МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.
Кратні та криволінійні інтеграли
(Модуль 10)

Контрольні завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи
студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей
6.100101 - “Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі”,
6.100102 - "Процеси, машини та обладнання
агропромислового виробництва"

МИКОЛАЇВ
2014

УДК 517
ББК 22.1
В 55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 30.06.2014 р., протокол № 9.

Укладачі:

В. С. Шебанін - д-р техн. наук., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
В. Г. Богза - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. П Атаманюк - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Л. П. Шебаніна - - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри математики ї механіки, Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлиньского,
О. В. Цепуріт - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. І. Хилько - ст. викладач кафедри кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет,
С. І. Богданов - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
О. В. Шептилевський - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
С. В. Євстрат'єв - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Є. Є. Самойленко - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор,
ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського,
І. Д Бурковський – канд.техн.наук, провідний науковий співробітник , Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 6.100101 - “Енергетика сільського господарства, 6.100102 - "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва".

Матеріал даного посібника складається з двох основних розділів: розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. Студент за своїм варіантом у відповідності зі списком групи обирає завдання з кожної групи задач. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

1. Подвійний, потрійний інтеграл; властивості.
2. Обчислення подвійного (потрійного) інтегралу в прямокутних координатах.
3. Обчислення подвійного інтегралу в полярних координатах.
4. Обчислення площі плоскої фігури та об’єму тіла за допомогою кратних інтегралів.
5. Криволінійні інтеграли по довжині та по координатам; властивості.
6. Обчислення криволінійного інтегралу вздовж лінії, заданої параметричними рівняннями.
7. Формула Гріна

Розділ 1. Розрахункові завдання

Задача №1

В задачах 1.1-1.31 треба змінити порядок інтегрування і обчислити площу інтегрування при даному та зміненому порядку інтегрування.

1.1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\,dx$

1.2. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$

1.3. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$

1.4. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f\,dx$

1.5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\,dy$

1.6. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f\,dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f\,dx$

1.7. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f\,dx$

1.8. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f\,dx$

1.9. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f\,dy$

1.10. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy$

1.11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f\,dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f\,dy$

1.12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f\,dx$

1.13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f\,dx$

1.14. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+x)}^{0} f\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\,dx$

1.15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f\,dx$

1.16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\,dx$

1.17. $\int_0^1 dy \int_{-y}^{0} f\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx$

1.18. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f\,dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f\,dx$

1.19. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\,dy$

1.20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\,dx$

1.21. $\int_0^1 dy \int_0^{y} f\,dx + \int_1^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f\,dx$

1.22. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f\,dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy$

1.23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f\,dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f\,dy$

1.24. $\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f\,dx$

1.25. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^4} f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\,dy$

1.26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy$

1.27. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^0 f\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x}}^0 f\,dy$

1.28. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\pi} f\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f\,dy$

1.29. $\int\limits_0^{-1} dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\,dx$

1.30 . $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f\,dy$

1.31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\,dy$

Задача №2

В задачах 2.1-2.31 потрібно обчислити даний подвійний інтеграл $\iint\limits_D f dxdy$. Вигляд функції $f(x,y)$ та рівняння ліній, які обме-жують область D, наведені для кожного варіанту нижче.

2.1. $ye^{xy/2}$; $y = \ln 2,\ y = \ln 3,\ x = 2,\ x = 4$.

2.2. $y^2 \sin\frac{xy}{2}$; $y=\frac{x}{2}$, $y=\sqrt{\pi}$, $x=0$.

2.3. $y\cos xy$; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$, $x=1$, $x=2$.

2.4. $y^2 e^{-\frac{xy}{4}}$; $x=0$, $y=2$, $y=x$.

2.5. $y\sin xy$; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi$, $x=1$, $x=2$.

2.6. $y^2 \cos\frac{xy}{2}$; $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=\frac{x}{2}$.

2.7. $4y\ e^{2xy}$; $y=\ln 3$, $y=\ln 4$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

2.8. $4y^2 \sin xy$; $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=x$.

2.9. $y\cos 2xy$; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1$.

2.10. $y^2 e^{-\frac{xy}{2}}$; $x=0$, $y=2$, $y=\frac{x}{2}$.

2.11. $12y\sin 2xy$; $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=2$, $x=3$.

2.12. $y^2 \cos xy$; $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$.

2.13. $y\ e^{\frac{xy}{4}}$; $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=4$, $x=8$.

2.14. $4y^2 \sin 2xy$; $y=\sqrt{2\pi}$, $y=2x$, $x=0$.

2.15. $2y\cos 2xy$; $y=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $x=1$, $x=2$.

2.16. $y^2 e^{-\frac{xy}{2}}$; $x=0$, $y=\sqrt{2}$, $y=x$.

2.17. $y\sin xy$; $y=\pi$, $y=2\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$.

2.18. $y^2\cos 2xy$; $x=0$, $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $y=\frac{x}{2}$.

2.19. $8ye^{4xy}$; $y=\ln 3$, $y=\ln 4$, $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$.

2.20. $3y^2\sin\frac{xy}{2}$; $y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$, $y=\frac{2}{3}x$, $x=0$.

2.21. $y\cos xy$; $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=\pi$, $y=3\pi$.

2.22. $y^2 e^{-\frac{xy}{2}}$; $x=0$, $y=1$, $y=\frac{x}{2}$.

2.23. $y\sin 2xy$; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$.

2.24. $y^2\cos xy$; $x=0$, $y=\sqrt{\pi}$, $y=2x$.

2.25. $6y\ e^{\frac{xy}{3}}$; $y=\ln 2$, $y=\ln 3$, $x=3$, $x=6$.

2.26. $y^2\sin\frac{xy}{2}$; $y=\sqrt{\pi}$, $y=x$, $x=0$.

2.27. $y\cos 2xy$; $y=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{3}{2}\pi$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$.

2.28. $y^2 e^{-\frac{xy}{8}}; x=0,\ y=4,\ y=2x$.

2.29. $3y\sin xy;\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3$.

2.30. $y^2\cos\dfrac{xy}{2};\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x,\ x=0$.

2.31. $12ye^{6xy};\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{6},\ x=\dfrac{1}{3}$.

Задача №3

В задачах 3.1-3.31 потрібно обчислити даний подвійний інтеграл $\iint\limits_D f dxdy$. Вигляд функції $f(x,y)$ та рівняння ліній, які обмежують область D, наведені для кожного варіанту нижче.

3.1. $12x^2y^2+16x^3y^3;\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

3.2. $9x^2y^2+48x^3y^3;\ x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$

3.3. $36x^2y^2-96x^3y^3; x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$

3.4. $18x^2y^2+32x^3y^3;\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$

3.5. $27x^2y^2+48x^3y^3;\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$

3.6. $18x^2y^2+32x^3y^3;\ x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$

3.7. $18x^2y^2+32x^3y^3;\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$

3.8. $27x^2y^2+48x^3y^3;\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

3.9. $4xy+3x^2y^2;\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$

3.10. $12xy+9x^2y^2;\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

3.11. $8xy+9x^2y^2;\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

3.12. $24xy+18x^2y^2$; $x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^3$

3.13. $12xy+27x^2y^2$; $x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^2$

3.14. $8xy+18x^2y^2$; $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

3.15. $\dfrac{4}{5}xy+\dfrac{9}{11}x^2y^2$; $x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$

3.16. $\dfrac{4}{5}xy+9x^2y^2$; $x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3$

3.17. $24xy-48x^3y^3$; $x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^2$

3.18. $6xy+24x^3y^3$; $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

3.19. $4xy+16x^3y^3$; $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

3.20. $4xy+16x^3y^3$; $x=1,\ y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$

3.21. $44xy+16x^3y^3$; $x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^2$

3.22. $4xy+176x^3y^3$; $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

3.23. $xy-4x^3y^3; x=1,\ y=x^3, y=-\sqrt{x}$

3.24. $4xy+176x^3y^3$; $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3$

3.25. $6x^2y^2+\dfrac{25}{3}x^4y^4$; $x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^2$

3.26. $9x^2y^2+25x^4y^4$; $x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2$

3.27. $3x^2y^2+\dfrac{50}{3}x^4y^4$; $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$

3.28. $9x^2y^2+25x^4y^4$; $x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^3$

3.29. $54x^2y^2+150x^4y^4$; $x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^2$

3.30. $xy-9x^5y^5$; $x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2$

3.31. $54x^2y^2+150x^4y^4$; $x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^3$

Задача №4

В задачах 4.1-4.31 треба обчислити площу плоскої фігури D, якщо рівняння ліній, обмежуючих D відповідно варіанту, такі:

4.1. $y=\dfrac{3}{x},\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4$

4.2. $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}$

4.3. $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2,\ (y\le 0)$

4.4. $x=8-y^2,\ x=-2y$

4.5. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8$

4.6. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ x=16$

4.7. $x=5-y^2,\ x=-4y$

4.8. $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6}y=x^2,\ (y\le 0)$

4.9. $y=\sqrt{12-x^2},\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\ x=0(x\ge 0)$

4.10. $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=9$

4.11. $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ x=0,\ (x\ge 0)$

4.12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ (x\ge 0)$

4.13. $y=20-x^2,\ y=-8x$

4.14. $y=\sqrt{18-x^2}$; $y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$

4.15. $y=32-x^2$, $y=-4x$

4.16. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=5e^x$, $y=2$, $y=5$

4.17. $x^2+y^2=36$, $3\sqrt{2}y=x^2$, $(y\ge 0)$

4.18. $y=3\sqrt{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$, $x=4$

4.19. $y=6-\sqrt{36-x^2}$, $y=\sqrt{36-x^2}$,
x=0 $(x\ge 0)$

4.20. $y=\dfrac{25}{4}-x^2$, $y=x-\dfrac{5}{2}$

4.21. $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $x=16$

4.22. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=7$

4.23. $x=27-y^2$, $x=-6y$

4.24. $x=\sqrt{72-y^2}$, $6x=y^2$, y=0 $(y\ge 0)$

4.25. $y=\sqrt{6-x^2}$, $y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}$

4.26. $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}$, $y=\dfrac{3}{2x}$, $x=4$

4.27. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $(x\le 0)$

4.28. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=6e^x$, $y=1$, $y=6$

4.29. $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\dfrac{3}{x}$, $x=9$

4.30. $y=11-x^2$, $y=-10x$

4.31. $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$, $(x\geq 0)$

Задача №5

В задачах 5.1-5.31 треба обчислити площу плоскої фігури D, якщо рівняння ліній, обмежуючих D відповідно варіанту, такі:

5.1. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}$ x.

5.2. $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$,
$y=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

5.3. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.4. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$,
$x=0$, $y=x$.

5.5. $y^2-8y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.6. $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$,
$y=0$, $y=x$.

5.7. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$,
$x=0$, $y=x$.

5.8. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-10x+y^2=0$,
$y=0$, $y=\sqrt{3}x$.

5.9. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$,
$x=0$, $y=x$.

5.10. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.11. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$,
$x=0$, . $y=\sqrt{3}x$

5.12. $x^2-2x+y^2=0$; $x^2-6x+y^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.13. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$,
$x=0$, $y=\sqrt{3}x$.

5.14. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.15. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-6y+x^2=0$,
$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$.

5.16. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$,

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$.

5.17. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$,

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.18. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$,

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$.

5.19. $y^2-4y+x^2=0$, $y^2-10y+x^2=0$,

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}x$.

5.20. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-6x+y^2=0$,

$y=x$, $y=0$.

5.21. $y^2-2y+x^2=0$, $y^2-4y+x^2=0$,

$y=x$, $x=0$.

5.22. $x^2-2x+y^2=0$, $x^2-4x+y^2=0$,

$y=0$, $y=\sqrt{3}x$.

5.23. $y^2-6y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$,

$y=x$, $x=0$.

5.24. $x^2-4x+y^2=0$, $x^2-8x+y^2=0$,

$y=\sqrt{3}x$, $y=0$.

5.25. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$,
$y = x$, $x = 0$.

5.26. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 8x + y^2 = 0$,
$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

5.27. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$,
$y = \sqrt{3}x$, $x = 0$.

5.28. $x^2 - 4x + y^2 = 0$, $x^2 - 6x + y^2 = 0$,
$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

5.29. $y^2 - 2y + x^2 = 0$, $y^2 - 10y + x^2 = 0$,
$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.

5.30. $x^2 - 6x + y^2 = 0$, $x^2 - 10x + y^2 = 0$,
$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.

5.31. $y^2 - 4y + x^2 = 0$, $y^2 - 8y + x^2 = 0$,
$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x = 0$.

Задача №6

В задачах 6.1-6.31 треба знайти даний потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f dx dy dz$, зобразити область інтегрування V і обчислити її об’єм. Вигляд функції $f(x,y,z)$ і рівняння поверхнею, що обмежують V відповідно варіанту такі:

6.1.

$f(x,y,z) = x;\ y = 10x;$

$y = 0;\ x = 1;\ z = xy;\ z = 0.$

6.2.

$f(x,y,z) = \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8}\right)^{-4};$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 0.$

6.3.

$f(x,y,z) = 15\left(y^2 + z^2\right);$

$x = 0;$ y=0; $x + y = 1;\ z = x + y;\ z = 0.$

6.4.

$f(x,y,z) = 3x + 4y;$

$y = x;\ y = 0;\ x = 1;\ z = 5\left(x^2 + y^2\right);\ z = 0.$

6.5.

$f(x,y,z) = 1 + 2x^3;$

$y = 9x;\ y = 0;\ x = 1;\ z = \sqrt{xy};\ z = 0.$

6.6.

$$f(x,y,z)=27+54y^3;$$

$$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$$

6.7.

$$f(x,y,z)=y;$$

$$y=15x;\ y=0;\ x=1;\ z=xy;\ z=0.$$

6.8.

$$f(x,y,z)=\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^{-5};$$

$$\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$$

6.9.

$$f(x,y,z)=3x^2+y^2;$$

$$z=10y; x+y=1; y=0;\ x=0;\ z=0.$$

6.10.

$$f(x,y,z)=15x+30z;$$

$$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=x^2+3y^2;\ z=0.$$

6.11.

$$f(x,y,z)=4+8z^3;$$

$$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$$

6.12.

$$f(x,y,z)=1+2x^3;$$

$$y=36x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$$

6.13.

$$f(x,y,z)=21xz;$$

$$y=x;\ y=0;\ x=2; z=xy; z=0$$

6.14.

$$f(x,y,z)=\left(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^{-6};$$

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$$

6.15.

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2;$$

$$y=0;\ x=0;\ x+y=1;\ z=10x;\ z=0.$$

6.16.

$$f(x,y,z)=60y+90z;$$

$$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=x^2+y^2;\ z=0.$$

6.17.

$$f(x,y,z)=\frac{10}{3}x+\frac{5}{3};$$

$$y=9x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$$

6.18.

$f(x,y,z)=9+18z;$

$y=4x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$

6.19.

$f(x,y,z)=3y^2;$

$y=2x;\ y=0;\ x=2;\ z=xy;\ z=0.$

6.20.

$$f(x,y,z)=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^{-4};$$

$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$

6.21. $f(x,y,z)=x^2;$

$y=0;\ x=0;\ x+y=1;\ z=10(x+3y);\ z=0.$

6.22.

$f(x,y,z)=8y+12z;$

$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=3x^2+2y^2;\ z=0.$

6.23.

$f(x,y,z)=63\left(1+2\sqrt{y}\right);$

$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=\sqrt{xy};\ z=0.$

6.24.

$f(x,y,z)=x+y;$

$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=30x^2+60y^2;\ z=0.$

6.25.

$$f(x,y,z)=\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^{-5};$$

$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$

6.26. **Ошибка! Ошибка связи.**

6.27.

$f(x,y,z)=y^2;$

$y=0;\ x=0;\ x+y=1;\ z=10(3x+y);\ z=0.$

6.28.

$f(x,y,z)=5x+\frac{3}{2}z;$

$y=x;\ y=0;\ x=1;\ z=x^2+15y^2;\ z=0.$

6.29.

$f(x,y,z)=x^2+4y;$

$y=0;\ x=0;\ x+y=1;\ z=20(2x+y);\ z=0.$

6.30.

$$f\left(x,y,z\right)=\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^{-6};$$

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$$

6.31.

$$f\left(x,y,z\right)=x^2z;$$

$$y=3x;\ y=0;\ x=2;\ z=xy;\ z=0.$$

Задача №7

В задачах 7.1-7.31 треба знайти роботу сили $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ при переміщені вздовж лінії L від точки M до точки N. Вигляд функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$ та рівнянь ліній L для кожного варіанту наводиться нижче.

7.1. $P(x,y)=x^2-2y$, $Q(x,y)=y^2-2x$, лінія L: відрізок MN, $\mathrm{M}\left(-4;0\right)$, $\mathrm{N}\left(0;2\right)$.

7.2. $P(x,y)=x^2+2y$, $Q(x,y)=y^2+2x$, лінія L: відрізок MN, $\mathrm{M}\left(-4;0\right)$, $\mathrm{N}\left(0;2\right)$.

7.3. $P(x,y)=x^2+2y$, $Q(x,y)=y^2+2x$,

лінія L: $y=2-\dfrac{x^8}{8}$, $\mathrm{M}\left(-4;0\right)$, $\mathrm{N}\left(0;2\right)$.

7.4. $P(x,y)=x+y$, $Q(x,y)=2x$,

лінія L: $x^2+y^2=4(y\ge 0)$, $\mathrm{M}\left(-4;0\right)$, $\mathrm{N}\left(0;2\right)$. $\left(-2;0\right)$

7.5. $P(x,y)=x^3$, $Q(x,y)=-y^3$,

лінія L: $x^2+y^2=4(y\ge 0)$, $\mathrm{M}\left(-2;0\right)$, $\mathrm{N}\left(0;2\right)$.

7.6. $P(x,y)=x+y$, $Q(x,y)=x-y$,

лінія L: $y=x^2$, M $(-1;1)$, N $(1;1)$.

7.7. $P(x,y)=x^2y$, $Q(x,y)=-y$,

лінія L: відрізок MN, M$(-1;0)$, N$(0;1)$.

7.8. $P(x,y)=2xy-y$, $Q(x,y)=x^2+x$,

лінія L: $x^2+y^2=9(y\geq 0)$, M $(3;0)$, N$(-3;0)$.

7.9. $P(x,y)=x+y$, $Q(x,y)=x-y$,

лінія L: $x^2+\frac{y^2}{9}=1\ (x,y\geq 0)$, M $(1;0)$, N$(0;3)$.

7.10. $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x$,

лінія L: $x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$, M $(1;0)$, N$(-1;0)$

7.11. $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x$,

лінія L: $x^2+y^2=2\ (y\geq 0)$, M $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.

7.12. $P(x,y)=xy$, $Q(x,y)=2y$,

лінія L: $x^2+y^2=1\ (x,y\geq 0)$, M $(1;0)$, N$(0;1)$.

7.13. $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=-x$,

лінія L: $2x^2+y^2=1\ (y\geq 0)$,

M $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$, N$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$.

7.14. $P(x,y)=x^2+y^2$, $Q(x,y)=2\left(x^2+y^2\right)$,

лінія L: $x^2+y^2=R^2\ (y\geq 0)$, M$(R;0)$, N$(-R;0)$.

7.15. $P(x,y)=x^2y$, $Q(x,y)=-xy^2$, лінія L: $x^2+y^2=4\ (x,y\geq 0)$, M$(2;0)$, N$(0;2)$.

7.16. $P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=-x^2$, лінія L: $x^2+y^2=9$ $(x,y\geq 0)$, $\mathrm{M}(3;0)$, $\mathrm{N}(0;3)$.

7.17. $P(x,y)=(x+y)^2$, $Q(x,y)=-(x^2+y^2)$, лінія L: відрізок MN $\mathrm{M}(1;0)$, $\mathrm{N}(0;1)$.

7.18. $P(x,y)=x^2+y^2$, $Q(x,y)=y^2$,
лінія L: відрізок MN, $\mathrm{M}(2;0)$, $\mathrm{N}(0;2)$.

7.19. $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=x^2$,
лінія L: $x^2+y^2=9$ $(x,y\geq 0)$, $\mathrm{M}(3;0)$, $\mathrm{N}(0;3)$.

7.20. $P(x,y)=y^2-y$, $Q(x,y)=2xy+x$,
лінія L: $x^2+y^2=9$ $(y\geq 0)$, $\mathrm{M}(3;0)$, $\mathrm{N}(-3;0)$.

7.21. $P(x,y)=xy$, $Q(x,y)=0$,
лінія L: $y=\sin x$, $\mathrm{M}(\pi;0)$, $\mathrm{N}(0;0)$.

7.22. $P(x,y)=xy-y^2$, $Q(x,y)=x$,
лінія L: $y=2x^2$, $\mathrm{M}(0;0)$, $\mathrm{N}(1;2)$.

7.23. $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$, лінія L: відрізок MN, $\mathrm{M}(1;0)$, $\mathrm{N}(0;3)$.

7.24. $P(x,y)=xy-x$, $Q(x,y)=\dfrac{x^2}{2}$,
лінія L: $y=2\sqrt{x}$, $\mathrm{M}(0;0)$, $\mathrm{N}(1;2)$.

7.25. $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$,
лінія L: $y=x^3$, $\mathrm{M}(0;0)$, $\mathrm{N}(2;8)$.

7.26. $P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=1$, лінія L: $x^2+y^2=4$ $(y\geq 0)$, $\mathrm{M}(2;0)$, $\mathrm{N}(-2;0)$.

7.27. $P(x,y)=xy-x$, $Q(x,y)=\dfrac{x^2}{2}$, лінія L: $y=2\sqrt{x}$ $(y\ge 0)$, $\mathrm{M}(3;0)$, $\mathrm{N}(-3;0)$.

7.28. $P(x,y)=xy$, $Q(x,y)=0$,

лінія L: $y=\sin x$, $\mathrm{M}(\pi;0)$, $\mathrm{N}(0;0)$.

7.29. $P(x,y)=xy-y^2$, $Q(x,y)=x$,

лінія L: $y=2x^2$, $\mathrm{M}(0;0)$, $\mathrm{N}(1;2)$.

7.30. $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$, лінія L: відрізок MN, $\mathrm{M}(1;0)$, $\mathrm{N}(0;3)$.

7.31. $P(x,y)=x-y$, $Q(x,y)=1$, лінія L: $x^2+y^2=4$ $(y\ge 0)$, $\mathrm{M}(2;0)$, $\mathrm{N}(-2;0)$.

Задача № 8

В задачах 8.1-8.26 треба перевірити, чи є даний вираз диференціалом деякої функції і у випадку правильності припущення знайти цю функцію за допомогою криволінійного інтегралу.

8.1. $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy$

8.2. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy$

8.3. $\frac{1-2y}{x^2y}dx+\frac{1-x}{xy^2}dy$

8.4. $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx+\frac{1-x}{y^2}dy$

8.5. $e^x\left(y+2\right)dx+\left(e^y+e^x\right)dy$

8.6. $\left(\ln(y)+\dfrac{y}{x}-x\right)dx+\left(\ln(x)+\dfrac{x}{y}+1\right)dy$

8.7. $\left(3x^2y-2x^3+y^3\right)dx-\left(2y^3-3xy^2-x^3\right)dy$

8.8. $\left(2xy-\dfrac{1}{x^2}\right)dx+\left(x^2-\dfrac{2}{y^3}\right)dy$

8.9. $\left(1-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}-1\right)dy$

8.10. $\left(5x^4y^2+e^x\right)dx+\left(2x^5y-\sin(y)\right)dy$

8.11. $\left(3x^2y^4-1\right)dx+\left(4x^3y^3+\dfrac{1}{y}\right)dy$

8.12. $\left(4x^3-y^2\right)dx+\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}-2xy\right)dy$

8.13. $\left(\dfrac{2x}{y}+3\cos(3x)\right)dx+\left(2-\dfrac{x^2}{y^2}\right)dy$

8.14. $\left(2xy^6-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(6x^2y^5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y^2}\right)dy$

8.15. $\left(3x^2e^{2y}-y\sin(x)\right)dx+\left(2x^3y^{2y}+\cos(x)\right)dy$

8.16. $\left(y-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx+\left(x+2e^{2y}\right)dy$

8.17. $\left(2x+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$

8.18. $\left(3x^2+e^{2y}\right)dx+\left(\sin(y)+2xe^{2y}\right)dy$

8.19.
$\left(\sin(2x)-2\cos(x+y)\right)dx+$
$+2\cos(x+y)dy$

8.20.
$\left(\frac{x+y+1}{x^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+$
$+\left(\frac{x-y}{xy}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$

8.21. $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$

8.22. $\frac{y}{x^2+y^2}e^{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}dx-\frac{x}{x^2+y^2}e^{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}dy$

8.23. $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\left(-\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy$

8.24.

$$\left(\sin(y)+y\cos(x)\right)dx+$$

$$+\left(x\cos(y)+\sin(x)\right)dy$$

8.25. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$

8.26. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydy}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$

8.27. $\dfrac{y}{x^2+y^2}e^{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}e^{arctg\left(\frac{y}{x}\right)}dy$

8.28. $\left(\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(-\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy$

8.29.

$$\left(\sin(y)+y\cos(x)\right)dx+$$

$$+\left(x\cos(y)+\sin(x)\right)dy$$

8.30. $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy$

8.31. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydy}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$

Розв'язання задачі 1.31. Згідно з умовою задачі маємо: $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} dy$

Запишемо межі областей D_1 та D_2

$$D_1 = \left\{ (x, y):\ -2 \le x \le -\sqrt{3},\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y):\ -\sqrt{3} \le x \le 0,\ 0 \le y \le 2 - \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

Лінія $y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4,\ y \ge 0$ - верхня половина кола з радіусом $R = 2$ і центром у точці $(0;\ 0)$, а лінія $y = 2 - \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4,\ y \le 2$ -

нижня половина кола з радіусом $R = 2$ і центром в точці $(0;\ 2)$. Області D_1 та D_2 зображені на рис.1.

Для зміни порядку інтегрування (коли внутрішнє інтегрування буде здійснюватись по *x*, а зовнішнє по *y*) треба розв'язати відносно *x* рівняння ліній, що обмежують область $D = D_1 \bigcup D_2$ ліворуч та праворуч.

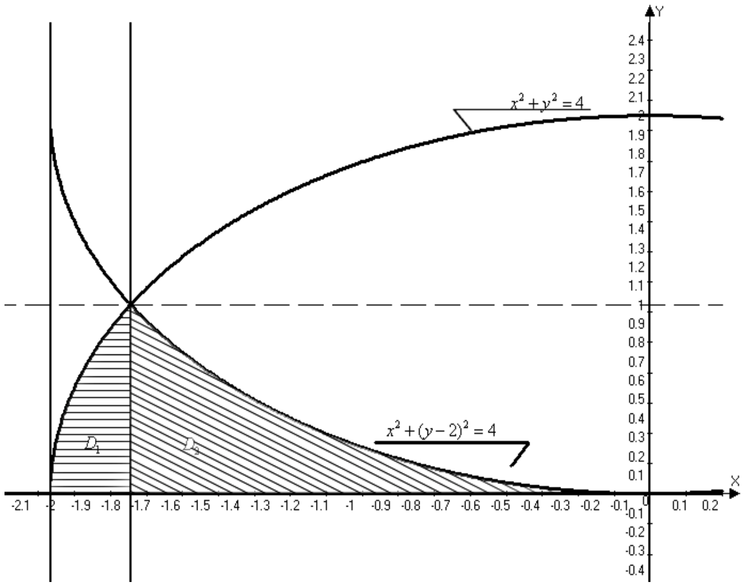

Рис. 1.

Маємо ліворуч: $x^2+y^2=4,\ x\le 0\Rightarrow x=-\sqrt{4-y^2}$;

Відповідно, праворуч: $x^2+(y-2)^2=4,\ x\le 0\Rightarrow x=-\sqrt{4-(y-2)^2}$.

Значення ординати точки перетину цих ліній знаходимо як розв'язок рівняння $-\sqrt{4-y^2}=-\sqrt{4-(y-2)^2}\Rightarrow y=1$.

Отже, проекцією області D на вісь Oy буде відрізок цієї осі $[0;\ 1]$, і область D буде визначатися такими межами $D=\left\{(x,\ y):\ 0\le y\le 1;\ -\sqrt{4-y^2}\le x\le -\sqrt{4-(y-2)^2}\right\}$.

Зведемо подвійний інтеграл до двократного за формулою

$$\iint_D f\,dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f\,dx$$

відповідно до $c=0,\ d=1,\ x_1(y)=-\sqrt{4-y^2},\ x_2(y)=-\sqrt{4-(y-2)^2}$ отримаємо:

$$\iint_D f dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} f dx .$$

Як бачимо, цього разу кількість двократних інтегралів скоротилась з двох до одного.
З властивостей подвійних інтегралів випливає, що площа плоскої фігури D може бути обчислена за формулою:

$$|D| = \iint_D dxdy$$

Якщо скористаємося цією формулою у першому разі (стосовно заданого порядку інтегрування), то будемо мати:

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy =$$

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} dy =$$

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx + \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left(2-\sqrt{4-x^2}\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx + 2\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx - \int_{-\sqrt{3}}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{4}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right]\Bigg|_{-2}^{-\sqrt{3}} + \qquad = 2\left[-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-3} + \frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+2\sqrt{3} - \frac{4}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right]\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{0} = +2\sqrt{3} - 2\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4-3}\right] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

У другому разі (стосовно зміненого порядку інтегрування)

$$|D| = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4-(y-2)^2}} dx =$$

$$-\int_0^1 \sqrt{4-(y-2)^2}\,dy + \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\,dy.$$

Замінимо у першому інтегралі змінну y на u за формулою $y-2=u$, $dy=du$ і межі інтегрування, відповідно: 0 на -2 та 1 на -1.

$$|D| = -\int_{-2}^{-1} \sqrt{4-u^2}\,du + \int_0^1 \sqrt{4-y^2}\,dy =$$

$$= -\frac{4}{2}\left[\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{u}{4}\sqrt{4-u^2}\right]\Bigg|_{-2}^{-1} +$$

$$+\frac{4}{2}\left[\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y}{4}\sqrt{4-y^2}\right]\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= -2\left[-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{4-1} + \frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+2\left[\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sqrt{4-1}\right] = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Розв'язання задачі 2.31. Згідно умови маємо обчислити подвійний інтеграл $\int\limits_D 12ye^{6xy}dxdy$, де

$D = \left\{(x,y): \frac{1}{6} \le x \le \frac{1}{3},\ \ln 3 \le y \le \ln 4\right\}$ − прямокутна область зображена на рис.2.

Для такої області порядок байдужий, але обчислення двократного інтегралу, якщо внутрішнє інтегрування здійснювати по x, а зовнішнє по y, значно простіше.

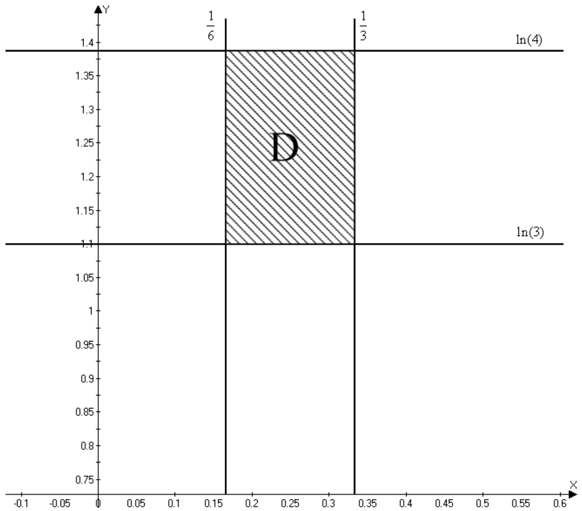

Рис.2.

Тому користуючись формулою

$$\iint\limits_D f dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f dx$$

згідно умови маємо: $c = \ln 3,\ d = \ln 4,\ a = \dfrac{1}{6},\ b = \dfrac{1}{3}$.

$$\int\limits_D 12 y e^{6xy} dx dy = \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} dy \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} 12 y e^{6xy} dx =$$

$$= \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} 12 y \left[\frac{1}{6y} e^{6xy} \right] \Bigg|_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{3}} dy = 2 \int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \left(e^{2y} - e^{y} \right) dy =$$

$$=2\left(\frac{e^{2y}}{2}-e^{y}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln 4}=2\left(\frac{1}{2}\cdot 16-4-\frac{1}{2}\cdot 9+3\right)=5$$

Розв'язання задачі 3.31. Згідно з умовою задачі маємо обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy$, де $D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

Область D зображена на рис.3.

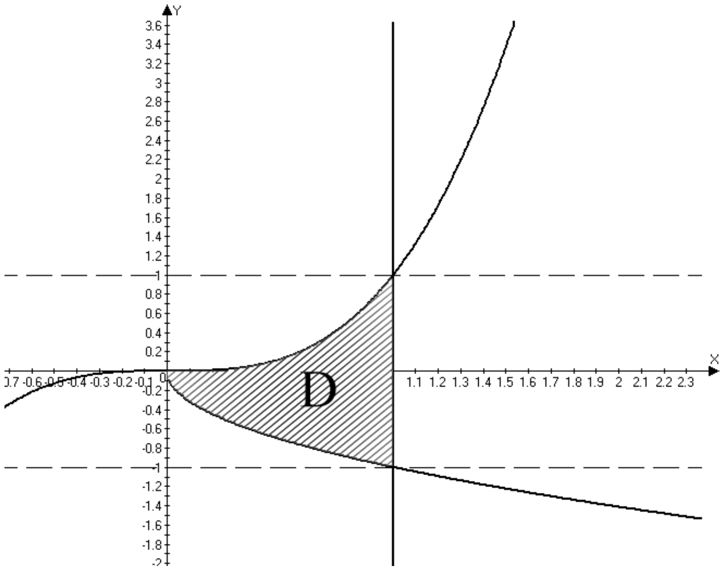

Рис.3.

З малюнка видно, що для даної області порядок інтегрування не має значення.

$$\iint\limits_{D} f dxdy=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f dy$$

$$\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^3}\left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 54x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3}dx+\int\limits_0^1 150x^4\left[\frac{y^5}{5}\right]\Bigg|_{-\sqrt{x}}^{x^3}dx=$$

$$=18\int\limits_0^1 x^2\left[x^9+x^{\frac{3}{2}}\right]dx+30\int\limits_0^1 x^4\left[x^{15}+x^{\frac{5}{2}}\right]dx=$$

$$=18\left[\frac{x^{12}}{12}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right]\Bigg|_0^1+30\left[\frac{x^{20}}{20}+\frac{x^{\frac{15}{2}}}{\frac{15}{2}}\right]\Bigg|_0^1=11$$

Розв'язання задачі 4.31. Згідно з умовою задачі треба обчислити площу плаского фігури D, яка обмежена лініями $x^2+y^2=12$, $x\sqrt{6}=y^2$, $(x\geq 0)$ (рис.4.).

Шукану площу обчислимо за формулою

$$|D|=\iint\limits_D 1dxdy$$

Якщо подвійний інтеграл зводити до двократного за формулою

$$\iint\limits_D fdxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} fdx,$$

то отримаємо один двократний інтеграл (в іншому разі їх буде два).

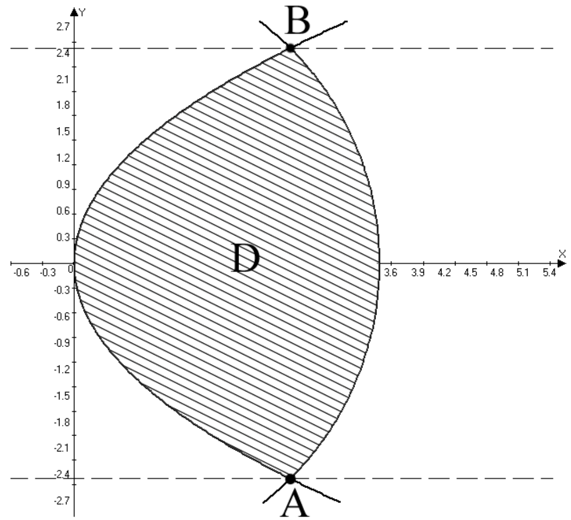

Рис. 4.

Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=12, \quad x\ge 0 \\ x\sqrt{6}=y^2 \end{cases}$, знаходимо точки $A\left(\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$ та $B\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$ перетину ліній $x^2+y^2=12$ і $x\sqrt{6}=y^2$, які обмежують D, відповідно ліворуч та праворуч, отже

$$D=\left\{\left(x;y\right):-\sqrt{6}\le y\le\sqrt{6},\frac{y^2}{\sqrt{6}}\le x\le\sqrt{12-y^2}\right\}$$

$$\left|D\right|=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}dy\int_{\frac{y^2}{\sqrt{6}}}^{\sqrt{12-y^2}}1dx=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(\sqrt{12-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{6}}\right)dy=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{6}}\sqrt{12-y^2}\,dy-2\int_0^{\sqrt{6}}y^2dy=$$

$$=2\frac{12}{2}\left[\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{12}}\right)+\frac{y}{12}\sqrt{12-y^2}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{6}}-\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{6}}=$$

$$=12\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{6}}{12}\sqrt{6}\right]-\frac{2}{3\sqrt{6}}\cdot\left(\sqrt{6}\right)^3=3\pi+2 \text{ (кв.од.)}$$

Розв'язання задачі 5.31. Згідно за умовою задачі треба обчислити площу плоскої фігури D, яка обмежена лініями:

$y^2-4y+x^2=0$, $y^2-8y+x^2=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$.

Фігура D зображена на рис.5.

З рисунка видно, що область D обмежена дугами кіл та променями, таким чином раціонально буде надати рівняння функцій у полярних координатах.

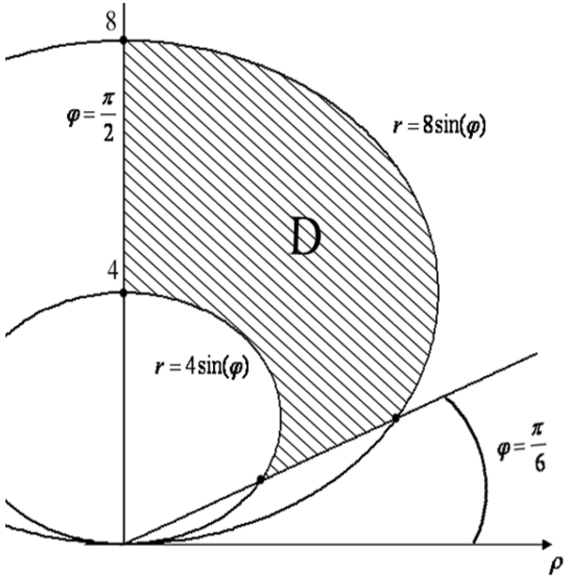

Рис.5.

Застосуємо формули переходу з декартових в полярні координати

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}.$$

$$y^2-4y+x^2=0\Rightarrow$$

$$\left(r\sin\varphi\right)^2-4r\sin\varphi+\left(r\cos\varphi\right)^2=0.$$

$4r\sin\varphi$ переносимо за знак рівності, виносимо r^2 за дужки, дістанемо

$$r^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)=4r\sin\varphi.$$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$ - тригонометрична одиниця, скорочуємо вираз на r.

$$r=4\sin\varphi.$$

Аналогічно знайдемо вигляд у полярних координатах для другої функції:

$$r=8\sin\varphi.$$

$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $x=0$ - прямі, що проходять через початок координат, в полярній системі вони будуть виглядіти як кути нахилу до полярної осі:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow r\sin\varphi=\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\varphi=\frac{\pi}{6}=30^\circ.$$

Аналогічно

$$x=0\Rightarrow r\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=0$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}=90^\circ.$$

Тоді область D буде мати запис:

$$D=\left\{\left(r,\varphi\right):\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},4\sin\varphi\le r\le 8\sin\varphi\right\}$$

Знайдемо площу області D, скориставшись формулою:

$$\iint_D frdrd\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} frdr .$$

Підставимо в записану формулу $f = 1$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\beta = \dfrac{\pi}{2}$, $r_1 = 4\sin\varphi$, $r_2 = 8\sin\varphi$.

$$|D| = \iint_D 1rdrd\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{4\sin(\varphi)}^{8\sin(\varphi)} rdr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_{4\sin(\varphi)}^{8\sin(\varphi)} \right) d\varphi =$$

$$= 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi) d\varphi =$$

$$= 24 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = 12 \left[\varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= 4\pi + 3\sqrt{3}$ кв.од

Розв'язання задачі 6.31. Треба знайти потрійний інтеграл $\iiint_V (x^2 z) dxdydz$, $V: y = 3x,\ y = 0,\ x = 2,\ z = xy,\ z = 0$.

Тривимірна область
$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \le z \le xy\}$ та її проекція на площину xOy $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3x\}$ зображені на рис.7.

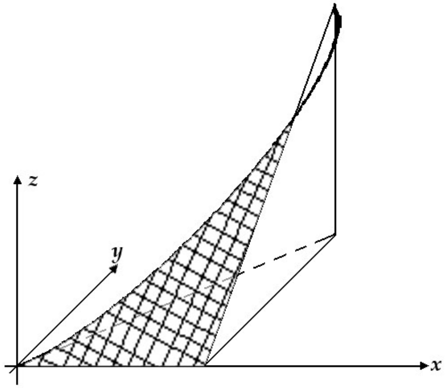

Рис.6

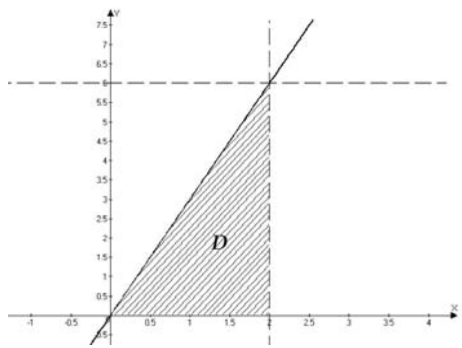

Рис.7

Для обчислення потрійного інтегралу зводимо його до трикратного за формулою

$$\iiint\limits_V f dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f dz, \quad (*)$$

де

$f(x,y,z) = x^2 z$,

$a = 0,\ b = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 3x,\ z_1 = 0,\ z_2 = xy$.

Згідно з цим

$$\iiint\limits_V x^2 z dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{3x} dy \int_0^{xy} x^2 z dz =$$

$$=\int_0^2 x^2dx\int_0^{3x}dy\int_0^{xy}zdz=\int_0^2 x^2dx\int_0^{3x}\left[\frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{xy}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx\int_0^{3x}(xy)^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\left[\frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_0^{3x}dx=\frac{1}{6}\int_0^2 x^4(3x)^3\,dx=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 3^3\cdot\frac{x^8}{8}\Bigg|_0^2=\frac{9}{2}\cdot\frac{2^8}{8}=144;$$

З властивостей потрійних інтегралів випливає, що об’єм може бути знайдений за формулою:

$$|V|=\iiint\limits_V 1\cdot dxdydz$$

Тобто, узявши до уваги формулу (*), шуканий об’єм:

$$|V|=\int_0^2 dx\int_0^{3x}dy\int_0^{xy}1dz=\int_0^2 dx\int_0^{3x}xydy=$$

$$=\int_0^2 x\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^{3x}dx=\frac{9}{2}\int_0^2 x^3dx=\frac{9}{2}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_0^2=18 \text{ куб. од.}$$

Розв’язання задачі 7.31. Треба знайти роботу сили

$$\vec{F}(x,y)=(x-y)\vec{i}+1\vec{j}$$

при переміщенні вздовж лінії $L:\ x^2+y^2=4$ від точки $M(2;0)$ до точки $N(-2;0)$.

З механічного змісту криволінійного інтегралу по координатам випливає, що робота вчинена силою $\overrightarrow{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ вздовж лінії L, визначається через криволінійний інтеграл за формулою:

$$A=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Якщо крива L подана параметричними рівняннями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta],$$

то для обчислення криволінійного інтегралу користуємося формулою:

$$\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=$$

$$\int\limits_\alpha^\beta\Big[P\big(\varphi(t);\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t);\psi(t)\big)\psi'(t)\Big]dt$$

Розв'яжемо рівняння $x^2+y^2=4\ (y\ge 0)$ кривої L відносно змінної y: $y=\sqrt{4-x^2}$ і приймемо змінну x за параметр t: $x=t$. Тоді, підставляючи у інтеграл $t=x$, $\alpha=2$, $\beta=-2$, $y=\sqrt{4-x^2}$,

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},\ P(x,y)=x-y,\ Q(x,y)=1$$

будемо мати:

$$A=\int\limits_2^{-2}\left[\left(x-\sqrt{4-x^2}\right)\cdot 1+1\cdot\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right]dx=$$

$$=\int\limits_2^{-2}xdx-\int\limits_2^{-2}\sqrt{4-x^2}\,dx-\int\limits_2^{-2}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{2}^{-2}-\frac{4}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{4}\sqrt{4-x^2}\right]\Bigg|_{2}^{-2}+$$

$$+\sqrt{4-x^2}\Big|_{2}^{-2}=-2\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

Перший і третій інтеграли дорівнюють нулю як інтеграли від непарної функції за симетричним відрізком інтегрування. При обчисленні другого інтегралу врахували примітку до задачі №1.

Розв'язання задачі 8.31. Для того, щоб перевірити, чи є даний вираз $\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$ повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, знаходимо

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=$$

$$-\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\begin{gathered}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\sqrt{x^2+y^2}+\\+\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\end{gathered}\right]=$$

$$= -\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)}*$$

$$*\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$= -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$= -\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Як бачимо, має місце рівність $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, цим доведено існування функції $u(x,y)$ такої, що

$$du=\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (*)$$

Для знаходження функції $u(x,y)$ за допомогою криволінійного інтегралу, враховуємо, що зі інтеграл не залежить від форми кривої L, найпростіше усього скористатись формулами

$$u(x,y)=\begin{cases}\int\limits_a^x P(t,b)dt+\int\limits_b^y Q(x,t)dt\\ \int\limits_b^y Q(a,t)dt+\int\limits_a^x P(t,y)dt\end{cases}$$

Підставляючи, наприклад, у першу формулу, значення $a=1,\ b=1,\ P(t,b)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$, $Q(x,t)=\dfrac{t}{\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+t^2}}$,

знаходимо

$$u(x,y)=\int\limits_1^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}+\int\limits_1^y\frac{tdt}{\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+t^2}}=$$

$$=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_1^x+\frac{1}{2}\int\limits_1^y\frac{d(x^2+t^2)}{\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)\cdot\sqrt{x^2+t^2}}=$$

$$=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_1^x+\int\limits_1^y\frac{d\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)}=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln\left(1+\sqrt{1+1^2}\right)+$$

$$+\ln\left(x+\sqrt{x^2+t^2}\right)\Big|_{t=1}^{t=y}=$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Таким чином, шукана функція є $u(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+C$, де $C=-u(a,b)$ - значення функції у фіксованій точці. Найчастіше (з точки зору спрощення) беруть значення $a=b=0$, але у нашому прикладі цього зробити не можна, тому що даний вираз в точці $(0,0)$ - неозначений (зважаючи на це доцільно узяти $a=b=1$).

Для контролю знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)'_x=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\equiv\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)'_y=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$\equiv\frac{y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

і переконуємося у вірності для знайденої функції $u=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)+C$ виразу (*).

Додаток

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + c;$

2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \alpha \neq -1;$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

4. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c;$

5. $\int \sin xdx = -\cos x + c;$

6. $\int \sin xdx = -\cos x + c;$

7. $\int \cos xdx = \sin x + c;$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

16. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$

Список рекомендованої літератури

1. Барковський В. В. Математика для економістів. Вища математика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : Національна академія управління, 1999 . – 399 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
3. Валєєв К. Г. Вища математика: навч. посіб. / К. Г.Валєєв, І. А.Джаладова . – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
4. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 1999. – 471 с.
5. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. – СПб. : Издательство Лань, 1999. – 736 с.
6. Общий курс высшей математики для экономистов / под. ред. В. И. Ермакова. – М. : ИНФРА – М., 2001. – 656 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - В 2-х т. - Т.1. / Н.С.Пискунов . – М. : Наука, 1985. – 560 с.
8. Соколенко О. І. Вища математика : підруч. / О. І.Соколенко. - К. : Академія, 2002. – 432 с.

Зміст

Вступ…………………………………...................................3

Розділ 1. Розрахункові завдання……………………………………4

Завдання 1.1 – 1.31. 4

Завдання 2.1 – 2.31. 7

Завдання 3.1 – 3.31. 10

Завдання 4.1 – 4.31. 12

Завдання 5.1 – 5.31. 14

Завдання 6.1 – 6.31. 18

Завдання 7.1 – 7.31. 24

Завдання 8.1 – 8.31. 27

Розділ 2. Методичні рекомендації…………………………………31

Додаток ………… 53

Список рекомендованої літератури 55

Навчальне видання

Вища математика.
Кратні та криволінійні інтеграли
(Модуль 10)

Контрольні завдання та методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В’ячеслав Сергійович
Богза Володимир Григорович
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 3,4
Тираж 40 прим. Зам. № 1403-1

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької Комуни, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р