



УДК 539.3

В. Г. Попов<sup>1</sup>, Л. В. Вахоніна<sup>2</sup>

## ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ПРУЖНИМ КРУГОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВИ ГЛАДКОГО КОНТАКТУ

*Розв'язано осесиметричну задачу про взаємодію гармонічних хвиль з тонким пружним круговим включенням, яке розташоване в пружному ізотропному тілі (матриці). На обох сторонах включення між ним і тілом (матрицею) реалізовані умови гладкого контакту. Метод розв'язування базується на поданні переміщень у матриці через розривні розв'язки рівнянь Ляме для гармонічних коливань. Це дозволило звести задачу до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно функцій, зв'язаних зі стрибками нормального напруження і радіального переміщення на включенні.*

На міцність і довговічність конструкцій і деталей машин суттєво впливає наявність в них дефектів у вигляді тонких чужорідних включень, зокрема у вигляді тонких дисків. Особливо складними є задачі про визначення напруженого стану в околі таких включень при динамічному навантаженні. Оскільки у більшості випадків включення мають жорсткість, більшу, ніж матриця (підкріплення, армуючі елементи в композитах), то поширеним є підхід, коли включення вважають абсолютно жорсткими. Наприклад, таке припущення реалізовано в статтях [8, 10, 11, 17]. Значно менше робіт, у яких враховують пружні властивості включення. Насамперед відмітимо роботу [12], де за допомогою асимптотичного методу розв'язано задачу про хвильове навантаження тіл з податливим дископодібним включенням. Але в усіх зазначених роботах припускається, що між матрицею і включенням виконуються умови повного зчеплення. У цій статті пропонуємо розв'язання задачі про гармонічні коливання необмеженого тіла з дископодібним пружним включенням у випадку умов гладкого контакту. Раніше таку задачу розв'язано для абсолютно жорсткого включення [3].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо необмежене пружне тіло (матрицю), у якому знаходиться включення у вигляді пружного диска товщини  $h$  і радіуса  $a$ ,  $h \ll a$ . Якщо ввести циліндричну систему координат, то в площині  $z = 0$  воно займає круг  $r \leq a$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Включення перебуває під дією хвиль, що поширюються у матриці. Розглядаємо декілька випадків хвильової дії. У першому випадку в середовищі розповсюджується плоска поздовжня хвиля, фронт якої паралельний до площини включення. Ця хвиля задається потенціалом і викликає в матриці переміщення:

$$\varphi_0 = \frac{A_0 e^{i\alpha_1 z}}{\alpha_1}, \quad u_z^0 = iA_0 e^{i\alpha_1 z}, \quad u_r^0 \equiv 0. \quad (1)$$

У другому випадку в матриці розповсюджуються циліндричні хвилі розширення-стиску. Тоді потенціал і переміщення визначаються за формулами [6]

$$\varphi_0(r, z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z}, \quad u_r^0 = -A_0 J_1(\beta_1 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = \frac{i\gamma A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z}. \quad (2)$$

Третій випадок полягає у взаємодії з включенням циліндричної хвилі зсуву з потенціалом [6], яка викликає в середовищі переміщення,

$$\psi_0(r, z) = \frac{B_0}{\beta_2^2} J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = B_0 J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z}, \quad u_r^0 = -\frac{i\gamma B_0}{\beta_2} J_1(\beta_2 r) e^{i\gamma z}. \quad (3)$$

У формулах (1)–(3) прийнято такі позначення:

$$\alpha_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad \beta_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \gamma^2}, \quad k = 1, 2, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad (4)$$



де  $\lambda_1, \mu_1$  – постійні Ляме матриці,  $\rho_1$  – густина матриці. Множник  $e^{-i\omega t}$ , який визначає залежність від часу, тут і надалі відкидаємо.

Умови взаємодії включення з матрицею з огляду на малу товщину включення формулюємо відносно його серединної площини. При гладкому контакті на включенні будуть розривними нормальне напруження і радіальне переміщення, для стрибків яких введемо позначення

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle &= \sigma_z(r, +0) - \sigma_z(r, -0) = \chi_1(r), \\ \langle u_z \rangle &= u_r(r, +0) - u_r(r, -0) = \chi_4(r). \end{aligned} \quad (5)$$

На обох сторонах включення виконуються рівності

$$\tau_{rz}(r, \pm 0) = 0, \quad u_z(r, \pm 0) = w_0(r), \quad 0 \leq r < a. \quad (6)$$

Тут  $w_0(r)$  – згинне переміщення серединної площини включення, яке визначається з рівняння згинних коливань круглих пластин [13] в умовах осьової симетрії:

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w_0 - m\omega^2 w_0 = \chi_1(r), \quad 0 \leq r < a, \quad (7)$$

де  $D = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu_0^2)}$  – циліндрична жорсткість;  $m = h\rho_0$  – маса одиниці площі

включення. Рівняння (7) розглядаються з умовами вільного краю

$$M(a) = 0, \quad Q(a) = 0,$$

де  $M(a)$  – згинний момент і  $Q(a)$  – поперечна сила у включенні. З останніх рівностей випливає, що

$$\left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad 0 \leq r < a. \quad (8)$$

Окрім цього, функція  $w_0(r)$  повинна бути обмеженою, коли  $r \rightarrow 0$ .

**2. Розв'язання задачі.** Для визначення переміщень і напруження у матриці, які ввійшли в умови (6), подамо їх у вигляді

$$u_z = u_z^0 + u_z^1, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^0 + \tau_{rz}^1. \quad (9)$$

Тут  $u_z^0, \tau_{rz}^0$  – переміщення і напруження, викликані в середовищі хвилею, що розповсюджується. Доданки  $u_z^1, \tau_{rz}^1$  – це переміщення і напруження, викликані хвилями, відбитими від включення. Вони записуються через стрибки (5) за допомогою розривного розв'язку рівнянь Ляме, який для випадку коливання пружного середовища в умовах осьової симетрії [14] має вигляд

$$\begin{aligned} u_z^1 &= \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{31}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4(\eta) g_{34}(\eta, r, z) d\eta, \\ \tau_{rz}^1 &= \int_0^a \eta \chi_1(\eta) g_{21}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4(\eta) g_{24}(\eta, r, z) d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

Для розв'язання крайової задачі (7), (8) спочатку побудуємо функцію Гріна, яка визначається формулою

$$G_1(\eta, r) = g_1(\eta, r) - \frac{1}{q_{01}} (J_0(q_{01}\eta)G_1(r) + I_0(q_{01}\eta)G_2(r)). \quad (11)$$

У формулі (11)  $g_1(\eta, r)$  – фундаментальна функція рівняння (7), яка дорівнює



$$g_1(\eta, r) = \frac{1}{2q_1}(g_1^-(\eta, r) + g_1^+(\eta, r)), \quad g_1^\pm(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r) J_0(\lambda \eta)}{\lambda^2 \pm q_1^2} d\eta.$$

Для інших функцій з (11) мають місце такі рівності:

$$G_1(r) = \frac{1}{2\Delta(q_{01})} \left( A_1(q_{01}) J_0(q_1 r) + \frac{I_0(q_1 r)}{q_{01}} \right),$$

$$G_2(r) = \frac{1}{2\Delta(q_{01})} \left( A_2(q_{01}) J_0(q_1 r) + \frac{I_0(q_1 r)}{q_{01}} \right),$$

$$A_1(q_{01}) = I_1(q_{01}) a_2(q_{01}) + \frac{\pi i}{2} h_1(q_{01}) H_1^{(1)}(q_{01}),$$

$$A_2(q_{01}) = a_1(q_{01}) K_1(q_{01}) - J_1(q_{01}) h_2(q_{01}),$$

$$\Delta(q_{01}) = a_1(q_{01}) I_1(q_{01}) + J_1(q_{01}) h_1(q_{01}),$$

$$a_1(q_{01}) = J_0(q_{01}) - (1 - \nu_0) \frac{J_1(q_{01})}{q_{01}},$$

$$a_2(q_{01}) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(q_{01}) - (1 - \nu_0) \frac{H_1^{(1)}(q_{01})}{q_{01}},$$

$$h_1(q_{01}) = I_0(q_{01}) - (1 - \nu_0) \frac{I_1(q_{01})}{q_{01}},$$

$$h_2(q_{01}) = K_0(q_{01}) + (1 - \nu_0) \frac{K_1(q_{01})}{q_{01}}, \quad q_1^4 = \frac{m\omega^2}{D}, \quad q_{01} = qa.$$

За допомогою функції Гріна розв'язок граничної задачі (7), (8) подаємо у вигляді

$$w_0(r) = \int_0^a \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta, \quad 0 \leq r < a. \quad (12)$$

Далі після підстановки (9), (10), (12) у граничні умови (6) отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків:

$$\begin{aligned} \int_0^a \eta \chi_1(\eta) F_{21}(\eta, r) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4^*(\eta) F_{24}(\eta, r) d\eta &= -\frac{\tau_{rz}^0(r, 0)}{\mu_1}, \\ \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} F_{31}(\eta, r) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4^*(\eta) F_{34}(\eta, r) d\eta &= \\ &= \int_0^a \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta - u_z^0(r, 0), \quad 0 \leq r < a. \end{aligned} \quad (13)$$

При виведенні системи (13) в інтегралах, які містять  $\chi_4(\eta)$ , було проведено інтегрування частинами і введено такі позначення:

$$\chi_4^*(\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \chi_4(\eta)),$$

$$F_{21}(\eta, r) = \frac{1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{B(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda^2 J_0(\lambda \eta) J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$F_{24}(\eta, r) = \frac{\mu_1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{R(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda J_1(\lambda \eta) J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$F_{31}(\eta, r) = -\frac{1}{2\mu_1 \alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{S(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda J_0(\lambda \eta) J_0(\lambda r) d\lambda,$$



$$F_{34}(\eta, r) = -\frac{1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{B(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda^2 J_1(\lambda\eta) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

де  $q_1(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_1^2}$ ,  $q_2(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2}$ .

З метою зведення системи (13) до вигляду, зручного для чисельного розв'язання і виділення із ядер інтегральних операторів сингулярної складової, необхідно зробити перетворення, аналогічні викладеним в [1]. Для цього вводимо у розгляд функції

$$\begin{bmatrix} T_1(\lambda) \\ T_4(\lambda) \end{bmatrix} = \int_0^a \eta \begin{bmatrix} \chi_1(\eta) \\ \chi_4^*(\eta) \end{bmatrix} J_0(\lambda\eta) d\eta.$$

Потім на перше і друге рівняння отриманої системи діємо операторами

$$D_1[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(r) dr, \quad D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f(r)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dr.$$

В отримані після цього рівняння підставляємо подання  $T_k(\lambda)$  через косинус-інтеграли Фур'є

$$\begin{bmatrix} T_1(\lambda) \\ T_4(\lambda) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^a \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_4(\tau) \end{bmatrix} \cos \lambda \tau d\tau.$$

Функції  $\varphi_k(\tau)$  пов'язані зі стрибками  $\chi_k(\eta)$  формулами

$$\chi_1(\eta) = \frac{2}{\pi} \int_\eta^a \varphi_1(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) d\tau,$$

$$\chi_4^*(\eta) = -\frac{2}{\pi} \int_\eta^a \varphi_2(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} \right) d\tau,$$

$$\varphi_1(\tau) = \int_\tau^a \frac{\eta \chi_1(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \tau^2}} d\eta, \quad \varphi_2(\tau) = \int_\tau^a \frac{\tau \chi_4^*(\eta)}{\sqrt{\eta^2 - \tau^2}} d\eta, \quad 0 \leq \tau < a,$$

$$\varphi_1(\tau) \equiv 0, \quad \varphi_2(\tau) \equiv 0, \quad \tau > a.$$

У результаті цих дій отримуємо, що функції  $\varphi_k(\tau)$ ,  $k = 1, 4$ , є розв'язками такої системи інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) (R_1(y - \zeta) - R_1(y)) dy + \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) (R_2(y - \zeta) - R_2(y)) dy = f_1(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) R_3(y - \zeta) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y) R_1(y - \zeta) dy = \\ & \quad = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y) F(\zeta, y) dy + f_2(\zeta). \end{aligned} \quad (14)$$

При виведенні рівнянь (14) було введено позначення

$$\tau = ay, \quad x = a\zeta, \quad \varphi_k(ay) = \mu_1 a g_k(y), \quad k = 1, 2,$$

$$\alpha_0 = a\alpha_2, \quad \gamma = d_k, \quad \xi = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Праві частини системи (14) в залежності від типу хвилі, що падає на включення, визначаються такими формулами.



При взаємодії з *плоскою поздовжньою хвилею*

$$f_1(\xi) = 0, \quad f_2(\zeta) = -i\alpha.$$

Якщо в середовищі розповсюджуються *циліндричні хвилі розширення-стиску*, тоді

$$f_1(\xi) = \frac{2i\alpha_0}{d_1}(1 - \cos \xi x_0 b_1 y), \quad f_2(\zeta) = \frac{d_1 \alpha_0 \cos(\xi x_0 b_1 y)}{b_1}.$$

У випадку дії на включення *циліндричної хвилі поперечного зсуву*

$$f_1(\xi) = \frac{\beta_0(2b_2^2 - 1)(1 - \cos x_0 b_2 y)}{b_2^2}, \quad f_2(\zeta) = \beta_0 \cos(x_0 \beta_2 y).$$

В отриманій системі (14) функція  $F(\zeta, y)$  має вигляд, наведений у [2], а функції  $R_k(x)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , визначаються інтегралами

$$R_k(x) = x_0 \int_0^\infty B_k(u) \cos u x_0 x \, du, \quad k = 1, 2, 3, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} B_1(u) &= \frac{ub(u)}{\sqrt{u^2 - 1}}, & B_2(u) &= \frac{R_0(u)}{u\sqrt{u^2 - 1}}, & B_3(u) &= \frac{u\sigma(u)}{\sqrt{u^2 - 1}}, \\ b(u) &= 2u^2 - 1 - 2\sqrt{u^2 - 1}\sqrt{u^2 - \xi^2}, \\ R_0(u) &= (2u^2 - 1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2 - 1}\sqrt{u^2 - \xi^2}, \\ \sigma(u) &= u^2 - \sqrt{u^2 - 1}\sqrt{u^2 - \xi^2}, & u &= \frac{\lambda}{x_2}. \end{aligned}$$

Можна бачити, що функції  $B_k(u)$ , які входять в інтеграли (16), є обмеженими при  $u \rightarrow \infty$ , і тому ці інтеграли необхідно розуміти в узагальненому сенсі. Для встановлення цього значення слід скористатися формулами (3.753) з [4] і формулами диференціювання узагальнених функцій [7]. У результаті знайдемо

$$R_k = R_{k1} + iR_{k2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (17)$$

$$R_{11}(p) = \frac{\pi}{2} [2C_{11}(p)\delta''(p) + 2C_{12}(p)\delta'(p) + C_{13}(p)\delta(p) + C_{14}(p)\operatorname{sgn}(p)],$$

$$R_{21}(p) = \frac{\pi}{2} [4C_{21}(p)\delta''(p) + 4C_{22}(p)\delta'(p) + C_{23}(p)\delta(p) + C_{24}(p)\operatorname{sgn}(p)],$$

$$R_{31}(p) = \frac{\pi}{2} [C_{31}(p)\delta''(p) + C_{32}(p)\delta'(p) + C_{33}(p)\delta(p) + C_{34}(p)\operatorname{sgn}(p)],$$

$$R_{12}(p) = x_0(-2S_1(p) - S_2(p) + 2\xi^2 S_1(\xi p) + 2\xi^3 S_2(\xi p)),$$

$$R_{22}(p) = x_0(-4S_1(p) - 4S_2(p) + 4\xi^3 S_1(p) + 4\xi^3 S_2(\xi p) - C_2(p)),$$

$$R_{32}(p) = x_0(2S_1(x_0 p) - 2\xi^3 S_1(\xi x_0 p) + \xi^3 S_2(\xi x_0 p)),$$

де  $\delta(p)$  – дельта-функція Дірака, а інші функції визначаються формулами

$$\frac{1}{2} C_{11}(p) = \frac{1}{4} C_{21}(p) = -\frac{2}{x_0^2} (J_0(x_0 p) - J_0(\xi x_0 p)),$$

$$\frac{1}{2} C_{12}(p) = \frac{1}{4} C_{22}(p) = \frac{6}{x_0} (J_1(x_0 p) - \xi J_1(\xi x_0 p)),$$

$$C_{13}(p) = 2(6A_1(p) - 6\xi^2 A_1(\xi p) + J_0(x_0 p) - 2\xi^3 J_0(\xi x_0 p)),$$

$$C_{14}(p) = x_0(-2A_2(p) + 2\xi^3 A_2(\xi p) + J_1(x_0 p) - 2\xi^3 J_1(\xi x_0 p)),$$

$$C_{23}(p) = 8(3A_1(p) - 3\xi^2 A_1(\xi p) - J_0(x_0 p) + \xi^2 J_0(\xi x_0 p)),$$

$$C_{24}(p) = -4x_0(A_2(p) - \xi^3 A_2(\xi p) - J_1(x_0 p) + \xi^3 J_1(\xi x_0 p) - x_0 C_1(p)),$$



$$\begin{aligned}
C_{31}(p) &= -\frac{2}{x_0^2} (J_0(x_0 p) - J_0(\xi x_0 p)), \\
C_{32}(p) &= \frac{6}{x_0^2} (x_0 J_1(x_0 p) - \xi x_0 J_1(\xi x_0 p)), \\
C_{33}(p) &= 6A_1(x_0 p) - 6A_1 \xi^2 (\xi x_0 p) + 2\xi^2 J_0(\xi x_0 p), \\
C_{34}(p) &= -x_0 A_2(x_0 p) + x_0 \xi^3 A_2(\xi x_0 p) + x_0 \xi^3 J_1(x_0 p), \\
A_1(x) &= J_0(x) - \frac{J_1(x)}{x}, & A_2(x) &= J_1(x) - \frac{2J_1(x)}{x^2} + \frac{J_0(x)}{x}, \\
S_1(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{2m}, & S_2(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{2m}, \\
a_0 &= \frac{1}{3}, & b_0 &= 1, & a_m &= \frac{(-1)^m (m+1)}{(2m-1)!!(2m+1)!!}, \\
b_m &= \frac{(-1)^m}{(2m-1)!!(2m+1)!!}, & m &= 1, 2, \dots, \\
C_1(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k |x_0 z|^{2k+1}, & C_2(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x_0 z)^{2k+2}, \\
d_k &= \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k} (2k+1)}, & c_k &= \frac{(-1)^k}{(2k+2)((2k+1)!!)^2}.
\end{aligned}$$

Після підстановки (17) в систему (14) і обчислення інтегралів з  $\delta$ -функцією і її похідними отримаємо систему інтегральних рівнянь, матричний запис якої має вигляд

$$AG(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 Q(\zeta, y) G(\zeta) d\zeta + A_0 G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 Q_0(\zeta) G(\zeta) d\zeta = F(y). \quad (18)$$

Вектори  $G(y)$ ,  $F(y)$  і матриці  $A$ ,  $A_0$ ,  $Q_0$  знаходимо за формулами

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{\xi^2}{2} & 1 - \xi^2 \\ -\frac{1 + \xi^2}{4} & -\frac{\xi^2}{2} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} \xi^2 & -(1 - \xi^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_\ell(\zeta) = Q_{\ell 1}(\zeta) + iQ_{\ell 2}(\zeta), \quad \ell = 1, 2,$$

$$Q_{11}(p) = \frac{\pi x_0}{2} \operatorname{sgn}(p) (-2A_2(p) + 2\xi^3 A_2(\xi p) + J_1(x_0 p) - 2\xi^3 J_1(\xi x_0 p)),$$

$$Q_{21}(p) = \frac{\pi x_0}{2} \operatorname{sgn}(p) [(A_2(p) - \xi^3 A_2(\xi p) - J_1(x_0 p) + \xi^3 J_1(\xi x_0 p) + C_1(p))],$$

$$Q_{31}(p) = \frac{\pi x_0}{2} \operatorname{sgn}(p) (-A_2(p) + \xi^3 A_2(\xi p) + \xi^3 J_1(\xi x_0 p)),$$

$$Q_{\ell j}(p) = R_{\ell j}(p), \quad \ell, j = 1, 2,$$

$$Q = \begin{pmatrix} -Q_1 & -Q_2 \\ -P_1 & -Q_3 \end{pmatrix}, \quad P_1(\zeta, y) = Q_3(\zeta - y) - F(\zeta, y).$$

Оскільки  $\det(A) = \frac{1}{4} \neq 0$ , то завжди можна знайти матрицю, обернену до матриці  $A$ :



$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2\xi^2 & -4(1-\xi^2) \\ 1+\xi^2 & -2\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обидві частини системи (18) на матрицю  $A^{-1}$  і введемо позначення

$$R = A^{-1}Q, \quad R^0 = A^{-1}Q_0, \quad D^0 = A^{-1}A_0, \quad H^0 = A^{-1}d, \quad H = A^{-1}F.$$

Внаслідок цього система (18) перетворюється до вигляду

$$G(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 R(\zeta - y)G(\zeta) d\zeta + D^0 G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 R^0(\zeta)G(\zeta) d\zeta = H(y),$$

$$-1 \leq y \leq 1. \quad (19)$$

Отримана система (19) є системою інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, яка допускає ефективне числове розв'язання.

Наближений розв'язок системи (19) знаходимо у вигляді інтерполяційного полінома

$$G(y) = \sum_{m=1}^n G_m \frac{P_n(y)}{(y - y_m)P'_n(y_m)}, \quad G_m = \begin{pmatrix} g_1(y_m) \\ g_2(y_m) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$P_n(y)$  – многочлен Лежандра, а  $y_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , – його корені.

Якщо тепер скористатися тотожністю Дарбу – Крістофеля для многочленів Лежандра [15, 16]:

$$\frac{P_n(y)}{y - y_m} = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) \frac{P_j(y)P_j(y_m)}{P_{n+1}(y_m)},$$

то знайдемо, що

$$G(0) = \sum_{m=1}^n A_m b_m^0 G_m, \quad A_m = \frac{2}{(1 - y_m^2)[P'_m(y_m)]^2},$$

$$b_m^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) P_j(0) P_j(y_m). \quad (21)$$

Інтеграли у системі (19) наблизимо за квадратурною формулою Гауса [9] і скористаємося (21). У результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для наближеного знаходження значень невідомих функцій у вузлах інтерполяції:

$$G_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m [R(y_m - y_j) + R^0(y_m) + D^0 b_m^0] G_m = F_j,$$

$$F_j = F(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (22)$$

Для оцінки концентрації напружень у матриці поблизу включення використовуємо коефіцієнти інтенсивності напруження (КІН) [1, 5]

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow a-0} \sqrt{a-r} \chi_1(r), \quad K_3 = \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{a-r} \tau_{rz}^1(r, 0).$$

Після виконання граничного переходу знайдемо, що

$$K_j = \mu_1 \sqrt{2a} N_j, \quad j = 1, 3, \quad (23)$$

де

$$N_1 = \frac{g_1(1)}{\pi}, \quad N_3 = \frac{\xi^2}{2} g_1(1) - (1 - \xi^2) g_2(1).$$

За допомогою (23) безрозмірні значення КІН виразимо через розв'язок системи (22) за формулами

$$N_1 = \frac{\sigma_1}{2\pi}, \quad N_3 = \frac{1}{2\pi} (\xi^2 \sigma_1 - 2(1 - \xi^2) \sigma_2),$$

$$\sigma_1 = \sum_{m=1}^n C_m g_j(y_m), \quad C_m = ((1 - y_m) P'_n(y_m))^{-1}. \quad (24)$$



**3. Аналіз результатів числового дослідження і висновки.** Розглянемо результати числового дослідження почастотної залежності КІН. По-перше, було з'ясовано вплив саме жорсткості включення на концентрацію напружень біля нього. Для цього приймали, що включення і матриця мають однакову густину та коефіцієнти Пуассона ( $\bar{\rho} = 1, \nu_0 = \nu_1 = 0.25$ ). Результати цих досліджень наведено на рис. 1 і рис. 2. Криві, що відповідають вказаному значенню відношення модулів пружності матриці і включення  $e_0 = \frac{E_1}{E_0}$ , побудовано в припущенні, що з включенням взаємодіє плоска поздовжня хвиля (1). Криві, що відповідають  $e_0 = 10^{-5}$  на рис. 1 і  $e_0 = 10^{-4}$  на рис. 2, цілком співпадають з аналогічними кривими, побудованими для абсолютно жорсткого включення [3]. Поведінка обох коефіцієнтів ускладнюється при спаданні жорсткості включення і набуває складного вигляду з великою кількістю максимумів і мінімумів. Значення  $|N_1|$  для пружного включення, як правило, перевищують відповідні значення для абсолютно жорсткого включення і це перевищення може сягати декілька разів. Значення  $|N_3|$  для пружного включення, як правило, є меншими від обчислених для абсолютно жорсткого включення.

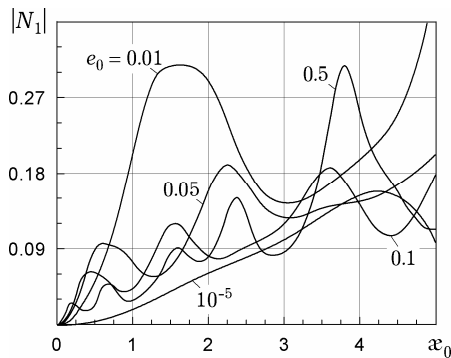


Рис. 1

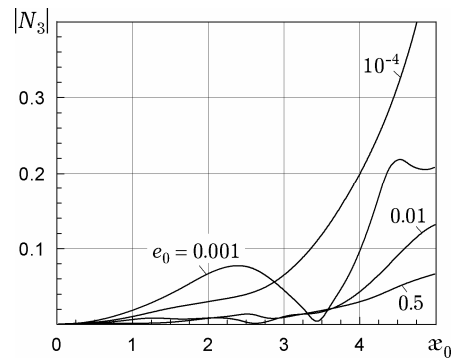


Рис. 2

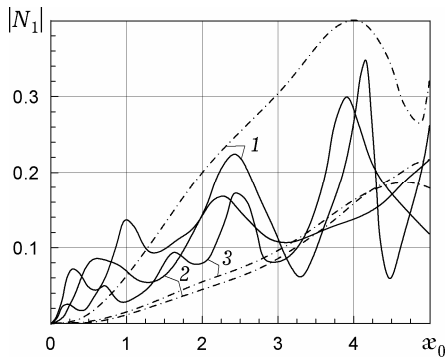


Рис. 3

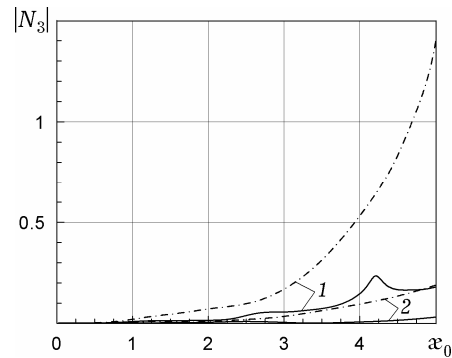


Рис. 4

Також проведено розрахунки КІН для включень і матриць з реальних матеріалів. Результати цих розрахунків ілюструють графіки на рис. 3 – рис. 8. Суцільні криві побудовано з урахуванням пружності включення, а пунктирні – згідно з припущенням, що включення є абсолютно жорстким. Включення вважали сталевим, а для матриці вибрано три види матеріалів. Криві 1 побудовано для випадку бетонної матриці, криві 2 відповідають випадкові, коли матеріалом матриці є свинець, а крива 3 на рис. 3 відповідає матриці з міді.



Графіки на рис. 3 і рис. 4 показують зміну КІН в залежності від хвильового числа при взаємодії з включенням плоскої поздовжньої хвилі. Результати розрахунків, наведені на рис. 5 і рис. 6, відповідають випадку дії на включення поздовжньої циліндричної хвилі, а графіки на рис. 7 і рис. 8 побудовано, коли на включення діє поперечна циліндрична хвиля.

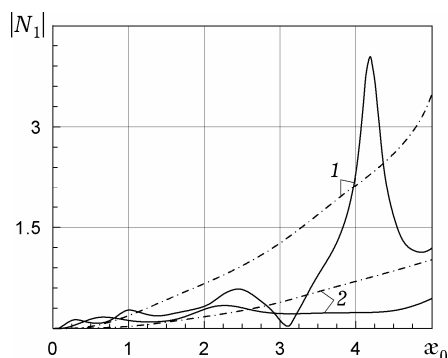


Рис. 5

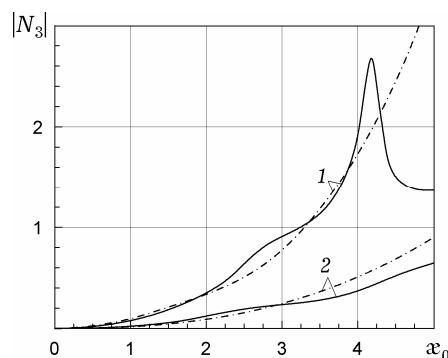


Рис. 6

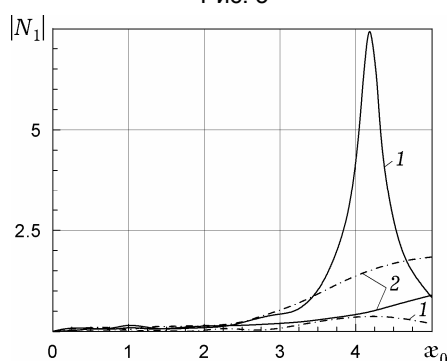


Рис. 7

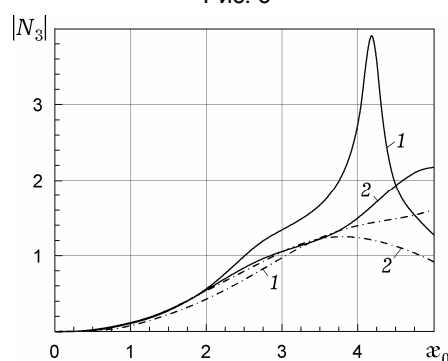


Рис. 8

Аналіз усіх цих графіків показує, що у випадку для включень і матриць з реальних матеріалів врахування пружності включень суттєво впливає на значення КІН. Значення КІН, отримані з урахуванням пружності, для деяких матеріалів можуть перевищувати значення КІН, які відповідають абсолютно жорсткому включенню, а для деяких – бути значно меншими. При врахуванні жорсткості включення також суттєво змінюється залежність КІН від хвильового числа. Вона стає більш складною з великою кількістю максимумів і мінімумів. Причому максимальні значення КІН у декілька разів можуть перевищувати відповідні значення для абсолютно жорстких включень. Все це вказує на необхідність урахування пружності включень при розрахунках на міцність деталей машин і конструкцій, що їх містять.

1. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. – Москва: Физматлит, 1993. – 224 с.
2. Вахонина Л. В. Изгибные колебания кругового тонкого включения в неограниченном теле // Теория і практика процесів подрібнення, розділення, змішування і ущільнення. – 2006. – Вып. 12. – С. 24–31.
3. Вахонина Л. В., Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн с тонким жестким круговым включением в случае гладкого контакта // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 158–166.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1100 с.
5. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 41–48.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.



7. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Москва: Мир, 1978. – 518 с.
8. Кит Г. С., Михаськів В. В., Хай О. М. Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, № 5. – С. 855–863.
9. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
10. Михаськів В. В., Хай О. М. До теорії міцності пружних тіл з плоскими жорсткими включеннями в полі усталених динамічних навантажень // машинознавство. – 1993. – № 3. – С. 17–22.
11. Михаськів В. В., Калиняк О. І. Нестационарні збурення тривимірної пружної матриці з жорстким дисковим включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 2. – С. 7–15.  
Te same: Mykhas'kiv V. V., Kalynyak O. I. Nonstationary perturbations of a three-dimensional elastic matrix containing a rigid disc-shaped inclusion // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 2. – P. 139–149.
12. Михаськів В. В., Кунець Я. І., Мищенко В. О. Напруження у тривимірному тілі з тонким податливим включенням за фронтом імпульсних хвиль // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 3. – С. 63–68.  
Te same: Mykhas'kiv V. V., Kunets' Ya. I., Mishchenko V. O. Stresses in a three-dimensional body with thin compliant inclusion behind the front of pulsed waves // Mater. Sci. – 2003. – **39**, No. 3. – P. 377–384.
13. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.
14. Попов Г. Я. Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами // Докл. РАН. – 1999. – **364**, № 6. – С. 769–773.
15. Сёге Г. Ортогональные многочлены. – Москва: Физматгиз, 1962. – 501 с.
16. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1979. – 416 с.
17. Tadeu A., Mendes P. A., Antonio J. The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method // Comput. and Struct. – 2006. – **84**, No. 31–32. – P. 2244–2253.

#### **ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА С ТОНКИМ УПРУГИМ КРУГОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ УСЛОВИИ ГЛАДКОГО КОНТАКТА**

*Решена осесимметричная задача о взаимодействии гармонических волн с тонким упругим круговым включением, которое расположено в упругом изотропном теле (матрице). На обеих сторонах включения между ним и телом (матрицей) реализованы условия гладкого контакта. Метод решения базируется на представлении перемещений в матрице через разрывные решения уравнений Ламе для гармонических колебаний. Это позволило свести задачу к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно функций, связанных со скачками нормального напряжения и радиального перемещения на включении.*

#### **AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF UNLIMITED BODY WITH THIN ELASTIC CIRCULAR INCLUSION UNDER CONDITION OF SMOOTH CONTACT**

*An axisymmetric problem on interaction between the harmonic waves and thin elastic circular inclusion in elastic isotropic body (matrix) is solved. The conditions of smooth contact are realized on both sides of inclusion between it and the body (matrix). The method of solution is based on presenting the displacements in the matrix in terms of discontinuous solutions of Lamé equations for harmonic vibrations. It made it possible to reduce the problem to the Fredholm second order integral equations relative to the functions connected with the normal stress jumps and radial displacements on the inclusion.*

<sup>1</sup> Одеська нац. морська акад., Одеса,

<sup>2</sup> Миколаїв. держ. аграр. ун-т, Миколаїв