Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в замкненій області D, то границя інтегральної суми існує і не залежить ні від способу розбиття області D на елементарні, ні від вибору точок P_k.

В роботі проведено аналіз, та розглянуто конкретні задачі механіки до яких може бути застосовано апарат математичного аналізу, а саме кратні інтеграли.

Література:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Т1,2. - м.: Наука, 1985.
2. Шкіль М.І. та ін. Вища математика. У 3-х кн. – К.:Либідь, 1994.
3. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. Посібник: У 2-х ч. – К.:КНЕУ, 2001.

УДК 517.927.6

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ

Колбягін В.О., студент гр. Ен 1/1, Портян Д.М., студент гр. Ен 1/1

Миколаївський національний аграрний університет
Науковий керівник ст.викладач Цепуріт О.В.

Анотація

Виконано огляд декількох задач механіки та енергетики, які можна об’єднати в окремі групи незалежно від їх фізичної природи за ознакою узагальнення методів інтегрального числення, що використовуються для їх розв’язання.

Annotation

Completed review of several problems in mechanics and energy, which can be grouped into separate groups, regardless of their physical nature on the basis of synthesis methods of integral calculus that areused for their solution.

Те, що математичні структури не є довільним творінням розуму, а є відбиттям об'єктивного світу у абстрактному вигляді, зумовлює придатність математичних результатів до описування різноманітних навколишніх явищ, успіх того процесу, який ми сьогодні спостерігаємо і який одержав назву математизації знань. Математичний результат має ту властивість, що він застосовний не тільки при вивченні якогось одного явища чи процесу, а може використовуватись і в багатьох інших, які суттєво відрізняються своєю фізичною природою.

1. Якщо дві змінні величини y та x мають загальну властивість: швидкість змінювання однієї з них (y) по відношенню до іншої пропорційна наявній кількості величини x в момент часу, що розглядається, то ця умова призводить до того самого диференціального рівняння

y'=ky. До цієї групи відноситься, наприклад, наступна задача. Відомо, що ізольований провідник внаслідок недосконалості ізоляції втрачає наданий йому заряд, причому швидкість втрати заряду пропорційна наявному заряду в даний момент. Визначити за який проміжок часу провідник втратить певну кількість втраченого заряду.

2. Задачі, пов'язані з застосуванням визначеного інтегралу в геометрії: знаходження площі, довжини пласкої дуги, об'єм тіла обертання, поверхні тіла обертання, знаходження моменту інерції та центра мас.

3. Розглянемо задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла.

Задача 1. Сила току I є заданою неперервною функцією від часу t: $I=f(t)$**.** Нехай треба визначити кількістьQелектрики, що проходить через поперечний переріз провідника за час T, що відраховується з початку досліду. Поділимо відрізок часу від 0 до T на nчастин довільної довжини Δt_i. В кожному з цих частинних проміжків часу виберемо довільний момент часу τ_i. Сила току є змінною величиною, але будемо вважати, що за достатньо малий проміжок часу Δt_i сила току має постійне значення. Відомо, що для постійного току кількість електрики, що проходить через переріз провідника, дорівнює добутку сили току на час, що витрачається на проходження током цього провідника. Отже, за відрізок часу Δt_i пройде кількість електрики, що наближено дорівнює $I(\tau_i)\Delta t_i$. За весь період часу від 0 до T : $Q \approx \sum_{i=1}^{n} I(\tau_i)\Delta t_i$. Ця сума є інтегральною і коли найбільший з відрізків часу прямує до нуля, приходимо до означення визначеного інтеграла $Q = \int_0^T I(t)dt$.

Задача 2. Нехай пластинку у вигляді криволінійної трапеції занурено вертикально в рідину з густиною ρ так, що її бічні сторони паралельні поверхні рідини і лежать нижче від її рівня відповідно на відстані a і b. Визначити силу тиску рідини на пластинку.

Якщо пластинка буде в горизонтальному положенні на глибині h від поверхні (рівня) рідини, то сила тиску P рідини в ньютонах на горизонтальну пластинку дорівнюватиме вазі стовпа рідини, основа якого – дана пластинка, а висота – глибина h, тобто

$$P = g\rho hS, \qquad (1)$$

де S - площа пластинки.

А якщо пластинку занурено в рідину вертикально, то за формулою (1) тиск рідини на пластинку не можна обчислити, бо в цьому разі тиск рідини на одиницю площі пластинки змінюється із зміною глибини занурення, тобто залежить від відстані пластинки до поверхні рідини.

Розв'язуючи задачу, враховуватимемо те, що за законом Паскаля тиск у рідині передається однаково в усіх напрямках, у тому числі й на вертикальну площадку.

Для розв'язання задачі поділимо пластинку на n частин (малих горизонтальних смужок) прямими, які паралельні поверхні рідини (тобто паралельні осі Oy) і проходять через точки $x_0 = a,\ x_1, \ldots, x_{n-1},\ x_n = b$, де $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i=0, 1, 2, \ldots, n$.

Виділимо одну із смужок на глибині x_i. Для досить вузької смужки тиск у всіх її частинах можна вважати наближено однаковим, а саму смужку можна взяти за прямокутник з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ і основою, яка дорівнює нижній основі смужки. Легко побачити, що довжина основи прямокутника є функцією від x. Позначимо цю функцію через $f(x)$, де $x \in [a;b]$. Отже, силу тиску P_i на i-ту смужку можна обчислити за формулою (1), тобто:

$$P_i \approx g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Підсумувавши сили тиску на всі смужки, знайдемо наближене значення сили тиску рідини на всю пластинку:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Точність наближеної рівності тим більша, чим коротші відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, на які поділено відрізок $[a;b]$.

Отже, точне значення сили тиску рідини на пластинку визначають за формулою:

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

За означенням остання границя – це визначений інтеграл від функції $xf(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому силу тиску рідини на пластинку обчислюють за формулою:

$$P = g\int_a^b \rho \cdot x \cdot f(x)dx.$$

Задача 3. Нехай матеріальна точка під дією сили F рухається по прямій. Якщо діюча сила стала, а пройдений шлях дорівнює s, то, як відомо з курсу фізики, роботу A цієї сили F обчислюють за формулою:

$$A = F \cdot s. \tag{2}$$

Перейдемо тепер до розгляду питання про знаходження роботи змінної сили. Нехай матеріальна точка рухається по осі Ox під дією сили, проекція якої на вісь Ox - це функція від x. Позначимо її через $f(x)$ і припускатимемо, що f – неперервна функція. Нехай під дією сили F матеріальна точка перемістилась з точки $M(a)$ у точку $M(b)$. Доведемо, що робота в цьому разі обчислюється за формулою:

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

Поділимо відрізок $[a; b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ на n частин $[x_{i-1}; x_i]$, однакової довжини $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ роботу сили можна наближено обчислювати за формулою (1), тобто вважати, що вона дорівнює $f(\xi_i)\Delta x_i$ де ξ_i - деяка точка відрізка $[x_{i-1}; x_i]$. Тоді робота сили на відрізку $[a; b]$ наближено виражатиметься формулою $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Точність наближення буде тим точнішою, чим коротшими є відрізки $[x_{i-1}; x_i]$, на які поділено відрізок $[a; b]$. Тому, переходячи в останній рівності до границі при $n \to \infty$, дістаємо:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \cdot \quad (4)$$

Задача 4. Електричний точковий заряд $+e$ рухається в електричному полі, що утворюється точковим зарядом $+e$. Згідно закону Кулона. Сила взаємодії між двома точковими зарядами у порожнині чисельно визначається за формулою $F = \frac{e_1 e}{r^2}$. Визначити роботу при переміщенні заряду e_1 з точки А в точку В, якщо ці точки знаходяться на прямій, що проходить через заряд $+e$.

Розв'язання. Елементарна робота на переміщенні dr дорівнює $\delta A = Fdr = \frac{e_1 e}{r^2}$, а повна робота визначиться інтегруванням:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 e}{r^2} dr = e_1 e\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = e_1 e\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) \cdot A = e_1 e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdot$$

Література:

1. Валєєв К.Г., Джаладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2001.- Ч.1. – 546 с.
2. Натансон И.П. . Краткий курс высшей математики. – СПб.: Издательство Лань, 1999. – 736 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. - т.1. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник.- К.: Академія, 2002. – 432 с.
5. Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Підручник для вузів - К.: „Техніка", 2000. – 592 с.

УДК 629.113.004.67

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

Мудрий О.Ю., студент гр. М 1/2

Миколаївський національний аграрний університет

Науковий керівник ас. Євстрат'єв С.В

Анотація

Математика – наука про кількісні співвідношення і просторові форми дійсного світу. Виникла в давні часи з практичних потреб людини. До того, як стати абстрактною наукою, математика пройшла довгий шлях розвитку. Проте абстрактність математики не означає її відриву від матеріальної дійсності. В нерозривному зв'язку з запитами техніки і природознавства запас кількісних відношень і просторових форм, що їх вивчає математика, безперервно розширюється