МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

модуль "Основи теорії
функцій комплексної змінної"
методичні рекомендації до
виконання самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти
освітнього ступеня "Бакалавр"
спеціальності 141 "Електроенергетика,
електротехніка та електромеханіка"
денної та заочної форм навчання

Миколаїв
2021

УДК 517.5
В 41

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від________2021 р., протокол №___.

Укладачі:

В. С. Шебанін – д-р. техн. наук, академік, ректор МНАУ;

Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;

І. П. Атаманюк – д-р. техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;

О. В. Шептилевський – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;

С. І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;

О. В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ;

О. І. Власов – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ.

Рецензенти:

В.О. Поздєєв – д-р фіз.-мат. наук, професор, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського;

В. І. Гавриш – д-р. е. наук, професор, завідуючий кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 141"Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв'язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Комплексні числа.

Тема 2. Функції комплексної змінної.

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної.

Тема 4. Інтеграл від функції комплексної змінної.

Тема 5. Ряди з комплексними числами.

Тема 6. Ряди Тейлора і Лорана.

Тема 7. Обчислення лишків функцій. Застосування лишків до обчислення інтегралів.

Тема 1. Комплексні числа

1.1 Основні теоретичні відомості

<u>Означення 1.</u> *Комплексними числами* (в алгебраїчній формі) називаються числа виду, $x+iy$ де x і y – дійсні числа, i – *уявна одиниця*, яка визначається рівністю $i^2=-1$. Дійсні числа x і y називаються відповідно *дійсною* та *уявною* частинами комплексного числа z і позначаються $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Геометрично кожне комплексне число $z=x+iy$ зображається точкою $M(x,y)$ (або радіус - вектором $\overrightarrow{OM}$) координатної площини xOy. В цьому випадку площина xOy називається *комплексною числовою площиною*.

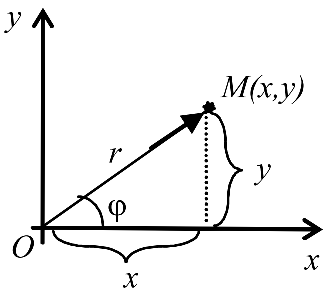

Рис.1

<u>Означення 2.</u> Полярні координати r і φ точки $M(x,y)$, що є зображенням комплексного числа z, називаються *модулем* і *аргументом* комплексного числа z. Для них вводяться позначення

$$r=|z|, \quad \varphi=Arg(z).$$

Оскільки кожній точці площини відповідає нескінченна множина значень полярного кута, що відрізняються одне від одного на $2k\pi$ (k – ціле додатнє або від’ємне число), то аргумент $Arg(z)$– нескінченна функція z.

Те значення полярного кута φ, яке задовільняє нерівності $-\pi\le\varphi\le\pi$, називають *головним значенням* аргумента z і позначають $\arg(z)$. Тоді всі інші значення аргумента z знаходяться за формулою

$$Arg(z)=\arg(z)+2k\pi.$$

Співвідношення між модулем і аргументом комплексного числа z і його дійсною та уявною частинами (рис.1) задається формулами

$$x = r\cos\varphi \ ; \ \ y = r\sin\varphi .$$

Звідсіля $$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

$$\cos\varphi = x/|z| = x\Big/\sqrt{x^2 + y^2} ; \ \ \sin\varphi = y/|z| = y\Big/\sqrt{x^2 + y^2} .$$

Аргумент z можна також визначити за формулою

$$\arg(z) = arctg(y/x) + C ,$$

де $C = 0$, якщо $x > 0$; $C = +\pi$, якщо $x < 0$, y>0; $C = -\pi$, якщо $x < 0$, $y < 0$.

За допомогою формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ комплексне число можна представити у вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . \qquad (1)$$

<u>Означення 3.</u> Запис комплексного числа у вигляді (1) називається *тригонометричною формою комплексного числа* .

<u>Означення 4.</u> Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називаються рівними тоді і тільки тоді, коли їх дійсні та уявні частини рівні відповідно:

$$z_1 = z_2 , \ \text{якщо} \ x_1 = x_2 , \ y_1 = y_2 .$$

Числа, що задані в тригонометричній формі, рівні, якщо модулі цих чисел рівні, а аргументи відрізняються на ціле кратне 2π :

$$z_1 = z_2 , \text{якщо} \ |z_1| = |z_2| \ \ \text{і} \ \ Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + 2k\pi .$$

<u>Означення 5.</u> Комплексні числа $z = x + iy$ і $\overline{z} = x - iy$ з рівними дійсними та протилежними уявними частинами називаються *спряженими*.

Для спряжених комплексних чисел виконуються співвідношення: $|z_1| = |z_2|$; $arg\, z_1 = -arg\, z_2$.

Дії над комплексними числами визначаються наступними правилами.

Додавання. Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Мають місце наступні властивості додавання комплексних чисел:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

Віднімання. Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2).$$

Для геометричної інтерпретації додавання і віднімання комплексних чисел число $z = x + iy$ зображається на комплексній площині xOy радіусом - вектором $\overrightarrow{OM}$. Тоді додавання і віднімання комплексних чисел здійснюється за правилом додавання і віднімання векторів (рис 2).

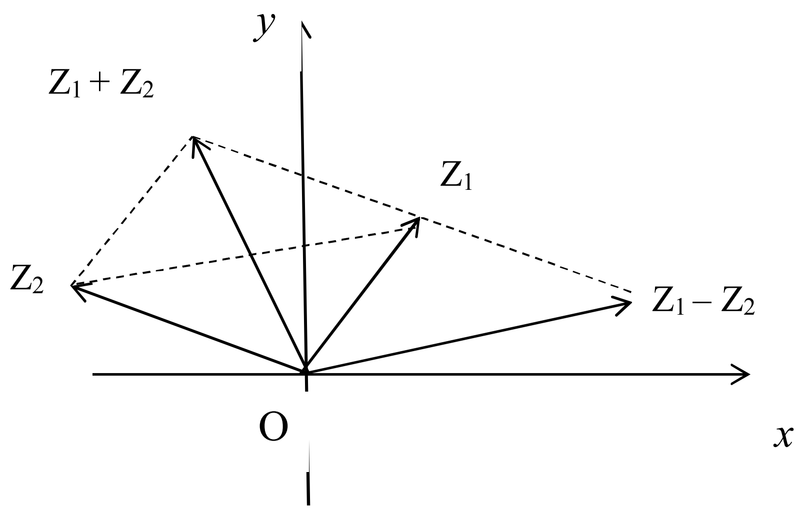

Рис. 2

Добуток. Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Таким чином, комплексні числа перемножуються як двочлени, а i^2 замінюється на -1.

Комплексне число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ позначається символом $e^{i\varphi}$, а функція $e^{i\varphi}$ для будь-якого дійсного числа φ визначається *формулою Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{2}$$

Функція $e^{i\varphi}$ має звичайні властивості експоненціальної функції так, як би число i було дійсним:

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \qquad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Остання властивість, записана в тригонометричній формі, називається *формулою Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Із (1) і (2) випливає, що будь-яке комплексне число $z \neq 0$ можна представити у вигляді

$$z = re^{i\varphi}, \tag{3}$$

де $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$.

<u>Означення 6.</u> Запис комплексного числа у вигляді (3) називається *експоненціальною формою комплексного числа* .

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

тобто модуль добутку рівний добутку модулей співмножників, а аргумент добутку – сумі аргументів співмножників.

Мають місце наступні властивості добутку комплексних чисел:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \ (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) = z_1 z_2 z_3; \ z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Ділення. Для знаходження ділення двох комплексних чисел, що задані в комплексній формі, необхідно ділене і дільник помножити на число , яке спряжене до дільника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} =$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}} + i \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}.$$

Якщо z_1 і z_2 представлені в експоненціальній формі, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

тобто модуль ділення рівний діленню модулей діленого і дільника, а аргумент ділення – різниці аргументів діленого і дільника.

Добування кореня. Якщо n – ціле додатнє число, $z = re^{i\varphi}$, то корінь n -го ступеня із комплесного числа z має n різних значень, які знаходяться за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n},$$

де $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Задані комплексні числа $z_1 = -2 + 3i$ і $z_2 = 4 + 5i$.

Обчислити $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Розв'язання:

$$z_1 + z_2 = (-2 + 4) + i(3 + 5) = 2 + 8i,$$

$$z_1 - z_2 = (-2-4) + i(3-5) = -6-2i,$$

$$z_1 z_2 = (-2+3i)(4+5i) = -8-10i+12i-15 = -23+2i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+3i}{4+5i} = \frac{(-2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{7+22i}{41} = \frac{7}{41} + i\frac{22}{41}.$$

Приклад 2. Довести рівність $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$.

Розв'язання:

Нехай $z = x + iy$, тоді $\mathrm{Im}\,z = y$, $\overline{z} = x - iy$. Тому

$$z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\,z.$$

Приклад 3. Надати геометричний опис множини точок комплексної площини, що задовільняють наступним рівнянням і нерівностям:

1) $|\mathrm{Im}\,z| < 1, \quad 0 < \mathrm{Re}\,z < 1;$

2) $|z - 1 - 2i| < 2;$

3) $(|z+1|)^2 = \mathrm{Re}(z^2)$.

Розв'язання:

1) прямокутник з вершинами в точках $-i$, $1-i$, $1+i$, i (сторони не включаються);

2) круг радіусом 2 з центром в точці $z = 1 + 2i$ (коло не включається);

3) Нехай $z = x + iy$, тоді $|z+1| = |x + iy + 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$;

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; $\mathrm{Re}\,z^2 = x^2 - y^2$. Тому $(|z+1|)^2 = \mathrm{Re}(z^2) \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow$ парабола $y^2 = -x - 0{,}5$.

Приклад 4. Представити число $z = -8 - i8\sqrt{3}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16.$$

Оскільки $x = -8 < 0, \quad y = -8\sqrt{3} < 0$, то

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} - \pi = arctg\sqrt{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Тому

$$z = 16(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})).$$

Приклад 5. Представити числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$, $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ в експоненціальній формі і знайти комплексне число $z_1/(z_2 z_3)$.

Розв'язання:

Знаходимо

$r_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $tg\varphi_1 = 1$, $\varphi_1 = \arg z_1 = \pi/4$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$;

$r_2 = |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$, $tg\varphi_2 = 1/\sqrt{3}$, $\varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6$, $z_1 = 2e^{i\pi/6}$;

$r_3 = |z_3| = \sqrt{3+1} = 2$, $tg\varphi_2 = \sqrt{3}$, $\varphi_3 = \arg z_3 = \pi/3$, $z_1 = 2e^{i\pi/3}$.

Таким чином, $z_2 z_3 = 2e^{i\pi/6} \cdot 2e^{i\pi/3} = 4e^{i(\pi/6+\pi/3)} = 4e^{i\pi/2}$, а

$$\frac{z_1}{z_2 z_3} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{4e^{i\pi/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i(\pi/4-\pi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\pi/4} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = \frac{1}{4}(1-i).$$

Приклад 6. Використовуючи формулу Муавра представити $\cos 3\varphi$ і $\sin 3\varphi$ через $\cos\varphi$ і $\sin\varphi$.

Розв'язання: Ліву частину рівності

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$ перетворимо за формулою куба суми:

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Прирівнюючи дійсні і уявні частини рівності, отримаємо:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,(1-\sin^2\varphi) =$$

$$= 4\cos^3\varphi - \cos\varphi;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi - \sin^3\varphi =$$

$$= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

Приклад 7. Знайти всі значення $\sqrt[3]{4\sqrt{2}(1+i)}$.

Розв'язання: Запишемо комплексне число $z = 4\sqrt{2}(1+i)$ в експоненціальній формі:

$r = |z| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8$, $\varphi = arctg(1/1) = \pi/4$, тобто $z = 8e^{i\pi/4}$.

Тоді, $w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}e^{\frac{i(\pi/4+2\pi k)}{3}}$; $k = 0, 1, 2$.

Якщо $k = 0$, то $w_0 = 2e^{i\pi/12} = 2(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) = 1{,}9318 + 0{,}5176i$;

Якщо $k = 1$, то $w_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi)/3} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(-1+i)$;

Якщо $k = 2$, то $w_2 = 2e^{\frac{i(\frac{\pi}{4}+4\pi)}{3}} = 2(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}) = -0{,}5176 + 1{,}9318i.$

1.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Надані комплексні числа $z_1 = 2+i$ та $z_2 = 3-3i$. Знайти

а) $z_1 + z_2$; *б)* $z_1 - z_2$; *в)* $z_1 \cdot z_2$; *г)* $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Знайти такі дійсні числа x і y, щоб виконувалась рівність:

$$\frac{2i}{x} - 4i + 4 = 3i - \frac{7}{x} + 2y.$$

3. Записати задані числа $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = -5$, $z_3 = 7i\sqrt{3}$, у тригонометричній та експоненціальній формах.

4. Які лінії на комплексній площині визначаються рівняннями:

а) $\left|\dfrac{1}{z+i}\right| = 1$; б) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; в $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$); г) $\left|\dfrac{1}{z+i}\right| = 1$?

5. Обчислити вираз $\dfrac{(1+i)(-\sqrt{3}+i)}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}$, попередньо представивши в експоненціальній формі множники в його чисельнику та знаменнику.

6. Використовуючи формулу Муавра, обчислити:

а) $(\cos 2^0 + \sin 2^0)^{45^0}$;   б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12}$.

7. Знайти всі значення а) $\sqrt[3]{2+2i}$; б) $\sqrt[6]{-27}$; а) $\sqrt[4]{-i}$.

Тема 2. Функції комплексної змінної

2.1 Основні теоретичні відомості

Означення 1. Якщо кожній точці $z = x + iy$ деякої множини E поставлено у відповідність одне або декілька комплексних чисел $w = u + iv$, то кажуть, що на множині E визначена функція (однозначна або багатозначна) комплексної змінної $w = f(z)$.

Функцію $f(z)$ можна розглядати як пару функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$.

Експоненціальна (показникова) функція. Функція e^z для комплексних $z = x + iy$ визначається формулою

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Отже, $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

Функція $w = e^z$ визначена на всій комплексній площині і на дійсній вісі співпадає з відповідною функцією дійсної змінної.

Нижче наведені деякі властивості показникової функції:

1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$;

2) $e^z \neq 0$, оскільки $\left|e^z\right| = e^x$ >0;

3) e^z періодична з періодом $T = 2\pi i$, тобто $e^{z+2\pi i} = e^z$.

4) $\left|e^z\right| = e^z, \; \arg e^z = y$.

Тригонометрична функція. Функції $\sin(z)$ і $\cos(z)$ для комплексних $z = x + iy$ визначаються формулами

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Функції $\sin(z)$ і $\cos(z)$ визначені на всій комплексній площині і на дійсній вісі співпадають з відповідними функціями дійсної змінної.

Нижче наведені деякі властивості тригонометричних функцій:

1) функції $\sin(z)$ і $\cos(z)$ приймають всі значення, тобто рівняння $\sin(z) = A$ і $\cos(z) = B$ мають розв’язок для будь-якого комплексного числа A.

2) функції $\sin(z)$ і $\cos(z)$ періодичні з періодом 2π.

3) $\sin(z)$ – непарна функція, $\cos(z)$ – парна функція.

4) всі формули елементарної тригонометрії, що справедливі при всіх дійсних значеннях x, залишаються справедливими і при всіх комплексних значеннях z.

Гіперболічні функції. Функції гіперболічний синус $\mathrm{s}h\,z$ і гіперболічний косинус $ch\,z$ визначаються формулами

$$\mathrm{s}h\,z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}), \quad ch\,z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}).$$

Зв'язок гіперболічних функцій з тригонометричними задається рівностями

$$\mathrm{s}h\,z = -i\sin iz, \quad ch\,z = \cos iz,$$

$$\sin z = -i\,sh\,iz, \quad \cos z = ch\,iz.$$

Логарифмічна функція $w = ln\,z$, де $z \neq 0$, визначається як функція, що зворотна до показникової функції $z = e^{w}$, причому

$$ln\,z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in Z.$$

Ця функція є багатозначною. Її значення при $k = 0$ називається *головним значенням* або *головною гілкою* логарифму і дорівнює $\ln|z| + i\arg z$.

Мають місце наступні властивості логарифмічної функції:

1) $ln\,(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$,

2) $ln\,(\dfrac{z_1}{z_2}) = \ln z_1 - \ln z_2$.

Загальна степенева функція $w = z^{\alpha}$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$z^{a} = e^{a\ln z}.$$

Це багатозначна функція, головне значення якої дорівнює $e^{a(\ln|z| + i\arg z)}$.

Загальна показникова функція $w = a^z$, де $a = \alpha + i\beta$ – будь-яке комплексне число, визначається рівністю

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

Це багатозначна функція, головне значення якої дорівнює $e^{z(\ln|a| + i \arg a)}$.

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Дана функція $w = z^2 - z$. Знайти значення функції при: 1) $z = 1 + i$; 2) $z = 2 - i$; 3) $z = i$; 4) $z = -1$.

Розв'язання:

1) $w = (1+i)^2 - 1 - i = 1 + 2i - 1 - 1 - i = -1 - i$;

2) $w = (2-i)^2 - 2 + i = 4 - 4i - 1 - 2 + i = 1 - 3i$;

3) $w = i^2 - i = 1 + 2i - 1 - 1 - i = -1 - i$;

4) $w = 1 + 1 = 2$.

Приклад 2. Дана функція $f(z) = x^2 + iy^2$, де $z = x + iy$. Знайти: а) $f(1+2i)$; б) $f(2-3i)$; в) $f(0)$; г) $f(-i)$.

Розв'язання:

а) $x = 1$, $y = 2$, $f(1+2i) = 1 + 4i$;

б) $x = 2$, $y = -3$, $f(2-3i) = 4 + 9i$;

г) $x = 0$, $y = 0$, $f(0) = 0 + 0 \cdot i = 0$;

д) $x = 0$, $y = -1$, $f(-i) = i$.

Приклад 3. Знайти значення $z = \ln(-\sqrt{3} + i)$.

Розв'язання:

Нехай $z = -\sqrt{3} + i$, $|z| = 2$, $\varphi = \arg z = arctg(-1/\sqrt{3}) + \pi =$ $= -\pi/6 + \pi = 2\pi/3$, тобто $ln\,(-\sqrt{3} + i) = \ln 2 + (2\pi/3 + 2k\pi)\, i$, $k \in z$.

Приклад 4. Довести справедливість рівності $\sin i \cdot ch\,1 = i\cos i \cdot sh\,1$.

Розв'язання:

$$\sin i = \frac{1}{2i}(e^{i^2} - e^{-i^2}) = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e^{1}), \quad ch\,1 = \frac{1}{2}(e^{1} + e^{-1}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin i \cdot ch\,1 = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e^{1}) \cdot \frac{1}{2}(e^{1} + e^{-1}) = \frac{1}{4i}(e^{-2} - e^{2}). \qquad (4)$$

$$\cos i = \frac{1}{2}(e^{i^2} + e^{-i^2}) = \frac{1}{2}(e^{-1} + e^{1}), \quad sh\,1 = \frac{1}{2}(e^{1} - e^{-1}) \quad \Rightarrow$$

$$i\cos i \cdot sh\,1 = \frac{i}{4}(e^{-1} + e^{1}) \cdot (e^{1} - e^{-1}) = -\frac{1}{4i}(e^{2} - e^{-2}). \qquad (5)$$

Із (4) і (5) випливає рівність $\sin i \cdot ch\,1 = i\cos i \cdot sh\,1$.

Приклад 5. Обчислити головне значення функції $w = i^z$ в точці $z = 1 + i$.

Розв'язання: Згідно визначення загальної показникової функції маємо

$$i^{1+i} = e^{(1+i)\ln i} = e^{(1+i)(\ln|i| + \frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)\,i} =$$

$$e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \cdot (\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)) = i\, e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \qquad k \in Z.$$

Звідси при $k = 0$ отримуємо головне значення функції $w = i^z$ в точці $z = 1 + i$:

$$i^{1+i}\Big|_{k=0} = i\, e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

2.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Дана функція $w = e^z$. Знайти її значення при $a)\ z = \pi i/2$;

б) $z=\pi(1-i)$; *в*) $z=1+(\pi/2+2\pi k)i$, де $k\in Z$.

2. Дана функція $w=e^{e^z}$. Знайти її значення в точках: *а*) $z=i$; *б*) $z=1+\pi i/2$.

3. Знайти $w=\ln(1-i)$.

4. Обчислити (для багатозначних функцій знайти їх головні частини) : а) $\left(\frac{\sqrt{3+i}}{2}\right)^{1-i}$, б) $ch(1+\pi i)$, в) $\cos(\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{3})$.

5. Розв'язати рівняння $\cos z=2$.

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної
3.1 Основні теоретичні відомості

Означення 1. Похідною однозначної функції комплексної змінної $w=f(z)$ називається границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, якщо Δz будь-якимось чином добігає до нуля, тобто

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Означення 2. Функція, що має похідну при даному значенні z, називається диференційованою при цьому значенні z.

Означення 3. Якщо функція $w=f(z)$ однозначна і має кінцеву похідну в кожній точці області D, то ця функція називається аналітичною в області D.

Необхідна та достатня умови диференційованості функції. Якщо фунція $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ диференційована в точці

$z = x + iy$, то в цій точці існують похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$, причому ці похідні пов'язані умовами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

які називаються умовами Коші –Рімана (необхідна умова).

Навпаки, якщо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ неперервні в точці $z = x + iy$ і умови Коші – Рімана виконані, то функція $w = f(z)$ диференційована в точці $z = x + iy$ (достатня умова).

Похідна функції $f(z)$ виражається через частинні похідні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ за формулами

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Похідні елементарних функцій $z^n, e^z, \cos(z), \sin(z), \ln(z), arc\sin(z), \arccos(z), arctg(z), sh(z), ch(z)$ знаходяться за тими ж формулами, що і для дійсного аргументу:

$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$,

$(e^z)' = e^z$,

$\cos'(z) = -\sin(z)$,

$\sin(z) = \cos(z)$,

$(\ln(z))' = 1/z$,

$(arc\sin z)' = 1/\sqrt{1-z^2}$,

$(\arccos z)' = -1/\sqrt{1-z^2}$,

$(arctg\, z)' = 1/(1+z^2)$,

$(sh\, z)' = ch\, z$,

$(ch\, z)' = sh\, z$.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Чи є диференційованою функція $f(z) = x - iy$?

Розв'язання: Знаходимо $u = x, v = -y, \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$. Одна з умов Коші-Рімана не виконується. Таким чином, дана функція не є диференційованою.

Приклад 2. Чи є диференційованою функція $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$?

Розв'язання: Знаходимо $u = x^2 - y^2, v = 2xy, \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x,$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y, \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x;$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}.$ Умови Коші-Рімана виконуються. Отже, функція є диференційованою, а похідна

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2yi = 2\,(x + yi) = 2z.$$

Похідну $f'(z)$ можна було б знайти інакше:

$f(z) = (x + yi)^2 = z^2, \quad f'(z) = 2z.$

Приклад 3. Дана дійсна частина $u(x, y) = (x-1)^2 - y^2$ диференційованої функції $f(z),\ z = x + iy.$ Знайти функцію $f(z)$.

Розв'язання: Знаходимо $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2.$ Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ (за умовою Коші), то $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2$. Інтегруючи за змінною y, знаходимо $v(x, y) = 2xy - 2y + \varphi(x).$ Тут $\varphi(x)$ – довільна функція.

Використовуємо іншу умову Коші - Рімана: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

Оскільки $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x),$ то $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y - \varphi'(x).$ Із умови задачі знаходимо , що $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$. Отже

$$-2y-\varphi'(x)=-2y,\quad \varphi'(x)=0,\quad \varphi(x)=C,$$

звідки $f(z)=(x-1)^2-y^2+2i\,xy-2iy+2iC,$

або

$$f(z)=x^2+2ixy-y^2-2(x+iy)+1+2iC=z^2-2z+1+C_1=(z-1)^2+C_1.$$

Приклад 4. Дана уявна частина $v(x,y)=x-y$ диференційованої функції $f(z)$. Знайти цю функцію.

Розв'язання: Знаходимо $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$; отже $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-1$ (згідно умові Коші-Рімана). Звідси $u=-x+\varphi(y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(y)$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=1.$

Але $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1.$ Отже, $\varphi'(y)=-1.$ Інтегруваням знаходимо, що $\varphi(y)=-y+C.$ Звідси $u=-x-y+C.$ Таким чином,

$$f(z)=-x-y+C+i(x-y)=-z+i(x+iy)+C=-z+iz+C=(i-1)z+C.$$

3.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Чи є диференційованими функції: $f(z)=\overline{z}^2$; $f(z)=(x^3-3xy^2)+$ $+i(3x^2y-y^3)$? Якщо це так, то знайти їх похідні.

2. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її відомою дійсною частиною $u(x,y)=e^x\sin y$.

3. Знайти аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ за її відомою уявною частиною $v(x,y)=x^3-3xy$.

Тема 4. Інтеграл від функції комплексної змінної

4.1 Основні теоретичні відомості

Означення 1. Крива Г називається *гладкою*, якщо вона має дотичну, що неперервно змінюється.

Означення 2. Крива називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається з кінцевого числа гладких дуг.

Дана функція комплексного змінного $w = f(z)$, неперервна в деякій області D. Нехай Γ – довільна гладка крива, що лежить в області D. Розглянемо дугу кривої з початком в точці z_0 і кінцем в точці z. Розділимо цю дугу на n частин довільними точками $z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = z$, що розташовані послідовно на лінії Γ. На кожній $k-$ ій частковій дузі $\overset{\frown}{z_{k-1,} z_k}, k = \overline{1,n}$, виберемо довільну точку ξ_k та , покладаючи $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, побудуємо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k \,, \tag{6}$$

яку називають *комплексною інтегральною сумою* вздовж кривої Γ.

Означення 3. Якщо при $\lambda = \max\limits_{k} |\Delta z_k| \to 0$ існує скінченна границя інтегральної суми (6), яка не залежить від способу розбиття кривої на часткові дуги та від вибору точок ξ_k на них, то таку границю називають інтегралом від функції $f(z)$ вздовж кривої Γ і позначають :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k \,.$$

Якщо $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то інтеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ зводиться до двох криволінійних інтегралів від дійсних функцій за формулою:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_{\Gamma} v(x, y)dx + u(x, y)dy \,.$$

Нехай Γ– кусково-гладка лінія, що складається із гладких частин $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$; тоді інтеграл вздовж цієї лінії можна визначити за допомогою рівності:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\Gamma_m} f(z)dz.$$

Якщо $f(z)$- аналітична функція в однозв'язній області D, то значення інтеграла $\int_{\Gamma} f(z)dz$, взятого вздовж довільної кусково-гладкої лінії $\Gamma \in D$, не залежить від лінії Γ, а визначається лише положеннями начальної і кінцевої точок цієї лінії.

<u>Теорема Коші</u> Для будь-якої аналітичної функції $f(z)$ в деякій однозв'язній області D інтеграл $\oint_{\gamma} f(z)dz$, взятий по будь-якому кусково-гладкому замкненому контуру $\gamma \in D$, дорівнює нулю.

Для будь-якої аналітичної функції $f(z)$ має місце формула Ньютона-Лейбниця:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(t)dt = \Phi(z) - \Phi(z_0),$$

де $\Phi(z)$– деяка первісна функція для $f(z)$.

<u>Означення 3.</u> Нехай $n+1$ замкнених кусково-гладких ліній $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ такі, що кожна з ліній $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ лежить поза інших і всі вони розташовані в середині γ_0. Множина точок, що лежать одночасно в середині γ_0 і поза $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ називається $(n+1)$-зв'язною областю D.

Якщо $f(z)$– аналітична функція в області D, включаючи значення на контурах $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, То має місце рівність:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$, де $f(z) = x + i(y+1)$, AB– відрізок прямої, що з'єднує точки $z_A = 1$ і $z_B = -i$.

Розв'язання:

Маємо $u = x,\ v = y+1$. Звідси

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} xdx - (y+1)dy + i\int_{AB} (y+1)dx + xdy = \left.\frac{x^2 - (y+1)^2}{2}\right|_{x=1,\ \ y=0}^{x=0,\ \ y=-1} +$$

$$+ i \cdot x \cdot (y+1)\Big|_{x=1,\ \ y=0}^{x=0,\ \ y=-1} = 0 - 0 + 0 - i = -i.$$

Можна вчинити і інакше. Нескладно бачити , що $f(z) = z + i$ і

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_1^{-i} (z+i)dz = \left(\frac{z^2}{2} + iz\right)\Big|_1^{-i} = \frac{i^2}{2} - i^2 - \frac{1}{2} - i = -i.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$, де $f(z) = y^2 + ix^2$, AB– відрізок прямої, що з'єднує точки $z_A = 1+i$ і $z_B = 2+3i$.

Розв'язання:

Маємо $u = y^2,\ v = x^2$. Тоді

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} y^2dx - x^2dy + i\int_{AB} x^2dx + y^2dy.$$

Для обчислення першого інтегралу в правій частині рівності складемо рівняння прямої AB:

$(y-1)/(3-1) = (x-1)/(2-1)$, тобто $y = 2x - 1$.

Звідси $dy = 2dx$ і

$$\int\limits_{AB} y^2dx - x^2dy = \int\limits_1^2 \left[(2x-1)^2 - 2x^2\right]dx = \int\limits_1^2 \left[2x^2 - 4x + 1\right]dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x\right)\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - 8 + 2 - \frac{2}{3} + 2 - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Другий з інтегралів обчислюється за формулою Ньютона-Лейбниця:

$$\int\limits_{AB} x^2dx + y^2dy = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)\Big|_{x=1,\quad y=1}^{x=2,\quad y=3} = \frac{35}{3} - \frac{2}{3} = 11.$$

Таким чином, $\int\limits_{AB} f(z)dz = -\frac{1}{3} + 11i.$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_i^{1+i} z^2dz.$

Розв’язання:

Підінтегральна функція є аналітичною. Використовуючи формулу Ньютона –Лейбниця, знаходимо:

$$\int\limits_i^{1+i} z^2dz = \frac{z^3}{3}\Big|_i^{1+i} = \frac{1}{3}((1+i)^3 - i^3) = \frac{1}{3}(1 + 3i + 3i^2 + i^3 - i^3) = -\frac{2}{3} + i.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_\gamma \overline{z}dz,$ де γ −замкнений контур $x = \cos t, \quad y = \sin t.$

Розв’язання:

Оскільки $\overline{z} = x - iy,$ то $u = x;\ v = -y,$ даний інтеграл має вигляд:

$$\int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int\limits_\gamma xdx + ydy + i\int\limits_\gamma xdy - ydx.$$

Перший інтеграл в правій частині дорівнює нулю, як інтеграл від повного диференціалу по замкненому контуру.

При обчисленні другого інтегралу необхідно врахувати , що

$$dx = -\sin t dt; dy = \cos t dt.$$

Звідси $\quad xdy - ydx = \cos^2 t dt + \sin^2 t dt = dt$.

Тоді

$$\int_\gamma \overline{z} dz = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Приклад 5. Обчислити $\int_\gamma \frac{dz}{z+3}$, де $\gamma -$еліпс $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t.$

Розв'язання:

Підінтегральна функція є аналітичною в області, що обмежена даним еліпсом, тому $\int_\gamma \frac{dz}{z+3} = 0.$

Приклад 5. Обчислити $\int_\gamma \frac{dz}{z-(i+1)}$, де $\gamma -$коло $\left|z-(i+1)\right| = 1.$

Розв'язання:

Рівняння кола можна записати у вигляді $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, або $x = 1 + \cos t, y = 1 + \sin t$, або $z = 1 + i + e^{it}$.

В області, що обмежена колом γ, підінтегральна функція не є аналітичною, оскільки в точці $z = 1 + i$ вона звертається в нескінченність.

Оскільки $dz = i \cdot e^{it} dt$, то $\int_\gamma \frac{dz}{z-(i+1)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it} dt}{e^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$

Приклад 6. Обчислити $\int\limits_{\gamma} \dfrac{dz}{(z-1)(z-i)}$, де γ −коло $|z| = 2.$

Розв'язання:

Підінтегральна функція має розриви тільки в точках $z = 1$ і $z = i$. Функція $f(z)$ є аналітичною в трьохзв'язній області, що являє собою круг з граничним колом γ, з якого вирізані два круги $|z-1| < r$, $|z-i| < r$, де $r > 0$ − достатньо мала величина (рис.3). Отже,

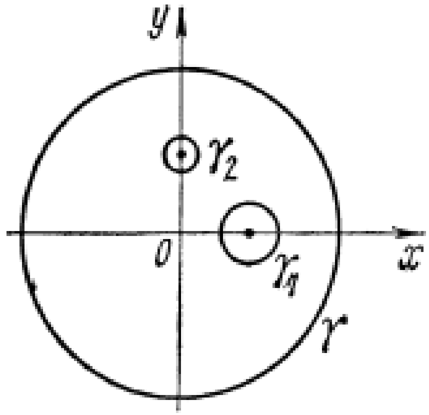

Рис. 3

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz,$$

де γ_1 − коло $|z-1| = r$, γ_2 − коло $|z-i| = r$.

Оскільки $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-i)} = \dfrac{1}{1-i} \cdot \left\{ \dfrac{1}{(z-1)} - \dfrac{1}{(z-i)} \right\}$, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{1-i} \cdot \left\{ \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{z-1}dz + \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{z-i}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{z-1}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{z-i}dz \right\}.$$

Другий і третій доданки в правій частині рівні нулю, оскільки підінтегральні функції є аналітичними в відповідних областях. Отже,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{1-i} \cdot \left\{ \int\limits_{\gamma_1} \frac{1}{z-1}dz + \int\limits_{\gamma_2} \frac{1}{z-i}dz \right\}.$$

Коло γ_1 має рівняння $z = 1 + re^{i\varphi}$, а γ_2 − рівняння $z = i + re^{i\varphi}$.

Звідси

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \frac{1}{1-i}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi - \int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi\right\} = 0.$$

4.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} f(z)dz,$ якщо $f(z) = y + xi,$ $\gamma -$ламана OAB з вершинами в точках $z_0 = 0,$ $z_A = i,$ $z_B = 1 + i.$

2. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} z^2 dz,$ де $AB-$ відрізок прямої, що з'єднує точки $z_A = 1,$ $z_B = i.$

3. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} z^{10}dz,$ де $\gamma-$ еліпс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$

4. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma}\frac{dz}{z^2},$ де $\gamma-$ коло $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1.$

5. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma}\frac{dz}{z},$ де $\gamma-$ коло $z = e^{ti}.$

6. Обчислити $\int_{\gamma}\frac{zdz}{(z-1)(z-i)},$ де $\gamma -$коло $|z| = 2.$

Тема 5. Ряди з комплексними числами

5.1 Основні теоретичні відомості

Розглянемо послідовність комплексних чисел $z_1, z_2, z_3, ...,$ де $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1,2,3...).$

<u>Означення 1.</u> Постійне число $c = a + ib$ називається *границею* послідовності $z_1, z_2, z_3, ...,$ якщо для будь якого як завгодно малого

числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що всі значення z_n з номерами $n > N$ задовільняють нерівності $|z_n - c| < \varepsilon$.

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

<u>*Необхідна і достатня* умова існування границі послідовності комплексних чисел полягає в наступному</u>: число $c = a + ib$ є границею послідовності комплексних чисел $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2,$ $, x_3 + iy_3, \ldots$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b.$

<u>Означення 2.</u> Ряд

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots, \tag{7}$$

членами якого є комплексні числа $z_n = x_n + iy_n$, називається *збіжним*, якщо збігається послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + i\sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ при $n \to \infty$. Границя $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називається *сумою* ряду. В іншому випадку ряд (7) називається *розбіжним*.

Для збіжності ряду (7) *необхідно і достатньо* , щоб збігались ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. При цьому, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = S'$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = S''$, то $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S' + iS''$.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд (7) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ (тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$).

Для дослідження збіжності ряду (7) буває корисна наступна *Теорема:* Нехай даний ряд з комплексними членами (7). Тоді, якщо збігається ряд, складений з модулів членів ряду (7)

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|,$$

то збігається ряд (7). В цьому випадку останній ряд називається *абсолютно збіжним*.

Для степеневого ряду

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-a)^2+\ldots+a_n(z-a)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-a)^n, \qquad (8)$$

де $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots -$ комплексні числа, коефіцієнти ряду відмінні від нуля, а $z-$ комплексна змінна, справедлива

Теорема Абеля: 1) Якщо степеневий ряд (8) збігається при $z=z_0$ ($z_0\neq 0$), то він збігається і притому абсолютно, для всіх z, що задовольняють умові $|z|<|z_0|$; 2) якщо ряд (8) розбігається при $z=z_0$, то він розбігається для всіх z, що задовольняють умові $|z|>|z_1|$.

Вигляд області збіжності ряду (8) встановлює наступна *Теорема*: Якщо ряд (8) збігається не при всіх значеннях z і не тільки при $z=0$, то існує число $R>0$ таке, що ряд збігається абсолютно при $|z-a|<R$ і розбігається при $|z-a|>R$. При цьому число R (радіус збіжності ряду) дорівнює $R=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$.

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$(1+i)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i)+(\frac{4}{9}+\frac{1}{4}i)+...+((\frac{2}{3})^n+\frac{1}{2^n})+... .$$

Розв'язання:

Ряди $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...+(\frac{2}{3})^n+...$ та $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+(\frac{1}{2})^n+...$ збігаються, оскільки вони складені із членів нескінченних геометричних прогресій, що спадають. Отже, збігається і заданий ряд з комплексними членами.

Знайдемо суми цих прогресій:

$$S'=\frac{1}{1-2/3}=3, \qquad S''=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

Отже, сума даного ряду є комплексне число $S=3+2i.$

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$(1+0,1i)+(\frac{1}{\sqrt{2}}+0,01i)+(\frac{1}{\sqrt{3}}+0,001i)+...+(\frac{1}{n^{1/2}}+\frac{i}{10^n})+... .$$

Розв'язання:

Розглянемо ряди

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n^{1/2}}+...$ та $0,1+0,01+0,001+...+\frac{1}{10^n}+....$

Перший з них розбігається, отже, розбігається і даний ряд з комплексними членами.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду

$$(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i)+(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i)+(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}i)+...+(\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i)+... \quad .$$

Розв'язання:

Ряд розбігається, оскільки його загальний член $z_n=\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i$ не добігає до нуля. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}i)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+i\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1+i\neq 0.$$

Приклад 4. Показати, що ряд

$$\frac{1-2i}{5}+(\frac{1-2i}{5})^2+(\frac{1-2i}{5})^3+...+(\frac{1-2i}{5})^n+...$$

збігається абсолютно.

Розв'язання:

Оскільки $1-2i=-\sqrt{5}(\cos arctg(2)+i\sin arctg(2))=-\sqrt{5}e^{iarctg(2)}$,

то $z_n=(\frac{1-2i}{5})^n=(-\frac{e^{iarctg(2)}}{\sqrt{5}})^n=\frac{(-1)^n}{5^{n/2}}e^{inarctg(2)}$.

Отже, $|z_n|=\frac{1}{5^{n/2}}$. Складемо ряд із модулів:

$$\frac{1}{5^{1/2}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^{3/2}}+...+\frac{1}{5^{n/2}}.$$

Цей ряд, члени якого утворюють нескінченно спадаючу геометричну прогресію, збігається. Отже, заданий ряд з комплексними членами збігається абсолютно.

Приклад 5. Знайти область збіжності ряду

$$\frac{\sqrt{8}+i}{3}(z-2i)+(\frac{\sqrt{8}+i}{3})^2(z-2i)^2+...+(\frac{\sqrt{8}+i}{3})^n(z-2i)^n+....$$

Розв'язання:

Маємо $a_n=(\frac{\sqrt{8}+i}{3})^n$, $a_{n+1}=(\frac{\sqrt{8}+i}{3})^{n+1}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{8}+i}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{3}{\left|\sqrt{8}+i\right|}=\frac{3}{\left|\sqrt{8+1}\right|}=1,\quad R=1.$$

Область збіжності ряду є коло $|z-2i|<1$.

5.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Показати, що ряд

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{9}i\right)+\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{27}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4^n}-\frac{i}{3^n}\right)+\ldots$$

збігається і знайти його суму.

2. Дослідити збіжність ряду

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}i\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+\frac{i}{2^{n/2}}\right)+\ldots.$$

3. Дослідити збіжність ряду з загальним членом $z_n=\frac{1}{n}+\frac{i}{n!}$.

4. Показати, що ряд

$$\frac{1+i}{3}+\frac{(1+i)^2}{3^2}+\frac{(1+i)^3}{3^3}+\ldots+\frac{(1+i)^n}{3^n}+\ldots$$

збігається абсолютно.

5. Знайти область збіжності ряду

$$z+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{3^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^2}+\ldots$$

6. Знайти область збіжності ряду

$$(z+2-i)+2!(z+2-i)^2+\ldots+n!(z+2-i)^n+\ldots \quad .$$

Тема 6. Ряди Тейлора і Лорана

6.1 Основні теоретичні відомості

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в деякому околі точки a. Розглянемо ряд

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3+\ldots. \qquad (8)$$

Означення 1. Ряд (8) називається *рядом Тейлора* функції $f(z)$ і всередині свого кругу збіжності виражає функцію $f(z)$, тобто всередині кругу збіжності виконується рівність

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots .$$

Якщо $a=0$, то остання рівність записується у вигляді

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\frac{f'''(0)}{3!}z^3+\dots . \qquad (9)$$

Означення 2. Розвинення функції $f(z)$ в ряд (9) називається розвиненням в *ряд Маклорена*.

Розглянемо два ряди:

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\dots . \qquad (10)$$

і

$$A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\dots . \qquad (11)$$

Область збіжності ряду (10) (якщо вона існує) визначається нерівністю $|z-a|>r.$ Якщо існує область збіжності ряду (11) , то вона визначається нерівністю $|z-a|<R.$ Тоді при умові $r<R$ для ряду

$$\dots+\frac{A_{-3}}{(z-a)^3}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{A_{-1}}{z-a}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+A_3(z-a)^3+\dots,$$

отриманого додаванням рядів (10) і (11), областю збіжності є кільце $r<|z-a|<R,$ що обмежене концентричними колами з центром в точці a і радіусами r і R.

Нехай $f(z)-$ однозначна і аналітична функція в кільці $r<|z-a|<R.$ Ця функція в указаному кільці може бути представлена у вигляді суми ряду

$$f(z) = \ldots + \frac{A_{-3}}{(z-a)^3} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{A_{-1}}{z-a} + \\ A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + A_3(z-a)^3 + \ldots . \qquad (12)$$

Означення 3. Ряд в правій частині рівності (12) називається *рядом Лорана* функції $f(z)$. Ряд (10) називається *головною частиною* ряду Лорана, а ряд (11) – *правильною частиною* ряду Лорана.

Означення 4. Якщо ряд Лорана містить головну частину, то a називають *ізольованою особливою точкою*. Коефіцієнт A_{-1} називається *лишком* функції $f(z)$ відносно ізольованої особливої точки $z = a$.

Означення 5. Особлива точка називається *усувною*, якщо функція $f(z)$ – аналітична в околі $z = a$ і обмежена за модулем в цьому околі, тобто існує кінцева межа $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

Означення 6. Особлива точка $z = a$ називається *полюсом* функції $f(z)$, якщо $f(z)$ – аналітична функція поблизу $z = a$ і прямує до нескінченності при $z \to a$.

Означення 7. Особлива точка $z = a$ називається *суттєво особливою,* якщо при z, близьких до a, модуль $|f(z)|$ не залишається обмеженим, але функція не прямує до ∞ при $z \to a$, $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ не існує.

Означення 8. Ізольована особлива точка є:

а) такою, що *усувається*, якщо головна частина розкладу в ряд Лорана відсутня;

б) *полюсом* n *–го порядку*, якщо головна частина містить кінцеве число членів, тобто має вигляд:

$$\frac{A_{-1}}{z-a}+\frac{A_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_{-n}}{(z-a)^n} \qquad (A_{-n}\neq 0);$$

в) *суттєво особливою*, якщо головна частина містить нескінченне число членів.

Приклад 1. Для функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ є усувною особливою точкою, оскільки

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots.$$

Приклад 2. Для функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$ точка $z=0$ є полюсом другого порядку, оскільки

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\ldots.$$

Приклад 3. Функція $f(z)=e^{1/z}$ в точці $z=0$ має суттєво особливу точку, оскільки

$$f(z)=e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots .$$

Означення 9. Якщо розклад аналітичної функції $f(z)$ в ряд Тейлора має наступний вигляд

$$f(z)=c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots,\quad c_k\neq 0,$$

то точка z_0 називається *нулем кратності* k функції $f(z)$. Нуль кратності 1 називається *простим нулем*.

Між нулем і полюсом функції існує наступний зв'язок:

якщо $z=a-$ нуль кратності k функції $f(z)$, то $z=a-$ полюс того ж порядку функції $1/f(z)$; Навпаки, якщо $z=b-$ полюс порядку k функції $f(z)$, то $z=b-$ нуль кратності k функції $1/f(z)$.

Корисним при розв’язанні задач буває наступне зауваження: якщо $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c\neq 0,$ то $z=a-$ полюс $k-$го порядку функції $f(z)$.

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Розвинути в ряд Тейлора по степенях бінома $z+i$ функцію $f(z)=z^4$.

.Розв’язання:

Знаходимо похідні функції $f(z)=z^4$; $f'(z)=4z^3$; $f''(z)=12z^2$; $f^{(3)}(z)=4z$; $f^{(4)}(z)=4$; $f^{(5)}(z)=f^{(5)}(z)=...=0.$

Визначаємо значення похідних в точці $a=-i$: $f(-i)=4i$; $f'(-i)=4i$; $f''(-i)=-12$; $f^{(3)}(-i)=-4i$; $f^{(4)}(-i)=24$. Отже,

$$f(z)=1+4i(z+i)-6(z+i)^2-4i(z+i)^3+(z+i)^4.$$

Рядом Тейлора функції $f(z)=z^4$ є многочлен четвертої степені.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду

$$...\frac{1}{(z-2)^3}+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)}+1+\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}+\frac{(z-2)^3}{3^3}+....$$

.Розв’язання:

Розглянемо два ряди

$$\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}+..., \qquad (13)$$

$$1+\frac{z-2}{3}+\frac{(z-2)^2}{3^2}+\frac{(z-2)^3}{3^3}+\ldots . \qquad (14)$$

Ряди (13), (14) є геометричними прогресіями відповідно зі знаменниками $\frac{1}{(z-2)}$ і $\frac{z-2}{3}$. Вони збігаються, якщо $\left|\frac{1}{z-2}\right|<1$ і $\left|\frac{z-2}{3}\right|<1$. Отже, $|z-2|>1$ і $|z-2|<3$. Таким чином, область збіжності – кільце, визначене подвійною нерівністю $1<|z-2|<3$.

Приклад 3. Розвинути в ряд Лорана по степенях z функцію $f(z)=1/(2z-5)$ в околі точки $z=0$.

.**Розв'язання:**

Представимо дану функцію у вигляді

$$f(z)=-1/5/(1-2z/5).$$

В околі точки $z=0$ виконується нерівність $|2z/5|<1$, тому дріб $-1/5/(1-2z/5)$ можна розглядати як суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії з першим членом $a=-1/5$ і знаменником $q=2z/5$. Звідси маємо

$$f(z)=-\frac{1}{5}-\frac{2z}{5^2}-\frac{2^2z^2}{5^3}-\frac{2^3z^3}{5^4}-\ldots, \text{ або } f(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}z^{n-1}}{5^n}.$$

Цей розклад містить тільки правильну частину. Із нерівності $|2z/5|<1$ випливає, що областю збіжності ряду є круг $|z|<5/2$.

Приклад 4. Розвинути по степенях z в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+3)}$ в кільці $1<|z|<3$.

.**Розв'язання:**

Розкладемо дану функцію на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{(1-z)(z+3)}=\frac{A}{(1-z)}+\frac{B}{(z+3)},\ \text{або}\ 1=A(z+3)+B(1-z).$$

Вважаючи $z=1,$ отримаємо $1=4A$, тобто $A=1/4;$ вважаючи $z=-3,$ отримаємо $1=4B$, тобто $B=1/4.$ Таким чином,

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-z)}+\frac{1}{(z+3)}\right).$$

Враховуючи, що $1<|z|<3,$ можемо записати

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1/z}{(1-z)}+\frac{1}{3}\frac{1}{(1+z/3)}\right).$$

Отже, $$f(z)=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\right).$$

6.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Дослідити збіжність ряду

$$\ldots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^3+\ldots.$$

2. Дослідити збіжність ряду

$$\ldots+\frac{4}{z^4}+\frac{3}{z^3}+\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+(2z)^2+(2z)^3+\ldots.$$

3. Розвинути в ряд Лорана по степенях z функцію $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}$ в околі точки: 1) $z=0$; 2) $z=\infty.$

4. Знайти полюси функції $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+1)^2}.$

5. Розвинути в ряд Тейлора по степенях $z-1$ функцію $f(z)=\frac{1}{z}$.

Знайти область збіжності ряду.

6. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{z^3-9z}$ по степенях $z-1$ в кільці $0<|z|<3$.

Тема 7. Обчислення лишків функцій. Застосування лишків до обчислення інтегралів.

7.1 Основні теоретичні відомості

Нехай $a-$ полюс n- го порядку функції $f(z)$. Тоді лишок функції $f(z)$ відносно її полюсу n- го порядку обчислюється за формулою (позначення rez означає лишок):

$$\underset{a}{rez}\ f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n\cdot f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Якщо $a-$ полюс першого порядку (простий полюс) функції $f(z)$, то

$$\underset{a}{rez}\ f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)\,f(z).$$

Нехай функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ аналітичні в околі точки $z=a$, $\varphi(a)\neq 0$ і $\psi(z)$ в точці $z=a$ має нуль першого порядку. Тоді при обчисленні лишку функції $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$ в простому полюсі $z=a$ зручно користуватися формулою

$$\underset{a}{rez}\ f(z)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Для обчислення інтегралів від функції комплексної змінної часто застосовують <u>основну теорему про лишки:</u>

Нехай $f(z)-$ *аналітична функція в замкненій області* D*, окрім кінцевого числа ізольованих особливих точок* $a_1, a_2, ..., a_k$ *(полюсів або суттєво особливих точок). Тоді інтеграл від функції по контуру* γ*, що містить в собі ці точки і цілком лежить в області* D*, рівний добутку* $2\pi i$ *на суму лишків в зазначених особливих точках, тобто*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underset{a_j}{res} f(z).$$

7.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти лишки функції $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$.

Розв'язання:

Точки $z=-1$ і $z=2$ є прості полюси функції. Тому

$$\underset{z=-1}{res} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{z^2}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-2)} = -\frac{1}{3}.$$

$$\underset{z=2}{res} f(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{z^2}{(z+1)(z-2)} = \lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z+1)} = \frac{4}{3}.$$

Приклад 2. Знайти лишки функції $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+9}$.

Розв'язання:

Маємо $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-3i)(z+3i)}$. Точки $z=3i$ і $z=-3i$ є прості полюси функції. Тому

$$\underset{z=3i}{res} f(z) = \lim_{z\to 3i}(z-3i)\cdot\frac{z^2}{(z-3i)(z+3i)} = \lim_{z\to 3i}\frac{z^2}{(z+3i)} = -\frac{9}{6i} = \frac{3}{2}i.$$

$$\underset{z=-3i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to -3i}(z+3i)\cdot\frac{z^2}{(z-3i)(z+3i)} = \lim_{z\to -3i}\frac{z^2}{(z-3i)} = \frac{-9}{-6i} = -\frac{3}{2}i.$$

Приклад 3. Знайти лишки функції $f(z) = \dfrac{1}{z^2-4z+13}$.

Розв'язання:

Простими полюсами функції є корені знаменника $z = 2 \pm 3i$.

Отже $f(z) = \dfrac{1}{(z-2-3i)\,(z-2+3i)}$. Знаходимо

$$\underset{z=2+3i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 2+3i}(z-2-3i)\cdot\frac{1}{(z-2-3i)(z-2+3i)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}.$$

$$\underset{z=2-3i}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 2-3i}\frac{(z-2+3i)}{(z-2-3i)(z-2+3i)} = \lim_{z\to 2-3i}\frac{1}{(z-2-3i)} = \frac{1}{-6i} = \frac{i}{6}.$$

Приклад 4. Знайти лишки функції $f(z) = \dfrac{z^3}{(z-3)^4}$.

Розв'язання:

Оскільки $z = 3 -$ полюс четвертого порядку, то

$$\underset{z=3}{res}\, f(z) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 3}\frac{d^3[(z-3)^4\,\dfrac{z^3}{(z-3)^4}]}{dz^3} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 3}\frac{d^3[z^3]}{dz^3} = \frac{3!}{3!} = 1.$$

Приклад 5. Знайти лишок функції $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$.

Розв'язання:

Точка $z = 0$ є полюсом другого порядку. Дійсно,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin^2 z} = (\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z})^2 = 1$$

є кінцева величина. Тоді

$$\underset{z=0}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{\sin^2 z}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{2z\sin z - 2z^2\cos z}{\sin^3 z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2z\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...\right) - 2z^2\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right)}{\sin^3 z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\frac{2}{3}z^4 + o(z^4)}{z^3 + o(z^3)} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{2}{3}z + \frac{o(z^4)}{z^4}}{1+\frac{o(z^3)}{z^3}} = 0.$$

Приклад 6. Знайти $\int\limits_{\gamma}\frac{3-z}{(z-1)^3(z+4)}dz,$ якщо $\gamma -$ коло $|z-2| = 2$.

Розв'язання:

Оскільки $|z-2| = 2 -$коло комплексної площини з центром в точці $(2,0)$ і радіусом $R = 2,$ то контур γ містить в собі тільки полюс 3-го порядку $z=1$ функції $f(z)$. Звідси

$$\underset{z=1}{res}\, f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left((z-1)^3\cdot\frac{(3-z)}{(z-1)^3(z+4)}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{-7}{2(z+4)^2} = -\frac{7}{50}.$$

$$\int\limits_{\gamma}\frac{3-z}{(z-1)^3(z+4)}dz = 2\pi i\cdot \underset{z=1}{res}\, f(z) = -\frac{14}{50}\pi i.$$

Приклад 7. Знайти $\int\limits_{\gamma}\frac{1+\cos\frac{1}{(z+i)}}{(z+i)}dz,$ якщо $\gamma -$ коло $|z+i| = 1.$

.Розв'язання:

Точка $z=-i$ – суттєво особлива точка підінтегральної функції. Дійсно,

$$\frac{1+\cos\dfrac{1}{(z+i)}}{(z+i)}=\frac{1}{(z+i)}\cdot(1+(1-\frac{1}{(z+i)^2}+\frac{1}{(z+i)^4}-...))=$$
$$\frac{2}{z+i}-\frac{1}{(z+i)^3}+\frac{1}{(z+i)^5}-... \quad .$$

Тому

$$\underset{z=-i}{res}\, f(z)=2$$

Оскільки точка $z=-i$ належить області, що обмежена контуром γ , то

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1+\cos\dfrac{1}{(z+i)}}{(z+i)}dz=2\pi i\cdot\underset{z=1}{res}\, f(z)=4\pi i\,.$$

7.3 Вправи для самостійного розв'язання

1. Знайти лишок функції $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$.

2. Знайти лишки функції $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-9}$.

3. Знайти лишок функції $f(z)=1/\sin 3z$ відносно полюса $z=\pi/3$.

4. Знайти лишок функції $f(z)=(5z^4-z^2+1)/z^5$.

5. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma}\dfrac{z^2}{z-3}dz,$ де $\gamma-$ коло $|z|=4.$

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma}\dfrac{z}{(z-i)(z+3i)}dz,$ де $\gamma-$ коло $|z|=7.$

7. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma}\dfrac{ctgz}{4z-\pi}dz.$

8. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz.$

Завдання для виконання контрольної роботи

1. Завдання. Задані комплексні числа z_1 і z_2. Знайти а) $z_1 + z_2$;

б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$ д) z_1^n ; всі значення $\sqrt[m]{z_2}$.

варіант 1. $z_1 = 5 + 6i; \quad z_2 = 7 - 9i; \quad n = 2; m = 2.$

варіант 2. $z_1 = 1 + 2i; \quad z_2 = 5 + 12i; \quad n = 3; m = 2.$

варіант 3. $z_1 = 3 - i; \quad z_2 = 3 + 4i; \quad n = 4; m = 2.$

варіант 4. $z_1 = 2 + 2i; \quad z_2 = 12 + 5i; \quad n = 2; m = 2.$

варіант 5. $z_1 = 3 - i; \quad z_2 = 5 + 6i; \quad n = 4; m = 3.$

варіант 6. $z_1 = 4 + 2i; \quad z_2 = 1 + 4i; \quad n = 2; m = 3.$

варіант 7. $z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = 7 + 4i; \quad n = 3; m = 2.$

варіант 8. $z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 5 + 4i; \quad n = 4; m = 3.$

варіант 9. $z_1 = 6 - 3i; \quad z_2 = 3 + 4i; \quad n = 2; m = 2.$

варіант 10. $z_1 = 7 + 3i; \quad z_2 = 2 + i; \quad n = 4; m = 3.$

варіант 11. $z_1 = 1 - 3i; \quad z_2 = 2 + 3i; \quad n = 2; m = 3.$

варіант 12. $z_1 = 5 + 12i; \quad z_2 = 2 - 1i; \quad n = 4; m = 2.$

варіант 13. $z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 2 - 5i; \quad n = 3; m = 3.$

варіант 14. $z_1 = 2 + 4i; \quad z_2 = 2 + 3i; \quad n = 4; m = 2.$

варіант 15. $z_1 = 4 + 3i; \quad z_2 = 3 + i; \quad n = 4; m = 2.$

варіант 16. $z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 2 + 4i; \quad n = 4; m = 3.$

варіант 17. $z_1 = 1 + 2i; \quad z_2 = 2 + i; \quad n = 3; m = 2.$

варіант 18. $z_1 = 3+3i$; $z_2 = 2+2i$; $n = 3; m = 3.$

варіант 19. $z_1 = 5+3i$; $z_2 = 2+5i$; $n = 3; m = 2.$

варіант 20. $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 3+4i$; $n = 4; m = 2.$

варіант 21. $z_1 = 1-3i$; $z_2 = 2+6i$; $n = 2; m = 2.$

варіант 22. $z_1 = 4+3i$; $z_2 = 1+2i$; $n = 3; m = 2.$

варіант 23. $z_1 = 4-2i$; $z_2 = 2+3i$; $n = 2; m = 3.$

варіант 24. $z_1 = 5+i$; $z_2 = 2+4i$; $n = 3; m = 2.$

варіант 25. $z_1 = 9+3i$; $z_2 = 6+i$; $n = 2; m = 2.$

варіант 26. $z_1 = 3+5i$; $z_2 = 2+4i$; $n = 3; m = 2.$

варіант 27. $z_1 = 8+2i$; $z_2 = 2+6i$; $n = 4; m = 4.$

варіант 28. $z_1 = 3+5i$; $z_2 = 6+4i$; $n = 3; m = 2.$

варіант 29. $z_1 = 6+3i$; $z_2 = 3+2i$; $n = 4; m = 2.$

варіант 30. $z_1 = 3-2i$; $z_2 = 5-12i$; $n = 3; m = 2.$

2. Завдання. Записати задані числа z_1 і z_2 у тригонометричній та показниковій формах.

1.	$z_1 = 2+i, \quad z_2 = 3\sqrt{3} - i\sqrt{3}.$	2.	$z_1 = 1-i, \quad z_2 = \dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)}{2}.$
3.	$z_1 = -1+3i, \quad z_2 = \dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}.$	4.	$z_1 = -i, \quad z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$
5.	$z_1 = 5-4i, \quad z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$	6.	$z_1 = 7+i, \quad z_2 = 1+i\sqrt{3}.$
7.	$z_1 = 2-i, \quad z_2 = 1+i.$	8.	$z_1 = 4-5i, \quad z_2 = \sqrt{3}+i.$
9.	$z_1 = 2, \quad z_2 = \dfrac{(\sqrt{3}+i)}{2}.$	10.	$z_1 = -5i, \quad z_2 = -\sqrt{3}+i.$

11.	$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = -i\sqrt{3}.$	12.	$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}.$
13.	$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = -i\sqrt{2}.$	14.	$z_1 = 3 - 5i, \quad z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}.$
15.	$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = \sqrt{6} + i\sqrt{6}.$	16.	$z_1 = 4 + 2i, \quad z_2 = 5 + 5i.$
17.	$z_1 = -6i, \quad z_2 = \sqrt{5} + i\sqrt{5}.$	18.	$z_1 = 7 + 4i, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i.$
19.	$z_1 = -3 + i, \quad z_2 = 2 - 2i.$	20.	$z_1 = 1 + 8i, \quad z_2 = \dfrac{(-\sqrt{3} + i)}{2}.$
21.	$z_1 = 5, \quad z_2 = \dfrac{(\sqrt{3} + i)}{2}.$	22.	$z_1 = -7i, \quad z_2 = \dfrac{(\sqrt{3} - i)}{2}.$
23.	$z_1 = 7 + 2i, z_2 = 3 - 3i.$	24.	$z_1 = 3 - 6i, \quad z_2 = \sqrt{5} + i\sqrt{5}.$
25.	$z_1 = 4 + 6i, \quad z_2 = 2 + 2i.$	26.	$z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}.$
27.	$z_1 = -2 - 5i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i.$	28.	$z_1 = 3, \quad z_2 = -2\sqrt{3} - 2i.$
29.	$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = \dfrac{\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{2}.$	30.	$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = 3 - 3i\sqrt{3}.$

3. Завдання. Поновити диференційовану функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за відомою уявною або дійсною частиною

варіант 1. а) $u = x^2 - y^2$, б) $v = e^x(\cos y + \sin y)$.

варіант 2. а) $u = x^3 - 3xy^2$, б) $v = e^y \cos x$.

варіант 3. а) $u = e^y \cos x$, б) $v = 2xy + 2y$.

варіант 4. а) $u = \cos 2x \cdot ch2y$, б) $v = y^2 - x^2 + 2xy$.

варіант 5. а) $u = x^3 - 3xy^2 + y^3$, б) $v = \cos y \cdot shx$.

варіант 6. а) $u = y^2 - x^2$, б) $v = e^{-y}\cos x$.

варіант 7. а) $u = 2xy$, б) $v = 2^x \cos(y\ln 2)$.

варіант 8. а) $u = \sin x \cdot shy$, б) $v = x^2 - y^2 + 2xy$.

варіант 9. а) $u = -2xy$, б) $v = e^{-y}\sin x$.

варіант 10. а) $u = \cos x \cdot chy$, б) $v = x^2 - y^2$.

варіант 11. а) $u = e^x \sin y$, б) $v = 3xy^2 - y^3$.

варіант 12. а) $u = 2x - 1$, б) $v = e^{-2x}\sin 2y$.

варіант 13. а) $u = y^3 - 3x^2 y$, б) $v = 2^x \sin(y\ln 2)$.

варіант 14. а) $u = \sin x \cdot chy$, б) $v = x^3 - 3xy^2$.

варіант 15. а) $u = e^x \cos y$, б) $v = -2xy$.

варіант 16. а) $u = 3xy^2 - x^3$, б) $v = \cos x \cdot shy$.

варіант 17. а) $u = 2^x \cos(y\ln 2)$, б) $v = x^2 - y^2 + 5$.

варіант 18. а) $u = x^3 - 3xy^2 + 2$, б) $v = e^x(\cos y - \sin y)$.

варіант 19. а) $u = x^2 - y^2 - 2xy$, б) $v = \sin 2x \cdot sh2y$.

варіант 20. а) $u = e^{2y}\sin 2x$, б) $v = 3x^2 y - y^3 + 5y - 4$.

варіант 21. а) $u = 2^x \sin(y\ln 2)$, б) $v = y^2 - x^2 - y$.

варіант 22. а) $u = x^2 + 2x - y^2$, б) $v = \cos 3y \cdot ch3x$.

варіант 23. а) $u = e^x(\cos y - \sin y)$, б) $v = x + y$.

варіант 24. а) $u = \sin y \cdot chx$, б) $v = x^2 + 2x - y^2$.

варіант 25. а) $u = y^2 - x^2 + 2$, б) $v = \sin 3x \cdot sh3y$.

варіант 26. а) $u = x^2 - y^2 + 2xy$, б) $v = -\sin y \cdot shx$.

варіант 27. а) $u = 2x - x^2 + 3$, б) $v = -e^x \sin y$.

варіант 28. а) $u=\sin 3x\cdot sh3y$, б) $v=x+y+x^2-y^2$.

варіант 29. а) $u=x^3-3xy^2+2y$, б) $v=e^y\cos x$.

варіант 30. а) $u=e^y\sin x$, б) $v=3x^2y-y^3+x-4y$.

4. Завдання. Обчислити інтеграли

1. $a)\int\limits_L \overline{z}dz$, де L: відрізок від $z_1=0$ до $z_2=1-i$; $б)\int\limits_0^i(\sin z+\cos z)dz$.

2. $a)\int\limits_L \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де L: верхнє напівколо $|z|=1$, обхід за годинниковою стрілкою; $б)\int\limits_{1-i}^{1+i}2zdz$.

3. $a)\int\limits_L z\cdot\overline{z}dz$, де L: верхнє напівколо $|z|=2$, обхід проти годинникової стрілки, $б)\int\limits_{-1}^{i}ze^{z^2}dz$.

4. $a)\int\limits_L \overline{z}dz$, де L: відрізок, що з'єднує $z_1=i$ та $z_2=1$, $б)\int\limits_0^{1+i}\cos zdz$.

5. $a)\int\limits_L(1-3i-\overline{z})dz$, де L: відрізок від $z_1=1+3i$ до $z_2=5-i$, $б)\int\limits_0^i z\sin zdz$.

6. $a)\int\limits_L \operatorname{Re} zdz$, де L: відрізок, що з'єднує $z_1=0$ до $z_2=2+i$, $б)\int\limits_{1-i}^{1+i}ze^z dz$.

7. $a)\int\limits_L zImzdz$, де L: $z=(1+i)t, 0\le t\le 2, б)\int\limits_{\pi+i}^{\frac{\pi}{2}}\cos zdz.$

8. $a)\int\limits_L e^{\mathrm{Re}\,z}dz$, де L: $z=(2+i)t, 0\le t\le 1, б)\int\limits_0^{1+i} z^3dz.$

9. $a)\int\limits_L \bar{z}dz$, де L: $y=x^2, 0\le x\le 1, б)\int\limits_1^i (2z^3-5z^4)dz.$

10. $a)\int\limits_L (1+\bar{z})dz$, де L: відрізок, шо з'єднує $z_1=i$ та $z_2=1, б)\int\limits_{-1-i}^{1+i}(2z+1)dz.$

11. $a)\int\limits_L Imz^2dz$, де L: $y=x^2, 0\le x\le 1, б)\int\limits_{1-i}^{0}(4z^3+z)dz.$

12. $a)\int\limits_L e^{\bar{z}}dz$, де L: відрізок, що з'єднує $z_1=0$ та $z_2=1+i, б)\int\limits_i^{2i} ze^{z^2}dz.$

13. $a)\int\limits_L ((Imz)^2-z-\bar{z})dz$, де L: $x=\dfrac{y^2-1}{2}$, $-1\le y\le 1;$ $б)\int\limits_0^i (z-1)e^{-z}dz.$

14. $a)\int\limits_L z\,\mathrm{Re}\,zdz$, де L: верхнє напівколо $|z|=1$, обхід за годинниковою стрілкою; $б)\int\limits_0^{1+i}\sin z\cos zdz.$

15. $a)\int\limits_L zImzdz$, де L: $y=x^2, 0\le x\le 1, б)\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2}dz.$

16. $a)\int\limits_L (Imz^2 - \mathrm{Re}^2 z)dz$, де L: $y = \dfrac{1}{x}, 1 \le x \le 3, б)\int\limits_1^i (z^2 - 2z)dz.$

17. $a)\int\limits_L (\mathrm{Re}\, z - \bar{z})dz$, де L: $y = x^2, 0 \le x \le 1, б)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (z + i)\cos z dz.$

18. $a)\int\limits_L (z^2 + z \cdot \bar{z})dz$, де L: верхнє напівколо $|z| = 1$, обхід проти годинникової стрілки, $б)\int\limits_0^i (z - i)e^{-z} dz.$

19. $a)\int\limits_L (z + \bar{z})dz$, де L: $x = y^2, -1 \le y \le 1, б)\int\limits_0^i (z + \cos z)dz.$

20. $a)\int\limits_L \mathrm{Re}\, z dz$, де L: $y = x^2, 0 \le x \le 2, б)\int\limits_{-i}^i (z - i)\cos z dz.$

21. $a)\int\limits_L (2i + 3z + z \cdot \bar{z})dz$, де L: праве напівколо $|z| = 1$, обхід проти годинникової стрілки, $б)\int\limits_{-i}^i \sin^2 z dz.$

22. $a)\int\limits_L (2\bar{z} + Imz^2)dz$, де L: $y = 3x, 0 \le x \le 1, б)\int\limits_0^i \sin 2z dz.$

23. $a)\int\limits_L (1 + i + \bar{z})dz$, де L: відрізок від $z_1 = 2 + 2i$ до $z_2 = 0$, $б)\int\limits_0^{1+i} (z - e^z)dz.$

24. $a)\int\limits_L \bar{z} dz$, де L: $z = 4\cos t + i\sin t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}, б)\int\limits_i^{1+i} (3z^2 - 2z)dz.$

25. $a)\int\limits_L e^{\bar{z}} dz$, де L: $y = -x, 0 \le x \le \pi, б)\int\limits_i^{1+i} (z - i)e^z dz.$

26. $a)\int\limits_L z\cdot\bar{z}dz$, де L: праве напівколо $|z|=1$, обхід проти годинникової стрілки, $б)\int\limits_0^{1+i} e^z dz.$

27. $a)\int\limits_L (2\bar{z}+Imz^2)dz$, де L: $y=2x^2, 0\le x\le 1, б)\int\limits_{-i}^{i}\cos^2 zdz.$

28. $a)\int\limits_L (4i-4\bar{z}+20)dz$, де L: відрізок, що з’єднує $z_1=5-i$ та $z_2=5+i$, $б)\int\limits_0^{i}\sin z\cos 3zdz.$

29. $a)\int\limits_L \bar{z}dz$, де L: $z=3\cos t+2i\sin t, 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}, б)\int\limits_{-1}^{1} ze^{z^2}dz.$

30. $a)\int\limits_L (1+2\bar{z})dz$, де L: $z=(1+i)t, -1\le t\le 1, б)\int\limits_0^{i}\sin z\cos zdz.$

5. Завдання. Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)$ по степенях z в заданому кільці

1.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2-z}, 0<\lvert z\rvert<1$	2.	$f(z)=\dfrac{z^2+3z-7}{z^3-3z^2+4}, 1<\lvert z\rvert<2$
3.	$f(z)=\dfrac{3}{z^2-z-2}, 1<\lvert z\rvert<2$	4.	$f(z)=\dfrac{2}{z^2+2z}, 0<\lvert z\rvert<2$
5.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}, 2<\lvert z\rvert<\infty$	6.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+5z+6}, 2<\lvert z\rvert<3$
7.	$f(z)=\dfrac{-1}{z^2-3z+2}, 1<\lvert z\rvert<2$	8.	$f(z)=\dfrac{2}{z^2+2z}, 2<\lvert z\rvert<\infty$

9.	$f(z)=\dfrac{-9}{z^3+3z^2-4},1<\lvert z\rvert<2$	10.	$f(z)=\dfrac{3z+3}{z^2+z-2},1<\lvert z\rvert<2$
11.	$f(z)=\dfrac{1-z}{z^2+z},0<\lvert z\rvert<1$	12.	$f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2},2<\lvert z\rvert<\infty$
13.	$f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2},1<\lvert z\rvert<2$	14.	$f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2},1<\lvert z\rvert<2$
15.	$f(z)=\dfrac{2-5z}{z^3+z^2-2z},1<\lvert z\rvert<2$	16.	$f(z)=\dfrac{1}{z^3+z^2},0<\lvert z\rvert<1$
17.	$f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z},0<\lvert z\rvert<1$	18.	$f(z)=\dfrac{2}{z^2-4z+3},1<\lvert z\rvert<3$
19.	$f(z)=\dfrac{6}{z^2-2z-8},2<\lvert z\rvert<4$	20.	$f(z)=\dfrac{2}{z^2+6z+8},2<\lvert z\rvert<4$
21.	$f(z)=\dfrac{9}{(z-1)^2(z+2)},1<\lvert z\rvert<2$	22.	$f(z)=\dfrac{2}{z^2-2z},0<\lvert z\rvert<2$
23.	$f(z)=\dfrac{2}{z^3-z},0<\lvert z\rvert<1$	24.	$f(z)=\dfrac{3}{z^2-z-2},1<\lvert z\rvert<2$
25.	$f(z)=\dfrac{3z-4}{z^3-3z^2+2z},1<\lvert z\rvert<2$	26.	$f(z)=\dfrac{4}{z^2-4z},4<\lvert z\rvert<\infty$
27.	$f(z)=\dfrac{8}{z^3-4z},0<\lvert z\rvert<2$	28.	$f(z)=\dfrac{2}{z^3-3z^2+2z},0<\lvert z\rvert<1$
29.	$f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z^3+2z^2+z},0<\lvert z\rvert<1$	30.	$f(z)=\dfrac{18}{z^3-9z},0<\lvert z\rvert<3$

6. Завдання. З′ясувати характер особливих точок функції $f(z)$ і знайти лишки в цих точках.

1.	$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4+2z^3+z^2}$	2.	$f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^4-3z^3+2z}$
3.	$f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^5}$	4.	$f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3+z^2}$
5.	$f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+4)}$	6.	$f(z)=\dfrac{chz}{(1-z^2)(z+1)}$
7.	$f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^4-z^3}$	8.	$f(z)=z^4\sin\dfrac{1}{z}$
9.	$f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$	10.	$f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^3(z-3)}$
11.	$f(z)=\dfrac{1}{z^4+z^2}$	12.	$f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}$
13.	$f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$	14.	$f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^4}$
15.	$f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2+9)}$	16.	$f(z)=\dfrac{z^2+z-1}{z^3-z^2}$
17.	$f(z)=\dfrac{1}{z^4+z^2}$	18.	$f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)}$
19.	$f(z)=\dfrac{1}{4z^3-z^5}$	20.	$f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z+i)^3}$
21.	$f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z^3}$	22.	$f(z)=(z-1)^2\sin\dfrac{1}{z-1}$
23.	$f(z)=\dfrac{1-e^z}{z^3}$	24.	$f(z)=\dfrac{z^6}{(z-1)^4}$

25.	$f(z)=\dfrac{\sin 2z}{z(z+1)^3}$	26.	$f(z)=\dfrac{2z^5}{(z-i)^3}$
27.	$f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$	28.	$f(z)=\dfrac{z^3}{z^4+1}$
29.	$f(z)=\dfrac{e^z}{z^4+z^3}$	30.	$f(z)=\dfrac{z}{(z-2)^2(z-1)}$

7. Завдання. Обчислити інтеграли за допомогою лишків

1. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2}\frac{z^3dz}{(z^2+1)^2}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z-2i\|=3}(z-2i)^3 ch\frac{1}{z-2i}dz$
2. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z-1\|=3}\frac{zdz}{(z+2)^2(z-1)}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2}(z+i)^2\sin\frac{1}{z+i}dz$
3. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z-3\|=3}\frac{zdz}{(z-4)^3(z-3)}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+1\|=1}(z+1)^3e^{\frac{1}{z+1}}dz$
4. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2}\frac{e^z dz}{z^4+2z^3}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=1}\frac{1-\cos\frac{1}{z}}{z}dz$
5. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+2i\|=4}\frac{z^2dz}{z^2+25}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2}\frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z}dz$
6. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+2i\|=3}\frac{\cos zdz}{z^4+4iz^3}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z\|=2}(z-i)^3\cos\frac{1}{z-i}dz$
7. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+2\|=2}\frac{(z+5)dz}{(z+2)^3(z-3)}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+2\|=1}(z+2)^3\frac{dz}{e^{z+2}}$
8. а)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+1\|=3}\frac{\sin zdz}{z^4+2z^3+z^2}$	б)	$\displaystyle\int\limits_{\|z+i\|=2}z^3ch\frac{1}{z}dz$

9. а) $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\frac{e^{2z}dz}{(z^2-1)^2}$	б) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}dz$
10. а) $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2}\frac{(2z+1)dz}{(z+1)^3(z-5)}$	б) $\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=1}(z-2i)^2\sin\frac{1}{z-2i}dz$
11. а) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{1+\sin z}{z^4}dz$	б) $\oint\limits_{\lvert z+4i\rvert=2}(z+5i)e^{\frac{1}{(z+5i)^2}}dz$
12. а) $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{z^4dz}{(z-3)^3(z+2)}$	б) $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=1}(z-1)^3\sin\frac{1}{z-1}dz$
13. а) $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3}\frac{\sin\pi z}{z^2-z}dz$	б) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}(z+1)e^{\frac{1}{z+1}}dz$
14. а) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3}\frac{dz}{(z+1)^3(z^2-16)}$	б) $\oint\limits_{\lvert z+4i\rvert=1}(z+4i)^2 sh\frac{1}{z+4i}dz$
15. а) $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\frac{e^{iz}dz}{(z-1)^3}$	б) $\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=1}(z-2i)^4\sin\frac{1}{(z-2i)^2}dz$
16. а) $\oint\limits_{\lvert z+2i\rvert=3}\frac{\sin 2z dz}{z^4+4iz^3}$	б) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}z^3 sh\frac{1}{z}dz$
17. а) $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=1}\frac{e^z dz}{(z+1)^4}$	б) $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2}(z+2)^3\cos\frac{1}{z+2}dz$
18. а) $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1}\frac{(z+2)dz}{z(z-3)^2}$	б) $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=1}(z-2)^2\sin\frac{1}{z-2}dz$
19. а) $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=1}\frac{(z^2+1)dz}{(z+i)^3}$	б) $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3}(z-2i)e^{\frac{1}{(z-2i)^3}}dz$

20. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{e^z-1}{z^4-z^2}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2\rvert=1} \frac{1-\sin\frac{1}{z-2}}{z-2}dz$
21. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{1+\cos 3z}{z^3}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+i\rvert=2} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}dz$
22. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2\rvert=2} \frac{(\ln z+7)dz}{(z-3)^3}$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2\rvert=1} (z-2)^5 \sin\frac{1}{(z-2)^2}dz$
23. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+2\rvert=3} \frac{\sin(z+2)}{z^3+2z^2}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-3i\rvert=4} (z-3i)^2 \cos\frac{1}{z-3i}dz$
24. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2i\rvert=1} \frac{\cos^2 dz}{(z-2i)^3}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-i\rvert=1} (z-i)^3 ch\frac{1}{z-i}dz$
25. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+i\rvert=2} \frac{\cos z-1}{z^3(z-3)}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+3i\rvert=4} (z+3i)^2 sh\frac{1}{z+3i}dz$
26. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1\rvert=1} (z-1)^2 \sin\frac{1}{z-1}dz$
27. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1\rvert=2} \frac{e^{iz}dz}{(z-1)^4}$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+1\rvert=1} \frac{1+\cos\frac{1}{z+i}}{z+i}dz$
28. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+2\rvert=3} \frac{1-\cos z}{z^3+2z^2}dz$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=3} (z+2i)e^{\frac{1}{(z+2i)^2}}dz$
29. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-2i\rvert=2} \frac{(3-z)dz}{(z-1)^3(z+4)}$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z+i\rvert=1} (z+i)^3 sh\frac{1}{z+i}dz$
30. а) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{zdz}{(z^2+4)^2}$	б) $\displaystyle\int\limits_{\lvert z-1\rvert=2} (z-1)^5 \sin\frac{1}{(z-1)^2}dz$

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Валяшек В.Б., Каплун А.В., Кривень В.А., Ясній О.П. Теорія функцій комплексної змінної: конспект лекцій. Тернопіль: в-во ТНТУ, 2015. 87 с.
2. Гольдберг А.А., Шеремета М.М. Комплексний аналіз: навчальний посібник. Львів: Афіша, 2008. 203 с.
3. Краєвський В.О. Функції комплексної змінної: навчальний посібник. Вінниця: ВНТУ, 2013. 143 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2: учебное пособие для втузов в 2-х частях. Москва: "ОНИКС 21 век" "Мир и Образование", 2003, 304 с.

Додаткова:

5. Єжов С.М., Разумова М.А. Теорія функцій комплексної змінної: навчальний посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012. – 191 с.
6. Теорія функцій комплексної змінної: методичні вказівки до вивчення дисципліни „Вища математика" для студ. енергет. спец. усіх форм навчання / Уклад.: Є. В. Массалітіна, О. О. Кільчинський. Київ: НТУУ „КПІ", 2008, 54 с.
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В. Теорія функцій комплексної змінної. Інтегральні перетворення Фур'є і Лапласа: навчальний посібник. Львів: НУ «ЛП», 2007, 230 с.
8. Швачич Г. Г., Коноваленков В. С., Заборова Т. М. Вступ до теорії функцій комплексної змінної: навчальний посібник. Дніпропетровськ: НМетАУ, 2016, 33 с.

Зміст

ВСТУП …………………………………………………………......3

Тема 1. Комплексні числа ……………………………………………4

Тема 2. Функції комплексної змінної ……………………………...12

Тема 3. Похідна функції комплексної змінної ……………………17

Тема 4. Інтеграл від функції комплексної змінної ………………..20

Тема 5. Ряди з комплексними числами ……………………………27

Тема 6. Ряди Тейлора і Лорана ……………………………………..32

Тема 7. Обчислення лишків функцій. Застосування лишків до обчислення інтегралів ..……………………………………………..39

Завдання для виконання контрольної роботи ……………………..44

Список рекомендованої літератури ………………………………..57

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
модуль "Основи теорії функцій комплексної змінної"

Методичні рекомендації
до виконання самостійної роботи для здобувачів вищої освіти
освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 141
"Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка"
денної та заочної форм навчання

Укладачі:
Шебанін В'ячеслав Сергійович та ін.

Формат 60х84/16Ум. друк. арк. 2,0.
Тираж 50. Зам. №___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013