинів симетричних моносталевих стержнів довжиною $l =$ 6 м, 9 м, 12 м, 15 м, 18 м, 21 м при навантажені їх зосередженою поперечною силою P в сполученні з поздовжньою силою N, де

$$N = n \cdot N_{lim}, \tag{9}$$

n приймає значення -0,9; -0,8; ...;0; …. ; 0,8; 0,9 і

$$N_{lim} = (A_1 + A_3) \cdot R_F + A_2 \cdot R_W, \tag{10}$$

викликачаючих досягнення граничної пластичної деформації $\varepsilon_{ip,lim} = 0,2\%$ у найбільш навантаженому перерізі.

В результаті виконання розрахунку було накоплено велику кількість необхідних даних для стержнів різної довжини при різних значеннях поздовжньої сили при переміщенні зосередженої сили вздовж стержня з кроком рівним 0,05 довжини стержня, що дало можливість для подальшої їх систематизації і як результат одержання відповідних аналітичних залежностей.

На наступному етапі при побудові апроксимуючих ліній використовувався метод найменших квадратів [7], суть якого полягала в тому, щоб теоретична лінія апроксимуючої кривої $\overline{Y}_i$ проходила б максимально близько до фактичного значення Y_i, тобто щоб виконувалася умова

$$\sum (Y_i - \overline{Y}_i)^2 = min \qquad (11)$$

Нехай X_p – відстань від лівого кінця стержня до точки прикладення зосередженої сили, X_m – відстань від лівого кінця стержня до точки, в якій досягнуто максимальний прогин стержня, l – довжина стержня.

Досліджувалася залежність розміщення відносної точки $X_{max} = \dfrac{X_m}{l}$ в якій досягнуто максимальний прогин стержня в області обмежених пластичних деформацій від трьох наступних параметрів:

X – відносної точки прикладення зосередженої сили, $X = \dfrac{X_p}{l}$;

Y – відносної величини поздовжньої сили, $Y = \dfrac{N}{N_{lim}}$;

Z – відносної довжини стержня, $Z = \dfrac{l}{l_0}$, l_0 = 6 м,

тобто залежність виду

$$X_{max} = F(X, Y, Z) \qquad (12)$$

Для побудови апроксимуючих ліній розглядалися поліноми 1-го, 2-го та 3-го степеня. В якості критерію порівнювалася величина

$$\delta = \sum (X_{max} - \overline{X}_{max})^2 = min, \qquad (13)$$

де X_{max} – точне значення, $\overline{X}_{max}$ - наближене значення.

В результаті статистичної обробки даних і аналізу факторів, що в найменшому степені впливають на процес було отримано наступну математичну модель

$$\overline{X}_{max} = 0,436779 + 0,820793\,X^2 - 0,0346\,Y^2 - 0,272245X + \\ + 0,03261XY - 0,0007695YZ\quad, \tag{14}$$

яка з достатнім ступенем точності апроксимації описує задану залежність. Для неї величина $\delta = 0,06196$, а найбільше значення різниці між точним X_{max} і наближеним числом $\overline{X}_{max}$ не перевищує 0,03173, або 6,78% при $X = 0,5;\ Y = 0,9;\ Z = 3,5$.

Аналіз одержаної математичної моделі дає можливість зробити висновок, що максимальний прогин стержня знаходиться в межах від 0,44l до $0,5l$. При цьому найбільший вплив на значення X_{max} має відносна точка прикладення зосередженої сили (X) і відносне значення поздовжньої сили (Y). Про це свідчить найбільше значення коефіцієнтів при цих факторах в рівнянні регресії. І відповідно найменший вплив має відносна довжина стержня (Z). Проведені дослідження показали, що момент інерції стержня не впливає на значення X_{max} .

Наступною досліджувалася залежність корегуючого коефіцієнта $k = \dfrac{Y_{plast}}{Y_{ypr}}$, де Y_{plast} – прогин в точці, обчислений за ітераційним алгоритмом за умови досягнення пластичної деформації $\varepsilon_{ip,lim} = 0,2\%$, Y_{ypr} – прогин в точці, досягнений за умови необмежено пружної роботи стержня, від X – відносної точки прикладення сили, Y – відносної величини поздовжньої сили, Z – відносної довжини стержня, тобто залежність виду

$$k = F(X;Y;Z) \tag{15}$$

Для одержання необхідної аналітичної залежності розглядалися різноманітні рівняння 1-го та 2-го степеня. Критерієм відбору була величина

$$\delta = \sum (k - \overline{k})^2 = min, \tag{16}$$

де k – точне значення, $\overline{k}$ - наближене значення.

В результаті відповідної статистичної обробки числових даних і аналізу факторів, що в найменшому ступені впливають на значення корегуючого коефіцієнта було одержано наступну математичну модель

$$k = 1{,}077357 + 0{,}001255\frac{1}{X^2} + 0{,}433184Y^2 + 0{,}005836\frac{1}{X} +$$
$$+ 0{,}16203Y + 0{,}008929Z - 0{,}157373YZ, \qquad (17)$$

яка з достатнім ступенем точності апроксимації описує задану залежність. Для даної моделі величина $\delta = 5{,}623$, а максимальне відхилення наближеного значення $\bar{k}$ від точного k не перевищує 10% для поздовжньої сили (Y) в межах від –0,8 до 0,8, і тільки при $X = 0{,}45$, $Y = -0{,}9$, $Z = 3{,}5$ дане відхилення досягає 45%.

Аналіз одержаної залежності говорить про те, що найбільший вплив на значення корегуючого коефіцієнта мають відносна точка прикладення сили (X) і відносна величина поздовжньої сили (Y), а найменший вплив – відносна довжина стержня (Z).

Одним із завдань нашого дослідження було побудова такої аналітичної залежності, яка б дала можливість знайти значення прогину стержня Y в кожній його точці X при переміщенні зосередженої сили вздовж стержня, тобто залежності виду

$$Y = F(x). \qquad (18)$$

Використовуючи метод найменших квадратів для побудови апроксимуючих ліній, розглядалися різні форми кривих. Було виявлено, що найбільш точку математичну модель стержня дає крива, яка включає в своє аналітичне відображення тригонометричні функції, а саме

$$Y = \begin{cases} Y_{max}\sin\dfrac{\pi X}{2X_m}, \text{ якщо } X \le X_m \\ \\ Y_{max}\sin\dfrac{\pi(l - X)}{2(l - X_m)}, \text{ якщо } X > X_m \end{cases} \qquad (19)$$

де Y_{max} – максимальне значення прогину стержня, X_m – відстань від лівого кінця стержня до точки, в якій досягнуто максимальний прогин; l – довжина стержня.

Висновки.

1. Одержана аналітична залежність

$$X_{max} = F(X;Y;Z)$$

дає можливість визначити в якій точці стержня буде досягатися максимальний прогин в залежності від відносної точки прикладення сили, відносної величини поздовжньої сили і відносної довжини стержня.

2. Одержана аналітична залежність

$$k = F(X;Y;Z)$$

дає можливість визначити відповідний корегуючий коефіцієнт в залежності від відносної точки прикладання сили, відносної величини поздовжньої сили, відносної довжини стержня і знаючи максимальний прогин стержня в межах пружності Y_{ypr} визначити прогин стержня в межах обмежених пластичних деформацій з співвідношення $k = \dfrac{Y_{plast}}{Y_{ypr}}$.

3. Одержана аналітична залежність

$$Y = F(X)$$

дає можливість визначити значення прогину стержня кожної його точки, якщо відомі максимальний прогин стержня і точка в якій він досягнений.

4. Одержані апроксимуючі залежності з достатнім ступенем точності можна використовувати при розрахунку стержнів в області обмежених пластичних деформацій при складному опорі.

Література.

1. Рекомендации по расчету стальных конструкций по критерию ограниченных пластических деформаций. –М., 1985, с. 3-4.

2. Чернов Н.Л., Стрелецкий Н.Н., Любаров Б.И. Расчеты стальных конструкций на прочность по критерию ограниченных пластических деформаций. // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1984, № 7, с. 1-9.

3. Чернов Н.Л., Шебанин В.С. Расчет прочности статически неопределимых систем при ограниченных пластических деформациях. // Известия вузов. Машиностроение, 1986, № 4, с. 3-6.

4. Шебанин В.С. Прочность изгибаемых стальных стержневых конструкций при учете физической и геометрической нелинейности в области ограниченных пластических деформаций. Докторская диссертация. –Одесса, 1993.

5. Щербина Н.И. Определение прогибов в стальных балках при подвижных нагрузках в области пластических деформаций. // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1978, № 4.

6. Веремеенко Н.А. Прочность сжато-изогнутых и растянуто-изогнутых стальных стержней при ограниченных пластических деформациях. Кандидатская диссертация. Одесса – 1987.

7. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. –М.: Высшая школа, 1988, -240 с.